



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE
COLOMBIA

Estudio de los Aniones y el efecto Hall cuántico

Presentado por

Ludwing Marengo

Dirigido por

Diego Mauricio Gallego Mahecha

como requisito parcial para optar
al título de Físico

en la

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

8 de julio de 2014

Índice general

Índice general.	I
Índice de figuras.	III
Agradecimientos.	V
Resumen.	VII
Introducción	IX
1. El efecto Hall cuántico.	1
1.1. Del mundo clásico al mundo cuántico.	1
1.2. Efecto Hall cuántico entero.	4
1.2.1. El factor de llenado.	6
1.2.2. Incompresibilidad y cuantización.	7
1.3. El efecto Hall cuántico entero y los Aniones.	8
1.4. Entre la teoría y los experimentos.	13
1.4.1. Régimen Hall cuántico.	14
1.5. Observaciones.	14
2. El efecto Hall cuántico fraccional.	17
2.1. Magnetotransporte en el límite cuántico.	17
2.2. El problema de tres electrones bidimensionales en presencia de un campo magnético.	18
2.2.1. Centros de guía.	19
2.2.2. El comportamiento radial.	24
2.2.3. El problema de tres electrones.	27
2.3. Incompresibilidad en factores de llenado fraccional.	28
2.4. Generalización para N partículas.	30
2.4.1. Analogía con el plasma.	34
2.5. Cálculos variacionales.	35
2.6. Estados excitados.	36
2.7. Observaciones.	40
3. Aniones: La teoría del mundo bidimensional fraccional.	41
3.1. ¿Por qué es necesario espín fraccional?	41
3.2. ¿Por qué es necesaria una estadística fraccional?	42
3.2.1. El caso $d \geq 3$	44

3.2.2. El caso $d = 2$.	45
3.3. Realización dinámica de la teoría de Aniones.	47
3.3.1. Flujo magnético y momento angular.	47
3.3.2. El modelo “Tubo de flujo”.	49
3.4. Implementación física de la estadística fraccional.	52
3.4.1. El problema de dos Aniones libres.	53
4. Aniones en el efecto Hall cuántico fraccional.	59
4.1. Cálculo de la carga.	59
4.1.1. La fase de Berry.	60
4.2. Cálculo de la estadística.	62
4.3. Esquemas de jerarquía.	63
5. Conclusiones.	67
A. Cuantización de Landau.	69
A.1. Electrón sin espín.	69
A.2. Electrón con espín.	73
B. Algunas propiedades de los niveles de Landau más bajos.	77
B.1. Niveles de Landau más bajos para una partícula.	77
B.2. Ortonormalidad de la solución a la ecuación de movimiento para tres electrones bidimensionales en presencia de un campo magnético perpendicular.	79
Bibliografía	85

Índice de figuras

1.1. Realización experimental del efecto Hall	2
1.2. Curvas experimentales de resistencia Hall	6
1.3. Relación grafica de la energía del estado fundamental con respecto del factor de llenado	7
1.4. Potencial químico en función del factor de llenado	8
1.5. Geometría usada para la determinación de la resistividad transversal Hall	9
2.1. Curvas experimentales para el efecto Hall cuántico fraccional	18
2.2. Comparación grafica entre la solución de partícula libre y el problema interno de dos electrones	26
2.3. Momento angular y área efectiva para el problema de tres cuerpos	29
2.4. Construcción de una cuasipartícula	38
3.1. Posibles caminos para el intercambio entre partículas en tres y más altas dimensiones.	45
3.2. Posibles caminos para el intercambio entre partículas en dos dimensiones.	46
A.1. Movimiento orbital de un electrón en presencia de un campo magnético perpendicular	73

Agradecimientos.

Muchos podrán pensar que la vida de un físico es compleja en muchos aspectos, otros más magnánimos pensarían que debe ser en su mayoría simple, pero, simple o compleja, toda la esencia de un físico se conjura en la verdadera motivación impresa en los desafíos que la ciencia atribuye en sus mansedumbres servidores. Y ahí es cuando verdaderamente entendemos que el progreso de la ciencia no ha sido solamente una frívola casualidad de la vida, sino es el resultado una serie de aflicciones impuestas en los científicos por parte de personas que hacen que se supere cualquier tribulación científica, y que gracias a estos detalles, estos han forjado la suficiente capacidad para superar con éxito las responsabilidades asignadas.

Quiero agradecer de la manera más sincera a mi mamá por ser la persona que me ha hecho entender con claridad la motivación del ser físico, sin embargo, agradezco de igual forma a todas y todos los que con alguna minúscula pincelada contribuyeron en la realización de este trabajo.

Resumen.

Se estudian las características más importantes del efecto Hall cuántico entero y fraccionario, además, se analiza en detalle los conceptos fundamentales de la teoría de Aniones. En particular se muestra que el efecto Hall cuántico es un sistema bidimensional incompresible, cuya resistencia Hall es cuantizada en números enteros y fraccionales.

Para el efecto Hall cuántico se ilustra el transporte electrónico en un sistema de dos dimensiones, con el objetivo de mostrar las nuevas propiedades encontradas en este efecto. Para la teoría de Aniones, se estudian las diferencias dinámicas y estadísticas entre sistemas de dos y tres dimensiones.

Finalmente se muestra que los Aniones describen los estados excitados y los diferentes factores de llenado en el efecto Hall cuántico fraccionario.

Introducción

El efecto Hall cuántico es uno de los fenómenos más sobresalientes y estudiados del mundo de dos dimensiones. Este efecto se caracteriza por mostrar valores discretos en la resistencia transversal o resistencia Hall. La cuantización de la resistencia Hall puede darse en números enteros o fraccionarios, de ahí, que exista el efecto Hall cuántico entero y el efecto Hall cuántico fraccional. Sin importar que el número que determina la cuantización sea entero o fraccional, una cualidad importante de las dos versiones del efecto Hall es la conducción sin pérdida de energía cuando el sistema se encuentra en un “plateau”, o sea, la zona donde la resistencia es constante en función de la temperatura. Este comportamiento se debe a que el potencial químico permanece constante en estas mesetas, de ahí, que el efecto Hall cuántico (entero ó fraccional) sea catalogado como un sistema incompresible.

La historia del efecto Hall cuántico comenzó en 1980 cuando Klitzing [1] descubrió que la resistencia Hall se cuantizaba en factores de llenado enteros, a diferencia del comportamiento lineal observado en el efecto Hall clásico. Este comportamiento fue explicado en función del problema de Landau [1]. En 1982 Tsui y Stomer [2] descubrieron que la resistencia Hall se cuantizaba en un factor de llenado $1/3$. Lo que hoy se conoce como efecto Hall cuántico fraccional. Este nuevo comportamiento llevó a pensar que la explicación mediante el problema de Landau no era suficiente para analizar este fenómeno. En 1983 Laughlin [3] solucionando la ecuación de movimiento para tres electrones en un campo magnético perpendicular a su movimiento restringido a dos dimensiones, demostró que los estados electrónicos poseían un factor de llenado $1/3$. Teniendo en cuenta esto, Laughlin [4] logró generalizar este particular comportamiento proponiendo una función de onda variacional para el estado fundamental y los primeros estados excitados, probando que esta se adecuaba a las exigencias variacionales solamente cuando el factor de llenado existe como un número fraccional. Este nuevo estado electrónico posee cualidades interesantes como carga y espín fraccional. En los años siguientes la atención se centró en demostrar la validez física y matemática de la función de onda de Laughlin [5, 6, 7].

Por otra parte, los Aniones son partículas que describen fenómenos observados en un mundo de dos dimensiones. Estas partículas tienen la característica de tener carga y

espín fraccional, además, su estudio estadístico solo puede ser hecho mediante una estadística cuyo parámetro sea igualmente fraccional. Este fenómeno plantea que bajo ciertas circunstancias el formalismo de estudio estadístico puede realizarse mediante la estadística de Bose –Einstein ó la Fermi –Dirac.

Al mismo tiempo que se descubrió el efecto Hall cuántico fraccional los Aniones aparecieron. Wilczek [8, 9] demostró que los valores de momento angular de espín para una partícula cargada orbitando alrededor de un flujo magnético (el cual es el modelo dinámico de un Anión) son fraccionales. Así mismo, concluyó que la estadística para estas nuevas partículas debería ser reconsiderada. Este problema fue solucionado por Leinns y Myrheim [10] estableciendo que el grupo adecuado para esta nueva estadística debe ser el grupo de Braid.

Con esto en mente, el objetivo de este trabajo es mostrar que los Aniones pueden describir el efecto Hall cuántico, y que de hecho, es la teoría adecuada para describir el estudio de las nuevas propiedades del efecto Hall cuántico fraccionario.

La explicación del efecto Hall cuántico mediante la teoría de Aniones fue hecha por Arovas, Schrieffer y Wilczek [11] calculando la fase de Berry a los estados excitados de Laughlin, probando que la estadística y la carga es Anionica. Al mismo tiempo Halperin [12, 13] obtuvo estados para el efecto Hall cuántico fraccional con diferente factor de llenado excitando los estados fundamentales de Laughlin, Halperin justifico que las excitaciones sobre estos estados deben tener las mismas características que posee una partícula en un campo magnético, pero, con diferente factor de llenado.

La teoría de Aniones, y los Aniones en sí, han encontrado así mismo espacio para ser aplicadas en variadas ramas de la física y las matemáticas como son: superconductividad y superconductividad de alta temperatura crítica [14, 15, 16, 17], teoría cuántica de campos con la construcción de Chern- Simons [18], problemas de estadística cuántica con el estudio del gas ideal de Aniones [19, 20], problemas estadísticos en agujeros negros [21], lo que los hace un campo de estudio altamente activo.

El trabajo está organizado de la siguiente manera: En el primer capítulo se introduce el efecto Hall clásico y su contraparte cuántica, restringiéndonos al efecto entero, estudiando la cuantización de Landau. El segundo capítulo estará dedicado al efecto Hall cuántico fraccional, siguiendo en detalle los argumentos expuestos por Laughlin para obtener la función de onda variacional para el estado fundamental, y observando que este nuevo estado posee características particulares en comparación al comportamiento dinámico observado en el régimen entero. En el tercer capítulo se introducen los Aniones, exponiendo los argumentos encontrados por Wilczek a cerca del particular comportamiento del mundo bidimensional. En el cuarto capítulo demostraremos que los estados excitados de Laughlin son en realidad Aniones. El último capítulo está dedicado a las conclusiones.

Para cumplir con éxito el objetivo propuesto en este trabajo, centraremos nuestro análisis en el estudio detallado de las referencias [3, 4, 8, 9].

Capítulo 1

El efecto Hall cuántico.

Aunque, el estudio y desarrollo del mundo de los semiconductores se ha enfocado en el avance de las aplicaciones tecnológicas, en 1980 estos lograron aportar un descubrimiento fundamental en física [1]. La realización de medidas experimentales sobre transistores de Silicio y Ástato de Galio llevaron al físico alemán Klaus Von Klitzing a descubrir el efecto Hall cuántico [22]. Este particular efecto se caracteriza por tener valores discretos en la resistencia Hall, a diferencia del comportamiento lineal observado en el efecto Hall clásico [23]. En este capítulo estudiaremos las características más importantes del efecto Hall cuántico entero y mostraremos la relación existente con los Aniones en la derivación de la resistividad Hall.

1.1. Del mundo clásico al mundo cuántico.

No se podría comenzar el estudio del efecto Hall cuántico sin antes revisar su presentación más simple y sencilla. El efecto Hall clásico, y en general cualquier presentación de este efecto, consiste en el particular comportamiento de la conducción eléctrica en los metales, cuando la corriente interactúa con un campo magnético, creando exceso de carga en los bordes de la muestra [23].

Consideremos una placa metálica por la que circula una corriente en la dirección y , la cual interactúa con un campo magnético perpendicular. Escojamos la dirección z como sentido de aplicación del campo magnético. El efecto producido por la interacción del campo magnético con la corriente crea una diferencia de potencial transversal como se muestra en la figura 1.1, debido al exceso de carga acumulada en los bordes de la

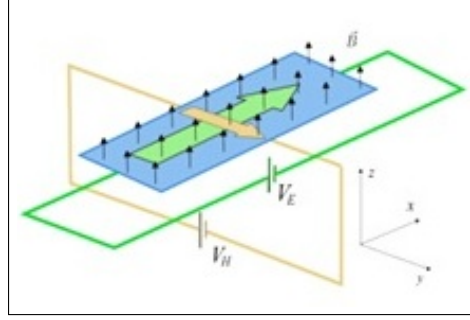


FIGURA 1.1: Montaje esquemático de realización experimental del efecto Hall. La fuerza de Lorentz producida por el campo magnético crea un exceso de carga en los bordes de la muestra. Como resultado se obtiene un potencial V_H derivado del exceso de carga [24].

placa. Cuando el estado estacionario es alcanzado, aunque, el movimiento de los electrones conserva la dirección original, el campo eléctrico transversal sigue existiendo. Para su caracterización experimental se mide la resistencia Hall. La resistencia es derivada teniendo en cuenta que la fuerza de Lorentz producida por el campo magnético contrarresta la fuerza producida por el gradiente del potencial, con esto, la resistencia está dada por [23]:

$$R_H = \frac{V_H}{i} = \frac{B}{\rho e c}, \quad (1.1)$$

donde ρ es la densidad electrónica. La ecuación (1.1) expresa la dependencia de la resistencia Hall con respecto del campo magnético.

Una de las características importantes del efecto Hall son sus propiedades geométricas. Ya que la relación existente entre las componentes longitudinales y transversales de resistividad y campo eléctrico se expresan mediante el tensor de conductividad dado por:

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Para calcular las componentes del tensor se debe tener en cuenta desde cual sistema de referencia se miden los campos electromagnéticos. Desde el sistema de laboratorio los campos electromagnéticos medidos son $\vec{E} = E\hat{j}$ y $\vec{B} = B\hat{k}$. En el sistema de referencia del electrón, el cual se mueve con velocidad \vec{v} los campos son:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{B} \quad \vec{B} = -\frac{1}{c}\vec{v} \times \vec{E}, \quad (1.3)$$

teniendo en cuenta la corriente $\vec{J} = -ne\vec{v}$, el campo eléctrico se puede reescribir como

$$\vec{E} = -\frac{1}{nec}\vec{J} \times \vec{B}. \quad (1.4)$$

Definiendo la ley de Ohm en forma tensorial

$$E_i = \rho_{ij} J^j, \quad (1.5)$$

donde i e j suman sobre las tres componentes espaciales. Con la ecuación (1.4) es factible hacer una identificación de las componentes del tensor resistividad que vienen dadas por [25]:

$$\rho_{ij} = \frac{B}{nec} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Si se tiene en cuenta que el sistema responde linealmente, el tensor de conductividad será el inverso del tensor de resistividad, el cual relaciona las componentes de corriente y campo eléctrico

$$J_i = \sigma_{ij} E^j, \quad (1.7)$$

cuyas componentes son:

$$\sigma_{ij} = \frac{nec}{B} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Se puede observar que las componentes diagonales de los tensores resistividad y conductividad son nulas, lo que refleja la ausencia de impurezas en la muestra. Además, estos dos tensores manifiestan un comportamiento extraño pero sorprendente. El sistema muestra aislamiento ya que $\sigma_{xx} = 0$, aunque, exhibe un comportamiento semejante al de un conductor perfecto debido a que $\rho_{xx} = 0$. La aplicación más importante del efecto Hall clásico es la determinación del signo y densidad de los portadores de carga, así, como la de obtener medidas de magnetización en diferentes materiales [23, 25].

Desde su descubrimiento a principios del siglo pasado por Edwin Hall, el efecto Hall clásico se manifestó en placas de oro a temperatura ambiente, sometidas a campos magnéticos de un Tesla. Sin embargo, a principios de los setenta los físicos se intriguaron en la consecuencia surgida de llevar este comportamiento a condiciones extremas (temperaturas bajas, campos magnéticos grandes). Para esto, se sustituyeron las placas de oro por superficies de separación entre semiconductores, además, se fijó un rango de temperaturas inferiores a un Kelvin y campos magnéticos de hasta treinta Tesla. El resultado de todo este cambio conllevó a observar el efecto Hall en su manifestación cuántica, revelando un nuevo fenómeno del mundo mesoscópico observado desde un mundo macroscópico.

1.2. Efecto Hall cuántico entero.

Los cambios realizados en los mecanismos experimentales del efecto Hall llevaron a K. Von Klitzing [26] en 1980 a descubrir que la resistencia Hall no depende linealmente del campo magnético, en cambio, la dependencia está dada en función de constantes universales. Además, la relación funcional no es lineal ni continua, en vez de eso, presenta una serie de saltos. En lo que sigue describiremos un análisis teórico con el objetivo de entender los resultados obtenidos por Klitzing.

Absolutamente todo el estudio del efecto Hall cuántico entero es enmarcado por el análisis de los niveles de Landau. Los niveles de Landau surgen de la solución de la ecuación de movimiento para un electrón en presencia de un campo magnético perpendicular a su dirección de movimiento, cuyo Hamiltoniano sin espín está dado por:

$$H = \frac{1}{2m_e} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2. \quad (1.9)$$

Básicamente, los niveles de Landau son un espectro de energía discreto análogo a los niveles de energía del oscilador armónico unidimensional que ostenta la forma

$$\xi_{n,k_z,s_z} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e}, \quad (1.10)$$

aquí n representa el nivel de Landau, $\omega_c = \frac{eB}{\hbar c}$ es la frecuencia de ciclotrón, m_e es la masa del electrón y k_z es un número continuo asociado al valor del momento en la dirección z . Este espectro es obtenido de la solución de la ecuación de un oscilador armónico trasladado una distancia x_0 dada por:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m_e} + \frac{m_e \omega_B^2}{2} (x - x_0)^2 \right) \bar{\varphi}(x) = \varepsilon \bar{\varphi}(x), \quad (1.11)$$

con $x_0 = \frac{\hbar c k_y}{eB}$ donde $k_y = \frac{2\pi}{L_y} n$. La solución, además, de mostrar la discretización de la energía del electrón, muestra que el movimiento es semejante a una órbita de ciclotrón (cicloide). Algo interesante de la cuantización de Landau se refleja en el dejeneramiento de sus niveles, ya que, a cada nivel se le asocia un estado de flujo cuántico, y así, el dejeneramiento de los niveles va como la razón entre el número de flujos generados en los estados con respecto al flujo cuántico fundamental, es decir,

$$\varrho = \frac{BL_x L_y}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (1.12)$$

donde $\Phi_0 = hc/e$. Sin embargo, el estudio detallado de estos niveles es el espíritu del apéndice A.

Supongamos que existe un sistema electrónico bidimensional el cual interactúa con un campo magnético normal a su superficie. Acto seguido, la interacción del sistema con el campo hace que los electrones se muevan orbitalmente con una frecuencia de ciclotrón. El espectro de energía asociado al movimiento de los electrones está expresado como:

$$\xi_{n,k_z,s_z} = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}, \quad (1.13)$$

donde m^* es la masa efectiva, por ejemplo para el AsGa $m^* = 0,37m_e$ [1]. La ecuación (1.13) se conoce como niveles de Landau A, siendo obtenidos de la solución del oscilador armónico unidimensional desplazado una distancia x_0 .

El dejeramiento de cada nivel de Landau en la ecuación (1.13) se relaciona con el número de puntos centrales x_0 encontrados en una muestra de dimensiones L_x, L_y [1]. Dada la cuantización de k_y , cada punto central en la muestra se encuentra separado de otro punto vecino una distancia:

$$\Delta x_0 = \frac{\hbar c}{eB} \Delta k_y = \frac{\hbar c}{eB} \frac{2\pi}{L_y} = \frac{hc}{eBL_y}, \quad (1.14)$$

de tal manera que en un ancho L_x se pueden encontrar $\varrho_0 = \frac{L_x}{\Delta x_0} = \frac{eBL_x L_y}{hc} = \frac{BL_x L_y}{\Phi_0}$ puntos centrales, coincidiendo con el dejeramiento de los estados de flujo generados en la muestra de igual manera que se muestra en el apéndice A. Con esto, el dejeramiento por unidad de área es:

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{L_x L_y} = \frac{eB}{h}, \quad (1.15)$$

mostrando total independencia de los parámetros propios del semiconductor.

La relación entre los niveles de Landau y la resistencia Hall se evidencia en la densidad electrónica del sistema. De manera que para el i -ésimo nivel de Landau que se encuentra completamente ocupado, la densidad de la muestra toma la forma $\rho = i\varrho$, con lo cual la resistencia Hall (1.1) para un nivel completamente ocupado está dado por:

$$R_H = \frac{B}{i\varrho e} = \frac{h}{ie^2}. \quad (1.16)$$

La ecuación (1.16) describe los pasos encontrados por Klitzing en la resistencia Hall, estos pasos se muestran en la figura 1.2. La densidad de estados de energía se representa por una función delta asociada a cada nivel, cuyo peso asignado es $\frac{L_x L_y}{\varrho}$ (ver [27] y referencias allí citadas).

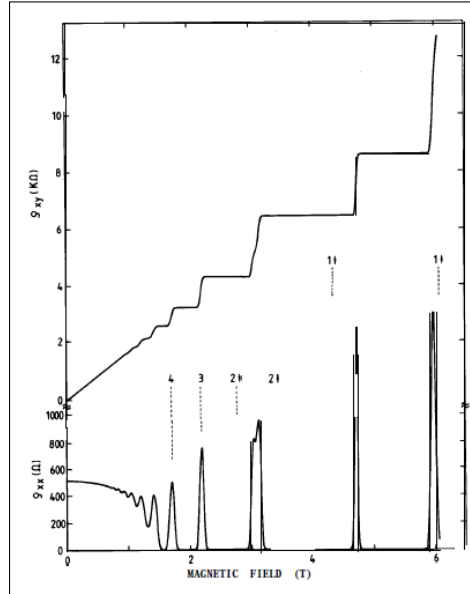


FIGURA 1.2: Curvas experimentales de resistencia Hall $R_H \approx \rho_{xy}$ y resistividad transversal ρ_{xx} para una muestra en función del campo magnético aplicado, con una densidad de transporte electrónico constante, con un voltaje de entrada $V_g = 0$. La temperatura de la muestra es de alrededor de $8mK$ [1].

1.2.1. El factor de llenado.

Los resultados obtenidos por Klitzing muestran que cuando el sistema se encuentra en una meseta o “Plateau”¹ el transporte electrónico en el medio no posee disipación, es decir, la conducción se realiza sin pérdida de energía, debido a que $\vec{E}_H \cdot \vec{J} = 0$. Pero, estas singulares cualidades son posibles solamente si el sistema es incompresible.

Para analizar esto en más detalle, definamos primero una cantidad que será muy útil para mostrar porque la incompresibilidad es necesaria para la observación de las particulares características del efecto Hall cuántico.

El factor de llenado ν provee una adecuada escala de medida de la densidad electrónica del sistema [27], analíticamente se define como $\nu = \frac{eB}{h} \rho$, así por ejemplo, cuando $\nu = 1$ todos los estados en el sistema se encuentran en el nivel de Landau $n = 0$, desde luego, cuando $\nu = 2$ todos los estados se encuentran en $n = 1$ y así sucesivamente. El factor de llenado prevalecerá en el análisis y caracterización del régimen Hall cuántico, además de las nuevas propiedades del efecto Hall fraccional.

¹Por definición un “Plateau” es la zona donde la resistencia del sistema se encuentra cuantizada.

