

### UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

### CÁLCULO TEÓRICO Y SIMULACIÓN DEL DECAIMIENTO BETA

Presentado por

DIANA MARITZA CUEVAS ROJAS

Director
Dr. DIEGO GALLEGO MAHECHA

Co-Director
Dr. NICANOR POVEDA TEJADA

Como requisito para optar al titulo de Físico

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia Facultad de Ciencias Escuela de Física



### UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

### CÁLCULO TEÓRICO Y SIMULACIÓN DEL DECAIMIENTO BETA

Presentado por

DIANA MARITZA CUEVAS ROJAS

Director
Dr. DIEGO GALLEGO MAHECHA

Co-Director
Dr. NICANOR POVEDA TEJADA

Como requisito para optar al titulo de Físico

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia Facultad de Ciencias Escuela de Física

# Dedicatoria

#### A mi mamá

Por su apoyo incondicional, por confiar y creer en mi, por ayudarme cuando estaba triste y darme animo para no desfallecer y estar siempre ahí para mi aun cuando no lo merecía. Por luchar día a día para que no me faltara nada y por hacerme sentir feliz cada vez que volvía a la casa y ver que tenia una gran mamá que daba todo por mi.

## Agradecimientos

A mi director Dr. Diego Gallego, por toda su paciencia y colaboración en todo este proceso, por haber aceptado trabajar conmigo y creer en mi. Gracias por enseñarme a ser mas disciplinada ya que para mi usted es uno de los mejores Físicos que he conocido.

A mi Co-Director Dr. Nicanor Poveda, por ayudarme a conseguir este gran logro en mi vida, como lo es llegar a ser una profesional, por su apoyo y consejos dados.

Al Dr. John Idarraga por su colaboración en la simulación y sus oportunos aportes.

Al grupo de Física Nuclear aplicada y simulación (FINUAS), en especial a Jose Diaz por su colaboración en la simulación.

A quien corresponda: Estoy sin cigarrillos y sin ti.

# Índice general

1.	<b>Teoría de Fermi para el decaimiento</b> $\beta$ 1.1. Teoría electromagnética de la emisión	<b>1</b> 1
	<ol> <li>1.2. Teoría de Fermi</li> <li>1.3. Forma Estadística del Espectro de los Rayos Beta</li> </ol>	2 3
2.	Consideraciones sobre la Teoría de Fermi	7
	2.1. Espin de los leptones	9
	2.2.1. Transiciones de Fermi	9
	2.2.2. Transiciones de Gamow-Teller	10
	2.3. Formulación Relativista del Decaimiento Beta	11
	2.4. Espectro de Rayos Beta	15
		10
3.	Tiempos de Vida medio y Constantes de Acoplamientos	<b>1</b> 9
	3.1. Vida media comparativa	19
	3.1.1. Tiempo de vida medio	20
	3.2. Matriz de Fermi	21
	3.3. Matriz de Gamow-Tener en Transiciones Especulares	22
4.	Datos Experimentales y Resultados Teóricos	25
	4.1. Datos de Decaimientos	25
	4.2. Transiciones de Fermi	26
	4.2.1. Vida Media Comparativa	26
	4.2.2. Espectro de Energia	27
	4.3. ITALISICIONES ESPECUIALES 4.3.1. Vida Media Comparativa y Pazón Entre Constantes de Aconlamiento	29
	4.3.2 Espectros de Energía	33
5.	Simulación en Geant4	35
	5.1. Introducción	35
	5.1.1. Historia de Geant4	35
	5.1.2. Aplicabilidad de Geant4	30 27
	5.2. Descripción de Materiales	30
	5.4. Descripción de la geometría del sistema	40
	5.4.1. Volumen del World (Mundo)	42
	5.4.1. Volumen del World (Mundo) 5.4.2. Volumen de los Target (Obstáculos)	42 42
	5.4.1.Volumen del World (Mundo)5.4.2.Volumen de los Target (Obstáculos)5.4.3.Volumen del detector	42 42 44

	<ul><li>5.5. Descripción de la fuente de rayos beta</li><li>5.6. Resultados</li></ul>	45 45
6.	CONCLUSIONES	50
Bi	bliografía	54
Α.	Regla de Oro de Fermi	55
в.	Densidad de Estados	60
C.	<b>Consideraciones sobre la Teoría de Fermi</b> C.1. Espín de los Leptones C.2. Formulación Relativista del Decaimiento Beta C.3. Demostración densidad hamiltoniana de interacción	<b>63</b> 63 64 66
D.	Cálculo de $ H_{fi} ^2$ D.1. Vector AxialD.2. TensorD.3. Términos cruzados de vector axial y tensor	<b>69</b> 71 74 75
Ε.	Matriz de Gamow-Teller	78

# Índice de figuras

1.1.	Forma del espectro estadístico para el decaimiento beta, eq. 1.21.	6
4.1.	Espectro de Energía para el decaimiento por positrón $C^{10}  o B^{10}($ línea azul $)$ y $O^{14}  o$	
	$N^{14}({\sf linea\ roja})$	28
4.2.	Espectro de Energía para el decaimiento por positrón $Al^{26}  o Mg^{26}$ (línea azul) y $Cl^{34}  o$	
	$S^{34}(linea roja)$ .	28
4.3.	Espectro de Energía para el decaimiento por positrón $Sc^{42}  ightarrow Ca^{42}$ (línea roja) y $V^{46}  ightarrow$	
	$Ti^{46}$ (linea azul)	29
4.4.	Espectro de Energía para el decaimiento por positrón $Mn^{50}  ightarrow Cr^{50}$ (línea roja) y $Co^{54}  ightarrow$	
	$Fe^{54}(linea azul)$	29
4.5.	Espectro de Energía para el decaimiento del neutrón	33
4.6.	Espectro de energía para el decaimiento por positrón $H^3 \rightarrow He^3$	33
4.7.	Espectros de energía para los decaimientos por positrón $O^{15} \rightarrow N^{15}$ (linea azul) y $F^{17} \rightarrow O^{17}$	
_	(linea roja). $\ldots$ $\ldots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$	34
4.8.	Espectro de energía por positrón $Ca^{39} \rightarrow K^{39}$	34
F 1	Coometría cimulación: 1) pared no magnetizable: 2) emisión rayos heta: 3) abertura inicial:	
J.I.	(d) campo magnético uniforme: 5) detector: 6) abertura final [21]	37
52	Volumen v sus eies coordenados	<i>J</i> 1
5.2. 5.3		12
5.5. 5.4	Esquema de la simulación mostrado por openGl	45
5.5	Espectro de Eluencia para un campo de 60 mT	46
5.6	Espectro de Fluencia para un campo de 100 mT	47
5.7	Recta de calibración: relación entre el campo magnético y la energía de las partículas	
J	seleccionadas	47
5.8.	Espectro de energía Sr-90.	48

# Índice de cuadros

2.1.	Operadores	15
3.1.	Tipo de transiciones.	21
4.1. 4.2. 4.3. 4.4.	Datos para Transiciones $0^+ \rightarrow 0^+$ por Positrón	26 27 30 32
5.1.	Dimensiones obstáculos.	43

## Introducción

La radiactividad fue descubierta por Henri Bequerel en 1896 [6]. A partir de ese momento se iniciaron varios problemas sobre cómo se estaba modulando el comportamiento de la materia. La discusión en torno al espectro de energía de la radiación emitida en la reacción de decaimiento beta, terminó con que en 1899 Ernest Rutherford estableciera que la reacción que se suponía era un átomo decayendo a otro y como resultado de esto se emitía un electrón, es decir

### $n \rightarrow p + e^{-},$

el espectro debería ser discreto, ya que la diferencia de energía entre el átomo padre y el hijo es única e igual a su diferencia de masa.<sup>1</sup> Sin embargo, lo que se observa es un continuo de energía. A pesar de las pruebas presentadas en los múltiples experimentos la comunidad científica no aceptaba que el espectro de energía de los electrones emitidos en el decaimiento beta era continuo, lo que abría dos posibilidades: Uno era admitir que en la desintegración beta no se cumple el proceso de conservación de la energía; solución que despertaba cierta desconfianza pues dicho principio había tenido un éxito en todas sus aplicaciones, siendo difícil su fracaso. La segunda solución, aplicada con fortuna por Enrico Fermi en su teoría para el decaimiento beta, contempla la hipótesis del neutrino, sugerido por primera vez por Pauli; este fundamentalmente postula la existencia de una nueva partícula, el neutrino, que se produce en el decaimiento beta y lleva consigo el resto de la energía. Para ser consistentes con la no observación de la partícula sus propiedades deben ser tales que hagan difícil su detección; por tanto, se admite que el neutrino es electricamente neutro y que su masa es muy pequeña en comparación con la del electrón, pudiendo incluso ser nula. La ausencia de carga no es una hipótesis arbitraria, pues está de acuerdo con la conservación de la carga en la desintegración beta.

Si se asume esta nueva partícula, cada proceso de decaimiento beta irá acompañado de la liberación de una cantidad de energía, dada por el limite superior del espectro, la cual es compartida entre la partícula beta,

 $<sup>{}^{\</sup>mathbf{1}} \triangle E = \triangle M C^2.$ 

el neutrino y el neutrón o próton. Entonces la hipótesis de la emisión de un neutrino permite explicar de manera general el espectro continuo de energía de las partículas beta.

Por tal razón, la teoría de Fermi se fundamenta en las siguientes ideas: Cuando un núcleo emite partículas  $\beta$ , su carga varía en una unidad e, mientras que su masa permanece prácticamente inalterada; cuando la partícula  $\beta$  expulsada es un electrón, el número de protones del núcleo aumenta en uno y el de los neutrones disminuye también en uno; en la emisión de prositrones aumenta en una unidad el número de neutrones y disminuye también en una unidad el de protones, representando a las transformaciones  $\beta$  por los procesos siguientes:

1. Decaimiento  $\beta^-$ :

$$n \to p + e^- + \bar{\nu}.$$

2. Decaimiento  $\beta^+$ :

$$p \to n + e^+ + \nu$$

donde  $\nu$  representa el neutrino; no se debe considerar al neutrón como compuesto por un protón, un electrón y un neutrino, sino que se transforma en estas tres partículas en el instante de la emisión  $\beta$ ; análogamente, también se transforma el protón para el caso de la emisión de positrones, cuya reacción no se produce en protones libres, pues implicaría una violación del principio de conservación de la energía, ya que la suma de las energías de los productos resultantes sería mayor que la del protón. Sin embargo, si se trata de protones ligados (los que forman parte del núcleo), puede ocurrir que la diferencia de energías entre el núcleo final y el núcleo inicial sea suficiente para crear las partículas resultantes, en cuyo caso la reacción pueda producirse.

Ahora, en el decaimiento  $\beta^-$  descrito anteriormente, se muestra como un neutrón decae a un protón, un electrón y un antineutrino. El hecho que sea un antineutrino es debido a la conservación del número leptónico, en donde el neutrón y el protón son bariones que tienen número leptónico, L = 0. Por otro lado, el electrón es un leptón con número leptónico L = 1, entonces por conservación del número leptónico es necesario tener un antilepton que en este caso corresponde al antineutrino con L = -1, igualmente para el neutrino en el decaimiento  $\beta^+$ .

Centrándonos en la época actual, aun es poca la información conocida del neutrino, sin embargo resultados recientes en el experimento "IceCube: A Giant Frozen Neutrino Catcher" [1], donde son investigados los neutrinos que se encuentran incrustados en el hielo, han arrojado resultados sorprendentes, indican que los neutrinos hallados son los más energéticos jamas vistos, los cuales al parecer no son generados por los rayos cósmicos que llegan a la parte superior de la atmósfera si no que estos provienen de nuevas fuentes en el espacio, en cuyo caso que esto llegará a ser cierto sería un gran paso para la era de la astronomía de neutrinos los cuales utilizan los neutrinos de alta energía para comprender los fenómenos astrofisicos . Igualmente en estudios recientes del experimento de OPERA, se han dado a conocer nuevos detalles sobre la oscilación de neutrinos, lo que permitiría conocer su origen y naturaleza y de paso entender el origen de la masa de los neutrinos ya que hasta el momento no se a obtenido un resultado contundente [13].

Por otro lado, en la desintegración doblemente beta recientemente se esta estudiando posibles isotopos candidatos en los cuales no aparece el neutrino, uno de ellos se encuentra en artículos como "Status of double beta decay experiments using isotopes other than  $^{136}$ Xe" [17].

Uno de los aportes mas significativos para completar la teoría de Fermi, fue sin dudar la inclusión de las transiciones de Gamow-Teller teniendo estas transiciones grandes aplicaciones en la física nuclear y astrofísica, por tal razón este es un trabajo pionero al estudio de las interacciones debiles ya que abre un gran campo de estudio para trabajos futuros como los es el poder estudiar dichas transiciones en los isotopos de titanio "Study of Gamow-Teller transitions in isotopes of titanium within the quasi particle random phase approximation" [2].

Este trabajo tiene como objetivos: estudiar la teoría de Fermi para así obtener el espectro de energía del decaimiento beta, analizar y conocer las diferentes correcciones hechas a dicha teoría, obtener la razón entre las constantes de acoplamiento, tiempos de vida medio y las graficas de los espectros de energía para diferentes decaimientos y simular el espectro de energía de una fuente radiactiva que emita rayos beta. Finalmente lo que se pretende hacer con este trabajo es utilizar las herramientas básicas, conceptuales y computacionales, para el estudio de la física de neutrones y de partículas elementales en general, lo que permitiría abordar estudios en este y otros sistemas de partículas elementales y nucleares en general.

El presente trabajo esta organizado de la siguiente manera:

En el primer capítulo se presenta la teoría que Fermi construiría asumiendo la existencia del neutrino y en analogía con los procesos de radiación electromagnética, llegando de esta manera a obtener el espectro de energía continuo. Sin embargo, esta teoría presenta varias inconsistencias ya que no se permiten decaimientos en los cuales hubiera un cambio en el espín entre el estado inicial y final. Por tal razón, en el capítulo 2 estudiaremos las posibles correcciones sobre la teoría de Fermi, las cuales son: considerar el espín de los leptones, las transiciones de Gamow-Teller que admiten cambios de espín, la formulación relativista del decaimiento beta y la corrección de Coulomb.

En el tercer capítulo 3 se define la función integrada de Fermi con el fin de poder expresar la vida media comparativa del decaimiento beta, la cual depende de los elementos matricial tanto de Fermi como de Gamow-Teller, los cuales serán calculados posteriormente.

En el capítulos 4 se mostrarán los resultados teóricos y experimentales para diferentes decaimientos. En particular, para las transiciones de Fermi, se calculará la vida media comparativa. Para las transiciones especulares se obtendrán los valores numéricos de la razón entre las constantes de acoplamiento. Por ultimo se mostrarán los diferentes espectros teóricos de energía tanto para decaimientos por positrón como por electrón.

Con el fin de corroborar lo obtenido teóricamente, en el capítulo 5 se simulará una fuente radiactiva que emita partículas beta, utilizando el código Geant4 desarrollado en el lenguaje de programación C++ con el método numérico Monte Carlo, para finalmente obtener el espectro de energía continuo para una fuente radiactiva de Sr - 90.

Por último daremos las conclusiones acerca del trabajo realizado. Los cálculos más relevantes son consignados en los apéndices.

## Capítulo 1

### Teoría de Fermi para el decaimiento $\beta$

En este capítulo se explica la teoría de Fermi para el decaimiento beta. Comenzando con una breve revisión de la teoría de interacción electromagnética, para luego aplicar esto a las interacciones entre nucleones y neutrinos. Finalmente se halla la forma estadística del espectro de energía para los rayos beta, partiendo de la regla de oro de Fermi.

### 1.1. Teoría electromagnética de la emisión

Si tenemos una partícula libre con momento *p*, su Hamiltoniano es de la forma:

$$H_0 = \frac{p^2}{2m}.$$
 (1.1)

Ahora, si se estudia la interacción de una partícula cargada en un campo electromagnético clásico, su momento conjugado es  $p_n \rightarrow p_n + \frac{q}{c}\vec{A}$  [7], con q la carga eléctrica y c la velocidad de la luz en el vacío, induciendo la interacción entre la corriente de cargas y el potencial vectorial. De tal manera que el hamiltoniano del sistema es

$$H = \frac{(p + \frac{q}{c}\vec{A})^2}{2m} = \frac{p^2}{2m} + \frac{q\vec{p}\cdot\vec{A}}{mc} + \frac{(q\vec{A})^2}{2mc^2}.$$
 (1.2)

Asumiendo un protón, con carga q, el cual experimenta la interacción con un campo magnético externo, entonces podemos representar la interacción con un hamiltoniano de la forma  $H = H_0 + H_{int}$ , en donde  $H_0$  está dado por la ecuación (1.1), y el hamiltoniano de interacción para N protones es:

$$H_{int} = -\sum_{n=0}^{N} \frac{e}{m_p c} \vec{p}_n(r_n) \cdot \vec{A}(r_n, t), \qquad (1.3)$$

con  $m_p$  la masa del protón,  $\vec{p_n}$  y  $\vec{r_n}$  el momentum y la posición del n-esimo protón.

### 1.2. Teoría de Fermi

Fermi intenta reproducir los fenómenos de las interacciones débiles para el proceso  $n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$ , usando como herramienta la teoría electromagnetica y, haciendo ciertas consideraciones, propone un hamiltoniano análogo al hamiltoniano de interacción (1.3). La primera consideración es introducir al par leptonico de la siguiente manera:

$$\vec{A} \to \psi_e^*(r)\psi_{\bar{v}}(r),\tag{1.4}$$

con  $\psi$  la función de onda del leptón creado que describe la aparición de los estados leptonicos en el decaimiento.

Se reemplaza el operador diferencial de la teoría electromagnética por un operador que intercambia los estados de neutrón y protón, denotado  $\hat{\tau}_+$ ,

$$-\frac{P}{M_p c} \to \hat{\tau}_+. \tag{1.5}$$

Para entender como se representa la acción de este operador se utiliza el formalismo de isospín, el cual fue introducido por Heisenberg para distinguir grupos de partículas que interaccionan fuertemente y a su vez son idénticas en todos los aspectos excepto en sus propiedades electromagnéticas, como la carga. La independencia de las fuerzas nucleares en la carga nos indica que en la mayoría de los casos no necesitamos distinguir entre protones y neutrones. De acuerdo a esto, se pueden agrupar en una familia común, los nucleones, los cuales aparecen en dos estados de carga:

- El protón (carga +e )
- El neutrón (sin carga)

Este tipo de grupos de partículas barionicas que tienen el mismo espín y masa, pero tienen diferente carga constituyen multipletes de isoespín. Es posible, entonces, describir ambas partículas, protón, neutrón, como distintos estados de isoespín de una sola partícula.

También se introduce una constante g que caracteriza la magnitud de la interacción:

$$e \to g.$$
 (1.6)

Finalmente el hamiltoniano de interacción es :1

$$\hat{\mathcal{H}}_{\beta} = g \sum_{n} \psi_e^*(r_n) \psi_{\bar{v}}(r_n) \hat{\tau}_+^n.$$
(1.7)

Para el proceso  $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ , el operador de isospín ahora cambia un protón a neutrón, aniquilando el neutrón del estado inicial. De forma similar al decaimiento  $\beta^-$  se introduce una constante g que tomamos idéntica pues la suponemos debida al mismo tipo de interacción. De acuerdo a estas consideraciones el hamiltoniano de interacción es de la forma:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\beta} = g \sum_{n} \psi_{e^+}^*(r_n) \psi_{\nu}(r_n) \hat{\tau}_{-}^n.$$
(1.8)

Esta reacción se aplica igualmente al proceso de captura electrónica orbital, que puede representarse por:

$$p + e^- \to n + \nu_e. \tag{1.9}$$

De manera que el hamiltoniano de interacción es de la forma:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\beta} = g \sum_{n} \left( \psi_{e}^{*}(r_{n}) \psi_{\bar{v}}(r_{n}) \hat{\tau}_{+}^{n} + \psi_{\bar{v}}(r_{n}) \psi_{e}^{*}(r_{n}) \hat{\tau}_{-}^{n} \right).$$
(1.10)

### 1.3. Forma Estadística del Espectro de los Rayos Beta

La regla de oro de Fermi (ROF) describe básicamente la probabilidad de transición de un estado inicial a un estado final.<sup>2</sup> De esta se tiene que la probabilidad de emisión de un electrón con energía  $E_e$  por unidad de tiempo es

$$P(E_e)dE_e = \frac{2\pi}{\hbar} \mid \mathcal{H}_{fi} \mid^2 \rho(E_f), \qquad (1.11)$$

donde  $|\mathcal{H}_{fi}|^2$  es el elemento de matriz de la matriz de transición, y  $\rho(E_f)$  es la densidad de estados finales, la cual puede ser escrita como  $\frac{dn}{dE_f}$ , donde dn es el número de estados finales en el intervalo de energía  $dE_f$ .

El elemento matricial  $\mathcal{H}_{fi}$  es la integral de interacción  $\mathcal{H}$  entre los estados cuasi-estacionarios inicial y final del sistema:

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Formalmente estas funciones de onda,  $\psi$ , son operadores que actuan sobre el vacío generando los estados leptonicos. En el presente trabajo se omite la notación  $\hat{\psi}$  por simplicidad y ya que nos concentraremos en las amplitudes de transición, donde aparecen efectivamente las funciones de onda.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>La deducción formal de la ROF es mostrada en el Apéndice A.

$$\langle \psi_f | \hat{\mathcal{H}}_\beta | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \hat{\mathcal{H}}_\beta \psi_i dr_1 dr_2 ... dr_A, \qquad (1.12)$$

con  $\psi_f$  y  $\psi_i$  las funciones de onda nucleares final e inicial en el espacio de posición,  $r_i$  la posición del n-esimo nucleón.

En primera aproximación se representa al electrón y al neutrino como ondas planas, cuya función de onda está normalizada en un volumen V:

$$\psi(r) = \left(\frac{1}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \times exp\left(\frac{i\vec{p}.\vec{r}}{\hbar}\right).$$
(1.13)

Para los calculos la exponencial es despreciada debido a que la longitud de onda de de Broglie para el momentum común de los leptones involucrados es muy grande, y por lo tanto puede ser considerada constante en el núcleo. Entonces el elemento matricial tendrá la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_{fi} = \frac{g}{V} \int \psi_f^* \sum_n \hat{\tau}_+ \psi_i dr_1 dr_2 ... dr_A.$$
(1.14)

La integral que aparece en la anterior ecuación se define como la matriz de Fermi, y es notada de la siguiente forma:

$$\int 1 \equiv \int \psi_f^* \sum_n \hat{\tau}_+ \psi_i dr_1 dr_2 ... dr_A.$$
(1.15)

Por lo tanto el elemento matricial será:

$$\mathcal{H}_{fi} = \frac{g}{V} \int 1. \tag{1.16}$$

Con el fin de determinar la forma del espectro de energía beta supondremos que en el decaimiento el electrón emitido tendrá un momento p y el neutrino un momento q, de tal forma que podamos expresar la densidad de estados,  $\rho(E_f)$ , como los productos de los volúmenes en el espacio de fase. Por lo tanto, la densidad de estados para electrones  $dn_e$  y neutrinos  $dn_{\nu}$  para un valor fijo del momento y en un intervalo entre p y dp (o q y dq), considerando un volumen V,<sup>3</sup> es:

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Este volumen es utilizado para la determinación de la densidad de estados el cual anula el factor  $V^2$  procedente del elemento matricial.

$$dn_{e} = |\psi|^{2} 4\pi p_{e}^{2} dp_{e}$$
  
=  $\frac{V}{2\pi^{2}\hbar^{3}} p_{e}^{2} dp_{e}.$  (1.17)

De la misma forma para el neutrino

$$dn_v = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} q_v^2 dq_v.$$
 (1.18)

El número de estados finales en un intervalo de energía  $E_0$  y  $E_0 + dE_0$ , se encuentra a partir de la densidad de estados para el electrón y para el neutrino de la siguiente manera:

$$\frac{dn}{dE_0} = \frac{dn_e dn_v}{dE_0} = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6} \frac{p_e^2 q_v^2 dp_e dq_v}{dE_0}.$$
(1.19)

La energía total disponible  $E_0$  es igual a  $E_e + E_v = E_e + qc$  y, por tanto, para una energía dada  $\frac{dq}{dE_0} = \frac{1}{c}$ , donde asumimos que la energía del electrón es constante y que la masa del neutrino es igual a cero.<sup>4</sup> En consecuencia, la densidad de estados para el electrón y el neutrino en un intervalo de energía  $E_0$  y  $E_0 + dE_0$  es

$$\frac{dn}{dE_0} = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} E_e p_e (E_0 - E_e)^2 dE_e.$$
(1.20)

La densidad de estados se utiliza para predecir la forma del espectro de energía de los electrones, es decir la probabilidad de emisión de un electrón por unidad de tiempo. Con los resultados obtenidos para la matriz de Fermi (1.16) y los obtenidos para la densidad de estados (1.20), la probabilidad de emisión de un electrón con energía  $E_e$  será (véase Apéndice B):

$$P(E_e)dE_e = \frac{g^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \left| \int 1 \right|^2 E_e p_e (E_0 - E_e)^2 dE_e.$$
(1.21)

De la ecuación (1.21) se puede observar el espectro continuo del decaimiento beta. El factor  $E_e p_e (E_0 - E)_e^2$  es llamado la forma estadística del espectro de energía de los rayos beta y dicta la forma mostrada en la Figura(1.1).

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Aproximación, justificada por las cotas máximas en la masa de los neutrinos es hasta el momento de 3 *eV* [3].



Figura 1.1: Forma del espectro estadístico para el decaimiento beta, eq. 1.21.