1.2.2. Incompresibilidad y cuantización.

La gráfica de la energía del estado fundamental de los electrones no interactuantes en el sistema bidimensional (el cual en realidad es un gas electrónico) contra el factor de llenado mostrada en la figura 1.3 consiste de una serie de funciones lineales cuya pendiente se incrementa a medida que el sistema ostenta valores enteros de factor de llenado.

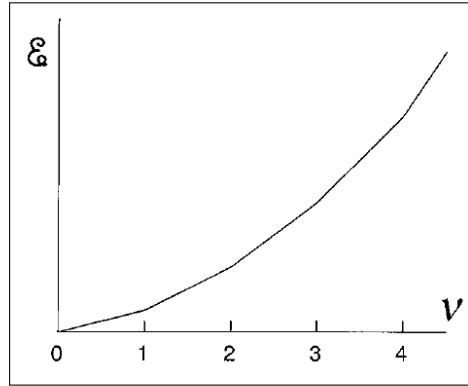


FIGURA 1.3: Relación gráfica de la energía del estado fundamental de un sistema de electrones no interactuantes en función del factor de llenado. Se observa un incremento en la pendiente de cada trozo a medida que el sistema encuentra factores de llenado enteros [27].

Este comportamiento se debe a la continua inyección de electrones en el sistema, conllevando a que los niveles de Landau se llenen, así que, cuando un nivel n de Landau cuya energía es $\hbar\omega_c (n + \frac{1}{2})$ se llena completamente, los electrones deben ubicarse en un nivel superior. Por tanto, los electrones requerirán una energía $\hbar\omega_c (n + \frac{3}{2})$ para ubicarse en el siguiente nivel, de ahí es sencillo concluir que los electrones necesitan una cantidad $\hbar\omega_c$ para poder acceder al siguiente nivel, evidenciando el aumento de la pendiente a medida que aumenta el factor de llenado y las discontinuidades presentes en la gráfica [27].

Anexo a las discontinuidades presentadas en la energía del estado fundamental, es posible obtener información adicional del estado fundamental con respecto del factor de llenado. Debido a que estamos trabajando en condiciones extremas (temperaturas bajas, campos magnéticos grandes) se puede evaluar el potencial químico μ en la manera:

$$\mu = \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial N} \right)_B, \quad (1.17)$$

el cual mide la resistencia de un sistema a la inyección de partículas [28]. La existente relación entre el potencial químico y el número de partículas se refleja en el aumento del

potencial a medida que se encuentran discontinuidades en la energía fundamental de los electrones no interactuantes. Es decir, cada vez que se encuentran factores de llenado enteros en el sistema debido a que la pendiente aumenta el potencial químico tiene un comportamiento semejante al mostrado en la figura 1.4.

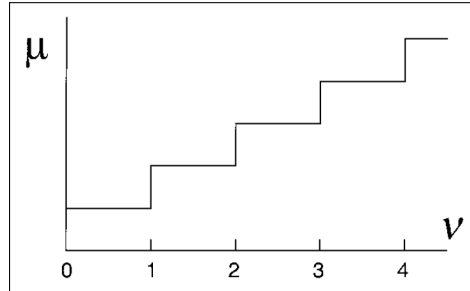


FIGURA 1.4: Potencial químico en función del factor de llenado para una muestra con densidad y campo magnético constante. A medida que el factor de llenado aumenta el potencial químico también lo hace, además como el potencial se mantiene constante la compresibilidad en cada factor de llenado se anula [29].

El aumento del potencial químico induce la desaparición de la compresibilidad en el sistema, ya que la variación del potencial con respecto a la densidad electrónica en cada factor de llenado es nula. De hecho, el factor de compresibilidad se anula ya que por definición:

$$\kappa = \rho^2 \frac{\partial \mu}{\partial \rho}. \quad (1.18)$$

La compresibilidad es la encargada de caracterizar las excitaciones observadas arriba y abajo del nivel de Fermi con el objetivo de generar una longitud de densidad de perturbación en el sistema, pero, estas excitaciones son creadas con valores de energía infinitesimales [27]. Por tanto, teniendo en cuenta que la compresibilidad desaparece en factores de llenado entero y que existe una diferencia de energía finita $\hbar\omega_c$ entre un nivel completamente lleno y el siguiente, un gas electrónico bidimensional se puede clasificar como un sistema incompresible, lo que sostiene la idea de la conducción sin disipación cada vez que se encuentra en un factor de llenado entero, debido a que el potencial químico permanece constante en estos niveles.

1.3. El efecto Hall cuántico entero y los Aniones.

Hasta el momento hemos evadido el papel que juega el campo eléctrico transversal generado del arrastre de los electrones a los extremos de la muestra. Ahora, nos centraremos en ver qué papel juega y qué información adicional es extraída a partir de la interacción de este campo con el sistema. Aunque existe un tratamiento semiclásico

realizado por Girvin [25], seguiremos argumentos geométricos y de calibre en el mismo sentido de Laughlin [22] y Taylor [27] en lo que más adelante se convertirá en los argumentos básicos de la teoría de los Aniones.

En ausencia de impurezas en la muestra se puede calcular la corriente transportada por los electrones en el gas mediante el operador:

$$\vec{J} = -e \frac{\partial H}{\partial \vec{A}} = -\frac{e}{m^*} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right), \quad (1.19)$$

donde H posee la misma forma mostrada en la ecuación (1.9). Si se realiza una transformación del potencial vectorial:

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A} - \vec{a}, \quad (1.20)$$

con $\vec{a} = \frac{q\Phi_0}{L_y} \hat{j}$, donde $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$ es el flujo cuántico y q es un parámetro adimensional. \vec{a} es un potencial vectorial ficticio, es decir, no corresponde a ningún campo magnético real, ya que $\vec{\nabla} \times \vec{a} = 0$. Sin embargo, se puede asociar a un flujo magnético Φ que atraviesa el centro de un anillo de longitud L_y , el cual posee un ancho L_x como se muestra en la figura 1.5.

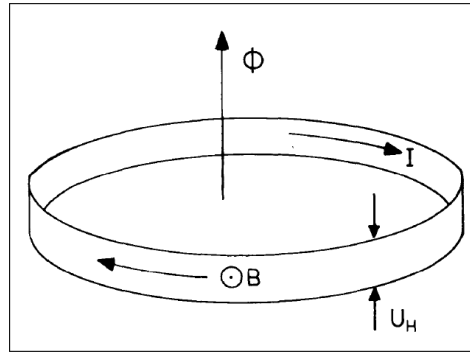


FIGURA 1.5: Geometría usada para la determinación de la resistividad transversal Hall. Esta geometría es semejante a la de un Anión. El flujo que atraviesa el centro del anillo afecta las condiciones de contorno de la función de onda, agregando una fase [1].

Con el potencial vectorial transformado el Hamiltoniano para un electrón libre toma la forma

$$H(q) = \frac{1}{2m^*} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} - \frac{qe\Phi_0}{c L_y} \hat{j} \right)^2. \quad (1.21)$$

Con lo cual el operador de corriente alrededor de la dirección y es:

$$J_y(q) = -\frac{h}{m^* L_y} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} - \frac{qe\Phi_0}{c L_y} \hat{j} \right) \cdot \hat{j}, \quad (1.22)$$

que puede también ser escrito como

$$J_y(q) = -\frac{eL_y}{h} \frac{\partial H(q)}{\partial q}. \quad (1.23)$$

Con (1.23) se puede calcular la corriente que transporta cierto estado $|\varphi(\vec{r}, t)\rangle$ simplemente calculando el valor esperado en el estado deseado. Si el estado escogido para la evaluación transporta algún valor de corriente, la derivada del Hamiltoniano con respecto del número q debe ser diferente de cero. Por tanto, el espectro de energía podría depender del nuevo potencial vectorial \vec{a} , pero, hemos advertido que este es un potencial vectorial ficticio, es decir, se puede remover mediante una transformación de calibre. La solución para esta dicotomía es dada por la función de onda, porque el efecto de \vec{a} es precisamente agregarle una fase adicional a esta. La fase buscada es conocida como la fase de Aharonov–Bohm [30]:

$$\phi_{AB} = -\frac{e}{hc} \int \vec{a} \cdot d\vec{r}. \quad (1.24)$$

Integrando alrededor de la dirección y , la fase de Aharonov–Bohm es:

$$\phi_{AB} = 2\pi q. \quad (1.25)$$

Esta fase es adicionada al número de onda k_y cada vez que los electrones realizan una órbita de longitud L_y . Este comportamiento es semejante al producido por un flujo cuántico $\Phi = q\Phi_0$ que atraviesa el centro del anillo. La importancia de la fase de Aharonov–Bohm radica en su relación con el número de onda $k_y = \frac{2\pi}{L_y}i$, de hecho la solución de la dependencia del espectro de energía está en la correspondencia existente entre q e i , de ahí existen dos casos:

- q e i actúan ambos como números enteros: Esta condición no genera cambio alguno en el número de onda de la función de onda de los electrones, dejando inalteradas las condiciones de contorno del sistema.
- q actúa como un número entero pero i es fraccional: Esta condición hace que la fase de Aharonov–Bohm no avance 2π veces, instaurando que la función de onda sea multivaluada, lo que podría significar obtener información errónea del sistema.

Para evitar estos inconvenientes se ajusta el número de onda de tal manera que la fase aportada por \vec{a} sea removida sin importar como sea la coexistencia entre q e i . Por tanto,

los números de onda reajustados son:

$$k_{i,q} = \frac{2\pi(i-q)}{L_y}, \quad (1.26)$$

de la cual se puede concluir que \vec{a} cambia las condiciones de contorno del sistema, es decir, ahora se piensa en una función de onda asociada a los electrones no interactuantes, que posee un número de onda extraño generado por un potencial vectorial ficticio, con el único objetivo de preservar que la función sea unievaluada y que esto prevalezca inalterado aunque en el sistema esté presente un flujo cuántico $\Phi = q\Phi_0$.

El propósito de contemplar la relación entre q e i va encaminada a la observación del cambio generado en el sistema cuando se incrementa el flujo adiabáticamente², además, de la observación de los cambios encontrados en presencia del campo eléctrico transversal creado por el voltaje Hall. Teniendo en cuenta nuestra geometría (figura 1.5) el sistema es adiabático en el sentido que el tiempo de actuación del flujo cuántico que ingresa en el anillo es mucho mayor que el tiempo que tarda un electrón en realizar una revolución a través del anillo [32].

El cambio que genera la inserción del flujo en el anillo se contempla en la traslación de los puntos centrales x_0 a medida que en el sistema opera el flujo adiabáticamente, se puede mostrar que la ecuación del oscilador armónico ec.(1.11) con este nuevo potencial se encuentra trasladada a una posición $x_k = x_0 + \frac{q\Phi_0}{BL_y}$ [27], de fortuna que los estados antes y después de aplicado el flujo prevalecen sin cambio alguno, debido al previo ajuste del número de onda.

En presencia del campo eléctrico transversal (E_H) la ecuación de movimiento para los electrones no interactuantes en el gas toma la forma

$$H(q)\varphi(x, y) = \left(\frac{1}{2m^*} \left(\hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + eE_H x \right) \varphi(x, y) = \varepsilon \varphi(x, y). \quad (1.27)$$

Explícitamente, si proponemos una solución $\varphi(x, y) = e^{ik_y y} \phi(x)$ y completamos el cuadrado el Hamiltoniano (1.27) se convierte en

$$\begin{aligned} H(q)\phi(x) = & \left(\frac{1}{2m^*} p_x^2 + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 \left(x + \left(x_0 + \frac{q\phi_0}{BL_y} + \frac{v_d}{\omega_c} \right) \right)^2 \right) \phi(x) \\ & - \left(\frac{1}{2} m^* v_d^2 - \hbar k v_d + \frac{eE_H q\phi_0}{B L_y} \right) \phi(x) \end{aligned} \quad (1.28)$$

²La física clásica plantea el concepto de adiabático como la variación temporal de una variable dinámica, con la particularidad que la variación es tan “lenta” o suave que se puede considerar a la cantidad como una constante de movimiento en el sistema durante todo el tiempo de ejecución del proceso físico [31].

donde $v_d = cE_H/B$ es la velocidad de arrastre de los electrones hacia los bordes del anillo. Vemos entonces que el campo eléctrico además de forjar el arrastre de las orbitas de movimiento, instaura una nueva traslación de los puntos centrales a una nueva posición

$$x_{kn} = x_k + \frac{v_d}{\omega_c}. \quad (1.29)$$

Otra consecuencia de la presencia del campo eléctrico de Hall es el cambio en el espectro de energía, debido a que el Hamiltoniano es proporcional a las nuevas posiciones centrales (1.29), de tal manera, que los estados propios del Hamiltoniano transportan corriente.

Las sucesivas traslaciones a las que son sometidos los electrones en el gas, reflejan una transferencia de electrones por nivel de Landau ocupado. El trabajo necesario para ceder este electrón es $\Delta\varepsilon = ineE_H L_x$, donde i es el nivel de Landau que se encuentra completamente ocupado.

Bajo la consideración de la geometría circular, la corriente en el anillo viene dada como la fuerza generalizada asociada al cambio del flujo magnético en el tiempo [33]. Con esto en mente, se puede utilizar la ley de inducción de Faraday para calcular la resistividad longitudinal del sistema, así

$$\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c} \int_s d\vec{a} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt} = - \int_c dl \cdot \vec{E}_x, \quad (1.30)$$

teniendo en cuenta la ley de Ohm [27]

$$\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = \int dl \cdot \rho_{xy} j^y. \quad (1.31)$$

Si integramos (1.31) en el tiempo desde $t = -\infty$ hasta $t = \infty$, además, de escribir $j^y = \vec{J}/L_x$ obtenemos

$$\frac{1}{c} \Delta\Phi = -ie\rho_{xy}. \quad (1.32)$$

Ya que $\Delta\Phi$ es precisamente hc/e , debido a que el tratamiento del sistema ha sido enmarcado por la inserción del flujo adiabáticamente, la resistividad Hall es

$$\rho_{xy} = -\frac{\hbar}{ie^2}. \quad (1.33)$$

Comparando la ecuación (1.16) junto con (1.33), se observa que los resultados son equivalentes, salvo que, en uno se ha obtenido la resistencia Hall teniendo en cuenta el dejenamiento de los puntos centrales en la muestra, mientras que por otra parte, se ha utilizado argumentos de teoría de calibre para derivar la resistividad Hall, y aunque un poco extraño, estos dos resultados son equivalentes. Aproximar la resistencia Hall a la

resistividad transversal viene del hecho que en las muestras reales y en nuestra propia geometría el largo se considera mucho mayor al ancho, de tal manera que el voltaje es medido lo suficientemente lejos de los bordes, esto se traduce en una densidad de corriente aplicada uniforme, conllevando a que los factores geométricos no interesen, de ahí el que se pueda aproximar la resistividad con la resistencia [34].

Las conclusiones más importantes del uso de argumentos de calibre, además de una geometría circular es ofrecer un mecanismo eficiente para analizar los efectos de la interacción de un electrón con campos electromagnéticos, que derivan en la deducción de resultados obtenidos independientemente de las condiciones propias del sistema (temperatura, desorden, entre otras). Así, el argumento de calibre se convierte en una teoría alternativa de estudio, con la cual se pueden obtener resultados equivalentes, en comparación con la teoría del transporte electrónico semiclásico sin el complejo bagaje que esta ofrece.

1.4. Entre la teoría y los experimentos.

Experimentalmente el efecto Hall cuántico entero es inherente a la existencia de desorden en la muestra, de hecho, el desorden en la muestra genera un ensanchamiento de la densidad de los estados de energía (ver [1]), pero sus características obtenidas anteriormente se mantienen inalteradas.

Por ejemplo el ensanchamiento de la densidad de estados crea en cada nivel de Landau estados localizados y extendidos, con lo cual, la conducción eléctrica sin disipación en los *plateau*, se asigna a los estados extendidos y los *plateau* se mantienen constantes aún variando la densidad del sistema,³ esto, porque la variación de la densidad afecta únicamente a los estados localizados, pero, como estos no transportan corriente, la disipación es inalterada [35, 27, 29, 25]. En la literatura este mecanismo se conoce como estados borde (*edge states*).

En cambio para el efecto Hall cuántico fraccional, experimentalmente se necesitan de muestras en las cuales se reduzca al máximo la presencia de desorden, teóricamente, se requiere que el sistema sea invariante bajo rotaciones⁴, porque, como veremos más adelante la física implicada en poseer factores de llenado fraccional, necesita de un nuevo análisis.

³La variación de la densidad va en sentido de dopar la muestra. Es decir, agregar portadores de carga que reduzcan o aumenten la densidad de carga libre.

⁴El efecto Hall entero es entendido en función del problema de Landau, el cual involucra que el sistema sea invariante traslacionalmente. Para el efecto Hall fraccional, el problema es entendido en función de los estados propios de momento angular para la cual se utiliza el calibre simétrico.

1.4.1. Régimen Hall cuántico.

Aunque existen una serie de requerimientos técnicos para el estudio del efecto Hall cuántico, daremos algunas exigencias más pragmáticas, con el fin de caracterizar e identificar qué requisitos mínimos se deben tener en cuenta en este efecto, así, para el régimen Hall cuántico se exige:

- Sistemas electrónicos bidimensionales.
- Campos magnéticos altos y temperaturas bajas.
- Sistemas incompresibles en el límite termodinámico.
- Existencia de desorden en las muestras para la observación de factores de llenado enteros
- Ausencia de desorden para la visualización de factores de llenado fraccionales

Con estos mínimos predicamentos se puede comenzar un estudio riguroso y detallado de todas las propiedades que ofrece la manifestación cuántica del efecto Hall, salvo excepto, que el tratamiento teórico debe ser reconsiderado para el estudio de factores de llenado fraccionales.

1.5. Observaciones.

La manifestación cuántica del efecto Hall, constituyó en el mundo de la física, un nuevo proceder en el entendimiento del mundo cuántico a partir de la observación del mundo macroscópico. Con esta nueva manifestación, también se logró el desarrollo de interesantes aplicaciones que actualmente se utilizan en procesos de medidas experimentales. Entre las más importantes están el cálculo de la resistencia y voltaje estándar, es decir el cálculo de h/e^2 y h/e . Además, permite calcular la constante de estructura fina y el coeficiente de arrastre de los resistores estándar [1].

Debe ser claro en este punto, que la cualidad más importante que debe ostentar el régimen Hall cuántico, (entero ó fraccional) debe ser la incompresibilidad. Ya que, mediante el análisis de esta propiedad es posible sostener la idea de conducción sin disipación en los *plateau*, gracias al comportamiento constante del potencial químico cada vez que el sistema se encuentra en un factor de llenado entero.

Entre tanto, hemos mostrado que aunque las partículas analizadas en este contexto, ni poseen, carga fraccional, ni satisfacen una estadística exótica, es posible conseguir

resultados físicos equivalentes de una manera muy elegante, utilizando un argumento geométrico análogo al que ostenta el Anión. Así, en primera medida, la teoría de los Aniones puede explicar el efecto Hall cuántico entero solamente hasta la prueba de la cuantización de la resistencia transversal y el estudio cualitativo del proceso de conducción.

Capítulo 2

El efecto Hall cuántico fraccional.

La cualidad más importante del efecto Hall cuántico entero son los “*plateau*”, obtenidos de la condensación de los niveles de Landau en factores de llenado entero. En 1982 el mundo de la física tuvo un nuevo sobresalto cuando Tsui, Gossard y Stomer encontraron un “*plateau*” cuya condensación se daba en un factor de llenado $\nu = \frac{1}{3}$. Esta particular condensación conocida como el efecto “1/3” dió indicios de estados electrónicos cuyo espín y, aún más sorprendente, carga eléctrica son fraccionales. Actualmente a pesar de la evidencia experimental y teórica de “*plateau*” con factores de llenado $\nu = p/q$ donde q es un número impar, dedicaremos este capítulo al estudio del efecto “1/3”, teniendo en cuenta, que gracias a esta particular condensación se conoce, hoy por hoy, la versión fraccional del efecto Hall cuántico. Además, proyectaremos nuestro plan de trabajo con el objetivo de mostrar que los argumentos encontrados en la explicación del efecto Hall cuántico fraccional son los propuestos por la teoría de los Aniones, y por consiguiente, como este efecto proporciona la existencia experimental del Anión. Por ende, este capítulo estará dedicado al análisis de las nuevas características que posee el efecto Hall cuántico fraccional y mostraremos que es necesario una teoría nueva para explicar los estados excitados que describen dinámicamente el sistema.

2.1. Magnetotransporte en el límite cuántico.

Los esfuerzos experimentales realizados sobre las medidas de Magnetotransporte en los ochenta tuvieron su más grande logro cuando Tsui, Gossard y Stomer descubrieron un “*plateau*”, con la particularidad que se presentaba en un factor de llenado $\nu = 1/3$ [2]. Más explícitamente, se encontró que la resistividad Hall (ρ_{xy}) en una muestra de Ástato de Galio con una corriente de $I = 1\mu A$, presentó un *plateau* en $\nu = 1/3$, como se muestra en la figura 2.1. De la misma forma la resistividad longitudinal (ρ_{xx}) se encuentra en un

mínimo en el mismo factor.

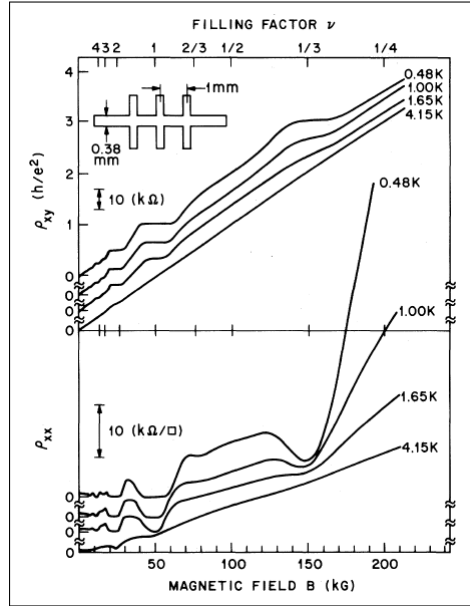


FIGURA 2.1: Resistividad Hall (ρ_{xy}) y resistividad transversal (ρ_{xx}) en función del campo magnético aplicado, para una muestra de Ástato de Galio dopada con $n = 1,23 \times 10^{11}/\text{cm}^2$ sometida a una corriente de $I = 1\mu\text{A}$. Se observa un anulamiento de las resistividades en $\nu = 1/3$ [2].

Cabe mencionar, que este *plateau* ocurre en el límite cuántico extremo, es decir, solamente los estados de espín polarizado de los niveles de Landau más bajos se mantienen parcialmente ocupados. Se pensó, en su momento, que la explicación teórica de este factor de llenado se podría encontrar con los mismos argumentos propuestos desde la teoría de calibre discutidos en el capítulo anterior, pero recordemos que la derivación de la resistividad solamente se da para números enteros [2, 36].