# Capítulo 2

### Consideraciones sobre la Teoría de Fermi

La forma estadística (1.21) debe ser corregida por varias alteraciones. La primera es la regla de selección, ya que la matriz de Fermi (1.16) solo tiene un valor distinto de cero si los espines de ambas funciones coinciden, es decir, la teoría no admite cambios de espín entre los estados inicial y final, así mismo no admite cambios de paridad pues la matriz también se anularía. Sin embargo, este tipo de cambios ocurren, un ejemplo de cambio de espín se tiene en el decaimiento del  $He^6$ 

$$He^{6} \rightarrow Li^{6} + \beta^{-} + \bar{v}.$$

$$0^{+} \rightarrow 1^{+}$$
(2.1)

por lo tanto este proceso no puede ser explicado directamente por la teoría de Fermi. Para completar el modelo se deben considerar: las exclusiones por espín de los leptones, formulación relativista del decaimiento beta, espectro de rayos beta y finalmente se debe considerar el campo de Coulomb producido por el núcleo, pues hasta el momento se han considerado a los leptones emitidos como partículas libres.

En este capítulo son resueltas las inconsistencias acerca del modelo que inicialmente introdujo Fermi, haciendo uso de las consideraciones anteoriormente escritas.

### 2.1. Espín de los leptones

Los leptones son partículas que experimentan interacciones débiles y pueden experimentar interacción electromagnética; por ejemplo el electrón, el muon y la partícula tau tienen carga eléctrica y por ende experimentan ambos tipos de interacción. Sin embargo, el neutrino, al tener carga nula, no experimenta interacción electromagnetica y por tanto son sensibles solamente a la interacción débil. Además, son considerados fermiones ya que tienen espín semientero  $\frac{1}{2}$  [10].<sup>1</sup>Para generalizar los resultados obtenidos por Fermi se deben considerar las funciones de onda de los leptones como espinores de dos componentes.

$$\Psi(r) = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}.$$
(2.2)

La función de onda leptónica para partículas libres, se escribe como una expansión en ondas planas normalizada para el volumen nuclear V:

$$\Psi(r) = \left(\frac{1}{V}\right) \begin{pmatrix} \psi_+\\ \psi_- \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i\left(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{r}-Et\right)}{\hbar}\right),\tag{2.3}$$

en teoría no relativista. De la misma forma que se hizo en el anterior capítulo la exponencial puede ser obviada dadas las dimensiones del núcleo.

Dado que el cuadrado de las funciones  $\Psi$  se interpreta como la probabilidad de encontrar el sistema con espín a lo largo y contrario al eje z, estas deben cumplir:

$$|\psi_{+}|^{2} + |\psi_{-}|^{2} = 1.$$
(2.4)

La densidad Hamiltoniana de interacción será ahora el producto de formas bilineales de las funciones de onda tanto de los leptones como de los nucleones. Este producto ha de ser de tal forma, que estos permanezcan invariantes bajo rotaciones en el espacio, debido a que el decaimiento beta no depende de una escogencia especial de sistema de coordenadas.

Se tienen cuatro distintas formas bilineales invariantes bajo rotaciones para los leptones (ver apéndice C.1.),

$$\psi_e^{\dagger}\psi_{\nu} \quad y \qquad \psi_e^{\dagger}\sigma_i\psi_{\nu}, \tag{2.5}$$

con las funciones de onda para el par leptonico:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \quad y \qquad \psi^{\dagger} = \begin{pmatrix} \psi_+^*, & \psi_-^* \end{pmatrix}, \qquad (2.6)$$

y con  $\sigma_i$  las matrices de Pauli, i = x, y, z. Las cuales pueden ser expresadas explícitamente como:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
 (2.7)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Los neutrinos tienen dos estados propios de helicidad según su signo, llamándose neutrino a la partícula con helicidad  $\lambda = -\frac{1}{2}$ . Es precisamente en la helicidad en donde el neutrino difiere del antineutrino .

Las formas bilineales descritas para el par leptonico (2.5) permanecen invariantes bajo rotaciones de la misma forma para las componentes de las funciones de onda de los nucleones.

La densidad Hamiltoniana de interacción invariante bajo rotaciones puede ser vista como el producto entre escalares leptonicos y de escalares nucleónicos, y de igual manera para los vectores axiales:

$$\left(\psi_{p}^{\dagger}\hat{\tau}_{+}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\hat{\tau}_{+}\psi_{v}\right),\qquad\left(\psi_{p}^{\dagger}\hat{\tau}_{+}\sigma_{i}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\hat{\tau}_{+}\sigma_{i}\psi_{v}\right),\tag{2.8}$$

con  $\hat{\tau}_+$  como el operador de isospín, y  $\sigma_i$  las matrices de Paulí.

#### 2.2. Transiciones de Fermi y Gamow-Teller

A partir de la Regla de Oro de Fermi (1.2), observamos que cualquier tipo de transición es posible, y de acuerdo a su probabilidad se clasifican en transiciones permitidas y prohibidas.<sup>2</sup> Las transiciones permitidas son aquellas en las que el momento angular orbital total del electrón y el neutrino es nulo  $L_{e\nu} = 0$  [16], estas son las transiciones más probables y por tanto las más intensas, por esta razón las transiciones que utilizaremos en nuestro estudio serán de este tipo. En estas transiciones los estados del núcleo se subdividen en dos grupos dependiendo de su cambio en el espín, las Transiciones de Fermi y Transiciones de Gamow-Teller, que ocurren si ciertas reglas de selección son satisfechas por los espines nucleares  $(S_i, S_f)$  y no cambia la paridad,<sup>3</sup>a decir

- Transiciones de Fermi:  $\Delta S = |S_i S_f| = 0$ , No cambia la paridad.
- Transiciones de Gamow-Teller:  $\triangle S = |S_i S_f| = 0$  o 1 No cambia de paridad.

Donde las transiciones tanto de Fermi como de Gamow-Teller están consideradas en las interacciones descritas en (2.8).

### 2.2.1. Transiciones de Fermi

Mediante el producto de escalares bilineales se puede obtener la densidad hamiltoniana de interacción, las cuales rigen las transiciones de Fermi, a

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Las transiciones prohibidas que son las menos probables y son únicamente posibles cuando eventualmente ninguna transición permitida es posible. Son aquellas transiciones en que el momento angular  $L_{e\nu}$  del electrón y el neutrino es superior a cero, así tendremos transiciones primeras prohibidas cuando  $L_{e\nu} = 1$ , transiciones segundas cuando  $L_{e\nu} = 2$ , y así sucesivamente.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>La simetría de paridad, o simetría izquierda-derecha, consiste en la invarianza de la física bajo una inversión de las coordenadas espaciales, esto es  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ , es decir cambiando el sentido del sistema coordenado.

saber:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\beta} = \psi_f^{\dagger} \mathcal{H}_{\beta} \psi_i = g_F \left( \psi_f^{\dagger} \sum_n \hat{\tau}_+ \psi_i \right) \left( \psi_e^{\dagger} \psi_\nu \right) + h.c,$$
(2.9)

con  $\hat{\tau}_+$  el operador escalera de isospín,  $g_F$  como una constante de acople y donde el producto de funciones de onda debe entenderse como entre espinores, con h.c como su hermitico conjugado,

Las transiciones más probables, las permitidas, conllevan un momento angular del par leptónico nulo ( $\hat{L}_{e\nu} = 0$ ). Ahora si el electrón y el neutrino son partículas que emergen del proceso de decaimiento  $\beta$  con sus espines  $\frac{1}{2}$  opuestos, su momento de espín es  $\vec{S} = 0$  en cuyo caso es conocida como desintegración tipo Fermi. La integral espacial  $\int \psi_f^+ \sum_n \hat{\tau}_+^{(n)} \psi_i dr_1...$ , ademas será nula si los estados neutrón-protón tienen espín distinto.

Con la conservación del momento angular

$$\hat{J}_i = \hat{J}_f + \hat{L}_{e\nu} + \hat{S}_{e\nu} = \vec{J}_f + 0, \qquad (2.10)$$

siendo  $\hat{J}_i$  y  $\hat{J}_f$  el momento angular total del núcleo antes y después de producirse la desintegración,  $\hat{L}_{e\nu}$  y  $\hat{S}_{e\nu}$  los momentos angulares orbitales y de espín del par leptonico electrón-neutrino. Debido a su equivalencia, denotamos por *e* indistintamente a electrones y positrones, y por *v* a neutrinos y antineutrinos, según se trate la desintegración  $\beta^-$  o  $\beta^+$ .

#### 2.2.2. Transiciones de Gamow-Teller

En estas transiciones el producto de los vectores axiales nos da la densidad hamiltoniana de interacción induciendo a transiciones de Gamow-Teller:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\beta} = \psi_f^{\dagger} \mathcal{H}_{\beta} \psi_i = g_{GT} \left( \psi_f^{\dagger} \sum_n \hat{\tau}_+ \sigma^{(n)} \psi_i \right) \left( \psi_e^{\dagger} \sigma^{(n)} \psi_\nu \right) + h.c., \qquad (2.11)$$

con  $g_{GT}$  una constante de acople.

El elemento matricial descrito anteriormente contiene la componente del vector axial  $\sigma$ , y puede ser diferente de cero solo si la paridad de la función de onda inicial y final es la misma y si la carga en el momento angular es 0 o 1.

La conservación del momento angular es

$$\hat{J}_i = \hat{J}_f + \hat{L} + \hat{S}_{e\nu}.$$
 (2.12)

A diferencia de las transiciones de Fermi los espines del par leptonico se acoplan en un sentido en concreto, dando lugar así al autovalor  $\hat{S}_{e\nu}^2 = 1$  que se conoce como desintegración tipo Gamow-Teller.

La matriz de Gamow-Teller es de la forma:

$$\int \sigma \equiv \int \psi_f^+ \sum_n \hat{\tau}_+^{(n)} \sigma^{(n)} \psi_i dr_1, \qquad (2.13)$$

se tienen que el espectro de energía de los rayos beta (1.21) toma la forma:

$$P(E_e)dE_e = \frac{1}{2\pi^3} E_e p_e (E_0 - E)^2 \left( g_f^2 \left| \int 1 \right|^2 + g_{GT} \left| \int \sigma \right|^2 \right) dE_e, \qquad (2.14)$$

con  $\sigma$  las matrices de Pauli, luego se tiene:

$$\left|\int \sigma\right|^{2} = \left|\int \sigma_{x}\right|^{2} + \left|\int \sigma_{y}\right|^{2} + \left|\int \sigma_{z}\right|^{2}.$$
(2.15)

### 2.3. Formulación Relativista del Decaimiento Beta

Una corrección evidente para la teoría de Fermi proviene de la relatividad especial, en donde son consideradas las funciones de onda como una solución de las ecuaciones de movimiento relativistas. Siendo los leptones fermiones de espín  $\frac{1}{2}$  se parte de la ecuación de Dirac<sup>4</sup>

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi = 0, \qquad (2.16)$$

denotando  $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ ,  $\psi$  una matriz columna de cuatro elementos:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \qquad (2.17)$$

y la matriz  $\gamma^{\mu} = \gamma^{0} \gamma^{i}$ , que en la representación de Dirac toma la forma [10]:

$$\gamma^{0} = \begin{pmatrix} I & 0\\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{i}\\ -\sigma^{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (2.18)$$

donde *I* es la identidad y  $\sigma^i$  (i = 1, 2, 3) las matrices de Pauli. Ahora, existen 16 productos covariantes de la forma  $\psi_i^* \psi_j$  (tomando una componente de  $\psi^*$  y una de  $\psi$ ), con *i* y *j* que van de 1 a 4, los cuales pueden ser añadidos como varias combinaciones lineales para construir

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Utilizamos la notación de indices repetidos para representar la suma. Así  $\gamma^{\mu}\partial_{\mu} = \sum_{\mu=0}^{3} \gamma^{\mu}\partial_{\mu}$ .

cantidades con transformaciones distintas, de modo que sean invariantes bajo transformaciones de Lorentz (véase apéndice C.2.). Estos operadores bilineales covariantes relativistas son [10]:

- 1.  $\bar{\psi}\psi$ : Escalar.
- 2.  $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$ : Vector.
- 3.  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ : Pseudoescalar.
- 4.  $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi$ : Pseudovector o vector axial.
- 5.  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$ : Tensor.

Donde  $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0$ ,

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (2.19)

у

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} \left( \gamma^{\mu} \gamma^{\nu} - \gamma^{\nu} \gamma^{\mu} \right).$$
(2.20)

Para el caso relativista el Hamiltoniano de interacción puede ser obtenido en forma análoga a la electrodinámica, cuya interacción está dada por:

$$\frac{e}{c}j^{\mu}A^{\mu} = \frac{e}{c}\left(\bar{\Psi}_{p}\gamma^{\mu}\Psi_{n}\right)A_{\mu},\tag{2.21}$$

con  $\bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^{0} \mathbf{y}$  la corriente conservada  $j^{\mu} = \bar{\Psi}_{p} \gamma^{\mu} \Psi_{n}$ .

La cantidad  $(\bar{\Psi}_p \gamma^{\mu} \Psi_n)$  se transforma bajo una transformación de Lorentz como un cuadri-vector, que para este caso es la densidad de corriente, y  $A_{\mu}$  es el cuadri-potencial, por lo tanto la expresión para el hamiltoniano de interacción es un invariante relativista. Ahora se reemplaza como sigue:

- La carga eléctrica por una constante de acoplamiento  $C_v$ .
- Corriente eléctrica  $(\bar{\Psi}_p \gamma^{\mu} \Psi_n)$  por la corriente electro-débil  $(\bar{\Psi}_p \gamma^{\mu} \hat{\tau}_+ \Psi_n)$ .
- Potencial electromagnético  $A_{\mu}$  por una forma bilineal covariante de los leptones  $(\bar{\Psi}_e \gamma^{\mu} \Psi_{\nu})$ .

Como resultado se obtiene una densidad Hamiltoniana de interacción de la forma:

$$C_{\nu}\left(\bar{\Psi}_{p}\gamma^{\mu}\hat{\tau}_{+}\Psi_{n}\right)\left(\bar{\Psi}_{e}\gamma_{\mu}\hat{\tau}_{+}\Psi_{\nu}\right), \quad Acoplamiento \ Vectorial \tag{2.22}$$

que es un invariante relativista. Éste precisamente fue el que originalmente introdujo Fermi.

En las próximas expresiones será omitido el operador de isospin  $\hat{\tau}_+$ , debido a que por ejemplo para el par de nucleones  $(\bar{\Psi}_p \hat{\tau}_+ \Psi_n)$ , en el formalismo de isospín está dado por [11]:

$$\bar{\Psi}_p \hat{\tau}_+ \Psi_n = \begin{pmatrix} \psi_p^{\dagger}, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n \end{pmatrix} = \psi_p^{\dagger} \psi_n, \qquad (2.23)$$

donde las  $\psi_p^{\dagger}$  y  $\psi_n$  simbolizan las partes espacial y de espín de las funciones de onda de los nucleones. De la anterior expresión se observa que no hay cambio significativo por parte del operador de isospín  $\hat{\tau}_+$ .

Ahora, se deben encontrar acoplamientos que sean invariantes bajo transformaciones de Lorentz, de modo que una posibilidad es la ya encontrada para el acoplamiento vectorial, de esta misma manera encontraremos los cuatro acoplamientos restantes, comenzando por el acoplamiento escalar

$$C_s\left(\bar{\psi}_p\psi_n\right)\left(\bar{\psi}_e\psi_\nu\right),\tag{2.24}$$

acoplamiento PseudoEscalar

$$C_p\left(\bar{\psi}_p\gamma^5\psi_n\right)\left(\bar{\psi}_e\gamma_5\psi_\nu\right),\tag{2.25}$$

acoplamiento Axial

$$C_A \left( \bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n \right) \left( \bar{\psi}_e \gamma_5 \gamma_\mu \psi_\nu \right), \qquad (2.26)$$

y el acoplamiento Tensorial

$$C_T \left( \bar{\psi}_p \sigma^{\mu\nu} \psi_n \right) \left( \bar{\psi}_e \sigma_{\mu\nu} \psi_\nu \right). \tag{2.27}$$

Los Pseudo tensores son una combinación lineal de las otras componentes por tal razón no lo incluiremos en el acoplamiento general [10].

De acuerdo a lo anterior, el acoplamiento general será la combinación lineal de los cinco acoplamientos, por lo que la densidad Hamiltoniana de interacción se convertirá en:

$$\mathcal{H}_{\beta} = C_{s} \left( \bar{\psi}_{p} \psi_{n} \right) \left( \bar{\psi}_{e} \psi_{\nu} \right) + C_{\nu} \left( \bar{\psi}_{p} \gamma^{\mu} \psi_{n} \right) \left( \bar{\psi}_{e} \gamma_{\mu} \psi_{\nu} \right) + C_{p} \left( \bar{\psi}_{p} \gamma^{5} \psi_{n} \right) \left( \bar{\psi}_{e} \gamma_{5} \psi_{\nu} \right) + C_{A} \left( \bar{\psi}_{p} \gamma^{5} \gamma^{\mu} \psi_{n} \right) \left( \bar{\psi}_{e} \gamma_{5} \gamma_{\mu} \psi_{\nu} \right) + C_{T} \left( \bar{\psi}_{p} \sigma^{\mu\nu} \psi_{n} \right) \left( \bar{\psi}_{e} \sigma_{\mu\nu} \psi_{\nu} \right) + h.c.,$$

$$(2.28)$$

donde h.c. está involucrando los operadores para el decaimiento beta inverso.

Si se expresa el hamiltoniano de interacción (2.28) en términos de las matrices  $\alpha^i$  y  $\beta$  se tiene(Ver Apéndice C.3.):

$$\mathcal{H}_{\beta} = C_{s} \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\psi_{\nu}\right) + C_{\nu} \left[\left(\psi_{p}^{\dagger}\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\alpha\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\alpha\psi_{\nu}\right)\right] + C_{p} \left(\bar{\psi}_{p}\beta\gamma^{5}\psi_{n}\right) \left(\bar{\psi}_{e}\beta\gamma^{5}\psi_{\nu}\right) + C_{A} \left[\left(\psi_{p}^{\dagger}\sigma\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\sigma\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\gamma^{5}\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\gamma^{5}\psi_{\nu}\right)\right] + C_{T} \left[\left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\sigma\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\sigma\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\alpha\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\alpha\psi_{\nu}\right)\right] + h.c.,$$
(2.30)

con

$$\sigma^a = \begin{pmatrix} \sigma^a & 0\\ 0 & \sigma^a \end{pmatrix}.$$
 (2.31)

Las magnitudes de las constantes de acoplamiento  $C_s, C_v, ..., C_T$  son determinadas a partir de datos experimentales.

Si consideramos aproximaciones no relativistas para las funciones de onda

$$\psi_p^{\dagger} = \left(-\frac{\sigma \cdot p_p}{2Mc}u_p^{\dagger}, u_p^{\dagger}\right) \qquad \psi_n = \left(-\frac{\sigma \cdot p_n}{2Mc}u_n\right), \tag{2.32}$$

con  $p_p$  y  $p_n$  los momentos lineales del protón y neutrón respectivamente y los u los espinores de las partículas.

En la densidad hamiltoniana de interacción (2.30) los elementos que contienen términos  $\alpha^i$  y  $\gamma^5$ , conectan términos pequeños con grandes los cuales se anulan si se consideran aproximaciones no relativistas, ya que la energía del protón y neutrón es muy pequeñas comparada con su masa y en consecuencia, el único termino que no es cero son los espinores de cada partícula. Los demás términos que no contienen  $\alpha^i$  y  $\gamma^5$ , son los que conectan componentes grandes con grandes y pequeños con pequeños lo que conlleva a que la hamiltoniana de interacción nos quede de la forma:

$$\mathcal{H}_{\beta} = C_{s} \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\psi_{\nu}\right) + C_{\nu} \left(\psi_{p}^{\dagger}\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\psi_{\nu}\right) + C_{A} \left(\psi_{p}^{\dagger}\sigma\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\sigma\psi_{\nu}\right) + C_{T} \left(\psi_{n}^{\dagger}\beta\sigma\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\sigma\psi_{\nu}\right) + h.c.,$$

$$(2.33)$$

Lo anterior lleva entonces a que por ejemplo el acoplamiento escalar dé finalmente la matriz de Fermi

$$\int \beta = \int \psi_p^{\dagger} \psi_n = -\int \psi_p^{\dagger} \psi_n, \qquad (2.34)$$

donde el signo menos se deriva de la matriz  $\beta.$  Por otro lado, la interacción vectorial da

$$\int 1 = \int \psi_p^{\dagger} \psi_n. \tag{2.35}$$

Concluimos entonces, que ambas transiciones escalar y vectorial pueden inducir las transiciones de Fermi. Del mismo modo y teniendo la relación

$$\int \beta \sigma = -\int \sigma. \tag{2.36}$$

se concluye que los acoplamientos tensorial y axial inducen a transiciones de Gamow-Teller.

### 2.4. Espectro de Rayos Beta

Con lo obtenido en la sección anterior es posible hallar el espectro de energías de los rayos beta considerando interacciones relativistas. Entonces utilizando los resultados de los acoplamientos que inducen a transiciones de Fermi y de Gamow-Teller se puede calcular el elemento matricial al cuadrado |  $\mathcal{H}_{fi}$  |<sup>2</sup>, el cual contiene todos los acoplamientos y amplitudes de probabilidad:

$$|\mathcal{H}_{fi}|^2 = \left|\sum_k C_k \left(\psi_e^{\dagger} \Omega^k \psi_\nu\right) \int \Omega_k\right|^2 \qquad con \quad \Omega^k = \Omega_k^{\dagger}.$$
(2.37)

donde los  $\Omega^k$  son los operadores del hamiltoniano de interacción descrito en (2.33), como se muestran en el Cuadro (2.1)

k	1	2	3	4	5	6	7	8
$C_k$	$C_s$	$C_v$	$C_T$	$C_T$	$C_T$	$C_A$	$C_A$	$C_A$
Ω	$\beta$	1	$\beta \sigma_0$	$\beta \sigma_1$	$\beta \sigma_{-1}$	$\sigma_0$	$\sigma_1$	$\sigma_{-1}$

Cuadro	2.1:	Operadores.
--------	------	-------------

donde los sub-indices de  $\sigma$  representan el numero cuántico de espín asociado al momento angular de la siguiente forma

$$\sigma_0 = \sigma_z \qquad y \qquad \sigma_{\pm 1} = \mp \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sigma_x \pm \sigma_y\right). \tag{2.38}$$

Ahora, si en el acoplamiento tensorial expandimos en función de los sigma (2.38):

$$\left(\psi_p^{\dagger}\sigma^{\mu\nu}\psi_n\right)\left(\psi_e^{\dagger}\sigma^{\mu\nu}\psi_\nu\right) = \sum_M (-)^M \left(\psi_f^{\dagger}\sigma_M^{\mu\nu}\psi_i\right)\left(\psi_e^{\dagger}\sigma_{-M}^{\mu\nu}\psi_\nu\right),\tag{2.39}$$

con la suma corriendo sobre  $M = 0, \pm 1$ , donde se ha cambiado las funciones de onda del neutrón y protón por las funciones inicial y final. Este tipo de problemas de acoplamiento es mucho más sencillo de resolver utilizando el Teorema de Wigner-Eckart [19]. Cuyo teorema establece que los elementos de matriz de un tensor  $T^{(L)}$  se pueden expresar como

$$\left\langle J'm' \middle| T_{(m)}^{(L)} | Jm \rangle = \sqrt{\frac{1}{2j+1}} \left\langle jmLm | jLj'm' \right\rangle \left( J' \parallel T^0 \parallel j \right),$$
(2.40)

donde  $|Jm\rangle$  estados de momento angular, la cantidad  $(J' || T^0 || j)$  es llamado el elemento matricial reducido y no depende de los números cuánticos my m', y por ultimo, el termino  $\langle jmLm_im | jLj'm' \rangle$  es el coeficiente de Clebsh-Gordan,  $C_{j'mLm'}^{jm}$ . El rango del operador matricial L obedece al grupo de rotaciones SO(3) y no a SO(3,1) de Lorentz, en consecuencia, L es cero para acoplamientos escalares y vectoriales y 1 para las  $\beta\sigma$  y  $\sigma$ .

Donde un operador escalar de orden cero  $T^0$ , satisface la ecuación (2.40) de la siguiente manera:

$$\left\langle J'm' \middle| T_0^0 \, |Jm\rangle = \sqrt{\frac{1}{2J'+1}} \left\langle j\,m00 \, |\, j, 0\, j'm' \right\rangle \cdot \left(J' \parallel T^0 \parallel j\right)$$
  
=  $\sqrt{\frac{1}{2J'+1}} \, \delta_{j\,j'} \delta_{m,m'} \cdot \left(J' \parallel T^0 \parallel j\right).$  (2.41)

Se observa que el elemento de matriz de un operador escalera depende solo de j y no de la magnitud de m. De forma similar para amplitudes tensorial y axial.

 $|\mathcal{H}_{fi}|^2$ es evaluada sumando sobre los estados finales y sobre los estados iniciales, lo cual lleva a la siguiente expresión para valores fijos de *m* y *m*':

$$\frac{1}{\sqrt{2J_i+1}} \sum_{m_i m_f} C_{j_i m_i \, Lm'}^{j_f m_f} = \frac{1}{\sqrt{2J_i+1}} \frac{2J_f+1}{2L+1} \,\delta_{L\,L'} \delta_{m,m'},\tag{2.42}$$

donde J y m son los momentos angulares inicial y final. De donde se deducen las siguientes tres reglas

Regla 1. No hay términos cruzados entre transiciones de Fermi y Gamow-Teller.

Regla 2.No hay términos cruzados entre operadores con distinto m.

Regla 3. La suma de la ecuación (2.42) es independiente de la magnitud de m.