2.2. El problema de tres electrones bidimensionales en presencia de un campo magnético.

Se pretende solucionar la ecuación de Schrödinger para tres electrones coexistentes en un plano, sometidos a un potencial de Coulomb, en presencia de un campo magnético normal a la superficie. Pero, primero observemos el Hamiltoniano de un electrón en presencia de un campo magnético perpendicular, sin tener en cuenta el espín,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar\vec{\nabla} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2, \quad (2.1)$$

trabajaremos con una geometría semejante a la que se utilizó en el capítulo anterior (figura 1.5). Así, la mejor opción en cuanto al calibre será uno que favorezca la invarianza rotacional, en este caso invariante bajo rotaciones alrededor del eje z . La mejor opción es el calibre simétrico [27]

$$\vec{A} = \frac{1}{2}B (y\hat{i} - x\hat{j}). \quad (2.2)$$

Con esto, definimos los operadores de momento covariante [37]

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_x &= -i\hbar\partial_x + \frac{e}{c}A_x, \\ \hat{\pi}_y &= -i\hbar\partial_y + \frac{e}{c}A_y, \end{aligned} \quad (2.3)$$

teniendo en cuenta el calibre simétrico ec.(2.2), tenemos [37]

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_x &= -i\hbar\partial_x + \frac{\hbar}{2l_B^2}\hat{y}, \\ \hat{\pi}_y &= -i\hbar\partial_y + \frac{\hbar}{2l_B^2}\hat{x}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $l_B^2 = \hbar c/eB$, es la longitud magnética. Estos operadores cumplen la relación:

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = \frac{i\hbar^2}{l_B^2}. \quad (2.5)$$

2.2.1. Centros de guía.

Como el movimiento del electrón es semejante a una órbita (cicloide), es conveniente definir una coordenada central de movimiento para la órbita de ciclotrón. La coordenada centro de guía denotada por (X, Y) , consiste de la combinación de la coordenada correspondiente a la posición de una partícula (x, y) junto con una coordenada relativa R , cuyas componentes son:

$$R \left(-\frac{c}{eB}\pi_y, \frac{c}{eB}\pi_x \right), \quad (2.6)$$

donde $\hat{\pi}_x$ y $\hat{\pi}_y$ son los operadores de momento covariante (2.4). Esta coordenada permite demostrar que efectivamente la órbita que describe el electrón es en efecto una cicloide, ya que de la solución de las ecuaciones de movimiento se obtienen expresiones armónicas para las componentes de la coordenada [37]. De esta forma, las componentes de la coordenada de centro de guía están dadas por:

$$\begin{aligned}\hat{X} &= \hat{x} - il_B^2 \partial_y, \\ \hat{Y} &= \hat{y} - il_B^2 \partial_x,\end{aligned}\tag{2.7}$$

las cuales cumplen la relación:

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = il_B^2.\tag{2.8}$$

Entre tanto, la relación existente entre la coordenada de centro de guía y el operador de momento covariante se refleja en el conmutador:

$$[\hat{X}_i, \hat{\pi}_j] = 0,\tag{2.9}$$

donde j e i corren sobre las tres componentes. Observando el conmutador (2.5), junto con (2.8), se observa no es posible medir simultáneamente coordenadas de centro de guía ni momento conjugado en la órbita de movimiento, aunque es posible obtener información simultánea de momento y posición de centro de guía. La importancia de la coordenada centro de guía es la descomposición del movimiento del electrón en cada nivel de Landau. Esto ya que la coordenada centro de guía es considerada como la coordenada del baricentro de la órbita del electrón en el nivel, y la función de la coordenada relativa ec.(2.6) origina la órbita de movimiento. Con esto, la coordenada de centro de guía tiene la función de dictar la dinámica del electrón en cada nivel de Landau. De hecho, un electrón asciende a un nivel de Landau superior cuando la coordenada relativa es excitada [37].

La representación analítica del sistema es proporcionada por los autoestados propios del Hamiltoniano y la componente z de momento angular. Estos autoestados serán encontrados a partir de la solución de las ecuaciones de movimiento construidas por las coordenadas de centro de guía. Para esto, proponemos una base de kets propios simultáneos $\{|m, n\rangle\}$, donde m es el número asociado al cuanto de momento angular y n es el número cuántico energético, el cual, representará el nivel n -ésimo de Landau.

Para encontrar el espectro de energía del sistema, formulamos los operadores de creación y destrucción de niveles de energía \hat{a}^\dagger y \hat{a} dados por [35]:

$$\hat{a} = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{l_B}{\sqrt{2\hbar}} (\hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y).\tag{2.10}$$

Estos operadores permiten construir la ecuación de valores propios para el autoestado $|m, n\rangle$

$$\hat{H}|m, n\rangle = \hbar\omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) |m, n\rangle, \quad (2.11)$$

donde n es el autovalor de $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, la ecuación (2.11) describe la evolución energética del sistema. La ecuación de movimiento para la componente z de momento angular, se construye teniendo en cuenta

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x. \quad (2.12)$$

Utilizando las expresiones (2.4) y (2.7), se sigue que [37]

$$\hat{L}_z = \frac{eB}{2c} (\hat{X}^2 + \hat{Y}^2) - \frac{2c}{eB} (\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2). \quad (2.13)$$

Si definimos de igual manera, los operadores de creación y destrucción del operador posición [37]:

$$\hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}l_B^2} (\hat{X} + i\hat{Y}), \quad \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}l_B^2} (\hat{X} - i\hat{Y}). \quad (2.14)$$

El operador de momento angular (2.13) en función de estos operadores se puede expresar como

$$\hat{L}_z = \hbar (\hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{a}^\dagger \hat{a}), \quad (2.15)$$

con lo cual la ecuación de valores propios es:

$$\begin{aligned} \hat{L}_z |m, n\rangle &= \hbar (\hat{b}^\dagger \hat{b} - \hat{a}^\dagger \hat{a}) |m, n\rangle \\ &= \hbar (m - n) |m, n\rangle, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde m es el autovalor $\hat{b}^\dagger \hat{b}$. Para encontrar la función de onda en cualquier estado $|m, n\rangle$, expresemos los operadores de creación y destrucción (2.10), (2.14) por medio del operador de posición compleja:

$$\begin{aligned} \hat{z} &= \hat{x} + i\hat{y}, & \hat{z}^* &= \hat{x} - i\hat{y}, \\ \partial_z &= \partial_x - i\partial_y, & \partial_{z^*} &= \partial_x + i\partial_y, \end{aligned} \quad (2.17)$$

de tal manera, que estos operadores toman la forma

$$\hat{a} = -\frac{il_B^2}{\sqrt{2}} \left(\partial_{\bar{z}} + \frac{z}{4l_B^2} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \frac{il_B^2}{\sqrt{2}} \left(-\partial_z + \frac{\bar{z}}{4l_B^2} \right), \quad (2.18)$$

$$\hat{b} = -\frac{1}{\sqrt{2}l_B^2} \left(l_B^2 \partial_z + \frac{1}{4} \bar{z} \right), \quad \hat{b}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}l_B^2} \left(-l_B^2 \partial_{\bar{z}} + \frac{1}{4} z \right). \quad (2.19)$$

En el estado más bajo de energía y momento angular se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \hat{H}|0, 0\rangle &= \frac{1}{2} \hbar \omega_c |0, 0\rangle, \\ \hat{L}_z |0, 0\rangle &= 0 |0, 0\rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Además, debe satisfacer

$$\begin{aligned} \hat{a}|0, 0\rangle &= 0, \\ \hat{b}|0, 0\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Proyectando en la base compleja y solucionando las ecuaciones diferenciales, la función de onda del estado fundamental simultaneo está dada por:

$$\varphi_0^0(z, z^*) = f(z^*) \exp\left(-\frac{zz^*}{4l_B^2}\right). \quad (2.22)$$

Aquí $f(z^*)$ debe ser una función analítica,¹ de ahí que la única posibilidad sea que $f(z^*)$ sea una constante. Para encontrar esta constante utilizamos el hecho de que el producto interior de la función de onda debe ser igual a la unidad, es decir,

$$1 = \oint dz (\varphi_0^0(z, z^*))^* \varphi_0^0(z, z^*), \quad (2.23)$$

reemplazando (2.22) se obtiene

$$f(z^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2}}, \quad (2.24)$$

con lo cual la función de onda del estado fundamental es:

¹En funciones de variable compleja, se define una función analítica como aquella función que posee una única derivada en cada punto de la región donde se define la función. Esto implica por ejemplo, que no depende de z^* [38].

$$\varphi_0^0(z, z^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2}} \exp\left(-\frac{zz^*}{4l_B^2}\right). \quad (2.25)$$

Para encontrar el estado general, aplicamos sucesivamente los operadores de creación \hat{a}^\dagger , \hat{b}^\dagger al estado fundamental:

$$\varphi_m^n(z, z^*) := |m, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2l_B^2)^{n+m+1}\pi m!n!}} (\hat{b}^\dagger)^m (\hat{a}^\dagger)^n \exp\left(-\frac{|z|^2}{4l_B^2}\right). \quad (2.26)$$

Observando las ecuaciones (2.11), (2.16), podemos identificar que esta función posee un valor propio de momento angular $\hbar(m-n)$ y un autovalor de energía $\hbar\omega_c(n+1/2)$. Para efectos de cálculo los operadores de creación de posición y momento pueden ser escrito en la forma [39]:

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger &= \exp\left(\frac{|z|^2}{2l_B^2}\right) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2l_B^2}\right), \\ \hat{b}^\dagger &= \exp\left(\frac{|z|^2}{2l_B^2}\right) \frac{\partial}{\partial z} \exp\left(-\frac{|z|^2}{2l_B^2}\right), \end{aligned} \quad (2.27)$$

de tal manera que

$$(\hat{b}^\dagger)^m (\hat{a}^\dagger)^n = \exp\left(\frac{|z|^2}{4l_B^2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^m \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)^n \exp\left(-\frac{|z|^2}{2l_B^2}\right), \quad (2.28)$$

y el estado general está dado por [3]:

$$|m, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2l_B^2)^{n+m+1}\pi m!n!}} \exp\left(\frac{|z|^2}{4l_B^2}\right) (\partial_x - i\partial_y)^m (\partial_x + i\partial_y)^n \exp\left(-\frac{|z|^2}{2l_B^2}\right). \quad (2.29)$$

Como nuestro objetivo es el estudio del efecto “1/3”, necesitamos restringir el estado general solamente para los niveles más bajos de Landau, es decir, estados con diferente valor de momento angular m , limitados exclusivamente en el nivel de energía fundamental ($n=0$). Con esto en mente, los estados más bajos de Landau tienen la forma:

$$|m\rangle := |m, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2l_B^2)^{m+1}\pi m!}} z^m \exp\left(-\frac{|z|^2}{4l_B^2}\right). \quad (2.30)$$

Estos estados poseen un valor de momento angular $\hbar m$ y describen órbitas de ciclotrón de radio $r = \sqrt{2m}$, debido a que se cumple que [3]

$$\langle m|r^2|m\rangle = 2(m+1). \quad (2.31)$$

Para el inverso del radio tenemos

$$\left\langle m \left| \frac{1}{r} \right| m \right\rangle = \frac{(2m)!}{2^{2m+1}(m!)^2} \sqrt{2\pi}. \quad (2.32)$$

El cálculo detallado de estos valores esperados se muestra en el apéndice B

2.2.2. El comportamiento radial.

Ya analizado el problema de un electrón, observemos como es la imagen física de dos y tres electrones. En presencia de dos o más electrones el campo magnético hace que la repulsión sentida por ellos debido a la fuerza de Coulomb se anule. En cambio, el campo magnético lleva a los electrones a orbitar alrededor de su centro de masa [3]. El Hamiltoniano para dos electrones interactuando por un potencial Coulombiano es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar\vec{\nabla}_1 - \frac{e}{c}\vec{A}_1 \right)^2 + \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar\vec{\nabla}_2 - \frac{e}{c}\vec{A}_2 \right)^2 + \frac{e^2}{r_{12}}. \quad (2.33)$$

Definiendo las coordenadas de centro de masa y movimiento relativo

$$z_{CM} = \frac{z_1 + z_2}{2} \quad z_{int} = \frac{z_1 - z_2}{\sqrt{2}}, \quad (2.34)$$

donde z_1 y z_2 son las posiciones complejas de los dos electrones en el plano. Aquí, dejaremos de lado el análisis del comportamiento del movimiento alrededor del centro de masa, ya que como veremos posteriormente el movimiento del centro de masa se comporta como una partícula libre, por tanto, no agrega nada nuevo a la dinámica del sistema. El Hamiltoniano para la parte relativa está dado por

$$\hat{H}_{int} = \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar\vec{\nabla}_{int} - \frac{e}{c}\vec{A}_{int} \right)^2 + \frac{e^2}{\sqrt{2}r_{int}}. \quad (2.35)$$

Trabajando en coordenadas polares (r, ϕ) , se necesitará solamente solucionar el comportamiento radial, esto ya que, el potencial Coulombiano conserva la componente de momento angular en z , es decir, se cumple que

$$\left[\hat{L}_z, \hat{V} \right] = 0, \quad (2.36)$$

donde $\hat{V} = e^2/\sqrt{2}r_{int}$. Proponemos entonces una solución $\varphi(x, y) = R(r)e^{i\phi}$, de tal forma que la ecuación de valores propios para el problema interno es, teniendo en cuenta que $x + iy = e^{i\phi}$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{m_e^2}{r^2} \right) - \frac{m_e}{2} R + \frac{r^2}{8} R + \frac{e^2}{\sqrt{2}r} R = ER. \quad (2.37)$$

Aquí E es el valor propio de energía. Esta, es la ecuación radial de un oscilador bidimensional el cual posee un término repulsivo $e^2/\sqrt{2}r$. Si se considera que el término repulsivo es débil, los estados de la ecuación (2.37) pueden ser aproximados al comportamiento que ostenta una partícula libre, con lo cual los estados de Landau más bajos para el problema de dos electrones interactuantes se pueden escribir en la forma

$$\hat{H}_{int}|m\rangle \cong \left(E_{int} + \frac{1}{2} \right) |m\rangle, \quad (2.38)$$

donde

$$E_{int} = \frac{e^2}{\sqrt{2}l_B} \left\langle m \left| \frac{1}{r} \right| m \right\rangle. \quad (2.39)$$

El valor esperado de la energía (2.39) posee la forma descrita en (2.32). Bajo esta consideración, Robert Laughlin [3] logró demostrar que efectivamente la solución del problema radial interno del Hamiltoniano (2.35) son estados de partícula libre, de hecho, comparó la solución obtenida con la solución conocida para una partícula libre como se muestra en la figura 2.2, además, indicó que esta aproximación es bastante buena cuando m aumenta. Esto permitió entender la imagen de dos partículas orbitando alrededor de su centro de masa a una distancia r , pero, posee una energía de ligadura $-e^2/r$ y no se entiende como un término repulsivo.

Restringir la función de onda solamente para los niveles de Landau más bajos, nos hace concluir lo siguiente:

- El problema efectivo de un cuerpo, es decir, el problema de dos electrones interactuantes, es entendido como el problema de una partícula libre y estas soluciones diagonalizan H_{int} [3].
- El término Coulombiano, en esta imagen, se entiende como una fuerza de ligadura entre los electrones producida por el campo magnético. Esto permite que el análisis del problema se pueda realizar en semejanza al de una partícula libre.
- Teniendo en cuenta las anteriores afirmaciones, es posible entender el problema efectivo de un cuerpo como el problema de cero cuerpos (partículas libres). Así,

el problema de tres electrones interactuantes se reduce a la solución del problema efectivo de un cuerpo, de ahí, que sea fácil solucionarlo.

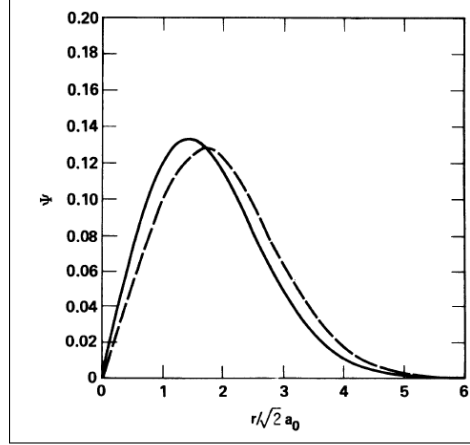


FIGURA 2.2: Comparación grafica entre la solución del problema radial al problema efectivo de un electrón (línea sólida) y la solución del problema de una partícula libre (línea punteada). Se encontró una diferencia del 20% en los picos de las soluciones y un 7% en el valor de la energía. La aproximación es mejor cuanto más se aumenta m [3].

Analíticamente, los niveles de Landau más bajos para el problema de dos electrones interactuantes surgen de estados independientes correspondientes a la parte relativa y el centro de masa, esto ya que, el Hamiltoniano total del sistema es escrito en la forma

$$\hat{H}_{Tot} = \hat{H}_{int} + \hat{H}_{CM}, \quad (2.40)$$

con esto, la solución más general para el Hamiltoniano total viene dado por el producto tensorial de los estados de Landau más bajos en la parte relativa y el centro de masa, es decir,

$$|LLL\rangle_{Tot} = |LLL\rangle_{int} \otimes |LLL\rangle_{CM}. \quad (2.41)$$

Para encontrar los estados más bajos de Landau en cada subespacio se puede realizar un proceso similar al desarrollado en la solución de la ecuación de movimiento para un electrón (2.1). Para esto simplemente se deben definir las coordenadas centro de guía. En este contexto, las componentes de la coordenada centro de guía toman la forma:

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \frac{1}{2}\hat{x} - \frac{il_B^2}{2}\partial_y, \\ \hat{Y} &= \frac{1}{2}\hat{y} - \frac{il_B^2}{2}\partial_x, \end{aligned} \quad (2.42)$$

con las cuales es posible construir operadores de creación y destrucción de energía y momento angular semejantes a los definidos por la ecuaciones (2.18), (2.19), de tal suerte que los estados asociados a cada subespacio poseen la forma (2.30), salvo excepto

que la posición compleja es redefinida, teniendo en cuenta que en cada subespacio los electrones se comportan como problemas efectivos de partículas libres. Así, los niveles de Landau más bajos para el problema de dos electrones interactuantes denotados por $|m, p\rangle$ se pueden escribir como:

$$|m, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2l_B^2)^{m+p+1}\pi m!p!}} z_{int}^m z_{CM}^p \exp\left(-\frac{1}{4l_B^2} (|z_{int}|^2 + |z_{CM}|^2)\right), \quad (2.43)$$

en función de las posiciones de los electrones tenemos que

$$|m, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2l_B^2)^{m+p+1}\pi m!p!}} (z_1 - z_2)^m (z_1 + z_2)^p \exp\left(-\frac{1}{4l_B^2} (|z_1|^2 + |z_2|^2)\right), \quad (2.44)$$

aquí, m representa el estado de momento angular para la parte relativa, mientras que p es el nivel de momento asociado al centro de masa.

2.2.3. El problema de tres electrones.

Concluido esto es hora de analizar el problema de los tres electrones. Este problema es descrito por el Hamiltoniano sin espín

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar\vec{\nabla}_1 - \frac{e}{c}\vec{A}_1\right)^2 + \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar\vec{\nabla}_2 - \frac{e}{c}\vec{A}_2\right)^2 \\ & + \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar\vec{\nabla}_3 - \frac{e}{c}\vec{A}_3\right)^2 + \frac{e^2}{r_{12}} + \frac{e^2}{r_{23}} + \frac{e^2}{r_{13}}, \end{aligned} \quad (2.45)$$

realizando la transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} \bar{z} &= \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}, \\ z_a &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \left(\left(\frac{z_1 + z_2}{2} - z_3\right)\right), \\ z_b &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (2.46)$$

y nuevamente, utilizando el hecho que el centro de masa del problema se comporta como una partícula libre, el Hamiltoniano interno del problema es

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar\vec{\nabla}_a - \frac{e}{c}\vec{A}_a\right)^2 + \frac{1}{2m_e} \left(-i\hbar\vec{\nabla}_b - \frac{e}{c}\vec{A}_b\right)^2 \\ & + \frac{e^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{|z_b|} + \frac{1}{\left|-\frac{1}{2}z_b + \frac{\sqrt{3}}{2}z_a\right|} + \frac{1}{\left|-\frac{1}{2}z_b - \frac{\sqrt{3}}{2}z_a\right|} \right), \end{aligned} \quad (2.47)$$

cuya solución es dada por el conjunto de funciones [3]:

$$|m, p\rangle = \frac{1}{\sqrt{(2l_B^2)^{4p+6m+1}\pi^2(3m+p)!p!}} \left(\frac{(z_a + iz_b)^{3m} - (z_a - iz_b)^{3m}}{2i} \right) (z_a^2 + z_b^2)^p \exp\left(-\frac{1}{4l_B^2}(|z_a|^2 + |z_b|^2)\right). \quad (2.48)$$

Estas funciones poseen un valor propio $M = 3m + 2p$ de componente z de momento angular total [3], igualmente, m y p son los valores de momento angular del problema relativo y centro de masa respectivamente. Además, es una función antisimétrica en z_b . La prueba de ortonormalidad para este conjunto de funciones se describe en detalle en el apéndice B.

2.3. Incompresibilidad en factores de llenado fraccional.

Considerando que el término repulsivo es entendido como una energía de ligadura que hace que los electrones no experimenten repulsión, si no en vez de eso, orbitan alrededor de su centro de masa, se puede evaluar el valor esperado (2.32) para z_b en la manera [3]

$$\left\langle m \left| \frac{1}{z_b} \right| m \right\rangle = \frac{1}{2^m} \left(\frac{2\pi}{(3m+n)!(3m'+n')!n!n'} \right)^{1/2} \sum_{k=1}^M a_k^{(m,n)} a_k^{(m',n')*} \left(\frac{(2K)!(M-k)!}{2^{2k}k!} \right), \quad (2.49)$$

pero debido a que el potencial conserva el momento angular, solamente, es indispensable evaluar los elementos de la matriz de Coulomb (2.49) para estados que tengan el mismo momento angular M . Con esto, Laughlin [3] demostró que los valores de la matriz de Coulomb eran degenerados en momento angular y que en los estados más bajos de Landau la densidad de dejeneramiento aproximada es de $1/3$.

Para evaluar si el sistema es incompresible, se analiza qué le sucede a los estados de órbitas de ciclotrón cuyos valores de energía de ligadura dadas por (2.49) se someten a un potencial de la forma [3]

$$V = \frac{\alpha}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) = \frac{3}{2}\alpha|\bar{z}|^2 + \frac{\alpha}{2} (|z_a|^2 + |z_b|^2), \quad (2.50)$$

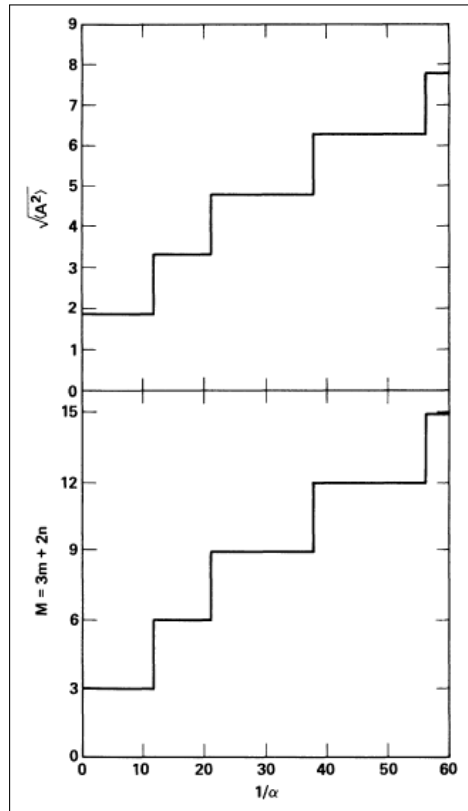


FIGURA 2.3: Gráfica de momento angular y área efectiva para el estado fundamental en función del inverso de la presión. Se observa discontinuidades en ambas cantidades únicamente en múltiplos enteros de tres [3].

donde α es la presión. El efecto del potencial sobre los estados se refleja en su valor esperado [3]

$$\left\langle m, n \left| \frac{\alpha}{2} (|z_a|^2 + |z_b|^2) \right| m', n' \right\rangle = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \alpha (M + 2), \quad (2.51)$$

aquí se ha tenido en cuenta el valor esperado (2.31) para los radios efectivos. Con base en esto, Laughlin calculó la dependencia del momento angular total y del área efectiva para el sistema de tres partículas interactuantes con respecto del aumento de la presión. En la figura 2.3 se muestra la gráfica del momento angular para los niveles más bajos de Landau en función del inverso de la presión. Se observa discontinuidades en múltiplos enteros de tres, lo cual sostiene la aserción de un factor de llenado fraccional. Además, se muestra el área cuadrática efectiva de la tres partículas, que igualmente, muestra discontinuidades cuando el momento angular se encuentra en un múltiplo entero de tres. El área es construida mediante el operador [3]

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{z_1 + z_2}{2} - z_3 \right) (z_1 - z_2)^* \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4i} (z_a z_b^* - z_b z_a^*), \end{aligned} \quad (2.52)$$

Que se puede interpretar como el área de un triángulo cuyos vértices están en z_1 , z_2 y z_3 . El valor esperado para este operador es [3]

$$\langle m, n | A^2 | m', n' \rangle = \delta_{mm'} \delta_{nn'} \frac{3}{4} ((3m)^2 + M + 2), \quad (2.53)$$

esto nos lleva a concluir que el sistema debe comportarse como un sistema incompresible,² es decir, valores finitos de energía entre estados de momento angular, los cuales coexisten en los niveles de Landau más bajos, conllevando nuevamente a la conducción sin pérdida de energía para cada factor de llenado fraccional, en este caso $\nu = 1/3$.