 $|\mathcal{H}_{fi}|^2$  es evaluada por el método de la traza [9] [8], lo que evita la manipulación explicita de la unidad de espinores  $(\sigma_e, \sigma_\nu)$ , los cuales están involucrados en el elemento matricial al cuadrado:

$$\left|\mathcal{H}_{fi}\right|^{2} = \sum_{k,l=1}^{8} \sum_{\sigma_{e}\sigma_{\nu}} C_{k} C_{l}^{*} \left(\psi_{e}^{\dagger} \Omega^{k} \psi_{\nu}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger} \Omega^{l} \psi_{\nu}\right)^{*} \left(\int \Omega_{k}\right) \left(\int \Omega_{l}\right)^{*}, \qquad (2.43)$$

de donde la segunda suma corre sobre los espines del electrón y neutrino. Ahora de lo obtenido en el apéndice D, la segunda suma se reduce a

$$\sum_{\sigma_e \sigma_\nu} \left( \psi_e^{\dagger} \Omega^k \psi_\nu \right) \left( \psi_e^{\dagger} \Omega^l \psi_\nu \right)^* = Tr \left( \Omega^k D_\nu \Omega^{l\dagger} D_e \right).$$
(2.44)

Los operadores proyección D, están dados por:

$$D_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{c\sigma \cdot p + \beta mc^2}{E} \right] \qquad \text{para el electrón.}$$
$$D_\nu = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{c\sigma \cdot q}{E} \right] \qquad \text{para el antineutrino.}$$

Donde q y p son los momento del antineutrino y electrón respectivamente y la masa del antineutrino se considera nula. Sabemos que las matrices  $\alpha, \beta, \sigma$  son de traza nula, por lo tanto valores no nulos serán dados solo por términos donde productos de potencias pares de estas o  $\gamma^5$  aparezcan. De acuerdo a estos se obtiene el espectro de energía para transiciones de Fermi y Gamow-Teller (Ver apéndice D).

Con los resultados para transiciones de Fermi y Gamow-Teller el espectro de energía finalmente es:

$$P(E)dE = \frac{1}{2\pi^3} \cdot pE \left(E_0 - E\right)^2 \xi \left[1 + \left(\frac{bmc^2}{E}\right)\right] dE,$$
 (2.45)

donde

$$\xi = \left[ \left( C_s^2 + C_{\nu}^2 \right) \left| \int 1 \right|^2 + \left( C_T^2 + C_A^2 \right) \left| \int \sigma \right|^2 \right].$$
 (2.46)

у

$$\xi b = \left[ \left( C_s C_\nu \right) \left| \int 1 \right|^2 + \left( C_T C_A \right) \left| \int \sigma \right|^2 \right].$$
(2.47)

### 2.5. Corrección de Coulomb

El efecto de la interacción coulombiana entre el lepton cargado, resultante de una desintegración beta, y el núcleo residual puede aumentar o disminuir el momento según sea atractiva o repulsiva la fuerza coulombiana. En la desintegración  $\beta^-$  la interacción es atractiva de los electrones con el núcleo hijo lo cual modifica el espectro  $\beta^-$ y aumenta el número de eventos hacia energías inferiores. Para la desintegración  $\beta^+$ al ser interacciones de partículas con la misma carga (positrones y núcleo hijo), la forma del espectro cambia aumentando hacia energías superiores.

Hasta el momento se ha considerado que las funciones de onda de los leptones son ondas planas, es decir, que los leptones son partículas libres, esto no es cierto debido a la fuerza que hay entre el electrón emitido y el núcleo hijo. La distorsión sobre la onda plana debido a las cargas nucleares es obtenida directamente resolviendo la ecuación de Dirac con un potencial de interacción de Coulomb.

Lo más importante de esta modificación es la inclusión de un factor de corrección F(Z, E), llamado Función de Fermi [22]:

$$F = 4 \left(2\rho_e R\right)^{2\gamma_k - 2} e^{\pm \pi z} \frac{|\Gamma(\gamma_k + iz)|^2}{\left(\Gamma(2\gamma_k + 1)\right)^2} e^{\pi z},$$
(2.48)

donde *R* es el radio nuclear, dado por la función empírica  $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$  ( $r_0$  el radio nuclear medio y *A* el número masico del atomo). La función de Fermi depende de la interacción de Coulomb, dada por la constante de estructura fina  $\alpha \simeq \frac{1}{137}$  a través de:

$$\gamma_k = \sqrt{k^2 - (\alpha Z)^2} \quad y \quad z = \alpha Z \frac{E_e}{p_e}.$$
(2.49)

De acuerdo a esta corrección el espectro de energía toma la siguiente expresión:

$$P(E)dE = \frac{1}{2\pi^3} \cdot pE \left(E_0 - E\right)^2 F(\pm Z, E) \xi \left[1 \pm 2\gamma \frac{b}{E}\right] dE,$$
 (2.50)

con Z el número atómico del núcleo hijo, los signos inferiores corresponden al positrón y al electrón.

La desviación de la forma estadística  $pE(E_0 - E)^2$ debido a la distorsión de Coulomb es por lo tanto expresada por la función de Fermi.

# Capítulo 3

### Tiempos de Vida medio y Constantes de Acoplamientos

En este capítulo se determina la expresión de la vida media comparativa para el decaimiento beta. Comenzando por definir la función de Fermi integrada para así poder determinar la probabilidad de decaimiento beta por unidad de tiempo, luego se definirá la expresión para los tiempos de vida medio y de la vida media, todo esto con el fin de llegar a la expresión de dicha vida media comparativa, la cual también depende de las magnitudes de los elementos matriciales de Fermi y de Gamow-Teller los cuales serán calculados posteriormente.

### 3.1. Vida media comparativa

Con el objetivo de determinar la vida media comparativa se hará el calculo de la probabilidad total de decaimiento para una rata de emisión de partículas- $\beta$ , en un rango de energía entre E y E + dE. De tal manera que si integramos la expresión (2.50) sobre todo el rango de frecuencias barridas por el espectro, se obtiene la función integrada de Fermi para dicho rango de energía:

$$f \equiv f(\pm Z, E) = \int_{1}^{E_0} F(\pm Z, E) \left(E^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}} E \left(E_0 - E\right)^2 dE.$$
 (3.1)

Podemos eliminar las dependencias débiles  $\frac{1}{E}$  de la expresión (2.50), para finalmente calcular la probabilidad de decaimiento por unidad de tiempo:

$$w = \frac{mc^2}{\hbar} \frac{1}{2\pi^3} \left( C_f^2 \left| \int 1 \right|^2 + C_{GT} \left| \int \sigma^2 \right| \right) f, \qquad (3.2)$$

en donde, f es la función integrada de Fermi; las constantes de acoplamiento para Fermi y Gamow-Teller están dadas por:

$$C_f^2 = C_s^2 + C_v^2, \qquad C_{GT}^2 = C_T^2 + C_A^2.$$
 (3.3)

Sabemos que la interacción débil puede tener contribuciones escalares (S), vectoriales (V), tensoriales (T) o axiales (A). De las cuales, podemos elegir posibles combinaciones escalar-tensorial (ST), vector-tensorial (VT), escalar-axial (SA), vector-axial (VA). La elección entre estas posibles combinaciones puede tomarse únicamente utilizando medidas de la correlación angulares. La correlación angular en la desintegración beta del  $He^6$ , induce a interacciones de Gamow-Teller ya que el  $He^6$ cuando decae a  $Li^6$  su espín nuclear cambia de  $0^+ \rightarrow 1^+$ , el signo + indica paridad positiva. Además también se puede concluir que [4]

• 
$$C_f^2 = C_v^2, \qquad C_s = 0.$$

• 
$$C_{GT}^2 = C_A^2, \qquad C_T = 0$$

### 3.1.1. Tiempo de vida medio

El tiempo de vida medio  $\tau$ y la vida media del núcleo de los padres  $t_{\frac{1}{2}}$  están dados por:

$$w = \frac{1}{\tau} = \frac{Ln2}{t_{\frac{1}{2}}}.$$
(3.4)

Donde la vida media del decaimiento  $\beta$  esta relacionado por la energía de desintegración  $E_0$  y el número atómico Z, a través de la función de Fermi integrada, f, además también depende de las magnitudes de  $|\int 1|^2 y |\int \sigma|^2$ . Para casos especiales tales como cuando se desprecia la interacción de Coulomb, es posible calcular la función integrada de Fermi, sin embargo, una solución exacta es obtenida integrando numéricamente la función de Fermi.

Ahora, la semi-vida comparativa se define como

$$ft_{\frac{1}{2}} = \frac{\hbar}{mc^2} \frac{2\pi \ln 2}{G_f^2 \left|M\right|^2} = \frac{B}{\left|M\right|^2},\tag{3.5}$$

en dónde

$$|M|^{2} = \left|\int 1\right|^{2} + \left(\frac{C_{GT}}{C_{f}}\right)^{2} \left|\int \sigma^{2}\right|.$$
(3.6)

Se puede observar que la vida media comparativa depende únicamente del elemento de matriz nuclear por lo que nos proporciona información acerca de la estructura nuclear. Los valores de ft abarcan 20 ordenes de magnitud, desde  $10^3$ a  $10^{22}s$ , por lo que normalmente se utiliza su logaritmo en base 10. Donde el producto ft, o vida media comparativa, en la teoría de Fermi

del decaimiento beta provee un criterio valioso para la clasificación de las transiciones radiactivas como permitidas y prohibidas a varios niveles [15]

Tipo	log ft
Superpermitidas	2.4-3.7
Permitidas	4.4-6.0
$1^a$ prohibidas	6-10
$2^a$ prohibidas	10-13
$3^a$ prohibidas	> 15

Cuadro 3.1: Tipo de transiciones.

Las transiciones con valores de ft más bajos,  $log ft \approx 3 - 4$ , se denominan transiciones Superpermitidas. Se trata de Transiciones en que las funciones de onda del núcleo padre e hijo son muy similares (solapamiento máximo).

De la ecuación (3.5),  $f y t_{\frac{1}{2}}$  pueden ser obtenidos experimentalmente, mientras que *B* es una constante universal igual a  $B = 6146 \pm 10 \, sec$ . Esto quiere decir que por medio de experimentos es posible obtener las magnitudes de  $|\int 1|^2 y |\int \sigma|^2$ , si la constante universal *B* y las constantes para Fermi y Gamow-Teller son conocidas. Ahora, si se conoce el valor teórico de  $|M|^2$ , se obtendrán los valores de las constantes  $C_F y C_{GT}$ .

En la siguiente sección se estudiará como obtener los elementos matriciales de Fermi y de Gamow-Teller, de tal forma que se puedan despejar las razones entre las constantes de acoplamiento dadas para algunos casos.

### 3.2. Matriz de Fermi

En primera instancia el elemento matricial para Fermi sobre todos los nucleones, esta dada por:

$$\left| \int 1 \right|^2 = \sum_{mf} \left| \int \Psi_{J_f M_f}^{\dagger} \sum_k \tau_{\pm}^{(k)} \Psi_{J_i M_i} dr_1 dr_2 \dots dr_A \right|^2 para \ \beta^- y \ \beta^+, \tag{3.7}$$

donde  $\Psi_f$  y  $\Psi_i$  designan las funciones para todos los nucleones, J el momento magnético total, y M el número cuántico magnético. Se ha cambiado la notación de las funciones de onda nucleares para hacer notar que éstas involucran la parte espacial y de espín, y así mismo la parte de isospín  $\Psi = \psi \phi$ , donde se notara  $\psi$  la parte espacial y de espín de los nucleones, y  $\phi$  la parte de isospín. El operador de transición  $\hat{T}_{\pm}$  es:

$$\hat{T} = \sum_{k=1} \hat{\tau}^{(k)},$$
(3.8)

donde  $T_{\pm}$  es la suma vectorial de los isospínes constituyentes. De manera que la matriz de Fermi toma la forma:

$$\left|\int 1\right|^2 = \sum_{mf} \left|\int \Psi_{J_f M_f}^{\dagger} T_{\pm} \Psi_{J_i M_i} dr_1 dr_2 \dots dr_A\right|^2,$$
(3.9)

como  $T_{\pm}$  actúa solo sobre la parte de isospín las funciones de onda espacial y de espín son iguales en ambos estados, lo cual es la característica principal de las transiciones de Fermi. De tal manera que el elemento matricial [16]es :

$$\left| \int 1 \right|^2 = \left| \phi_{T_f T_z} T_{\pm} \phi_{T_i T_z} \right|^2.$$
(3.10)

Donde las funciones de isospín que tienen un isospín total T y componente  $z \rightarrow T_z$  es denotada por  $\phi_{TT_z}$ . Los operadores  $\hat{T}_+$  y  $\hat{T}_-$  actuando sobre los estados son:

$$\int 1 \Big|^2 = \delta_{T_i T_f} \left[ T_i \left( T_i + 1 \right) - T_{iz} T_{fz} \right].$$
(3.11)

Por lo tanto, la matriz de Fermi obedece a una regla de selección de isospín igual a:

$$\Delta T = 0 \qquad \Delta T_z = \pm 1. \tag{3.12}$$

Ahora, las transiciones especulares<sup>1</sup>,  $T = \frac{1}{2}$  y  $T_z = \pm \frac{1}{2}$ , de tal manera que el elemento matricial para transiciones especulares es

$$\left|\int 1\right|^2 = 1$$

Ahora, si el caso es transiciones puras de Fermi, donde no hay cambio de paridad, ó sea  $0^+ \rightarrow 0^+$ , y con T = 1,  $T_{iz} = 1$  y  $T_{fz} = 0$ , el cuadrado del elemento de matriz para las transiciones viene siendo:

$$\left|\int 1\right|^2 = 2. \tag{3.13}$$

### 3.3. Matriz de Gamow-Teller en Transiciones Especulares

La matriz de Gamow-Teller para decaimiento  $\beta^+$  está dada por:

$$\left| \int \sigma \right|^{2} = \sum_{mf} \left| \int \phi_{T_{f}T_{f}}^{\dagger} \psi_{J_{f}M_{f}}^{\dagger} \sum_{k} \tau_{-}^{(k)} \sigma_{m}^{(k)} \phi_{T_{i}T_{iz}} \psi_{J_{i}M_{i}} dr_{1} dr_{2} \dots dr_{A} \right|^{2},$$
(3.14)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Un par de núcleos se dice que son especulares si uno puede ser formado del otro por la transformación de los protones en neutrones y viceversa, ejemplos de estos pares son  $H^3$ y  $He^3$ ,  $B^{11}$ y  $C^{11}$  [4].

el elemento matricial escrito anteriormente involucra el operador  $\sum_k \tau_-^{(k)} \sigma_m^{(k)}$ , donde k denota los diferentes nucleones, T el isospín total, y J el momento magnético. Se ha escrito explicitamente las componentes de la función de onda para los nucleones, donde  $\psi_f$  y  $\psi_i$  son las funciones de onda espacial y de espín,  $\phi_f$  y  $\phi_i$  son los llamados isospines que cumple con las mismas propiedades análogas a los estados de espín.

El elemento matricial para Gamow-teller (3.14) contiene la componente del vector axial  $\sigma$  que puede ser diferente de cero solo si el isospín inicial y final son el mismo.

Donde el isospín obedece a una regla de selección de la forma [5]:

$$\Delta T = 0, \pm 1, \qquad \Delta T_z = \pm 1. \tag{3.15}$$

El signo superior para  $T_z$  hace referencia al decaimiento  $\beta^-$ , y el inferior al decaimiento  $\beta^+$ . Dado que se está estudiando el caso para decaimientos entre núcleos especulares, donde uno de estos núcleos puede ser generado con otro mediante las respectivas transformaciones de los protones en nucleones y viceversa. Su momento magnético inicial sera igual al momento magnético final, por consiguiente el isospín inicial y final será el mismo isospín [4]:

$$J_i = J_f = J, \quad T_i = T_f = T.$$
 (3.16)

El cuadrado del elemento matricial es realmente una suma de tres términos, cada uno involucra uno de los tres componentes de  $\sigma_m$ , definidas como:

$$\sigma_0 = \sigma_z, \qquad \sigma_{\pm} = \mp \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sigma_x \pm i\sigma_y\right). \tag{3.17}$$

Sin embargo no hay contribución de parte de  $\sigma_+$ , ya que  $\psi_{JJ}$  se encuentra en el estado de máxima componente *z* de momento. Ahora se transforman los términos  $\sigma_0$  y  $\sigma_-$  en la forma:

$$\left\langle \sum_{k} \sigma_{z}^{(k)} t_{z}^{(k)} \right\rangle_{M=J,T_{z}=-\frac{1}{2}},$$
(3.18)

donde el valor esperado de (3.18) está evaluado para el estado  $\psi_{JJ}\phi_{-\frac{1}{\alpha}}$ .

Ahora, los términos  $\sigma_-$  y  $\sigma_0$  serán calculados por medio de los operadores escalera (véase apéndice E). El término  $\sigma_-$ es un producto tensorial de espacio entre la parte espacial y de isospín, donde en la parte espacial y de espín los operadores escalera actúan directamente sobre las matrices sigma dejando invariante el operador de isospín, mientras que para la parte de isospín el operador escalera actúa solamente sobre el operador de isospín dejando invariante a las matrices sigma. En el segundo término  $\sigma_0$ , solo tiene parte isospín ya que la componente de dicho término solo involucra el

eje z. En consecuencia, se obtienen las expresiones para los términos  $\sigma_{-}$  y  $\sigma_{0}$  que al ser reemplazadas en el elemento matricial de Gamow-Teller(3.14) para transiciones especulares nos resulta [16] (ver apéndice E)

$$\left|\int \sigma\right|^2 = \frac{J+1}{J} \left| 2\left\langle \sum_k \sigma_z^{(k)} t_z^{(k)} \right\rangle_{M=J,T_z=-\frac{1}{2}} \right|^2.$$
(3.19)

Esta relación ha sido derivada asumiendo que la fuerza nuclear es independiente de la carga. Esto es valido sólo para núcleos especulares.

Con el resultado del elemento matricial para transiciones especulares (3.19) se hará el calculo del valor esperado para  $\sigma_z$  y  $2t_z$ , pero el valor esperado para  $2t_z$  es simplemente -1. Por lo tanto solo queda por obtener el valor esperado para  $\sigma_z$  el cual se calculó con ayuda de los armónicos esféricos para finalmente obtener (véase Apéndice E):

$$\int \psi_{j\mu}^{\dagger} \sigma_z \psi_{j\mu} d\Omega = \begin{cases} 1 & para \, j_i = j_f = \ell + \frac{1}{2} \\ -\frac{j}{j+1} & para \, j_i = j_f = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$
(3.20)

Ahora, reemplazando el valor esperado de  $\sigma_z$  en (3.19), se obtiene directamente la expresión de la matriz de Gamow-Teller en transiciones especulares, esto es :

$$\left| \int \sigma \right|^2 = \begin{cases} \frac{j+1}{j} & para \, j_i = j_f = \ell + \frac{1}{2} \\ \frac{j}{j+1} & para \, j_i = j_f = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$
(3.21)

con  $j_i$  y  $j_f$  denotado el momento angular de un nucleón en un estado inicial y final.

Para un sólo nucleón fuera de su capa cerrada el elemento matricial esta dado por (3.21), cuyo valor es el mismo si se trabaja con el modelo de capas nuclear o modelo de partícula independiente. Sin embargo, si varios núcleos son involucrados en la configuración del núcleo padre o hijo el valor de la matriz de Gamow-Teller depende del modelo. Éste resultado en realidad es una aproximación a la verdadera expresión ya que el elemento depende del momento magnético del núcleo, y ésta dependencia es más fuerte entre más cercano sea a los limites de Schmidt [15], así las diferencias pueden alcanzar el 50 %, obteniendo por ejemplo para la transición  $Ca^{39} \rightarrow K^{39}$ un valor de  $\left|\int \sigma\right|^2 = 0.6$  mientras que corregido es de  $\left|\int \sigma\right|^2 = 0.39$  [12]. En este trabajo no se tendrán en cuenta éstas correcciones.
## Capítulo 4

## Datos Experimentales y Resultados Teóricos

En esta capítulo se mostrarán los resultados teóricos y experimentales para los diferentes tipos de decaimiento beta. Comenzando, por el cálculo de la vida media comparativa para diferentes elementos, utilizando la ya mencionada función integrada de Fermi, la cual será resuelta utilizando el Sofware Mathematica. Por último se mostrarán los diferentes espectros de energía tanto para decaimientos por positrón como por electrón, así como también se hallará la razón entre las constantes de acoplamiento de Fermi y Gamow-Teller.

#### 4.1. Datos de Decaimientos

En el cuadro 4.1 se muestran algunos resultados experimentales para transiciones puras de Fermi $0^+ \to 0^+$ , para los cuales se determinó en el capítulo anterior el valor matriz de Fermi

$$\left|\int 1\right|^2 = 2. \tag{4.1}$$

Ahora la matriz de Gamow-Teller será nula debido a que para transiciones puras de Fermi no hay cambio de espín, por lo tanto no existe contribución por parte de Gamow-Teller.

A continuación se mostrar algunos resultados experimentales para transiciones de Fermi.

Decaimiento	Energía Máxima $(KeV)$	Vida Media $(s)$	Referencia
$C^{10} \rightarrow B^{10}$	$888,3 \pm 0,6$	$1311 \pm 13$	а
$O^{14} \rightarrow N^{14}$	$1809,1 \pm 1,5$	$71,\!11\pm0,\!05$	b
$Al^{26} \rightarrow Mg^{26}$	$3210,6 \pm 0,8$	$6,\!352\pm0,\!005$	с
$Cl^{34} \rightarrow S^{34}$	$4459,7 \pm 4,0$	$1,531 \pm 0,004$	d
$Sc^{42} \rightarrow Ca^{42}$	$5409,0 \pm 2,3$	$0,6846 \pm 0,0010$	d
$V^{46} \rightarrow T i^{46}$	$6019,1 \pm 2,9$	$0,4248 \pm 0,0014$	d
$Mn^{50} \rightarrow Cr^{50}$	$6608,0 \pm 2,2$	$0,2837 \pm 0,0006$	d
$Co^{54} \rightarrow Fe^{54}$	$7219,1\pm1,6$	$0,1934 \pm 0,0003$	d

Cuadro 4.1: Datos para Transiciones  $0^+ \rightarrow 0^+$  por Positrón.

a. Atomic Data and Nuclear Data Tables 16, 451-494 (1975)

b. J.M. Freeman, J.G.Jenkin, D.C. Robinson, G. Murrary, y W. E. Burcham, Phys.Letters 27B,156 (1968).

c. www.nucleide.org/DDEP\_WG/DEEPdata.htm

d. J.M. Freeman, J.H.Montague, R.E. White, G. Murrary, y W. E. Burcham, Phys.Letters 8,115 (1964).

### 4.2. Transiciones de Fermi

#### 4.2.1. Vida Media Comparativa

Para el calculo de la vida media comparativa de los decaimientos por positrones, se debe calcular numéricamente el valor de la función de Fermi integrada (3.1), para esto se utiliza el programa científico Mathematica mediante el método numérico clenshaw-curtis rule, con un criterio de convergencia de una parte en  $10^{10}$ . El valor del radio del núcleo es determinado a partir de la función empírica:

$$R = r_0 A^{\frac{1}{3}},$$

con  $r_0 = 1,2 \times 10^{-15}m$ , el cual es el radio nuclear medio, siendo éste una constante igual para todos los núcleos, y *A* el número másico del átomo. Los resultados para los distintos decaimientos considerados en el Cuadro4.1 se muestran en el cuadro mostrando la vida media comparativa en cada caso.

De lo obtenido para las vidas medias comparativas de cada decaimiento, se puede considerar valores similares para las primeras transiciones, de los cuales se obtiene un promedio que se muestra en el Cuadro 4.2. Esto es de esperarse ya que todos los decaimientos dependen de las mismas constantes B,  $C_f$ , y  $|\int 1|^2$ . El valor de la vida media comparativa caracteriza estas transiciones como las llamadas transiciones super permitidas o permitidas beneficiadas, para nuestro cálculo se halla un valor promedio de ft = 4019, cuyo promedio fue hecho para los primeros cuatro decaimiento, el

cual difiere del valor de  $3120 \pm 46$  encontrado por Kistener y Rustad [12], sin embargo, se muestra que los primeros casos están al rededor de este valor.

Decaimiento	ft(s)
$C^{10} \rightarrow B^{10}$	$3172 \pm 60$
$O^{14} \rightarrow N^{14}$	$3306{\pm}10$
$Al^{26} \rightarrow Mg^{26}$	$4587 {\pm} 20$
$Cl^{34} \rightarrow S^{\overline{34}}$	$5012{\pm}40$
$Sc^{42} \rightarrow Ca^{42}$	$5567{\pm}15$
$V^{46} \rightarrow T i^{46}$	$6306{\pm}18$
$Mn^{50} \rightarrow Cr^{50}$	$7230{\pm}38$
$Co^{54} \rightarrow Fe^{54}$	$7488{\pm}46$
Promedio	$4019\pm9$

Cuadro 4.2: Vidas Medias Comparativas.

El valor de la constante de Fermi se obtiene a partir del valor de la matriz de Fermi para transiciones permitidas descrita en (4.1) y del valor de la vida media comparativa [3]:

$$\frac{C_F}{\left(\hbar c\right)^2} = 1,166339 \times 10^{-5} GeV^{-2},$$

esta constante determina la intensidad de nuevas interacciones.

### 4.2.2. Espectro de Energía

De la expresión del espectro de energía (2.50) despreciando la dependencia de  $\frac{1}{E}$ , se obtienen los espectros de energía para los decaimientos anteriormente mencionados.

Las Figuras 4.1 a 4.4 muestran los espectros normalizados para las energías máximas de decaimiento del Cuadro 4.1, donde la forma del espectro continuo de energía para los diferentes decaimientos es explicada debido a la emisión de un neutrino en el decaimiento.

Se observa, además, como el máximo de la probabilidad empieza a correrse hacia la derecha, con respecto a la energía máxima. De modo que con el aumento de la energía máxima de decaimiento se simetriza el espectro alrededor de este valor de energía de máxima emisión, es decir, la forma del espectro cambia aumentando hacia energías superiores.



Figura 4.1: Espectro de Energía para el decaimiento por positrón  $C^{10} \rightarrow B^{10}($ línea azul) y  $O^{14} \rightarrow N^{14}($ linea roja).



Figura 4.2: Espectro de Energía para el decaimiento por positrón  $Al^{26} \rightarrow Mg^{26}$ (línea azul) y  $Cl^{34} \rightarrow S^{34}$ (linea roja).