2.4. Generalización para N partículas.

Para este caso, el Hamiltoniano de muchos cuerpos esta dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \sum_i \left(-i\hbar \vec{\nabla}_i - \frac{e}{c} \vec{A}_i \right)^2 + V(z_i) + \sum_{i < j} \frac{e^2}{|z_i - z_j|}, \quad (2.54)$$

donde i y j suman alrededor de las N partículas y $V(z_i)$ es un potencial generado por un fondo uniforme neutralizante [4]. El objetivo ahora es el de obtener la función de onda que describe el comportamiento dinámico de las N partículas, la mejor opción para proponer la función de onda de ensayo es el método variacional.

El método variacional es una herramienta útil para encontrar la función de onda y el valor de la energía del estado fundamental cuando las ecuaciones de movimiento no son fácilmente resolubles. El objetivo del método es proponer una función de onda de ensayo $|\varphi_x\rangle$ construida a partir del conocimiento que se tiene sobre el sistema de estudio. Si la función de onda propuesta corresponde al estado fundamental se puede calcular el valor esperado de la energía en la forma

$$E_{[\varphi_x]} = \frac{\langle \varphi_x | \hat{H} | \varphi_x \rangle}{\langle \varphi_x | \varphi_x \rangle}, \quad (2.55)$$

que si corresponde en efecto al estado fundamental se debe cumplir una cota mínima

$$E_{[\varphi_x]} \leq E_0, \quad (2.56)$$

²Termodinámicamente, la incompresibilidad en un sistema bidimensional se define como el decremento del área relativa por unidad de aumento de la presión [29].

aquí E_0 es el valor exacto de la energía del estado fundamental. El valor de energía $E_{[\varphi_x]}$ se encuentra minimizando la función de onda con respecto a un parámetro variacional. Así, con el conocimiento adquirido de nuestro sistema, el caso generalizado de N partículas es descrito por una función de onda de ensayo, la cual cumple mínimo las siguientes condiciones:

- Esta función debe estar compuesta en su totalidad de funciones de onda que coexistan en los niveles de Landau más bajos.
- Estas funciones describen órbitas de ciclotrón alrededor de sus respectivos centros de masa.
- La función es construida exclusivamente de partículas idénticas, además, estos estados deben ser de espín polarizado.

Con estos requisitos mínimos podríamos erigir una función de ensayo, pero, teniendo en cuenta los argumentos desarrollados en las secciones anteriores, la función debe cumplir:

- Bajo intercambio de partículas, la función de onda debe ser antisimétrica.
- Debe ser autoestado de la componente de momento angular en dirección z .
- El término Coulombiano es interpretado como una energía de ligadura entre los electrones, y en el límite termodinámico, las partículas ligadas a estas energías se comportan como partículas libres.

Con base en esto Laughlin propuso una función de onda de ensayo para el estado fundamental como el producto de funciones Jastrow en la manera [4]:

$$\varphi_m = \left(\prod_{i < j} f(z_i - z_j) \right) \exp \left(-\frac{1}{4l_B^2} \sum_i |z_i|^2 \right). \quad (2.57)$$

Y como es una función de onda variacional, la idea es minimizar la energía con respecto a $f(z_i - z_j)$. Por el momento, de la condición de antisimetría, se puede afirmar que $f(z_i - z_j)$ debe ser una función polinomial impar, y aún más, el grado del polinomio debe ser efectivamente, el momento angular total de la función. De esta manera, $f(z_i - z_j) = (z_i - z_j)^m$, con m impar. El argumento $(z_i - z_j)^m$ puede ser obtenido del determinante de Slater para N partículas [40]. De ahí, m será nuestro parámetro variacional y nuestro objetivo ahora es encontrar cual m minimiza la energía. Con esto, la función de onda de Laughlin, tiene la siguiente forma:

$$\varphi_m = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \exp\left(-\frac{1}{4l_B^2} \sum_i |z_i|^2\right). \quad (2.58)$$

La función de onda para N partículas en el estado más bajo de Landau se puede escribir en la forma

$$\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^N \varphi_i(z_i) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_1(z_1) & \varphi_1(z_2) & \cdots & \varphi_1(z_N) \\ \varphi_2(z_1) & \varphi_2(z_2) & \cdots & \varphi_2(z_N) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_N(z_1) & \varphi_N(z_2) & \cdots & \varphi_N(z_N) \end{vmatrix}, \quad (2.59)$$

aquí la sumatoria de $\epsilon(\sigma)$ se realiza sobre los índices de las multiplicaciones ± 1 del grupo de permutaciones S_N , además, el subíndice i de la función de onda representa el número de ocupación del N -ésimo nivel de Landau más bajo. La forma analítica de las funciones para cada posición ostenta la forma (2.25). La resolución del determinante de Slater permite que la función de onda generalizada satisfaga la condición de antisimetría [41].

Utilizando la forma explícita de la función de onda del nivel de Landau más bajo para cada partícula z_i , la función de onda toma la forma, con la constante de normalización igual a uno

$$\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^N z_i^{m_{\sigma(i)} - m_1} \exp\left(\sum_i |z_i|^2\right), \quad (2.60)$$

el primer término es conocido como el determinante de Vandermonde [38]. Este determinante matricialmente posee la forma

$$\text{Van}_{\mathbf{m}-m_1} = \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^N z_i^{m_{\sigma(i)} - m_1} = \begin{vmatrix} 1 & z_1^{m_2 - m_1} & \cdots & z_1^{m_N - m_1} \\ 1 & z_2^{m_2 - m_1} & \cdots & z_2^{m_N - m_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & z_N^{m_2 - m_1} & \cdots & z_N^{m_N - m_1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (z_i - z_j), \quad (2.61)$$

de tal manera, que el estado compuesto de las N partículas es

$$\varphi(z_1, z_2, \dots, z_n) = \prod_{i < j} (z_i - z_j) \exp \left(\sum_i |z_i|^2 \right). \quad (2.62)$$

Esta función posee la misma forma, que la función de onda variacional (2.58), salvo excepto, que aquí $m = 1$. Así, podemos entender la función de onda de Laughlin como una generalización para cualquier valor de momento m que existe en los niveles de Landau más bajos.

Por último, el momento angular de este estado es dado como la suma del valor propio asociado a cada subespacio de las N partículas individuales, es decir,

$$\begin{aligned} L_z^{TOT} &= (L_z)_1 \otimes (1)_2 \otimes \dots \otimes (1)_N + \\ &\quad (1)_1 \otimes (L_z)_2 \otimes (1)_3 \dots \otimes (1)_N + \\ &\quad (1)_1 \otimes (1)_2 \otimes (1)_3 \dots \otimes (L_z)_N, \end{aligned} \quad (2.63)$$

aquí el subíndice sobre el operador de momento angular suma sobre todas las partículas en el sistema. Con lo cual, el momento angular total es

$$L_z^{TOT} = \sum_{j=1}^N (L_z)_N, \quad (2.64)$$

de tal manera, que actuando sobre el estado compuesto tenemos

$$\begin{aligned} L_z^{TOT} \varphi_m(z_1, z_2, \dots, z_n) &= \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \sum_{j=1}^N (L_z)_N \prod_{i=1}^N \varphi_i(z_i) \\ &= \frac{\hbar}{\sqrt{N!}} \sum_{j=1}^N m_j \varphi_m(z_1, z_2, \dots, z_n). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Así, el valor propio de momento angular es

$$m^{TOT} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{j=1}^N m_j. \quad (2.66)$$

2.4.1. Analogía con el plasma.

Intuitivamente, podríamos seguir los pasos mencionados en el método variacional para encontrar el valor del parámetro variacional m , calculando el valor de la energía y minimizándolo con respecto de este parámetro, de tal forma, que al sustituir este valor, la función de onda corresponda en efecto, al estado fundamental. Sin embargo, es posible hallar el valor de m que minimiza la energía utilizando el concepto de densidad de probabilidad.

La densidad de probabilidad para la función de onda de ensayo del estado fundamental está dada por:

$$|\varphi_m|^2 = \left| \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \exp \left(-\frac{1}{4l_B^2} \sum_i |z_i|^2 \right) \right|^2, \quad (2.67)$$

reexpresando esta densidad, el cuadrado de la función de onda de Laughlin puede escribirse como

$$|\varphi_m|^2 = \exp(-\beta U), \quad (2.68)$$

donde $\beta = 1/m$. Aquí, U es interpretada como la energía potencial clásica del sistema dada por [4]

$$U = -2m^2 \sum_{i < j} \ln |z_i - z_j| + \frac{1}{2}m \sum_i |z_i|^2, \quad (2.69)$$

por tanto, el cuadrado de la función de onda es considerada como la función de partición de un sistema mecano-estadístico clásico, cuyo peso es precisamente el exponencial de la energía potencial. Laughlin propuso una interesante forma de obtener el valor del parámetro variacional m , a partir de la comparación entre la energía potencial del ensemble (2.69) y la energía potencial del plasma bidimensional de una componente clásica, el cual analíticamente tiene la forma [4, 25, 35, 34]:

$$U_{Plasma} = 2q^2 \sum_{i < j} \ln |z_i - z_j| + \pi \hat{\rho} q \sum_i |z_i|^2. \quad (2.70)$$

El primer término corresponde a la interacción Coulombiana entre las partículas y viene del hecho de que los electrones se distribuyen en una manera semejante a una varilla infinitamente larga, por eso el factor logarítmico. El segundo término es precisamente la energía de interacción de las partículas en el plasma con el fondo neutralizante. Aquí, $\hat{\rho}$

es la densidad de este fondo que para nuestro sistema tiene la forma [27, 25, 35]:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\pi m l_B^2}. \quad (2.71)$$

La forma analítica de esta energía de interacción con el fondo es la misma que debe tener el potencial del fondo neutralizante en el Hamiltoniano de muchos cuerpos ec.(2.54) para nuestro sistema. Comparando las ecuaciones (2.69) y (2.70), nuestro sistema de N electrones interactuantes se puede considerar como un plasma de N partículas cuya carga es $q = m$. Como nuestro objetivo es minimizar la energía, la única posibilidad para que en nuestro sistema ocurra esto, es cuando las partículas se extiendan uniformemente, de tal manera que, la densidad de carga de las partículas es exactamente igual a la densidad del fondo neutralizante (2.71). Teniendo en cuenta lo anterior, si igualamos la densidad del fondo neutralizante junto con la densidad electrónica del sistema dada por:

$$\rho = \frac{\nu}{2\pi l_B^2}, \quad (2.72)$$

Vemos, entonces, que la energía es mínima cuando se cumple que el factor de llenado sea:

$$\nu = \frac{1}{m}. \quad (2.73)$$

Demostrando efectivamente que la función de onda de Laughlin corresponde al estado fundamental del Hamiltoniano (2.54), cuando el factor de llenado es fraccional.

2.5. Cálculos variacionales.

Ya obtenida, la función de onda del estado fundamental para N partículas, podemos comprobar si en efecto, esta suposición variacional puede considerarse en buena medida como el estado que describe dinámicamente el efecto Hall cuántico fraccionario. Para esto, hemos evaluado numéricamente la función de onda variacional (2.58) para el caso de tres partículas ($N = 3$), la solución exacta (2.48) y se han comparado.

La evaluación consiste de crear una red de n puntos en el plano complejo, con la idea, de que cada punto corresponda a la posición de una partícula. Luego, evaluamos la función de onda variacional y exacta para todas las posibles combinaciones entre grupos de tres puntos. Aquí, hay que tener en cuenta que nos es posible evaluar puntos comunes, es decir, no es posible evaluar $\varphi(z_1, z_1, z_1)$ debido al principio de exclusión de Pauli. De ahí, la restricción impuesta en el cálculo es $z_i < z_j < z_k$. La comparación consiste en proyectar la función de onda de ensayo sobre la función de onda exacta, de tal manera

que, si la función de onda variacional corresponde al estado fundamental el producto interior debe ser igual a la unidad, explícitamente la comparación está expresada como [4]:

$$p = \frac{\langle \varphi_m | \phi_m \rangle}{\sqrt{\langle \varphi_m | \varphi_m \rangle \langle \phi_m | \phi_m \rangle}}, \quad (2.74)$$

que en nuestro sistema es

$$p = \frac{\int \int \int \varphi_m^* \phi_m dz_1 dz_2 dz_3}{\int \int \int |\varphi_m|^2 dz_1 dz_2 dz_3 \int \int \int |\phi_m|^2 dz_1 dz_2 dz_3}. \quad (2.75)$$

Es importante mencionar que no se ha tenido en cuenta la constante de normalización en la función de onda exacta (2.48), en vez de eso, se normaliza la función en cada evaluación. Además, se debe comentar que la comparación realizada es hecha con la solución exacta para un potencial Coulombiano, pero en general, la función de onda variacional puede ser comparada con las soluciones para cualquier potencial.

En esta evaluación las funciones de onda poseen un valor de momento angular $3m$, de hecho, no es tenido en cuenta el momento de centro de masa en la solución exacta. El resultado de la evaluación muestra que en efecto las proyecciones para diferentes valores de m dan como resultado la unidad. La comparación se ha realizado en $n = 3$, $n = 5$, $n = 10$ y $n = 20$. También, es importante comentar que algunas evaluaciones dan como resultado la unidad pero con signo negativo, esto en diferentes m , este signo se puede asociar a fases adquiridas en las evaluaciones.

Finalmente de los resultados obtenidos en la evaluación, se puede concluir que en efecto la función de onda de Laughlin se puede considerar como la función de onda que describe dinámicamente el efecto Hall cuántico fraccionario.

El cálculo se realizó en *Mathematica* trabajando con una precisión y tolerancia en las integrales de línea junto con las evaluaciones de las funciones de onda de veinte decimales.

2.6. Estados excitados.

Teniendo ya el estado fundamental que describe la dinámica de los N electrones interactuantes en presencia de un campo magnético, y validada la suposición de que estos estados poseen factores de llenado fraccional, es momento de generar las excitaciones elementales de este estado, es decir, crear un cuasiagujero y un cuasielectrón.

Es importante comprender que las excitaciones elementales (cuasiagujero, cuasielectrón) no son partículas individuales, en vez de eso, estas excitaciones son el resultado del

desplazamiento de la densidad de carga, tal que, el exceso se considera como la carga de la excitación [27]. Así, para crear una excitación es necesario introducir un déficit de carga. El exceso de carga puede crearse insertando en el sistema un flujo magnético Φ

Aquí, nuevamente es indispensable la geometría que posee un Anión (figura 1.5). Comenzaremos insertando un flujo cuántico $\Phi = q\Phi_0$, donde q comienza en cero y termina en uno, de tal manera que al final del proceso el máximo flujo insertado es $\Phi_0 = hc/e$. Advertimos nuevamente, como en capítulo 1, que la inserción del flujo es adiabática en todo el proceso. Cuando $q = 1$, es decir cuando termina el proceso de inserción del flujo, los estados individuales de los niveles de Landau más bajos han adquirido una fase. Esta fase nuevamente es la fase de Aharonov–Bohm, $\alpha = 2\pi$ [30], esta fase hace que los estados individuales adquieran una unidad más de momento angular, es decir [27, 25, 35, 34],

$$z_i^m e^{-\frac{1}{4l_B^2}|z_i^2|} \longrightarrow z_i^{m+1} e^{-\frac{1}{4l_B^2}|z_i^2|}. \quad (2.76)$$

En este punto una pregunta interesante es ¿Qué sucede con los valores de energía de los estados más bajos de Landau? Se podría pensar que la fase agregada, la cual viene de una transformación de calibre realizada sobre el potencial vectorial, cambia los autovalores de energía. Pero, para mantener el valor propio de energía inalterado, se puede recalibrar nuevamente el Hamiltoniano. En realidad experimentalmente no es posible [34]. Por tanto, después de agregada la fase, el nuevo estado posee un valor de energía diferente, y existe ahora, un nuevo estado en $m = 0$. Si se remueve el flujo cuántico el estado $m = 0$ desaparece. Esto nos hace pensar que la función del flujo cuántico es la de aumentar o disminuir el valor del momento angular m . Además, el aumento y decremento del valor del momento angular implica que en el proceso de transferencia del estado m al estado $m + 1$, ó viceversa, implica una transferencia de energía, esto sostiene la idea de que el sistema sea incompresible, y qué estos estados corresponden a las excitaciones que se quieren crear en el sistema.

Como se menciono antes, las excitaciones elementales son el resultado de la creación de un exceso de carga. Para calcular esta carga nos valemos de la ley de inducción de Faraday. Debido, a que la variación temporal del flujo cuántico debe generar en el sistema un campo eléctrico azimutal como se muestra en la figura 2.4, explícitamente

$$\oint_C d\vec{l} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.77)$$

Aquí, \hat{E} es el campo eléctrico azimutal creado por el flujo cuántico. Como el sistema es incompresible, la conducción sin disipación es favorable, esto hace que las componentes diagonales del tensor de conductividad y resistividad sean nulas, además, el campo

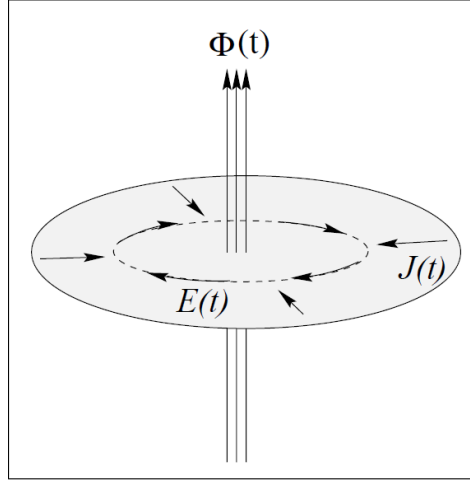


FIGURA 2.4: Construcción de una cuasipartícula por medio del estado de Laughlin. El cambio temporal del flujo cuántico genera un campo eléctrico azimutal, el cual, crea una corriente radial. Al final del proceso de inserción del flujo, adiabáticamente, la carga νe fluye hacia el interior (ó exterior) de la región, dependiendo del signo [25].

eléctrico azimutal crea una densidad de corriente, tal que, este campo se puede escribir como

$$\vec{E} = \rho_{xy} \vec{J} \times \vec{z}, \quad (2.78)$$

aquí \vec{J} es la corriente radial de los electrones. Con esto, la expresión (2.77) se convierte en

$$\rho_{xy} \oint_c \vec{J}(\vec{z} \times d\vec{l}) = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}, \quad (2.79)$$

la integral alrededor de todo el contorno da la corriente total que circula sobre la geometría, así,

$$\rho_{xy} \frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2.80)$$

Cuando el proceso termina, es decir, cuando $\Phi = \Phi_0$ el déficit de carga en el sistema es

$$q = \frac{\hbar}{c} \sigma_{xy}. \quad (2.81)$$

Pero, como $\sigma_{xy} = \nu e^2 / \hbar$ tenemos³ [25]

$$q = \nu e. \quad (2.82)$$

³Aquí, debe ser claro que la resistividad del sistema se puede escribir en la misma forma analítica encontrada en el capítulo anterior. Lo único que cambia es que el factor de llenado ν puede ser también un número fraccional.

Así, la carga transportada por las excitaciones es fraccional, debido a la existencia ν como un número fraccionario. Este déficit de carga es el correspondiente a las excitaciones elementales del sistema. Para diferenciar cuál de estas es cuasiagujero o cuasielectrón, se proponen expresiones analíticas para cada una de estas excitaciones, con la única diferencia que el déficit de carga es positivo (cuasiagujero) o negativo (cuasielectrón). La expresión para el cuasiagujero es [4]:

$$\varphi_m^+ = \exp\left(-\frac{1}{4l_B^2} \sum_i |z_i|^2\right) \prod_i (z_i - z_0) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m, \quad (2.83)$$

la esencia de esta función de onda es la creación de un cero en la función, dado por el factor $\prod_i (z_i - z_0)$. El flujo cuántico atraviesa al sistema por z_0 , con lo cual, el déficit de carga se puede calcular dando como resultado la expresión (2.82).

La función de onda para el cuasielectrón está dada en la forma [4]

$$\varphi_m^- = \exp\left(-\frac{1}{4l_B^2} \sum_i |z_i|^2\right) \prod_i \left(\frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{z_0}{l_B^2}\right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m. \quad (2.84)$$

De igual manera esta partícula posee una carga dada por la expresión (2.82), obviamente del signo contrario. El análisis físico de esta partícula va en el factor $\prod_i \left(\frac{\partial}{\partial z_i} - \frac{z_0}{l_B^2}\right)$. Este factor crea nuevamente un cero por el cual atraviesa el flujo cuántico, pero, al final del proceso el estado no es z^{m+1} sino z^{m-1} , de ahí, que el exceso sea negativo [4, 34, 35].

Por último podemos mostrar rápidamente que estos estados son Aniones. En este capítulo, ilustraremos solamente un cálculo superfluo que muestra que tanto el espín, como la estadística, son fraccionales. No obstante, en los capítulos posteriores daremos un tratamiento más detallado.

El espín debe ser fraccional, ya que como se estudiará en el capítulo 3 para un Anión este se define como [34, 35]

$$j = \frac{q\Phi}{4\pi} = \frac{e}{m} \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{m}, \quad (2.85)$$

donde $\Phi = 2\pi/e$ es el flujo característico de las excitaciones. Igualmente, la estadística para un Anión debe poseer un parámetro θ como se mostrará en el capítulo 3, dado por

$$\theta = 2\pi j = \frac{1}{m}, \quad (2.86)$$

la cual también muestra ser fraccional [34, 35]

2.7. Observaciones.

Una de los más grandes logros aplicativos del efecto Hall cuántico fraccionario es el cálculo preciso de la constante de estructura fina [26]. Sin embargo, este efecto prueba la existencia definitiva de las cuasipartículas en sistemas de dos dimensiones. Aquí, queremos resumir algunos de los análisis más importantes realizados en el capítulo.

- El comportamiento dinámico, es enmarcado única y exclusivamente de los niveles más bajos de Landau.
- Estos estados son obtenidos de la solución al problema relativo de dos, tres y N electrones, y estas soluciones se comportan como partículas libres, ya que el término Coulombiano se interpreta como una energía de ligadura entre los electrones.
- La generalización para N partículas cumple con las exigencias planteadas y logra demostrar la existencia de los factores de llenado fraccional.
- En el régimen fraccional, el concepto de incompresibilidad se preserva, ya que existe una brecha de energía entre cada nivel en el conjunto de los más bajos de Landau, por tanto el potencial químico se mantiene constante en cada factor de llenado, y por tanto favorezca la conducción sin pérdida de energía en el mismo sentido a lo analizado en el capítulo anterior.
- El efecto Hall cuántico fraccional muestra la existencia de partículas cuya carga y espín son fraccionales. Esto hace pensar que estas partículas deben obedecer un estudio alterno en cuanto a su vista cuántica y estadística, es decir, la teoría de Aniones.

Capítulo 3

Aniones: La teoría del mundo bidimensional fraccional.

Al mismo tiempo que el mundo de la física vislumbro la manifestación cuántica del efecto Hall, teóricamente se estaba estudiando las bases físicas y matemáticas que lograron detallar con éxito el comportamiento dinámico y estadístico del mundo de dos dimensiones. En 1983, Wilczek denominó Anión (Anyon, “ni lo uno no lo otro”) a las partículas que, en efecto, se adecuaban a las exigencias fisicomatemáticas que se necesitaban para describir el espacio bidimensional. En concreto, los Aniones son partículas que se identifican por tener carga y espín fraccional, además, se caracterizan por interpolar entre los Bosones y los Fermiones (de ahí, el nombre propuesto por Wilczek), por eso, bajo ciertas condiciones el análisis estadístico se realiza mediante la estadística de Bose –Einstein ó la de Fermi –Dirac. Este capítulo estará centrado en el estudio de los conceptos físicos y matemáticos más sobresalientes de la teoría de Aniones.

3.1. ¿Por qué es necesario espín fraccional?

En física, el espín proporciona la medida de momento angular intrínseco característico de cada partícula. En mecánica cuántica tridimensional, las componentes espaciales de espín cumplen con las reglas generales de conmutación de momento angular, el cual sostiene que

$$\left[\hat{S}_i, \hat{S}_j \right] = i\epsilon_{ijk} \hat{S}_k, \quad (3.1)$$

donde ϵ_{ijk} es el tensor completamente antisimétrico de Levi- Civita [42]. Esta álgebra restringe los posibles valores propios de estos operadores en tres dimensiones [35, 34, 42].

Siguiendo a Sakurai [42] se puede mostrar que los valores propios de momento angular permitidos en tres dimensiones son:

$$s = \frac{\text{entero}}{2}. \quad (3.2)$$

Mostrando que en el mundo tridimensional solamente es posible tener valores enteros (Bosones) ó semi enteros (Fermiones) de momento angular de espín.

¿Y la analogía en dos dimensiones? A diferencia de tres dimensiones, en dos dimensiones no existe análogo de álgebra no conmutativa, debido a que bidimensionalmente el único generador de momento angular de espín es \hat{S}_3 , y este conmuta consigo mismo. Esto hace que no existan restricciones en los valores de momento angular de espín, es decir, se puede tener cualquier (fraccional) valor de momento angular de espín.

3.2. ¿Por qué es necesaria una estadística fraccional?

En la sección anterior se argumentó por qué en dos dimensiones a diferencia de tres, no existen restricciones en los valores de momento angular de espín. El objetivo, de mostrar cuales son los posibles valores que debe ostentar el espín radica en la profunda relación que tiene este junto con la estadística. Por ejemplo, en tres dimensiones las partículas que poseen espín semi entero son estudiadas con la estadística de Fermi –Dirac, mientras, que las partículas que ostentan espín entero son examinadas con la estadística de Bose –Einstein. Por tanto, si en dos dimensiones las partículas muestran valores fraccionales de momento angular de espín, lo más simple, es pensar que la estadística en este contexto debe ser reconsiderada.

En esta sección, mostraremos únicamente la construcción matemática de la estadística para un sistema bidimensional, en la siguiente sección exhibiremos que esta estadística, o sea, la estadística de los Aniones es simplemente un fenómeno de transmutación.

El concepto de estadística en el contexto cuántico hace referencia a la fase acumulada por la función de onda de las partículas cuando estas son intercambiadas, es decir, permutadas. Pero, surge un problema en esta definición. Si las partículas son idénticas, la palabra permutar no tiene sentido, esto ya que, cuando se permutan las partículas en un sistema indistinguible el sistema obtenido es exactamente igual al sistema que se tiene sin permutar. Esto nos hace pensar, que el concepto de estadística bajo la condición de partículas idénticas debe ser redefinido. De hecho, se soluciona el problema redefiniendo que el intercambio debe ser adiabático [35, 34]. Y a pesar, de que en tres y más dimensiones, los dos conceptos son equivalentes, en dos dimensiones son totalmente distintos.

Así, en lo que resta de esta sección, ilustraremos, por qué en dos dimensiones los dos conceptos difieren y, además, concluiremos que la segunda concepción es la adecuada para estudiar la estadística de un sistema bidimensional. Aquí, aunque el argumento propuesto para este espacio configuración esta hecho por Leinnas y Myrheim [10], seguiremos el tratamiento dado por Khare [35] y Rao [34].

Supongamos, que existe una partícula en una posición \vec{r} en un espacio X . Ahora, si existen N partículas idénticas se podría pensar que el espacio de configuración para estas es X^N , en el mismo sentido al tratamiento clásico de la estadística [43]. Y aunque localmente es verdad, globalmente no es cierto. Para ver esto, consideremos el punto

$$\vec{r} = (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N), \quad \vec{r} \in X^N, \quad (3.3)$$

donde $\vec{r}_i \in X$ para $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Ahora, si el punto \vec{r}' en X^N es obtenido por una permutación p a los índices de las posiciones \vec{r} la nueva posición esta dada por

$$\vec{r}' = p(\vec{r}) = (\vec{r}_{p^{-1}(1)}, \vec{r}_{p^{-1}(2)}, \vec{r}_{p^{-1}(3)}, \dots, \vec{r}_{p^{-1}(N)}). \quad (3.4)$$

Pero, por el hecho de ser las partículas idénticas, los puntos (3.3) y (3.4) describen la misma configuración. Así, la verdadera configuración espacial debe ser X^N/S_N , donde S_N es la acción del grupo de simetría. Este grupo debe ser finito y es obtenido de las permutaciones de las N partículas. El espacio X^N/S_N es obtenido identificando los puntos en X^N que representan la misma configuración física [35]. Este espacio es localmente isomorfo a X^N ,¹ excepto, en sus puntos singulares, aunque, globalmente estos dos espacios son distintos. Por ejemplo, mientras que en el espacio X^N existen puntos regulares cuando cada punto es regular en X , estos puntos son singulares en X^N/S_N , ya que, estos corresponden a posiciones coincidentes de dos o más partículas. Esto nos lleva a concluir que si se quiere estudiar la fase acumulada por el cambio en las partículas, se debe evitar la intersección de trayectorias, es decir, eliminar los puntos coincidentes ($\vec{r}_1 \neq \vec{r}_2 \neq \vec{r}_i$ en X^N/S_N) con el objeto de observar cuando las partículas han sido intercambiadas o no [35, 34].

Vale anotar, que cada partícula posee un vector \vec{r} en el espacio Euclideo d - dimensional. Al tener un conjunto de N partículas es conveniente definir el vector de centro de masa

$$\vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i, \quad \vec{r}_i \in R^d, \quad (3.5)$$

¹En matemáticas, un isomorfismo es un tipo especial de homomorfismo. Un homomorfismo es una función que preserva las estructuras algebraicas entre dos espacios X y Y , los cuales se unen por una aplicación f . Si el homomorfismo es sobreyectivo esta función es un isomorfismo.

aquí \vec{r}_i es la posición de la i -ésima partícula en el espacio de configuración. Una característica importante del vector de centro de masa es que es invariante bajo la aplicación de S_N [35]. O sea, la permutación de las posiciones de las partículas no cambia en lo absoluto la posición de \vec{R} en el espacio de configuración. Así, para estudiar las trayectorias en el espacio es conveniente definir un espacio alterno en el cual se puede estudiar la fase adquirida por el intercambio. Para, esto escribamos el espacio de configuración como el producto cartesiano

$$\frac{X^N}{S_N} = R^d \otimes r(d, N), \quad (3.6)$$

donde R^d es el espacio abarcado por la posición de centro de masa \vec{R} y $r(d, N)$ es el espacio relativo. El espacio relativo es obtenido del espacio Euclideo R^{Nd-d} identificando los puntos que se encuentran conectados a través de la aplicación de S_N [35].

En este punto, por simplicidad analicemos el espacio de configuración para dos partículas ($N = 2$), la generalización para N partículas es construida con base a estos resultados.

En el caso $N = 2$ el espacio relativo, $r(d, 2)$, posee un punto singular $\vec{r} = 0$. Con esto en cuenta el producto cartesiano (3.6) puede ser escrito en la forma

$$\frac{X^2}{S_2} = R^d \otimes \frac{\{R^d - \{0\}\}}{Z_2}. \quad (3.7)$$

El factor $R^d - \{0\}$ nos permite omitir la coordenada relativa $\vec{r} = 0$, es decir, elimina los puntos singulares, y Z_2 es el grupo de números 1, -1 correspondientes al grupo de permutaciones. De esta forma, al dividir este factor por Z_2 es identificado en el espacio la posición $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ con su respectivo negativo $-\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Como hemos puntualizado, la idea de todo este tratamiento es mostrar cual es la diferencia existente entre tres y más dimensiones, con el caso bidimensional, en cuanto a la fase adquirida por el intercambio de partículas. La única manera de comparar estos dos casos es observando cómo son las posibles trayectorias o caminos en estos dos casos, así, examinemos dos casos de dimensiones d .

3.2.1. El caso $d \geq 3$

En este caso el espacio de configuración es la superficie de la esfera $(d - 1)$ dimensional con los puntos diametralmente opuestos identificados. Para conocer la fase adquirida por la función de onda cuando las partículas son intercambiadas, se deben clasificar los posibles caminos en el espacio de configuración, o sea, en el espacio relativo. Para $d \geq 3$ los posibles caminos se muestran en la figura 3.1.

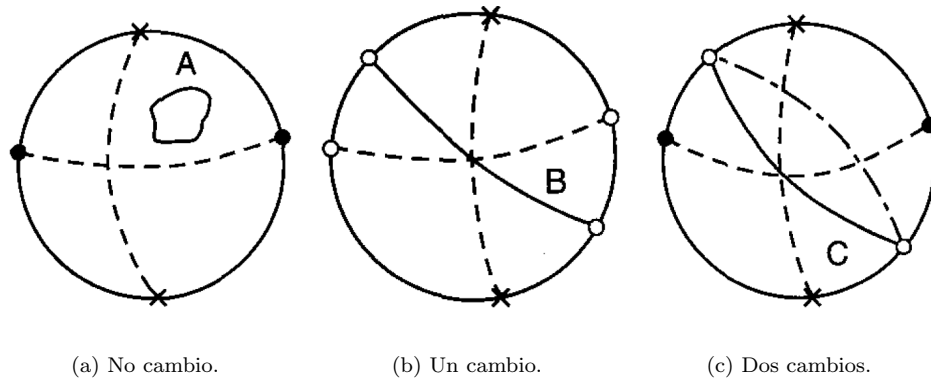


FIGURA 3.1: Posibles caminos para el intercambio entre partículas en tres y más altas dimensiones. Solo existen dos tipos de caminos en estas dimensiones, correspondientes a un cambio y no cambio. Con estos dos tipos de trayectorias solo es posible definir la estadística Fermionica o Bosonica [35]. Los puntos unidos mediante la línea punteada representan los puntos diametralmente opuestos. Los caminos A y B se muestran mediante la línea continua, el camino C se traza con la línea continua y la línea semipunteada.

La figura 3.1(a) muestra el movimiento de las partículas alrededor del camino cerrado A . Este camino no genera cambio alguno en la función de onda debido a que puede contraerse a un punto. La figura 3.1(b) envuelve el cambio de dos partículas como van de un punto a su diametralmente opuesto por medio del camino B . Este camino genera una fase no trivial en la función de onda, ya que, esta trayectoria no puede contraerse a un punto. El caso mostrado en la figura 3.1(c) envuelve dos cambios, formando un camino cerrado C que puede ser contraído a un punto. Por ende, estos dos cambios no generan una fase en la función de onda. Teniendo en cuenta esto, en $d \geq 3$ es posible definir trayectorias correspondientes a un cambio y no cambio. Así, si η es la fase acumulada por un cambio, η^2 es la fase acumulada por dos cambios al ser este igual a la unidad en estas dimensiones solamente se puede adquirir dos valores en la fase $\eta = \pm 1$. Por eso, en $d \geq 3$ solo es posible tener la estadística de Bose–Einstein y Fermi–Dirac.

3.2.2. El caso $d = 2$.

Para este caso el espacio de configuración es un círculo centrado en el origen de coordenadas. Los posibles caminos se muestran en la figura 3.2.

En la figura 3.2(a) se muestra el camino A el cual no envuelve cambio en la función de onda, debido a que puede contraerse a un punto. La figura 3.2(b) muestra un cambio en las dos partículas alrededor del camino B el cual no es contraíble a un punto, ya que los puntos finales son fijos. La verdadera sorpresa se encuentra en la figura 3.2(c), este camino envuelve dos cambios (realizados a favor o en contra de las manecillas del reloj

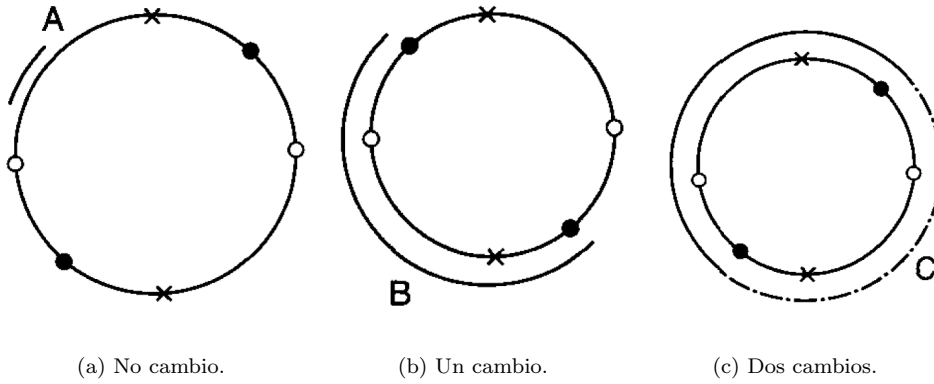


FIGURA 3.2: Posibles caminos para el intercambio entre partículas en dos dimensiones. Aquí, la fase adquirida por la función de onda puede adquirir cualquier valor, debido a que los puntos no son contraíbles a un punto. Por ende, existe libertad de poder elegir cualquier estadística [35].

alrededor de C), pero, a diferencia de $d \geq 3$ esta trayectoria no es contraíble a un punto. De hecho, los caminos no son contraíbles en $3, 4, \dots, n$ cambios. De nuevo, si η es la fase acumulada por un cambio, η^2 es la fase adquirida por dos cambios y así sucesivamente, como la norma de la función debe permanecer inalterada bajo el intercambio, la fase η puede escribirse como

$$\eta = \exp(i\theta), \quad (3.8)$$

donde θ es el parámetro estadístico [34] que necesariamente debe ser un racional veces π , de tal forma, que la norma bajo n cambios quede invariante. Esto explica porque se puede tener cualquier estadística en dos dimensiones.

La distinción entre los espacios de configuración en tres y dos dimensiones viene expresada en el hecho que al haber sido eliminado los puntos coincidentes hace que en dos dimensiones el espacio sea múltiplemente conectado, mientras que en tres dimensiones sigue siendo simplemente conexo [34, 35]. Esta condición hace que en dos dimensiones sea posible definir clases de caminos topologicamente inequivalentes que enrollen continuamente el origen, esto no es posible en tres dimensiones. En el lenguaje matemático esta diferencia esta expresada por el primer grupo de homotopía. Este grupo está formado por todos los caminos inequivalentes, es decir, caminos que no son deformables el uno al otro. Explícitamente el grupo de homotopía para dos dimensiones es

$$\pi_1(d=2) = \pi_1\left(\frac{R^2 - \{0\}}{Z_2}\right) = Z, \quad (3.9)$$

donde Z el grupo de números enteros bajo la adición [35]. La expresión (3.9) clasifica los caminos con un número entero $n \in Z$, que determina cuantas veces se ha enlazado

el origen. Con esto, la fase adquirida por la función de onda es de la forma η^n . De ahí la posibilidad de tener cualquier estadística en dos dimensiones. Para tres y más dimensiones el primer grupo de homotopía está dado por [35]

$$\pi_1(d \geq 3) = \pi_1\left(\frac{R^d - \{0\}}{Z_2}\right) = Z_2. \quad (3.10)$$

Esta expresión cataloga solamente dos clases de caminos debido a que Z_2 tiene solo dos elementos, por ende, la estadística debe ser Fermionica o Bosonica.

Por último, deberíamos preguntarnos por qué es necesario que en dos dimensiones el intercambio debe ser adiabático. Esta condición viene implícita de la libertad de poder adquirir cualquier fase. De hecho, la diferencia entre el intercambio de números cuánticos y el transporte adiabático fue un problema matemático cuya solución está dada por la expresión [44, 45, 46]

$$\pi_1\left(\frac{X_N}{S_N}\right) = \begin{cases} P_N, & \text{para } d \geq 3, \\ B_N, & \text{para } d = 2, \end{cases} \quad (3.11)$$

aquí P_N es el grupo de permutaciones y es el adecuado para el primer concepto de estadística, mientras que, B_N es el grupo de Braid asociado al transporte adiabático de las partículas. El grupo de Braid es un grupo infinito que analiza la fase adquirida por el intercambio a través del trenzado de las líneas de mundo de las partículas. Vale anotar que el grupo de permutaciones es un subgrupo finito del grupo de Braid [35].

3.3. Realización dinámica de la teoría de Aniones.

Teniendo en cuenta, la construcción un tanto abstracta con el objeto de mostrar las diferencias matemáticas existentes entre el formalismo estadístico tridimensional y bidimensional, es hora de sentar las bases y conceptos físicos que permiten comprender el comportamiento de un sistema cuántico en un mundo de dos dimensiones.

3.3.1. Flujo magnético y momento angular.

En la sección 3.1 se mencionó que los valores de momento angular no tienen restricción alguna en dos dimensiones. Esto se puede mostrar esto mediante un modelo físico simple [8].

Supóngase, que existe una partícula con carga q en el plano (por ejemplo, $x - y$) la cual orbita alrededor de un solenoide por el cual atraviesa un flujo magnético Φ , este

se encuentra en dirección perpendicular al plano de movimiento de la partícula (eje z). Cuando no circula corriente por el solenoide, el momento angular en la dirección z se encuentra cuantizado en unidades enteras², es decir [8],

$$L_z = \text{entero}. \quad (3.12)$$

Pero, cuando la corriente comienza a circular por el solenoide, la partícula experimenta, de la ley de Faraday [8], un campo eléctrico azimutal proporcional al cambio del flujo en el solenoide, dado por

$$\vec{E} = -\frac{\dot{\Phi}}{2\pi|\vec{r}|}(\hat{j} \times \vec{r}), \quad (3.13)$$

aquí $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Un efecto importante de la circulación de corriente en el solenoide es el cambio en el valor del momento angular, debido a que la partícula experimenta un torque proporcional al campo eléctrico (3.13), expresado como

$$\tau = \frac{dL_z}{dt} = \vec{r} \times (q\vec{E}) = -\frac{q}{2\pi}\dot{\Phi}. \quad (3.14)$$

De aquí, se puede mostrar fácilmente que cuando el flujo atraviesa el solenoide, o sea, cuando la corriente circula por este, el momento angular de la partícula se ha corrido una cantidad

$$\Delta L_z = -\frac{q\Phi}{2\pi}, \quad (3.15)$$

lo que permite concluir que bajo el modelo de circulación del flujo Φ , el espectro de momento angular en dirección z para la partícula cargada toma la forma

$$L_z = \text{entero} - \frac{q\Phi}{2\pi}. \quad (3.16)$$

Este mismo resultado puede ser obtenido de una manera un tanto más formal. A pesar de que el campo magnético fuera del solenoide es nulo, en el contexto cuántico, el potencial no lo es [30], de esta manera las rotaciones experimentadas por la partícula alrededor del solenoide, es decir, el cambio del ángulo azimutal φ pueden ser medidas con el operador de momento covariante [8],

$$L_z = -i\partial_\varphi - qA_\varphi, \quad (3.17)$$

donde $A_\varphi = \Phi/2\pi$ es el potencial vectorial azimutal experimentado por la partícula cargada. Este potencial genera en las funciones de onda una dependencia de la parte

²Esto significa que la partícula es Bosonica, ya que el momento angular es entero. Este análisis prevalecerá en el estudio del modelo de Anión.

azimutal expresada por:

$$\Psi'_n = e^{in\varphi} \Psi_n. \quad (3.18)$$

Para que esta función sea unievaluada, exigimos que n sea un entero. Con la función de onda transformada, los valores propios del momento angular covariante (3.17) deben ser

$$L_z \Psi'_n = \left(n - \frac{q\Phi}{2\pi} \right) \Psi'_n, \quad (3.19)$$

lo cual, concuerda con el espectro anteriormente obtenido ec.(3.16). El potencial azimutal, sin embargo, puede ser removido por una transformación de calibre [9]

$$A'_i = A_i - \partial_i \Lambda, \quad (3.20)$$

donde $\Lambda = \Phi\varphi/2\pi$. Bajo esta transformación las funciones adquieren la forma

$$\Psi'(\varphi) = e^{-iq\Phi\varphi/2\pi} \Psi(\varphi). \quad (3.21)$$

Pero, como el potencial azimutal ha sido eliminado, la función de onda (3.21) corresponde a la función de onda de una partícula libre, ya que Ψ es periodica con un giro, $\varphi \rightarrow \varphi + 2\pi$, Ψ' cambia como

$$\Psi'(\varphi + 2\pi) = e^{-iq\Phi} \Psi'(\varphi). \quad (3.22)$$

Esta condición indica que las funciones de onda sean $\Psi'(\varphi) = e^{im\varphi} \Psi(\varphi)$, permitiendo que los valores m sean identificados como el espectro de momento angular cuyos valores son

$$m = \text{entero} - \frac{q\Phi}{2\pi}. \quad (3.23)$$

3.3.2. El modelo “Tubo de flujo”.

La imagen física utilizada en la sección anterior, de una partícula cargada orbitando alrededor de un flujo magnético, se ha convertido en el modelo más adecuado para el Anión. Este modelo es apropiado ya que permite demostrar que el Anión interpola entre los Bosones y los Fermiones. Para esto, sola basta con observar el espectro de valores propios de momento angular (3.23), de ahí tres opciones

- Si $m = \text{entero} - q\Phi/2\pi$ es semientero, el modelo es un Fermión, por tanto, debe ser estudiado mediante la estadística de Fermi –Dirac.

- Si $m = \text{entero} - q\Phi/2\pi$ es entero, el modelo es un Boson, así, debe ser analizado con el formalismo de Bose- Einstein.
- Si m no es semientero, ni entero, entonces el formalismo de estudio es realizado mediante Aniones y su análisis es dado por una estadística fraccional.