Figura 4.3: Espectro de Energía para el decaimiento por positrón  $Sc^{42} \rightarrow Ca^{42}$  (línea roja) y  $V^{46} \rightarrow Ti^{46}$  (linea azul)



Figura 4.4: Espectro de Energía para el decaimiento por positrón  $Mn^{50} \rightarrow Cr^{50}$ (línea roja) y  $Co^{54} \rightarrow Fe^{54}$ (linea azul)

### 4.3. Transiciones Especulares

A continuación se mostrarán algunos resultados experimentales para las transiciones especulares, y los valores teóricos de la matriz de Gamow-Teller, los cuales son calculados posteriormente.

Decaimiento	Energía máxima $(KeV)$	Vida Media $(Sec)$	$\left \int\sigma\right ^2$	Referencia
$n^{1}\left( \beta^{-} ight) H^{1}$	$782 \pm 1$	$702 \pm 18$	3	а
$H^3 \left( \beta^- \right) H e^3$	$18,\!65\pm0,\!20$	$386959291 \pm 18$	3	С
$O^{15}(\beta^{-}) N^{15}$	$1739 \pm 2$	$124,1\pm0,5$	$\frac{1}{3}$	а
$F^{17}(\beta^{-})O^{17}$	$1748 \pm 6$	$66,0\pm0,5$	$\frac{97}{5}$	b,d
$Ca^{39}(\beta^{-})K^{39}$	$5490\pm25$	$0{,}88\pm0{,}01$	<u>33</u> 5	С

Cuadro 4.3: Datos para Transiciones Especulares.

a. www.nucleide.org/DDEP\_WG/DEEPdata.htm

b. L. Friedman y L. G. Smith, phys. Rev. 83, 512 (1951).

c. O. C. Kistner y B. M. Rustad, Phys. Rev. 112, 1972 (1958).

d. Calvin Wong, Phys. Rev. 95, 765 (1954)

El valor de la matriz de Gamow-Teller para los decaimientos descritos en el Cuadro 4.3, son calculados mediante la ecuación (3.21). Sin embargo, antes de obtener el valor de la matriz, se debe tener algún conocimiento del Modelo de Capas de los Núcleos.

El modelo de capas, o modelo de partícula independiente, considera al núcleo como una nube de nucleones moviéndose en órbitas más o menos independientes en un campo de fuerza nuclear autogenerado por las interacciones entre los propios nucleones. Estos a su vez, se mueven en el interior del pozo energético autogenerado en forma independiente y ocupando estados de energía bien definidos, llenando los distintos estados de energía en forma consistente con el principio de exclusión de Pauli [20].

Un resultado de interés ocurre cuando se llenan completamente las diversas capas de energía, lo cual ocurre para núcleos con 2,8,20,50,82 ó 126<sup>1</sup> neutrones o protones. En esta situación, los núcleos se caracterizan por ser sistemas más ligados y, en consecuencia, más estables que sus vecinos en el valle de estabilidad. Un caso similar de estabilidad adicional se observa en los gases inertes y se explica en términos de la completitud de una capa electrónica [16].

Entonces de acuerdo a lo dicho anteriormente acerca del modelo de capas, se hallarán los elementos matriciales para cada uno de los decaimientos del Cuadro 4.3. Así por ejemplo, para el decaimiento del neutrón el orbital que le corresponde es  $s_{\frac{1}{2}}$ , donde se sigue la notación  $\ell_j$ . donde el subindice del orbital indica el valor del momento angular total j que de acuerdo a la ecuación (3.21) nos da el valor de la matriz de Gamow-Teller

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Los números citados son llamados números magicos, donde los nucleos que los poseen son particularmente favorecidos en términos de estabilidad nuclear.

$$\left|\int \sigma\right|^2 = 3.$$

En el decaimiento  $H^3 \to He^3$  se tiene que el  $He^3$  es estable y no radiactivo, está constituido por dos protones y un sólo neutrón. De igual forma que para el decaimiento del neutrón, al hidrógeno le corresponde un orbital igual  $s_{\frac{1}{2}}$  [14], que de acuerdo a la ecuación (3.21) nos dará el valor anterior.

Para el decaimiento  $O^{15} \rightarrow N^{15}$  al igual que para el anterior decaimiento, el  $N^{15}$  es un isotopo estable y no radiactivo, está constituido por ocho neutrones y siete protones. Para este decaimiento se tiene una capa cerrada correspondiente a un número mágico 8, por tal razón le corresponde un orbital  $p_{\frac{1}{2}}$  [14]. Entonces de la ecuación (3.21) el valor de la matriz de Gamow-Teller es

$$\left| \int \sigma \right|^2 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{3}.$$

En el decaimiento  $F^{17} \rightarrow O^{17}$ , el  $O^{17}$  es un isotopo estable con nueve neutrones y ocho protones. El proceso que se tiene aquí es análogo al anterior ya que se trata de un decaimiento por positrones. Bajo el modelo de capas el orbital asociado es  $d_{\frac{5}{2}}$  [14], entonces de la ecuación (3.21) el valor de la matriz de Gamow-Teller es

$$\left|\int \sigma\right|^2 = \frac{7}{5}.$$

Para el ultimo decaimiento  $Ca^{39} \rightarrow K^{39}$ , el  $K^{39}$  es un isotopo estable con veinte neutrones y diecinueve protones. Con un órbita asociada  $d_{\frac{3}{2}}$  [14], en este decaimiento el potasio tiene una capa cerrada correspondiente al número mágico 20. Por lo tanto el valor para la matriz de Gamow-Teller es:

$$\left|\int \sigma\right|^2 = \frac{3}{5}$$

#### 4.3.1. Vida Media Comparativa y Razón Entre Constantes de Acoplamiento

Una vez determinadas las integrales de Fermi y Gamow-Teller para transiciones especulares, la función integrada de Fermi es calculada numéricamente con el fin de hallar la razón entre las constantes de acoplamiento a partir de las ecuaciones (3.5) y (3.6). Los valores para hacer el calculo de la función integrada de Fermi se encuentran en el Cuadro 4.3, la cual muestra los distintos decaimientos con sus debidas energías máximas. La integral es resuelta mediante el programa científico Mathematica de la misma forma que para transiciones de Fermi. Los resultados de este calculo son mostrados en el Cuadro 4.4, así como también son mostradas las razones encontradas para las constantes de acoplamiento.

Decamiento	ft(sec)	$\left(\frac{C_{GT}}{C_F}\right)^2$
$n^1 \left( \beta^- \right) H^1$	$1186{\pm}36$	$1.39 \pm 0.06$
$H^3 \left( \beta^- \right) H e^3$	$593{\pm}28$	$3.12{\pm}0.04$
$O^{15}(\beta^+) N^{15}$	$6995{\pm}60$	$0.040 {\pm} 0.01$
$F^{17}(\beta^+)O^{17}$	$3918{\pm}50$	$0.19{\pm}0.04$
$Ca^{39}(\beta^{+})K^{39}$	$6366{\pm}140$	$0.011{\pm}0.07$
	Promedio	$1.18{\pm}0.03$

Cuadro 4.4: Transiciones Especulares.

El promedio de las constantes de acoplamiento se hizo sin tener en cuenta el dato correspondiente a  $Ca^{39} (\beta^{-}) K^{39}$ , debido a que su valor es demasiado pequeño comparado con el valor verdadero.

De las constantes de acoplamiento se observa una contrariedad ya que se espera que la razón entre estas permanezca muy similar para los distintos decaimientos, es decir, se espera que todos los decaimientos presenten en su comportamiento la dependencia de dos constantes que son iguales para todos (véase ecuaciones 3.5 y 3.6). Un intento para salvar lo encontrado es recordar que no se están considerando correcciones por momentos magnéticos del núcleo, ya que esta dependencia se va incrementando para los núcleos pesados.

Si se hace un promedio con los cuatro primeros datos, es decir, si consideramos que los efectos del momento magnético afectan lo obtenido con el decaimiento  $Ca^{39} (\beta^-) K^{39}$ , se obtiene un valor de  $1,18 \pm 0,03$ , el cual entra sobre la incertidumbre del encontrado por Kistner y Rustad de  $1,24 \pm 0,06$  [12].

Otra posible solución radica en que la teoría de Fermi es una teoría efectiva del modelo estándar de partículas, de modo que cuando nos acercamos a energías cercanas a la masa del bosón W la cual esta alrededor de 80~GeV esta teoría deja de ser precisa. Entonces si nos fijamos en los decaimientos que poseen una energía máxima relativamente pequeña se obtienen mejores resultados debido a que la energía del electrón es baja [18].

#### 4.3.2. Espectros de Energía

Una vez determinadas las constantes de acoplamiento y los valores de las integrales de Fermi y Gamow-Teller, se obtiene los espectros para cada decaimiento. Los dos espectros de las Figuras 4.5 y 4.6 muestran espectros de decaimientos por electrón.



Figura 4.5: Espectro de Energía para el decaimiento del neutrón



Figura 4.6: Espectro de energía para el decaimiento por positrón  $H^3 
ightarrow He^3$ 

La Figura 4.7 muestra los espectros del decaimiento  $O^{15} \rightarrow N^{15}$  y  $F^{17} \rightarrow O^{17}$ , los cuales tienen energías máximas de 1739 KeV y 1748 KeV respectivamente. Se observa que los espectros se solapan parcialmente al ser normalizados , lo que nos indica que la dependencia más fuerte en el comportamiento del espectro reside en la energía máxima de emisión.



Figura 4.7: Espectros de energía para los decaimientos por positrón  $O^{15} \rightarrow N^{15}$ (linea azul) y  $F^{17} \rightarrow O^{17}$  (linea roja).

Sin embargo, existe una dependencia en otros parámetros como el peso y el radio del átomo incluidos en la función de Fermi, donde esta produce efectos importantes en cuanto mayor sea el número de cargas en el núcleo hijo, por lo tanto para átomos relativamente pequeños los efectos de la corrección de Coulomb son casi despreciables a primer orden, mientras que para núcleos mas pesados la corrección de Coulomb es más influyente y los efectos no son despreciables.

Nuevamente se observa como la figura del espectro se va distorsionando y simetrizando con el aumento de la energía máxima de emisión.



Figura 4.8: Espectro de energía por positrón  $Ca^{39} \rightarrow K^{39}$ 

## Capítulo 5

## Simulación en Geant4

En este capítulo se presenta la simulación de una fuente radiactiva de Sr-90 utilizando el código Geant4. Comenzando con una breve introducción, para posteriormente hacer una descripción de los aspectos más relevantes de la simulación. Finalmente es mostrado el espectro de energía de la fuente radiactiva ya mencionada.

#### 5.1 Introducción

El código Geant4 desarrollado en el CERN soluciona la ecuación de Boltzmann para el transporte de partículas en la materia utilizando método Monte Carlo, que al ser Pseudo aleatorio, permite la disminución de errores en los cálculos de variables tales como la energía depositada. Es utilizado para la simulación de procesos de interacción Radiación-Materia en un amplio rango de energías. Este software es el producto de un trabajo de cooperación de varios integrantes y miembros de las distintas universidades del mundo, los cuales hicieron sus aportes con la experiencia adquirida en el campo de la simulación, para ser usado en diversas aplicaciones en física de altas energías, física de partículas, astrofísica y física médica entre otros. Es un código desarrollado en el lenguaje C++ y diseñado de acuerdo con el paradigma de la POO<sup>1</sup>. Así mismo, ha sido creado siguiendo la filosofía de proporcionar total flexibilidad de cara al usuario, de manera que ésta pueda (a) diseñar una simulación que se ajuste totalmente a sus intereses y (b) obtener todo tipo de información a partir de la simulación.

#### 5.1.1. Historia de Geant4

Geant4 surgió a partir de estudios independientes desarrollados en 1993 en el CERN<sup>2</sup> y el KEK,<sup>3</sup>cuyo objetivo era investigar el uso de modernas técnicas de computación basadas en la POO, con el fin de mejorar el programa

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Programación orientada a objetos

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Organisation Européen pour la Recherche Nucléaire-Ginebra, Suiza.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>High Energy Accelerator Reseach Organisation-Tsukuba, Ibarak, Japón.

ya existente Geant3. Siendo este un código de simulación MONTE CARLO desarrollado bajo FORTRAN para reproducir el transporte de partículas a través de la materia en experimentos de física de altas energías.

En 1994 se coordinaron ambas investigaciones las cuales derivaron un proyecto coordinado por el Cern bajo la denominación RD44, tratándose de un proyecto pionero ya que este involucraba rediseñar y programar un código ya existente, pero usando el lenguaje C++ en lugar de Fortran. Finalmente, en diciembre de 1998 se lanzó la primera versión oficial del nuevo código, que pasó a llamarse Geant4, desde entonces han sido publicadas al menos dos versiones oficiales por año siendo una clara muestra de las constantes mejorías y depuraciones que se llevan a cabo de forma continua.

El hecho de que Geant4 sea un programa de código abierto (a diferencia de otros códigos basados en el método de Monte Carlo) hace que Geant4 pueda ser mantenido por una gran colaboración de físicos e ingenieros de software. De este modo se pueden cubrir campos de aplicación muy diversos y establecer una colaboración muy ambiciosa en programas de investigación.