El objetivo más importante de este modelo es mostrar por qué la estadística de los Aniones es un fenómeno de transmutación, es decir, que bajo ciertas condiciones el estudio estadístico del sistema es susceptible de realizarse mediante Bose- Einstein ó Fermi-Dirac.

En el régimen bidimensional la estadística es estudiada del intercambio adiabático entre las partículas. Para nuestro caso particular consideremos el término del Lagrangiano de interacción estadístico [35]

$$L_s = h\alpha \frac{d\varphi}{dt}, \quad (3.24)$$

donde α está relacionado con el parámetro estadístico $\alpha = \theta/\pi$ y φ es nuevamente el ángulo azimutal. Este término representa la interacción entre dos partículas idénticas (Bosones o Fermiones). El efecto de la interacción de las dos partículas idénticas mediante el término estadístico (3.24) hace que las funciones de onda de las partículas adquieran una fase dada por [35]

$$\exp\left(\int_a^b L_s dt\right) = \exp(-i\alpha(\varphi(b) - \varphi(a))). \quad (3.25)$$

Esta fase mide el ángulo relativo entre el intercambio de dos partículas, pero, como solo contribuyen los caminos cuyos puntos finales sean fijos, existe una restricción en el ángulo relativo medido. Así, el modulo del ángulo relativo debe ser π , de tal manera, que la fase adquirida depende del parámetro estadístico θ y con la restricción impuesta sobre la medida del ángulo ($0 \leq \theta \leq \pi$), la fase adquirida puede tomar cualquier valor, de hecho, puede ser Fermión ($\theta = \pi$) o Boson ($\theta = 0$).

De esta manera, la función del término estadístico es implementar un fenómeno de transmutación. De hecho, el problema de transmutación se puede observar mejor si vemos el Lagrangiano de dos partículas idénticas no interactuantes, ya sean Fermiones o Bosones

$$L = \frac{1}{2}m \left(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 \right), \quad (3.26)$$

si le añadimos el término de interacción (3.24) el Lagrangiano total del sistema es

$$L_T = \frac{1}{2}m \left(\dot{\vec{r}}_1 + \dot{\vec{r}}_2 \right) + h\alpha \frac{d\varphi}{dt}. \quad (3.27)$$

Con este nuevo Lagrangiano existen dos posibilidades de entender el problema:

- Como el de dos Fermiones o Bosones interactuantes.
- Como el de dos Aniones no interactuantes.

Siguiendo la idea al principio de capítulo para solucionar el problema de dos partículas definimos los vectores de momento y posición de centro de masa y movimiento relativo:

$$\begin{aligned}\vec{R} &= \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}, & \vec{P} &= \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{2}, \\ \vec{r} &= \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{2}, & \vec{p} &= \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}.\end{aligned}\tag{3.28}$$

En términos de estos vectores el Lagrangiano total del sistema (3.27) se puede escribir como

$$L_T = L_{CM} + L_r = m\dot{\vec{R}}^2 + \frac{m}{4}\dot{\vec{r}}^2 + h\alpha\frac{d\varphi}{dt},\tag{3.29}$$

de ahí

$$\begin{aligned}L_{CM} &= m\dot{\vec{R}}^2, \\ L_r &= \frac{m}{4}\dot{\vec{r}}^2 + h\alpha\frac{d\varphi}{dt},\end{aligned}\tag{3.30}$$

manifestando que solamente es necesario estudiar el problema relativo, ya que, contiene la información estadística del sistema y, en sí, de la transmutación. El centro de masa se comporta como una partícula libre y es invariante bajo la acción del término de interacción estadístico.

Si generalizamos al caso de N partículas tenemos

$$L_T = \frac{m}{4} \sum_{i=1}^N \dot{\vec{r}}^2 + h\alpha \sum_{i \neq j}^N \frac{d\phi_{ij}}{dt},\tag{3.31}$$

donde $\phi_{ij} = \arctan((y_i - y_j)/(x_i - x_j))$ es el ángulo relativo entre la partícula i y la j . La generalización muestra que el problema se puede visualizar como el problema de N Aniones libres ó N Fermiones o Bosones interactuantes, el problema surgido de esta conclusión radica en que no es trivial la resolución del problema de un gas de N partículas idénticas interactuantes [35, 34].

3.4. Implementación física de la estadística fraccional.

Para implementar físicamente el anterior modelo se debe asignar a las partículas una carga y un flujo ficticio. El hecho, de que estos nuevos elementos sean ficticios va encaminado a que este mecanismo no debe afectar al electromagnetismo clásico [35].

La implementación física del modelo sigue así. Imagínese, que a una partícula se le asigna un función delta de flujo mediante el potencial vectorial ficticio³

$$a_i(\vec{r}) = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\epsilon_{ij} r_j}{|\vec{r}|^2}, \quad (3.32)$$

que en componentes rectangulares está dada como

$$a_x = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad a_y = -\frac{\Phi}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (3.33)$$

o en coordenadas polares

$$a_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi} \quad a_r = 0. \quad (3.34)$$

Obsérvese que la componente azimutal del potencial ficticio posee la misma forma del potencial que se utilizó en el cálculo de los valores propios del momento angular de espín para el compuesto carga- flujo. Realmente, la carga q de la partícula orbitando alrededor del solenoide es la carga ficticia es la carga del Anión, pero, como la inserción del flujo es dependiente del tiempo (por ser insertado adiabáticamente) la carga en el modelo también lo debe ser. Esto se refleja en el torque (3.14) experimentado por la partícula, ya que, de haber estado definido como

$$\dot{L}_z = \frac{q\dot{\Phi}}{2\pi}, \quad (3.35)$$

debe ser modificado por

$$\dot{L}_z = \frac{q(t)\dot{\Phi}}{2\pi}. \quad (3.36)$$

Pero como $q(t) = a\Phi(t)$ para alguna constante a , se puede volver a calcular el valor del corrimiento del momento angular dando como resultado

$$\Delta L_z = -\frac{a\Phi^2}{2\pi} = -\frac{q\Phi}{4\pi}. \quad (3.37)$$

³El potencial y la carga son ficticios con el objeto de ser interpretados únicamente como mecanismos matemáticos.

Este valor corresponde al momento angular de espín propio del Anión [34]. Ahora, la intensidad de campo $f_{ij} = \partial_i a_j - \partial_j a_i$ desaparece en todo el espacio, excepto en el origen donde la función delta de flujo es singular. Así el flujo puede calcularse como

$$\int \vec{a}_i \vec{dl} = \Phi. \quad (3.38)$$

Este es el flujo que atraviesa perpendicularmente el plano de movimiento de la partícula. El hecho de que la intensidad desaparezca no deja de lado que los efectos en el sistema debido al potencial \vec{a} no sean tenidos en cuenta, como es bien sabido del efecto Aharonov-Bohm [30]. De hecho, cuando las partículas cargadas son sometidas a potenciales vectoriales la función de onda adquiere una fase anexa producida por la presencia de este potencial dada por [42]:

$$\exp\left(\int L_{int} dt\right) = \exp\left(\int \vec{a} \cdot \vec{v} dt\right) = \exp\left(\int \vec{a} \cdot \vec{dl}\right) = \exp(q\Phi\Delta\varphi/2\pi). \quad (3.39)$$

Este peso refleja que la contribución a los caminos es dada por la medida del ángulo abarcado por las partículas. De esta manera, se puede concluir que el modelo del potencial vectorial ficticio (3.32) es el componente físico que permite introducir la estadística fraccional ya que muestra que el espín del compuesto es fraccional ec.(3.37) y además, esta en concordancia con la fase adquirida por el término estadístico L_s ec.(3.24) ya que miden exactamente lo mismo.

Así mismo, se puede identificar el parámetro estadístico del Anión θ como $\theta = q\Phi/2$ para favorecer por completo que las fases adquiridas vienen de la evaluación del término $\alpha\Delta\varphi$ en (3.39) con $\alpha = \theta/\pi$ en las exponenciales, y la restricción de α viene dada por $0 \leq \alpha \leq 1$ de ahí que pueda ser Fermión ($\alpha = 1$) o Boson ($\alpha = 0$). Para complementar esto analicemos un ejemplo particular.

3.4.1. El problema de dos Aniones libres.

El Hamiltoniano para dos Aniones idénticos está dado por:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\vec{p}_1 - q\vec{a}_1)^2 + \frac{1}{2m} (\vec{p}_2 - q\vec{a}_2)^2, \quad (3.40)$$

donde se ha tomado $c = 1$. Los potenciales vectoriales \vec{a}_1 y \vec{a}_2 , dados por

$$\vec{a}_1 = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\hat{z} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^2} \quad \vec{a}_2 = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\hat{z} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{\|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|^2}, \quad (3.41)$$

hacen referencia a los potenciales en las posiciones de los compuestos 1 y 2 debidos a los flujos de los compuestos 2 y 1 respectivamente. [34]. Expresando el Hamiltoniano (3.40) en función de las coordenadas de movimiento de centro de masa y relativo (3.28) se tiene

$$\hat{H} = \frac{\vec{P}^2}{4m} + \frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{a}_{rel})^2, \quad (3.42)$$

donde

$$\vec{a}_{rel} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\hat{z} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^2}. \quad (3.43)$$

Entre tanto, el problema relativo que es sensible de tratarse como Fermión, Boson ó Anión se ha transformado en el movimiento de una partícula de masa $m/2$ que orbita alrededor de un flujo Φ a una distancia \vec{r} . Como el compuesto flujo -carga ha sido construido en su totalidad de campos Bosonicos, es decir, carga Bosonica alrededor de flujo Bosonico la función de onda debe cumplir la condición de simetría bajo el cambio, es decir [34, 35, 8]

$$\Psi_{rel}(r, \varphi + \pi) = \Psi_{rel}(r, \varphi), \quad (3.44)$$

trabajando en coordenadas polares.

Si realizamos una transformación de calibre al potencial relativo de la forma

$$\vec{a}_{rel} \longrightarrow \vec{a}'_{rel} = \vec{a}_{rel} - \vec{\nabla}\Lambda(r, \varphi), \quad (3.45)$$

donde $\Lambda = \phi\varphi/2\pi$,⁴ explícitamente, la transformación genera que en el sistema primado las componentes del potencial relativo sean

$$\begin{aligned} a'_{rel\varphi} &= a_{rel\varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\varphi} \left(\frac{\Phi\varphi}{2\pi} \right) = 0 \\ a'_{relr} &= a_{relr} = 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Es decir, la transformación elimina el potencial, por ende el Hamiltoniano (3.42) se convierte en

$$\hat{H} = \frac{\vec{P}^2}{4m} + \frac{1}{2m} \vec{p}^2, \quad (3.47)$$

⁴Obsérvese que esta transformación de calibre es la misma que se realizo en la sección anterior para derivar el espectro de valores momento angular.

el cual se reduce al Hamiltoniano de dos partículas libres. Sin embargo, las funciones de onda han adquirido una fase por parte de \vec{a}_{rel} , dada por

$$\begin{aligned}\Psi'_{rel}(r, \varphi) &= e^{-iq\Lambda}\Psi_{rel}(r, \varphi) \\ &= e^{-iq\phi\varphi/2\pi}\Psi_{rel}(r, \varphi).\end{aligned}\quad (3.48)$$

Esta función no es simétrica bajo el cambio $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ debido a

$$\begin{aligned}\Psi'_{rel}(r, \varphi + \pi) &= e^{-iq\Phi/2}\Psi'_{rel}(r, \varphi) \\ &= e^{-i\theta}\Psi'_{rel}(r, \varphi).\end{aligned}\quad (3.49)$$

Esto nos lleva a concluir que el problema de dos Aniones puede ser interpretado como el problema de dos partículas libres que adquieren una fase $e^{i\theta}$ bajo el intercambio. Con esto, el Hamiltoniano (3.47) describe el problema de dos modelos carga-flujo como Aniones con un parámetro estadístico $\theta = q\Phi/2$. También es posible relacionar este parámetro con el valor de espín de Anión (3.38) como

$$j = \frac{\theta}{2\pi}.\quad (3.50)$$

En la literatura la representación del problema libre ec.(3.47) es llamado el calibre de Anión, mientras que la representación interactuante ec.(3.42) es llamado el calibre de Boson.

La forma analítica de la función de onda para este problema puede expresarse como el producto de la función de onda solución correspondiente al centro de masa y la parte relativa. El problema para encontrar estas funciones es que el Hamiltoniano (3.47) es fácilmente soluble, pero la condición (3.49) no es trivial. Para resolver este problema trabajaremos el Hamiltoniano interactuante (3.42) que posee una condición de contorno Bosónica dada por la expresión (3.44).

Para el problema de centro de masa las funciones y autoenergías propias están dadas por:

$$\Psi_{CM} = \exp(i\vec{P} \cdot \vec{R}) \quad E_{CM} = \frac{\vec{P}^2}{4m}.\quad (3.51)$$

Para encontrar la función de onda del problema relativo expresemos el Hamiltoniano en coordenadas polares, de tal manera que la ecuación de valores propios está dada por

$$\left[-\frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{mr^2} \left(i \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{q\Phi}{2\pi} \right)^2 \right] \Psi_{rel}(r, \varphi) = E_{rel} \Psi_{rel}(r, \varphi).\quad (3.52)$$

Si proponemos una solución para el problema como el producto de una solución radial y una solución azimutal, es decir, $\Psi(r, \varphi) = R(r)Y_l(\varphi)$ se tiene:

Para la parte azimutal

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{q\Phi}{2\pi}\right)^2 Y_l(\varphi) = \lambda Y_l(\varphi), \quad (3.53)$$

cuya solución está dada por

$$Y_l(\varphi) = \exp -i\lambda\varphi, \quad (3.54)$$

donde los autovalores λ tienen la forma

$$\lambda = \left(l - \frac{q\Phi}{2\pi}\right)^2, \quad (3.55)$$

con l entero par. Con esto, la ecuación radial toma la forma

$$\left[-\frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{mr^2} \left(l - \frac{q\Phi}{2\pi}\right)^2\right] \Psi_{rel}(r, \varphi) = E_{rel} \Psi_{rel}(r, \varphi). \quad (3.56)$$

Definiendo $mE_{rel} = k^2$ la ecuación radial se puede reescribir como

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(l - \frac{q\Phi}{2\pi}\right)^2 + k^2\right) R(r) = 0. \quad (3.57)$$

La expresión (3.57) puede identificarse como la ecuación de Bessel cuya solución está dada por

$$R(r) = J_{|l - \frac{q\phi}{2\pi}|}(kr). \quad (3.58)$$

Con esto, la función de onda para el problema relativo en el calibre Bosonico esta dada por

$$\Psi_{rel}(r, \varphi) = e^{-il\varphi} J_{|l - \frac{q\phi}{2\pi}|}(kr).. \quad (3.59)$$

En el calibre de Anión la solución tiene la forma

$$\Psi_{rel}(r, \varphi) = e^{-i(l - \frac{q\phi}{2\pi})\varphi} J_{|l - \frac{q\phi}{2\pi}|}(kr). \quad (3.60)$$

La función (3.60) es completamente Anionica porque adquiere una fase de $q\Phi/2\pi$ bajo el cambio de φ a $\varphi + \pi$, es decir, bajo el intercambio de dos partículas.

La función de onda sin normalizar del problema total incluyendo la parte de centro de masa es

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{R}, \vec{r}) &= \Psi_{CM}(\vec{R})\Psi_{rel}(\vec{r}) \\ &= e^{-i\vec{P}\cdot\vec{R}} e^{-i(l-\frac{q\phi}{2\pi})\varphi} J_{|l-\frac{q\phi}{2\pi}|}(kr).\end{aligned}\tag{3.61}$$

Esta función de onda puede factorizarse en el producto de las funciones de onda de las posiciones originales \vec{r}_1, \vec{r}_2 solamente si $q\Phi/2\pi$ es entero ó semientero [34].

Capítulo 4

Aniones en el efecto Hall cuántico fraccional.

A pesar de que el mayor lucro de los Aniones esté concentrado en las teorías de campo y la superconductividad, el primer gran escenario para mostrar el potencial de esta teoría fue con la explicación de los estados excitados en el efecto Hall cuántico fraccional. Fue tal el éxito, que hasta el día de hoy se mantiene como uno de los más grandes victorias de la coalición entre las matemáticas y la física. Aquí, queremos mostrar como los estados excitados del efecto Hall cuántico fraccional son en efecto Aniones.

4.1. Cálculo de la carga.

En el capítulo 2 se mostró que la carga que ostentan las excitaciones de Laughlin son fraccionales, pero, existe una forma más elegante de calcularla teniendo en cuenta el transporte adiabático de una partícula.

En el capítulo 1 demostramos que las funciones de onda que son estudiadas con el modelo de una partícula cargada orbitando alrededor de un flujo, cuando este es insertado adiabáticamente, son multievaluadas, por lo cual, se debía realizar una reconfiguración en los números de onda para evitar esto. En el segundo capítulo, se utilizó de nuevo este modelo para generar las excitaciones del estado fundamental de Laughlin y se consiguió revelar que la carga eléctrica es fraccional. Entre tanto que en el tercer capítulo, se vio expresar que este modelo es el modelo dinámico de un Anión. Hasta el momento podemos concluir lo siguiente:

- Las funciones de onda de Laughlin que describen el efecto Hall cuántico fraccionario son multievaluadas.

- Si estas funciones son Aniones, deben además de ostentar carga fraccional, satisfacen una estadística fraccional.

Con esto, nuestro objetivo final será mostrar detalladamente si se satisface este requerimiento, teniendo en cuenta que las funciones en el efecto Hall cuántico fraccionario son multievaluadas.

4.1.1. La fase de Berry.

Para calcular la carga utilizamos la fase de Berry. La fase de Berry es una fase geométrica obtenida del refinamiento cuántico del teorema adiabático [47, 33, 35]. Este teorema plantea que si se varían lentamente los parámetros dinámicos en el Hamiltoniano, el valor propio de energía se mantiene inalterado, evitando cualquier salto de nivel energético en el sistema [48, 35]. Con esto, además de la fase dinámica usual $\int E(t)dt$, existe una fase anexa que se mantiene constante en el límite adiabático. Esta fase es observada únicamente en funciones de onda que se caracterizan por ser multievaluadas, como es el caso de las funciones de Laughlin por lo que nos permite calcular la carga. Esta posee la forma [48]:

$$\gamma = -i \int_{t_1}^{t_0} dt \left\langle \psi(t) \left| \frac{d}{dt} \right| \psi(t) \right\rangle. \quad (4.1)$$

Así, calculemos la fase de Berry para el cuasiagujero (2.83) obtenido en capítulo 2 dado por:

$$\Psi_m^+ = \exp \left(-\frac{1}{4l_B^2} \sum_i |z_i|^2 \right) \prod_i (z_i - z_0) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m, \quad (4.2)$$

donde z_0 es de nuevo la posición del flujo que crea el exceso de carga. Si se asume que el cuasiagujero es transportado adiabáticamente alrededor de una trayectoria cerrada Γ , el único parámetro dependiente del tiempo será z_0 .¹ Calculando la derivada temporal para el cuasiagujero (4.2) tenemos que

$$\frac{d}{dt} \Psi_m^+ = \left(\frac{d}{dt} \sum_i \ln(z_i - z_0) \right) \Psi_m^+, \quad (4.3)$$

de tal manera que la fase de Berry (4.1) toma la forma

$$\gamma = -i \int_{t_1}^{t_0} dt \left\langle \psi^+(t) \left| \left(\frac{d}{dt} \sum_i \ln(z_i - z_0) \right) \right| \psi^+(t) \right\rangle. \quad (4.4)$$

¹No es posible pensar que las posiciones z_i o z_j sean las variables dependientes del tiempo porque la aproximación adiabática ya no estaría presente.

Aquí, t_0 es el tiempo en el cual el cuasiagujero comienza a moverse alrededor de la trayectoria Γ y t_1 es el tiempo en el cual llega a su posición original [35].

Para resolver la integral (4.4) es conveniente definir la densidad electrónica del cuasiagujero

$$\rho(z) = \left\langle \psi^+(t) \left| \sum_i \delta(z - z_i) \right| \psi^+(t) \right\rangle. \quad (4.5)$$

Con esta densidad la integral (4.4) toma la forma

$$\begin{aligned} \gamma &= -i \int_{t_1}^{t_0} dt \int d^2z \left(\frac{d}{dt} \ln(z_i - z_0) \right) \rho(z) \\ \gamma &= -i \int d^2z \oint_{\Gamma} dz_0 \frac{1}{z_0 - z} \rho(z). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Asumiendo que $\rho(z)$ es una función regular podemos aplicar el teorema del residuo,² de tal manera, que la fase de Berry toma la forma

$$\gamma = -i \int_{<\Gamma} d^2z \oint_{\Gamma} dz_0 \frac{1}{z_0 - z} \rho(z) = 2\pi \int_{<\Gamma} d^2z \rho(z) = 2\pi N_{\Gamma}, \quad (4.7)$$

aquí, N_{Γ} es el número de electrones promedio que se encuentran en la región circundada por Γ . Este número corresponde al dejeneramiento de los estados de flujo definido en la sección 1.2. Del efecto Aharonov-Bohm se sabe que la fase adquirida cuando una carga q se mueve alrededor de una trayectoria cerrada es

$$\exp\left(-\frac{iq\Phi_{\Gamma}}{hc}\right), \quad (4.8)$$

por ende, igualando esta fase con la fase de Berry calculada para el cuasiagujero (4.7) tenemos que

$$2\pi N_{\Gamma} = \frac{q\Phi_{\Gamma}}{hc}, \quad (4.9)$$

teniendo en cuenta que N_{Γ} tiene la forma mostrada en la ecuación A.20, la carga del cuasiagujero es

$$q = \frac{e}{m}. \quad (4.10)$$

Mostrando que la carga que ostenta el cuasiagujero, en el efecto Hall fraccional no es entera. Este mismo argumento puede aplicarse para el cuasielectrón, ec.(2.84) con

²En variable compleja, el teorema del residuo permite calcular la integral de línea compleja de ciertas funciones especiales. Explícitamente, el teorema plantea que $\oint_C f(z)dz = 2\pi i \cdot$ suma de los residuos de $f(z)$ en C [38].

resultado $q = -e/m$. Aquí, concluimos que la carga que poseen las excitaciones en el efecto Hall cuántico fraccional son $\pm e/m$ cuando ν existe como un valor fraccional $\nu = 1/m$ con m impar.

4.2. Cálculo de la estadística.

Para evaluar el parámetro estadístico de los estados de Laughlin considérese dos cuasiagujeros ubicados en z_α y z_β . Estos dos cuasiagujeros han sido creados por un flujo que atraviesan perpendicularmente el sistema en las posiciones z_α y z_β . Supongamos también que las dos excitaciones se encuentran lo suficientemente alejadas para despreciar cualquier interacción entre ellos. La función de onda para los dos cuasiagujeros puede escribirse como [35]

$$\Psi_m^{+(z_\alpha, z_\beta)} = \prod_i (z_i - z_\alpha)(z_i - z_\beta) \Psi_m, \quad (4.11)$$

donde Ψ_m es nuevamente la función de onda del estado fundamental

$$\Psi_m = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \exp\left(-\frac{1}{4l_B^2} \sum_i |z_i|^2\right). \quad (4.12)$$

Entonces, si se transporta adiabáticamente el cuasiagujero z_α alrededor de una trayectoria cerrada Γ mientras la posición z_β se encuentra fija, la función de onda para los cuasiagujeros (4.11) adquiere una fase de Berry, que bajo los mismos argumentos expuestos en la sección anterior es

$$\gamma = 2\pi \int_{<\Gamma} d^2z \rho'(z), \quad (4.13)$$

donde $\rho'(z)$ es la densidad electrónica de los dos cuasiagujeros. La fase de Berry puede tener dos resultados:

- Si z_α no envuelve a z_β en el proceso de transporte adiabático, la fase de Berry tiene el valor (4.7), es decir

$$\gamma = 2\pi N_\Gamma. \quad (4.14)$$

Mostrando que no existe intercambio, debido a que el camino en Γ es homotópicamente trivial.

- Si z_α encierra a z_β en el proceso de transporte, el camino sobre Γ no es homotópicamente trivial, entonces, la fase adquirida es

$$\gamma = 2\pi \int_{<\Gamma} d^2z \rho'(z) = 2\pi \left(N_\Gamma - \frac{1}{m} \right), \quad (4.15)$$

el segundo término viene del hecho que al moverse un cuasiagujero sobre un camino cerrado Γ cuando dentro de esta región existe otro cuasiagujero el número de electrones promedios debe estar disminuyendo una cantidad $1/m$.

Con estos dos casos la función de onda adquiere una fase extra que va como la diferencia de los dos argumentos de las fases (4.14) y (4.15)

$$\exp(-i\Delta\gamma) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right), \quad (4.16)$$

mostrando el efecto estadístico. Pero, cuando un cuasiagujero encierra a otro, el proceso completo hace que los dos cuasiagujeros hayan sido intercambiados dos veces, así, la estadística que deben obedecer estos estados son

$$\alpha = \frac{\theta}{\pi} = \frac{1}{m}. \quad (4.17)$$

En otras palabras cuando $m = 1$, o sea, en el régimen Hall entero las partículas son Fermiones, y cuando $m = 3, 5, 7, 9, \dots$, las partículas son Aniones con un parámetro $\alpha = 1/m$.

4.3. Esquemas de jerarquía.

En el capítulo 2 estudiamos en detalle el efecto “1/3”, o sea, la particular condensación encontrada por Tsui y Stomer en un factor de llenado $\nu = 1/3$ y analizada teóricamente por Laughlin. Sin embargo, Halperin [12, 13] planteó que es posible obtener estados con diferente factor de llenado, a partir de las excitaciones generadas sobre el cuasiagujero ó cuasielectrón. Los esquemas de jerarquía ofrecen esta posibilidad. Este método plantea que las excitaciones generadas sobre el cuasiagujero o cuasielectrón se deben comportar como partículas cuyas características dinámicas son semejantes a las que posee una partícula en un campo magnético, con la diferencia, en que la nueva función de onda posee una fracción distinta de llenado.

En este sentido, miremos una excitación³ sobre nuestro sistema de cuasiagujeros o cuasielectrones. Por simplicidad trabajemos solamente con el cuasiagujero (4.11). La carga transportada por este cuasiagujero es e/m y obedece una estadística fraccional ya que $\theta = 1/m$. Las excitaciones se establecen creando un cero z_{0j} por el cual atraviesa el flujo mientras los cuasiagujeros orbitan alrededor de estos. Con esto en mente, una función de onda para una colección de cuasiagujeros puede escribirse en la forma [35]:

$$\Psi_{m_1}^+(z_{01}, z_{02}, z_{03}, \dots, z_{0N}) = \prod_{i < j} (z_{0i} - z_{0j})^{m_1} \exp\left(-\frac{1}{4ml_B^2} \sum_i |z_{0i}|^2\right). \quad (4.18)$$

El factor en la exponencial viene del hecho que la longitud magnética es inversamente proporcional a la carga, y aquí la carga no es e sino e/m . El exponente m_1 tiene la forma

$$m_1 = \frac{1}{m} + 2p_1, \quad (4.19)$$

donde p_1 es un número entero positivo. La expresión para m_1 es una condición para que la función de onda de la colección (4.18) preserve la condición de ser Anión, es decir, que la fase acumulada sea la correspondiente a una estadística fraccional. Explícitamente

$$\exp(-i\pi m_1) = \exp\left(-i\pi \left(\frac{1}{m} + 2p_1\right)\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{m}\right). \quad (4.20)$$

De esta manera, $\Psi_{m_1}^+$ describe un sistema incompresible de cuasiagujeros con carga e/m y una estadística fraccional. Para calcular el factor de llenado de la función de onda, se puede aplicar la analogía con el plasma como en el capítulo 2, interpretando a $|\Psi_{m_1}^+|^2$ como la densidad de probabilidad de un problema mecánico –estadístico con una energía potencial dada por

$$U = 2m_1 \sum_{i < j} \ln |z_{0i} - z_{0j}| + \frac{1}{2ml_B^2} \sum_i |z_{0i}|^2. \quad (4.21)$$

Empleando los mismos argumentos del capítulo 2 se puede identificar la densidad del fondo neutralizante

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2\pi l_B^2} \frac{1}{mm_1}. \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta que la energía debe ser mínima, se puede identificar la densidad (4.22) con la densidad de los cuasiagujeros, con lo cual, el número de cuasiagujeros en

³Recordemos que las excitaciones de los estados se producen agregando o removiendo flujos, es decir, agregando cuasiagujeros o cuasielectrones.

un área $2\pi l_B^2$ es

$$N = 2\pi l_B^2 \hat{\rho} = \frac{1}{mm_1}. \quad (4.23)$$

Pero como la carga transportada por cada cuasiagujero es e/m , la carga total de toda la colección es

$$q = \frac{e}{m^2 m_1}. \quad (4.24)$$

Esta carga corresponde al déficit producido por toda la colección de cuasiagujeros. Ahora, el factor de llenado para el conjunto de cuasiagujeros ha cambiado de $1/m$ a

$$\nu_1 = \nu - \frac{q}{e} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2 m_1} = \frac{1}{m + \frac{1}{2p_1}}. \quad (4.25)$$

Este cambio en el factor de llenado viene del hecho que se ha creado una excitación sobre un sistema incompresible. Así por ejemplo, cuando $m = 3$ y $p_1 = 1$ obtenemos $\nu_1 = 2/7$, que ha sido observado experimentalmente [12, 13]. En conclusión, hemos generado a partir de la excitación de un cuasiagujero la primera generación de estados en el efecto Hall cuántico fraccionario con factor de llenado ν_1 , ec.(4.25).

La generalización para cualquier jerarquía se construye generando excitaciones sobre las excitaciones en forma recurrente. Por ejemplo, para la segunda jerarquía se genera una excitación sobre el estado $\Psi_{m_1}^+$, ec.(4.18). La carga que posee cada cuasiagujero en este estado es e/mm_1 y obedece una estadística fraccional con parámetro $\theta = 1/m_1$. La función de onda para esta generación tiene la forma

$$\Psi_{m_2}^+(z_{01}, z_{02}, z_{03}, \dots, z_{0N}) = \prod_{i < j} (z_{0i} - z_{0j})^{m_2} \exp\left(-\frac{1}{4mm_1 l_B^2} \sum_i |z_{0i}|^2\right). \quad (4.26)$$

El nuevo factor en la exponencial viene del hecho de la nueva carga transportada por los cuasiagujeros. El exponente m_2 tiene la forma

$$m_2 = \frac{1}{m_1} + 2p_2, \quad (4.27)$$

con p_2 siendo un número entero positivo. Nuevamente, aplicando los argumentos expuestos para la primera generación, el nuevo factor de llenado para esta generación

tiene la forma

$$\nu_2 = \nu - \left(\frac{q_1}{e} - \frac{q_2}{e} \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m^2 m_1} + \frac{1}{m^2 m_1 m_2} = \frac{1}{m + \frac{1}{2p_1 + \frac{1}{2p_2}}}. \quad (4.28)$$

El signo menos de q_2/e es debido a que hemos agregado agujeros a agujeros. Así, para cualquier generación de estados solo basta con iterar el proceso continuamente excitando sobre la excitación. Al final la i -ésima generación de estados posee un factor de llenado

$$\nu_i = \frac{1}{m + \frac{\beta_1}{2p_1 + \frac{\beta_2}{2p_2 + \frac{\beta_3}{2p_3 + \dots}}}}. \quad (4.29)$$

Los parámetros β_i correspondientes a la i -ésima generación puede tener valores $\beta = \pm 1$ todo depende de si la jerarquía se produce en cuasiagujeros (+1) o cuasielectrones (-1).

Capítulo 5

Conclusiones.

El efecto Hall cuántico es uno de los fenómenos más sobresalientes del mundo de dos dimensiones. La cualidad más importante del efecto Hall es la cuantización de la resistencia Hall en números enteros y fraccionarios. La cuantización de la resistencia Hall en números fraccionarios exigió una teoría alterna para la explicación de este nuevo comportamiento.

Para observar el efecto Hall cuántico se requieren condiciones extremas de temperatura y campo magnético, esto llevó a observar la cuantización de la resistencia Hall en valores enteros de factores de llenado. Un hecho importante que se pudo explorar es el transporte de carga sin disipación de energía, mientras el sistema se encuentra en un *plateau*, debido a que este sistema es incompresible. Estos resultados se entienden desde la perspectiva de un sistema de niveles de Landau. Sin embargo, el estudio de la geometría de un Anión permite de igual manera extraer las mismas conclusiones.

La condensación del efecto Hall en el factor de llenado $\nu = 1/3$, logró probar la existencia definitiva de los estados electrónicos con factores de llenado fraccional. Por otro lado, los estados que describen dinámicamente el sistema son análogos a los de una partícula libre, ya que, la interacción Coulombiana se considera como una energía de ligadura entre los electrones, manteniendo el concepto de incompresibilidad, y así, de conducción sin pérdida de energía. Este comportamiento es generalizado a muchas partículas proponiendo y validando una función de onda para el estado fundamental, probando que esta función es exclusiva de los niveles más bajos de Landau solamente si el factor de llenado es un número fraccional. Igualmente, las excitaciones fundamentales de cuasi-agujero y cuasielectrón son obtenidas con el modelo geométrico de Anión, mostrando que poseen carga fraccional, de ahí la necesidad de una nueva teoría para explicar este comportamiento.

Los Aniones describen fenómenos en dos dimensiones, y por tanto no poseen restricciones en los valores de momento angular de espín, lo que conduce a que el Anión posea valores fraccionales de espín. De otra parte, el concepto de estadística cuántica en el mundo bidimensional se definió agregando que el intercambio entre estas partículas debe ser adiabático, debido a que los caminos no son homotópicamente triviales. Con esto en mente encontramos que el Anión puede transmutar entre Boson y Fermión. Lo anterior es observado, además, con el modelo dinámico y geométrico de Anión, compuesto de una partícula cargada orbitando alrededor de un flujo magnético.

Con el cálculo explícito de la fase de Berry, se mostró que los estados excitados en el efecto Hall cuántico fraccional son Aniones, ya que, poseen carga y parámetro estadístico fraccional. De igual forma el esquema geométrico y dinámico de Anión permite obtener estados en el efecto Hall cuántico fraccional con diferente factor de llenado.

Probado que los estados excitados en el efecto Hall cuántico fraccional son Aniones, a futuro es de bastante interés ver como estos estados corresponden a respuestas dinámicas de sistemas superconductores, y como estos estados pueden tratarse con una aproximación de campo mediante el término topológico de Chern- Simons y la teoría de Ginzburg-Landau- Chern- Simons.

Apéndice A

Cuantización de Landau.

Los niveles de Landau fueron estudiados por primera vez en 1930 por Lev Landau [49], tratando de estudiar el problema del diamagnetismo de los electrones en los metales. Estos niveles surgen de la interacción individual de los electrones con un campo magnético. Los niveles se evidencian en el espectro de energía del electrón, presentando valores discretos, determinado por un número entero n . La cuantización de los niveles de energía se asocia al movimiento del electrón en un plano perpendicular a la dirección de campo magnético aplicado [49].

Clásicamente la interacción del campo magnético con el electrón genera cicloides¹ de movimiento [51]. Estas orbitas están determinadas por condiciones iniciales tales como la intensidad del campo y su dependencia temporal. Cuánticamente, aunque de igual manera se generan orbitas los niveles de energía dependen en general del calibre utilizado y del espín del electrón. Con esto, se analizarán dos casos particulares: un electrón sin espín y con espín, ambos casos en presencia de un campo magnético uniforme utilizando el calibre de Landau.

A.1. Electrón sin espín.

La teoría clásica propone que la función de Hamilton asociada al movimiento de un electrón en un campo electromagnético está dada por [52]:

$$H = \frac{1}{2m_e} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\Phi. \quad (\text{A.1})$$

¹Una cicloide se define como la curva trazada desde un punto fijo en un círculo de radio definido cuando este avanza en línea recta. Este objeto matemático ha sido utilizado en diferentes ramas de la física solucionando problemas tales como la braquistócrona y el tautócrona [50].

Donde \vec{A} y Φ son los potenciales vectorial y escalar asociado a campo magnético y eléctrico, además, del momento generalizado \vec{p} . Para nuestro caso particular tomaremos $\Phi = 0$.

El objetivo ahora es calcular la energía del electrón al interactuar con un campo magnético homogéneo. Escojamos el eje z como dirección de aplicación de campo magnético, asimismo, dada la libertad de calibre, tomemos la componente del potencial vectorial $A_z = 0$. Ahora, definiendo el operador momento canónico conjugado del operador posición como:

$$\hat{\pi}_x = -i\hbar\partial_x - \frac{e}{c}A_x, \quad \hat{\pi}_y = -i\hbar\partial_y - \frac{e}{c}A_y, \quad \hat{\pi}_z = -i\hbar\partial_z, \quad (\text{A.2})$$

el Hamiltoniano del electrón expresado en función de estos operadores es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} (\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2) - \frac{\hbar^2\partial_z^2}{2m_e}. \quad (\text{A.3})$$

Se puede observar que la componente del momento en la dirección z se conserva, debido a que las restantes componentes, x y y , del momento canónico, ni el Hamiltoniano contienen explícitamente esta componente, es decir, satisface [51]:

$$[\hat{p}_z, \hat{\pi}_x] = [\hat{p}_z, \hat{\pi}_y] = [\hat{p}_z, \hat{H}] = 0. \quad (\text{A.4})$$

Por ende, los estados propios serán estados simultáneos del Hamiltoniano y de la componente z del momento. De tal manera, que los valores propios de energía y las autofunciones deben cumplir:

$$\frac{1}{2m_e} (\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2) \varphi(x, y) = \varepsilon\varphi(x, y), \quad (\text{A.5})$$

$$\xi = \varepsilon + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e}. \quad (\text{A.6})$$

Antes de solucionar la ecuación de valores propios (A.5), recordemos el Hamiltoniano del oscilador armónico unidimensional:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m_e\omega^2\hat{x}^2, \quad (\text{A.7})$$

cuyos valores propios de energía están dados por:

$$\varepsilon = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.8})$$

Definiendo una nueva variable $\hat{q} = m_e \omega \hat{x}$, la cual satisface la propiedad

$$[\hat{p}, \hat{q}] = i\hbar m_e \omega, \quad (\text{A.9})$$

el Hamiltoniano del oscilador armónico se puede reescribir como:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} (\hat{p}^2 + \hat{q}^2). \quad (\text{A.10})$$

Comparando la ecuación (A.5) junto con la ecuación (A.10) se observa una correlación entre el operador energía del oscilador armónico unidimensional con el operador de energía del electrón en un campo magnético. Por tanto, los valores propios de energía del electrón en presencia de este campo tendrán una expresión equivalente a los niveles del operador de energía del oscilador unidimensional. Sólo bastaría con definir la nueva frecuencia del movimiento de la órbita del electrón.

Teniendo en cuenta el conmutador [51]:

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = \frac{i\hbar e}{c} (\partial_x A_y - \partial_y A_x), \quad (\text{A.11})$$

y escogiendo un caso particular de potencial vectorial con $A_x = A_z = 0$ y $A_y = Bx$ tenemos:

$$[\hat{\pi}_x, \hat{\pi}_y] = \frac{i\hbar e B}{c}. \quad (\text{A.12})$$

Por analogía con la ecuación (A.9) obtenemos la frecuencia asociada al movimiento, conocida como la frecuencia de ciclotrón:

$$\omega_B = \frac{eB}{m_e c}. \quad (\text{A.13})$$

Adjunto con esto los valores propios de energía del electrón toman la forma:

$$\xi_{n,k_z} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e}. \quad (\text{A.14})$$

Esta ecuación es conocida como los niveles de Landau. Pero, surge una duda en esta expresión. Aunque, eventualmente se está trabajando con un problema tridimensional, es claro afirmar que se necesitan tres números cuánticos para describir el sistema completamente. Sin embargo existen sólo dos: un número entero n , que describe la dinámica del sistema en las direcciones perpendiculares al sentido de aplicación del campo magnético,

el cual posee dejenamiento discreto. Por otra parte, k_z es continuo y ostenta dejenamiento infinito. Por consiguiente, se ha obtenido una expresión que manifiesta dejenamiento infinito y un número asociado a la reducción espacial de un problema de dos dimensiones a uno unidimensional.

Para razonar mejor los resultados obtenidos hasta ahora escogamos un calibre adecuado, por ejemplo, el calibre de Landau ($A_x = A_z = 0$ $A_y = Bx\hat{j}$) con el objetivo de calcular nuevamente los niveles de energía. Adicionalmente, solucionemos el problema en una región finita del espacio, con el propósito de imponer condiciones de contorno sobre la geometría. Teniendo en cuenta el calibre de Landau la ecuación de valores propios se puede escribir como:

$$\frac{1}{2m_e} \left(-\hbar^2 (\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2) - \frac{2i\hbar e}{c} Bx\partial_y + \left(\frac{eBx}{c} \right)^2 \right) \varphi(x, y, z) = \varepsilon\varphi(x, y, z). \quad (\text{A.15})$$

Escoger el calibre de Landau, además, de favorecer la invarianza traslacional alrededor del eje y , permite escribir los valores de energía del sistema como la suma de la energía asociada al movimiento del electrón en el plano $x - y$ y la energía aportada por el momento \hat{p}_z debido a que se cumplen las relaciones (A.4). Proponiendo una solución $\varphi(x, y, z) = \bar{\varphi}(x)e^{i(k_y y + k_z z)}$ la ecuación (A.15) se reduce a:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m_e} + \frac{m_e \omega_B^2}{2} (x - x_0)^2 \right) \bar{\varphi}(x) = \varepsilon \bar{\varphi}(x). \quad (\text{A.16})$$

Nuevamente se ha obtenido la ecuación de un oscilador armónico, pero, este se encuentra desplazado una distancia $x_0 = \frac{\hbar c}{eB} k_y = k_y l_B^2$, donde $l_B^2 = \frac{\hbar c}{eB}$ se conoce como la longitud magnética. El espectro de energía del electrón posee la misma forma (A.14). Las funciones propias no normalizadas están dadas por [25]

$$\bar{\varphi}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(k_y y + k_z z)} H_n(x + k_y l_B^2) e^{-\frac{1}{2l_B^2} (x + k_y l_B^2)^2}, \quad (\text{A.17})$$

donde H_n es el n -ésimo polinomio de Hermite. Confinando el movimiento del electrón a un rectángulo de longitudes L_x, L_y , e imponiendo condiciones de contorno periódicas en la dirección y y condiciones nulas sobre la dirección x se obtiene un movimiento semejante al mostrado en la figura A.1. Cabe mencionar que el movimiento de la cicloide es visto desde el sistema de laboratorio, en el marco de referencia del electrón la trayectoria del movimiento es circular [33].

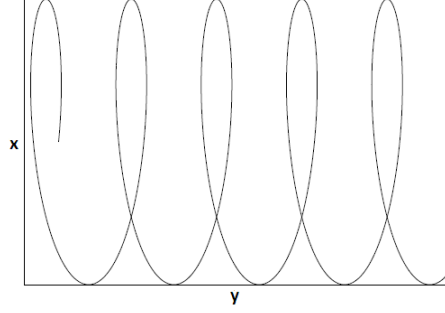


FIGURA A.1: Movimiento orbital de un electrón en presencia de un campo magnético perpendicular (dirección z). El movimiento es visto desde el sistema de referencia de laboratorio [33].

Las condiciones de periodicidad impuestas en la dirección y se manifiestan en el vector de onda:

$$k_y = \frac{2\pi}{L_y} n, \quad (\text{A.18})$$

mientras la máxima abertura de la cicloide en la dirección x es L_x [51],

$$L_x = |x_0^{max}| = \left| \frac{\hbar c}{eB} k_y \right|. \quad (\text{A.19})$$

De esta forma, reemplazando k_y dado por la ecuación (A.18), el máximo dejeneramiento que existe en el sistema está dado por:

$$n_{max} = \frac{BL_x L_y}{\Phi_0} = \frac{\Phi}{\Phi_0}. \quad (\text{A.20})$$

Por tanto, se puede concluir que la interpretación física del dejeneramiento en el espectro de energía se evidencia en el número de flujos generados por el campo magnético en relación al flujo cuántico en el sistema. Además, a cada nivel se le asocia un estado de flujo. De hecho, es fácil comprobar que el dejeneramiento es infinito si las distancias de confinamiento se vuelven infinitas.

A.2. Electrón con espín.

Por último, analicemos que sucede con el espectro de energía cuando se tiene en cuenta el momento intrínseco del electrón. La interacción del espín con el campo magnético se evidencia en el operador momento magnético $\hat{\mu}$, el cual es proporcional al operador de espín [49]:

$$\hat{\mu} = \mu \frac{\hat{s}}{s\hbar}, \quad (\text{A.21})$$

donde $s = 1/2$ es la magnitud del espín del electrón y μ es una constante conocida como el magnetón de Bohr:

$$\mu = \frac{e\hbar}{2m_e c} = 0,927 \times 10^{-20} \text{ erg/Gauss.} \quad (\text{A.22})$$

De esta manera, el Hamiltoniano del electrón posee un término adicional $-\hat{\mu}\vec{B}$, el cual corresponde a la energía del momento magnético asociado al campo, por ende, el Hamiltoniano del electrón es:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 - \frac{\mu}{s\hbar} \hat{s} \cdot \vec{B}. \quad (\text{A.23})$$

Teniendo en cuenta que para el electrón $s = \frac{1}{2}$ y $\hat{s}_i = \frac{\hbar\hat{\sigma}_i}{2}$, donde $\hat{\sigma}_i$ son las matrices de Pauli, el Hamiltoniano con $B = B_{\hat{k}}$ toma la forma:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\hat{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)^2 - \mu\hat{\sigma}_z\vec{B}. \quad (\text{A.24})$$

La solución de la ecuación de valores propios se escribe como el producto de una función correspondiente a la parte espinorial y una a la parte espacial, pues el operador de energía para este problema se puede escribir como $\hat{H} = \hat{H}_0 \otimes \hat{H}_s$, donde \hat{H}_0 es el operador correspondiente a la parte electromagnética y \hat{H}_s es la energía coligada al espín del electrón. Así que, la función de onda que describe el comportamiento del electrón es:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r}, t)\phi(\sigma_k), \quad (\text{A.25})$$

donde $\varphi(\vec{r}, t)$ tiene la misma forma (A.17). La evolución dinámica de la función de onda del electrón depende de las condiciones iniciales promovidas por la relación espacial del espín junto con el campo magnético, de la cual existen dos opciones:

- * Campo magnético paralelo al espín en $t = 0$: La transformación temporal de la función de onda es dada por un estado estacionario y un espinor paralelo a la dirección del campo, explícitamente:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\xi_n t} \varphi_n(\vec{r})\phi_z, \quad (\text{A.26})$$

por tanto, el espín no introduce mezclas en la función de onda en cada subespacio y la evolución es independiente tanto espacial como espinorialmente. Los niveles de energía son:

$$\xi_{n,k_z,s_z} = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m_e} \mp \mu B. \quad (\text{A.27})$$

- * Campo magnético antiparalelo al espín en $t = 0$: el espectro de energía del electrón posee la misma forma (A.27) pero la función de onda no es un estado estacionario, debido a que la función espacial adquiere una dependencia temporal contribuida por la función espinorial.

Un interesante y detallado análisis del dejeneramiento de los niveles de Landau cuando el espín del electrón es tenido en cuenta es realizado en [47] donde el dejeneramiento es dado en función de la energía de Fermi.

Apéndice B

Algunas propiedades de los niveles de Landau más bajos.

B.1. Niveles de Landau más bajos para una partícula.

Los niveles de Landau para una partícula, son funciones antisimétrica con energía $\hbar\omega_c$ [3], analíticamente, tienen la forma mostrada en la ecuación (2.25)

$$\varphi_m(z, z^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2}} z^m \exp\left(-\frac{|z|^2}{4l_B^2}\right). \quad (\text{B.1})$$

Con (B.1) se puede encontrar el valor esperado para r y $1/r$ para cada nivel m de momento.

Para el radio efectivo tenemos expresando la integral en coordenadas polares con $z = re^{i\theta}$

$$\begin{aligned}
\langle m|r^2|m\rangle &= \frac{1}{(2l_B^2)^{m+1}\pi m!} \int d^2z r^2 |\varphi_m(z, z^*)|^2 \\
&= \frac{1}{(2l_B^2)^{m+1}\pi m!} \int d^2z \left((z^m)^* \exp\left(\frac{-|z|^2}{4l_B^2}\right) r^2 z^m \exp\left(\frac{-|z|^2}{4l_B^2}\right) \right) \\
&= \frac{1}{(2l_B^2)^{m+1}\pi m!} \int d^2z r^2 |z|^{2m} \exp\left(\frac{-|z|^2}{2l_B^2}\right) \\
&= \frac{1}{(2)^{m+1}\pi m!} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} dr d\theta r (r^2)^{m+1} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \\
&= \frac{2}{(2)^{m+1}m!} \int_0^\infty dr r (r^2)^{m+1} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \\
&= \frac{2}{m!} \int_0^\infty dr \left(\frac{r^2}{2}\right)^{m+1} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \\
&= \frac{2}{m!} \int_0^\infty du u^{m+1} \exp(-u)
\end{aligned}$$

con $m + 1 = n - 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(n-2)!} \int_0^\infty du u^{n-1} \exp(-u) \\
&= \frac{2}{(n-2)!} n\Gamma(n) = \frac{2}{(n-2)!} n(n-1)! = 2(n-1) = 2(m+1).
\end{aligned}$$

Donde se ha utilizado al expresión integral para la función Gamma. De igual manera para el inverso del radio tenemos

$$\begin{aligned}
\left\langle m \left| \frac{1}{r} \right| m \right\rangle &= \frac{1}{(2l_B^2)^{m+1}\pi m!} \int d^2z \left\langle m \left| \frac{1}{r} \right| m \right\rangle \\
&= \frac{1}{(2l_B^2)^{m+1}\pi m!} \int d^2z \left((z^m)^* \exp\left(\frac{-|z|^2}{4l_B^2}\right) \frac{1}{r} z^m \exp\left(\frac{-|z|^2}{4l_B^2}\right) \right) \\
&= \frac{1}{(2l_B^2)^{m+1}\pi m!} \int d^2z |z|^{2m} \frac{1}{r} \exp\left(\frac{-|z|^2}{2l_B^2}\right) \\
&= \frac{1}{(2l_B^2)^{m+1}\pi m!} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} dr d\theta r r^{2m} \frac{1}{r} \exp\left(\frac{-r^2}{2l_B^2}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}m!} \int_0^\infty dr \left(\frac{r}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}m!} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}m!} \frac{(2m)! \sqrt{\pi}}{4^m m!} \\
&= \frac{(2m)! \sqrt{2\pi}}{2^{2m+1} m!^2}.
\end{aligned}$$

B.2. Ortonormalidad de la solución a la ecuación de movimiento para tres electrones bidimensionales en presencia de un campo magnético perpendicular.

En esta sección mostramos detalladamente el cálculo que valida la ortonormalidad del conjunto de funciones (2.48), que corresponden a la solución de la ecuación de movimiento (2.45) para tres electrones bidimensionales los cuales interactúan con un campo magnético perpendicular a la superficie.

La función de onda de los tres electrones interactuantes ostenta la forma:

$$\varphi_{m,p}(z_a, z_b) = \frac{1}{\sqrt{(2l_B^2)^{4p+6m+1}\pi^2(3m+p)!p!}} \left(\frac{(z_a + iz_b)^{3m} - (z_a - iz_b)^{3m}}{2i} \right) (z_a^2 + z_b^2)^p \exp\left(-\frac{1}{4l_B^2} (|z_a|^2 + |z_b|^2)\right). \quad (\text{B.2})$$

Defínase dos variables de posición z_1 y z_2 dadas por:

$$z_1 = \frac{z_a + iz_b}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{z_a - iz_b}{\sqrt{2}}, \quad (\text{B.3})$$

estas nuevas posiciones cumplen las siguientes relaciones

$$2z_1z_2 = z_a^2 + z_b^2, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_a|^2 + |z_b|^2. \quad (\text{B.4})$$

El objetivo de estas nuevas posiciones complejas será la de simplificar la expresión (B.2). Realizando el cambio de variable la función de onda se transforma en

$$\varphi_{m,p}(z_a, z_b) = -\frac{i}{(2^{3/2m+p+1/2})\sqrt{((3m+p)!p!\pi^2)}} (z_1^{3m} - z_2^{3m}) (z_1z_2)^p \exp\left(-\frac{1}{4} (|z_1|^2 + |z_2|^2)\right). \quad (\text{B.5})$$

Ya con esto, la ortogonalidad de la función de onda se puede escribir como la integral de área compleja del producto interior. Esto ya que es necesario integrar alrededor de todas las posibles orbitas, así la ortogonalidad es haciendo $l_B^2 = 1$ y reemplazando la

función (B.5) y su complejo conjugado el producto tenemos:

$$\begin{aligned} \langle m', p' | m, p \rangle &= \frac{i}{(2^{3/2m'+p'+1/2}) \sqrt{((3m'+p')!p!\pi^2)}} \frac{-i}{(2^{3/2m+p+1/2}) \sqrt{((3m+p)!p!\pi^2)}} \\ &\int \int d^2 z_1 d^2 z_2 \left((z_1^{3m'})^* - (z_2^{3m'})^* \right) ((z_1 z_2)^*)^{p'} \exp \left(-\frac{1}{4} (|z_1|^2 + |z_2|^2) \right) \\ &\quad (z_1^{3m} - z_2^{3m}) (z_1 z_2)^p \exp \left(-\frac{1}{4} (|z_1|^2 + |z_2|^2) \right), \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

se puede utilizar la función delta de Kronecker [38], debido a que los niveles tanto de energía como de momento angular son discretos. De tal manera que el producto interior se convierte en:

$$\begin{aligned} \langle m', p' | m, p \rangle &= \frac{\delta_{mm'} \delta_{pp'}}{(2^{6m+2p+3}) ((3m+p)!p!\pi^2)} \\ &\int \int d^2 z_1 d^2 z_2 \left((z_1^{3m})^* - (z_2^{3m})^* \right) ((z_1^{3m}) - (z_2^{3m})) \\ &\quad ((z_1 z_2)^*)^p ((z_1 z_2))^p \exp \left(-\frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2) \right), \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que el producto

$$\left((z_1^{3m})^* - (z_2^{3m})^* \right) ((z_1^{3m}) - (z_2^{3m})) = (|z_1|^2)^{3m} - (z_1^* z_2)^{3m} - (z_1 z_2^*)^{3m} + (|z_2|^2)^{3m}, \quad (\text{B.8})$$

la expresión (B.7) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \langle m', p' | m, p \rangle &= \frac{\delta_{mm'} \delta_{pp'}}{(2^{6m+2p+3}) ((3m+p)!p!\pi^2)} \\ &\int \int d^2 z_1 d^2 z_2 (|z_1||z_2|)^{2p} \\ &\quad \left((|z_1|^2)^{3m} - (z_1^* z_2)^{3m} - (z_1 z_2^*)^{3m} + (|z_2|^2)^{3m} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2) \right) \quad (\text{B.9}) \end{aligned}$$

Separando la integral para cada término del producto obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \langle m', p' | m, p \rangle = & \frac{\delta_{mm'} \delta_{pp'}}{(2^{6m+2p+3}) ((3m+p)! p! \pi^2)} \left[\right. \\
 & \int \int d^2 z_1 d^2 z_2 (|z_1| |z_2|)^{2p} (|z_1|^2)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2) \right) \\
 & - \int \int d^2 z_1 d^2 z_2 (|z_1| |z_2|)^{2p} (z_1^* z_2)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2) \right) \\
 & - \int \int d^2 z_1 d^2 z_2 (|z_1| |z_2|)^{2p} (z_1 z_2^*)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2) \right) \\
 & \left. + \int \int d^2 z_1 d^2 z_2 (|z_1| |z_2|)^{2p} (|z_2|^2)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} (|z_1|^2 + |z_2|^2) \right) \right]. \quad (\text{B.10})
 \end{aligned}$$

Para resolver las integrales del primer y último miembro transformamos los diferenciales de área a coordenadas polares, para las dos integrales restantes separamos sus integrales, de tal suerte que la expresión se transforma en

$$\begin{aligned}
 \langle m', p' | m, p \rangle = & \frac{\delta_{mm'} \delta_{pp'}}{(2^{6m+2p+3}) ((3m+p)! p! \pi^2)} \left[\right. \\
 & \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \quad r_1 r_2 (r_1 r_2)^{2p} (r_1^2)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) \right) \\
 & - \int d^2 z_1 \quad (|z_1|)^{2p} (z_1^*)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_1|^2 \right) \int d^2 z_2 \quad (|z_2|)^{2p} (z_2)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_2|^2 \right) \\
 & - \int d^2 z_1 \quad (|z_1|)^{2p} (z_1)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_1|^2 \right) \int d^2 z_2 \quad (|z_2|)^{2p} (z_2^*)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_2|^2 \right) \\
 & \left. + \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\infty d\theta_1 dr_1 d\theta_2 dr_2 \quad r_1 r_2 (r_1 r_2)^{2p} (r_2^2)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} (r_1^2 + r_2^2) \right) \right] \quad (\text{B.11})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle m', p' | m, p \rangle = & \frac{\delta_{mm'} \delta_{pp'}}{(2^{6m+2p+3}) ((3m+p)! p! \pi^2)} \left[\right. \\
 & 4\pi^2 \int_0^\infty dr_1 \quad r_1 (r_1^2)^{3m+p} \exp \left(-\frac{1}{2} r_1^2 \right) \int_0^\infty dr_2 \quad r_2 r_2^{2p} \exp \left(-\frac{1}{2} r_2^2 \right) \\
 & - \int d^2 z_1 \quad (|z_1|)^{2p} (z_1^*)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_1|^2 \right) \int d^2 z_2 \quad (|z_2|)^{2p} (z_2)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_2|^2 \right) \\
 & - \int d^2 z_1 \quad (|z_1|)^{2p} (z_1)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_1|^2 \right) \int d^2 z_2 \quad (|z_2|)^{2p} (z_2^*)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_2|^2 \right) \\
 & \left. + 4\pi^2 \int_0^\infty dr_1 \quad r_1 r_1^{2p} \exp \left(-\frac{1}{2} r_1^2 \right) \int_0^\infty dr_2 \quad r_2 (r_2^2)^{3m+p} \exp \left(-\frac{1}{2} r_2^2 \right) \right] \quad (\text{B.12})
 \end{aligned}$$

Si agrupamos el primer y último miembro de (B.12) el producto es

$$\begin{aligned}
\langle m', p' | m, p \rangle = & \frac{\delta_{mm'} \delta_{pp'}}{8(3m+n)!n!\pi^2} \left[\right. \\
& 4\pi^2 \int_0^\infty dr_1 \quad r_1 \left(\frac{r_1^2}{2} \right)^{3m+p} \exp \left(-\frac{1}{2} r_1^2 \right) \int_0^\infty dr_2 \quad r_2 \left(\frac{r_2^2}{2} \right)^{2p} \exp \left(-\frac{1}{2} r_2^2 \right) \\
& + 4\pi^2 \int_0^\infty dr_1 \quad r_1 \left(\frac{r_2^2}{2} \right)^{2p} \exp \left(-\frac{1}{2} r_1^2 \right) \int_0^\infty dr_2 \quad r_2 \left(\frac{r_2^2}{2} \right)^{3m+p} \exp \left(-\frac{1}{2} r_2^2 \right) \left. \right] \\
& - \frac{\delta_{mm'} \delta_{pp'}}{(2^{6m+2p+3}) ((3m+p)!p!\pi^2)} \left[\right. \\
& + \int d^2 z_1 \quad (|z_1|)^{2p} (z_1^*)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_1|^2 \right) \int d^2 z_2 \quad (|z_2|)^{2p} (z_2)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_2|^2 \right) \\
& + \int d^2 z_1 \quad (|z_1|)^{2p} (z_1)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_1|^2 \right) \int d^2 z_2 \quad (|z_2|)^{2p} (z_2^*)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_2|^2 \right) \left. \right].
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Si se realiza la sustitución $u = r_1^2/2$ y $v = r_2^2/2$, la anterior expresión toma la forma:

$$\begin{aligned}
\langle m', p' | m, p \rangle = & \frac{\delta_{mm'} \delta_{pp'}}{8(3m+p)!p!\pi^2} \left[\right. \\
& 4\pi^2 \int_0^\infty du \quad u^{3m+p} \exp(-u) \int_0^\infty dv \quad v^p \exp(-v) \\
& + 4\pi^2 \int_0^\infty dv \quad u^p \exp(-u) \int_0^\infty du \quad v^{3m+p} \exp(-v) \left. \right] \\
& - \frac{\delta_{mm'} \delta_{pp'}}{(2^{6m+2p+3}) ((3m+p)!p!\pi^2)} \left[\right. \\
& + \int d^2 z_1 \quad (|z_1|)^{2p} (z_1^*)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_1|^2 \right) \int d^2 z_2 \quad (|z_2|)^{2p} (z_2)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_2|^2 \right) \\
& + \int d^2 z_1 \quad (|z_1|)^{2p} (z_1)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_1|^2 \right) \int d^2 z_2 \quad (|z_2|)^{2p} (z_2^*)^{3m} \exp \left(-\frac{1}{2} |z_2|^2 \right) \left. \right],
\end{aligned} \tag{B.14}$$

si $j = 3m + p$ las cuatro primeras integrales se convierten en:

$$\int_0^{\infty} du \quad u^j \exp(-u) = \Gamma(j + 1) = j! = (3m + p)! \quad (\text{B.15})$$

$$\int_0^{\infty} dv \quad v^p \exp(-v) = \Gamma(p + 1) = p! \quad (\text{B.16})$$

$$\int_0^{\infty} dv \quad u^p \exp(-u) = \Gamma(p + 1) = p! \quad (\text{B.17})$$

$$\int_0^{\infty} dv \quad v^j \exp(-v) = \Gamma(j + 1) = j! = (3m + p)! \quad (\text{B.18})$$

Las últimas integrales del producto interior son nulas, ya que sus integrandos son anti-simétricos. Con esto finalmente el producto interior es

$$\langle m', p' | m, p \rangle = \frac{\delta_{mm'} \delta_{pp'}}{8(3m + p)! p! \pi^2} (8\pi^2 (3m + p)! p!) \quad (\text{B.19})$$

$$\langle m', p' | m, p \rangle = \delta_{mm'} \delta_{pp'}.$$

Comprobando así, que el conjunto de funciones (B.2) que dan solución al problema de tres electrones interactuantes en presencia de un campo magnético perpendicular son ortogonales.

Bibliografía

- [1] K. V. Klitzing, *The quantized hall effect*, *RMP* **58** (1986) 519.
- [2] D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard, *Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit*, *Physical Review Letters* **48** (1982) 1559–1562.
- [3] R. B. Laughlin, *Quantized motion of three two-dimensional electrons in a strong magnetic field*, *Physical Review Letters* **27** (Mar., 1983) 3383–3389.
- [4] R. B. Laughlin, *Anomalous quantum hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations*, *Physical Review Letters* **50** (1983), no. 18 1395–1398.
- [5] C. L. Kane, S. Kivelson, D. H. Lee, and S. C. Zhang, *General validity of jastrow-laughlin wave functions*, *Phys. Rev. B* **43** (Feb, 1991) 3255–3258.
- [6] B. Abdullaev, M. Musakhanov, and A. Nakamura, *Approximate formula for the ground state energy of anyons in 2d parabolic well*, *arXiv preprint cond-mat/0012423* (2000).
- [7] O. Ciftja, G. S. Japaridze, and X.-Q. Wang, *An anyon wavefunction for the fractional quantum hall effect*, *Journal of Physics: Condensed Matter* **17** (2005), no. 19 2977.
- [8] F. Wilczek, *Magnetic flux, angular momentum, and statistics*, *Physical Review Letters* **48** (1982), no. 17 1144.
- [9] F. Wilczek, *Quantum mechanics of fractional-spin particles*, *Phys. Rev. Lett* **49** (1982) 957–959.
- [10] J. Leinaas and J. Myrheim, *Nuovo cimento b 37, 1 (1977)*; f. wilczek, *Phys. Rev. Lett* **48** (1982) 1144.
- [11] D. P. Arovas, R. Schrieffer, F. Wilczek, and A. Zee, *Statistical mechanics of anyons*, *Nuclear Physics B* **251** (1985) 117–126.

- [12] B. I. Halperin, *Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized hall states*, *Phys. Rev. Lett.* **52** (Apr, 1984) 1583–1586.
- [13] B. I. Halperin, *Statistics of quasiparticles and the hierarchy of fractional quantized hall states*, *Phys. Rev. Lett.* **52** (Jun, 1984) 2390–2390.
- [14] R. Laughlin, *The relationship between high-temperature superconductivity and the fractional quantum hall effect*, *Science* **242** (1988), no. 4878 525–533.
- [15] R. B. Laughlin, *Superconducting ground state of noninteracting particles obeying fractional statistics*, *Phys. Rev. Lett.* **60** (Jun, 1988) 2677–2680.
- [16] V. Kalmeyer and R. B. Laughlin, *Equivalence of the resonating-valence-bond and fractional quantum hall states*, *Phys. Rev. Lett.* **59** (Nov, 1987) 2095–2098.
- [17] A. L. Fetter, C. B. Hanna, and R. B. Laughlin, *Random-phase approximation in the fractional-statistics gas*, *Phys. Rev. B* **39** (May, 1989) 9679–9681.
- [18] A. Khare, *Fractional statistics and chern-simons field theory in 2+ 1 dimensions*, *arXiv preprint hep-th/9908027* (1999).
- [19] F. Mancarella, A. Trombettoni, and G. Mussardo, *Statistical mechanics of an ideal gas of non-abelian anyons*, *Nuclear Physics B* **867** (2013), no. 3 950–976.
- [20] F. Mancarella, A. Trombettoni, and G. Mussardo, *Statistical interparticle potential of an ideal gas of non-abelian anyons*, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **46** (2013), no. 27 275001.
- [21] P. Werner, *(4+1)-Dimensional Quantum Hall Effect: Applications to Cosmology*, *ArXiv e-prints* (July, 2012) [[arXiv:1207.4954](https://arxiv.org/abs/1207.4954)].
- [22] R. Laughlin *Surface Science* **113** (1982) 22.
- [23] E. M. Purcell, *Electricity and Magnetism (Berkeley Physics Course, Vol. 2)*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 2 ed., Aug., 1984.
- [24] D. Vaid, *Quantum Hall Effect and Black Hole Entropy in Loop Quantum Gravity*, [arXiv:1208.3335](https://arxiv.org/abs/1208.3335).
- [25] R. Prange and S. Girvin, *The Quantum Hall effect*. Graduate texts in contemporary physics. Springer-Verlag, 1987.
- [26] G. D. K. v. Klitzing and M. Pepper, *New method for high accuracy determination of fine structure constant based on quantized hall resistance*, *Phys. Rev. Lett* **45** (1980) 494.

- [27] P. Taylor and O. Heinonen, *A Quantum Approach to Condensed Matter Physics*. Cambridge University Press, 2002.
- [28] W. Greiner, L. Neise, and H. Stöcker, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Classical Theoretical Physics Series. Springer-Verlag, 1995.
- [29] A. MacDonald, *Introduction to the physics of the quantum hall regime*, *arXiv preprint cond-mat/9410047* (1994).
- [30] Y. Aharonov and D. Bohm, *Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory*, *Physical Review* **115** (1959), no. 3 485.
- [31] J. José and E. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press, 1998.
- [32] A. Stern, *Anyons and the quantum Hall effect. A pedagogical review*, *Annals of Physics* **323** (Jan., 2008) 204–249, [[arXiv:0711.4697](https://arxiv.org/abs/0711.4697)].
- [33] D. Cohen, *Lecture notes in quantum mechanics*, *arXiv preprint quant-ph/0605180* (2006).
- [34] S. Rao, *An Anyon Primer*, *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints* (Sept., 1992) [[hep-th/9209066](https://arxiv.org/abs/hep-th/9209066)].
- [35] A. Khare, *Fractional Statistics and Quantum Theory*. World Scientific, 2005.
- [36] C. Kittel, *Introducción a la física del estado sólido*. Reverté, 1995.
- [37] Z. F. Ezawa, *Quantum Hall Effects: Field Theoretical Approach and Related Topics*. World Scientific, 2008.
- [38] M. Boas, *Mathematical Methods in the Physical Sciences*. John Wiley & Sons Australia, Limited, 2006.
- [39] T. Haugset, J. A. Ruud, and F. Ravndal, *Gauge invariance of landau levels*, *Physica Scripta* **47** (1993), no. 6 715.
- [40] H. Bruus and K. Flensberg, *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics: An Introduction*. Oxford Graduate Texts. OUP Oxford, 2004.
- [41] N. Zettili, *Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. Wiley, 2009.
- [42] J. J. J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics*. ADDISON WESLEY Publishing Company Incorporated, 2010.
- [43] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. Waveland Press, 2009.

-
- [44] R. Fox and L. Neuwirth, *The braid groups.*, *Mathematica Scandinavica* **10** (1962) 119–126.
- [45] E. Fadell and L. Neuwirth, *Configuration spaces.*, *Mathematica Scandinavica* **10** (1962) 111–118.
- [46] E. Fadell, J. Van Buskirk, *et. al.*, *The braid groups*, *Duke Mathematical Journal* **29** (1962), no. 2 243–257.
- [47] S. Weinberg, *Lectures on Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 2012.
- [48] M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* **392** (1984), no. 1802 45–57.
- [49] L. Landau and E. Lifshits, *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory*. Butterworth Heinemann. Butterworth-Heinemann, 1977.
- [50] J. Stewart, *Cálculo Varias Variables, Trascendentes Tempranas*. Cengage Learning Latin America, 2008.
- [51] P. Carlos, *Lecturas en Mecánica Cuántica Avanzada*. 2012.
- [52] G. H., *Classical Mechanics*. Pearson Education, 2002.