## 5.1.2. Aplicabilidad de Geant4

En sus orígenes, Geant4 era un código cuyo fin era dar soporte a diseños experimentales dentro del campo de la física de altas energías, convirtiéndose en una herramienta muy conocida en las grandes colaboraciones experimentales de este campo, en especial las relacionadas con el LCH, particularmente ATLAS. Por otra parte, también ha sido utilizado para reproducir fenómenos y experimentos de interés en astrofísica de altas energías.

Sin embargo, el rango de validez de Geant4 ha sido extendido a energías mas bajas gracias a la implementación de los modelos físicos requeridos para ello. Debido a estos esfuerzos de desarrollo hoy día existen grupos de investigación que usan Geant4 para otro tipo de aplicaciones, por ejemplo, se pueden encontrar trabajos de interés aeroespacial en los que Geant4 es una herramienta fundamental. Así mismo programas basados en este código han sido desarrollados específicamente para aplicaciones médicas con el fin de simplificar su desarrollo, no obstante, también existen numerosos trabajos en los que directamente se usa Geant4 para aplicaciones médicas, especialmente en hadronterapia. Por otro lado, algunos grupos de investigación utilizan Geant4 para simular la respuesta de detectores tanto de centello como de estado solido. Finalmente, se debe resaltar la colaboración Geant4-DNA, en la implementación de modelos en el limite de muy bajas energías, buscando aplicación en campos como la radiobiologia o la microdosimtria.

#### 5.2. Simulación

En este trabajo se quiere calcular un cierto número de partículas por unidad de área y de tiempo de una energía determinada que, se puede seleccionar gracias al campo magnético aplicado. Para esto se va a simular un fuente radiactiva que emite electrones (Sr-90), el medio ambiente (Aire), con cuatro diferentes obstáculos distribuidos en la geometría los cuales son de aluminio. Una región donde exista un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la trayectoria de los electrones y estos dependiendo de su velocidad seguirán una trayectoria circular determinada dentro de ese campo. Ademas se colocará una abertura por donde pasarán los electrones de una energía especifica los cuales han seguido una cierta trayectoria dentro de dicho región donde exista el campo magnético, para que el detector Geiger-müller, detecte los electrones individuales los cuales salen de la abertura de salida e inciden sobre él. Finalmente lo que se obtiene es la fluencia de electrones de una misma energía dependiendo el campo aplicado.

En la Figura 5.1. Se muestra la geometría descrita anteriormente y los electrones emitidos desde una fuente de Sr - 90 siguiendo la trayectoria del campo magnético aplicado.



Figura 5.1: Geometría simulación: 1) pared no magnetizable; 2) emisión rayos beta; 3) abertura inicial; 4) campo magnético uniforme; 5) detector; 6) abertura final [21].

Las partículas beta que siguen una cierta trayectoria dentro de la región del campo magnético experimentan dos tipos de fuerzas: La primera es la fuerza de Lorentz que aparece debido a que los electrones poseen carga eléctrica, actuando de tal manera que curve los electrones hacia adentro, esto es

$$F_L = e\vec{v} \times \vec{B} = evBsen\varphi,\tag{5.1}$$

donde  $\varphi$  es el ángulo formado por los vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ . La velocidad  $\vec{v}$  y el campo magnético  $\vec{B}$  son perpendiculares lo que indicaría que entre ellos se forma un ángulo de 90°, por lo tanto  $sen\varphi = 1$ .

La segunda es la fuerza centrifuga la cual aparece debido a que los electrones tienen masa, siendo esta de la forma

$$m\frac{v^2}{r}.$$
 (5.2)

De manera que en la región donde se encuentra el campo magnético, la fuerza de Lorentz y la fuerza centrifuga se encuentran en equilibrio:

$$F_c = m \frac{v^2}{r} = e \cdot v \cdot B = F_L. \tag{5.3}$$

Lo anterior nos lleva a la expresión para el momento

$$p = m \cdot v = e \cdot B \cdot r. \tag{5.4}$$

Ahora, la ecuación para partículas relativistas en términos de su momento es

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2 
E_T = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4}.$$
(5.5)

Reemplazando el momento (5.4) en la ecuación para partículas relativistas tenemos

$$E = \sqrt{c^2 (e \cdot B \cdot r)^2 + m^2 c^4}.$$
(5.6)

Por otro lado, la energía relativista para una partícula con masa y velocidadves:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$
  
=  $m_0 c^2 (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}.$  (5.7)

En la expresión para la energía relativista de una partícula en movimiento se tiene que la velocidad de los electrones es menor que la velocidad de la luz  $v \ll c$ , por lo que  $\frac{v}{c} \ll 1$ , debido a esto, se puede utilizar una aproximación de la forma  $(1 \pm x)^n \simeq 1 \pm nx$ ,  $(x \ll 1)$ , en donde x viene siendo  $\frac{v^2}{c^2}$ , de tal manera que (5.7) nos resulte

$$E \simeq m_0 c^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right)$$
  

$$E \simeq m_0 c^2 + \frac{1}{2} m v^2$$
  

$$E \simeq m_0 c^2 + E_K.$$
(5.8)

Despejando la energía cinética de la expresión anterior y reemplazando lo obtenido para la energía total (5.6) se tiene

$$E_k = \sqrt{c^2 (e \cdot B \cdot r)^2 + m^2 c^4} - m_0 c^2.$$
(5.9)

La energía cinética encontrada anteriormente corresponde a la energía que poseen los electrones durante la simulación, donde estos dependen solamente del radio de curvatura, el momento magnético y la carga del electrón.

Entonces inicialmente el programa principal utilizado para la simulación en Geant4 se denomina "S1simulacióndiana.cc" en este se definen todos los procedimientos y funciones que se utilizarán para realizar dicha simulación. Los procedimientos y funciones pertenecen a alguna clase, ya que la programación está orientada a objetos (POO). Las clases que se definen inicialmente son:

- G4VSteppingVerbose.
- G4RunManager.

Ahora, en el módulo "S1DetectorConstruction.cc" se define la geometría y localización de los volúmenes: mundo y detector. En el módulo "S1PrimaryGeneratorAction.cc" se simula los rayos beta emitidos por una fuente de Estroncio-90.

#### 5.3. Descripción de Materiales

Es necesario definir el tipo de elementos utilizados en la simulación, los cuales pueden ser de dos diferentes clases: Elementos o compuestos. La clase elemento es descrita como "G4Element" que describe las propiedades de los átomos (número atómico, número de nucleones, masa atómica, energía, etc ). La segunda es la clase compuesto "G4Material" la cual establece las propiedades macroscópicas de la materia(densidad, estado, temperatura, presión). En el modulo S1simulacióndiana.cc se inicia con la definición de algunas variables auxiliares:

G4double a,z;

G4double density;

G4int ncomponents, natoms;

donde "a" es el número de masa, "z" es el número atómico, "density" la densidad del material, "ncomponents" el número de componentes y "natoms" el número de átomos. Se llamaron elementos tales como el Argón (Ar), y el Aluminio (Al) utilizado para los diferentes obstaculos, ya que es necesario que el elemento sea no magnético. Estos elementos fueron llamados con la clase "G4Element", donde se especifico su nombre, símbolo, número atómico, número de masa en g/mole:

G4Element\*Al = new G4Element("Aluminio", "Al", z=13., a=39.948\*g/mole); G4Element\*Ar = new G4Element("Argon", "Al", z=13., a=39.948\*g/mole);

La simulación se realiza en presencia de aire, en consecuencia, debemos simularlo. El aire es una mezcla gaseosa que compone la atmósfera terrestre, y esta compuesto por una mezcla de gases, el más abundante es el nitrógeno en un 78 %, el oxígeno en un 21 %, el Argón en un 0,93 %, el bióxido de carbono en un 0,033 % y el resto esta formado por otros gases en cantidades mínimas. El aire tiene algunas propiedades físicas(expansión, contracción, fluidez, presión, volumen, densidad y masa) que le dan características especiales que lo hacen relevante en los diferentes eventos y procesos en los que esta presente.

Para definirlo es necesario utilizar la clase "G4Material" en donde se especifica el nombre (Air), la densidad en  $mg/cm^3$ . El número de componentes para el aire son dos: Nitrógeno al 70% y Oxígeno al 30%, los demás componentes del aire no son incluidos debido a que su concentración es muy baja por lo cual no intervienen significativamente en la simulación.

G4Material\* Air =new G4Material("Air" , density=1.29\**mg*/*cm*<sup>3</sup>, ncomponents=2); Air->AddElement(N,70\*perCent); Air->AddElement(O, 30\*perCent);

## 5.4. Descripción de la geometría del sistema



Figura 5.2: Volumen y sus ejes coordenados

El concepto básico para definir las componentes del sistema que deseamos simular es el volumen. Cada volumen tiene una forma geométrica (cubo, paralelepípedo, tubos, conos), un tamaño (para el caso del cubo y paralelepípedo: alto, ancho y largo), material (su composición química) y su posición (definido un sistema de coordenadas con su origen en el centro del volumen) cuyas coordenadas x, y, z corresponden al alto, ancho, y largo respectivamente, como se muestra en la Figura 5.2. El primer volumen a definir se denomina "volumen mundo" el cual contiene todos los demás volúmenes, en consecuencia, ningún volumen puede ser mayor que este.

Los volumenes se definen a partir de la clase virtual denominada G4VUserDetectorConstruction, de manera que es aquí donde se determina tanto la geometría del problema como los materiales que constituye cada volumen. Para ello, es necesario seguir el orden establecido en Geant4, explicado a continuación:

- 1. El primer paso consiste en definir la forma y dimensiones de cada volumen mediante un *Sólido*, la cual esta representada por un objeto perteneciente a cualquiera de las clases que heredan de la clase abstracta G4VSolid, como pueden ser G4Box o G4Tubs.
- 2 El segundo paso consiste en definir el llamado *Volumen Lógico*, que combina la información del sólido junto con la del material del que esta compuesto el mismo. El volumen lógico está representado en el código por un objeto de la clase G4LogicalVolume, y siempre debe definirse dentro de otro volumen lógico.
- 3 Finalmente se debe crear el *Volumen Físico*, que esta representado por un objeto de la clase G4VPhysicalVolume. El volumen físico es una copia del volumen lógico(el cual incluye a los volúmenes lógicos que albergue en su interior) que esta localizado en una zona del espacio definido por el sistema de referencia del volumen lógico que lo contenga.

## 5.4.1. Volumen del World (Mundo)

De acuerdo a lo anterior el volumen del mundo se define con ayuda de la clase "G4Tubs" definiendo el mundo-solido "solid-World", donde se especifica el nombre (worldSphere), el radio mínimo y máximo, altura, ángulo inicial y final. Ahora, para el volumen lógico se hace uso de la clase "G4LogicalVolume" se define el mundo-lógico el cual esta constituido por el volumen solido, el material que contiene el volumen vació (vaccum), el nombre ("worldSphere") y esta ubicado en las coordenadas (0,0,0). En el volumen físico se hace uso de la clase "G4PVPlacement" se ubica en dichas coordenadas con los siguientes parámetros: "0" indica que no esta rotado en el espacio; "G4TreeVector (0,0,0)" indica que no se efectúa ninguna traslación; "worldSphereLog" es el nombre del mundo lógico; nombre (worldSphere), "0" es el volumen madre(es decir contiene a todos los volúmenes); "False" indica que no se realizan operaciones boleanas y "0" no es un copia del volumen.

G4Solid\* worldSphere = new G4Tubs("worldSphere", 0.\*cm, 3.3\*cm, 0.5\*cm, 0\*deg, 360\*deg);

worldSphereLog = new G4Tubs("worldSphere" , vacumm, "worldSphere" ,
0,0,0 );

worldSpherePhys = new G4Tubs(0, G4TreeVector (), worldSphereLog , "worldSphere, 0, False, 0 );

### 5.4.2. Volumen de los Target (Obstáculos)

Existen cinco tipos de obstáculos cuyo material es aluminio, ubicados de tal manera que no dejen pasar los electrones a través de ellos, por tal razón es necesario utilizar un material no magnetizable, ya que en la región donde los obstáculos se encuentran existe un campo magnético uniforme. Los Cinco obstáculos se muestran en la Figura 5.3:



Figura 5.3: Obstáculos.

Cada uno de los obstáculos se encuentran ubicados dentro del volumen mundo lo que indica que sus dimensiones deberán ser mas pequeñas al volumen ya descrito para el mundo. Cada obstáculo es definido como un tubo los cuales tienen un radio interior, un radio exterior, altura y un ángulo barrido alrededor del eje central, el cual va de 0 a 360 grados, de tal manera que es necesario definir unas variables adicionales "innerRadiusTube", "outRadiusTube" , "hightTube", cuyas dimensiones son:

Obstáculos	innerRadiusTube (cm)	outRadiusTube (cm)	hight (cm)	startAngleTube	endAngleTube
obstáculo 1	1.5	1.7	0.25	0	90
obstáculo 2	1.5	1.7	0.25	0	72
obstáculo 3	1.5	1.7	0.25	0	150
obstáculo 4	2.4	2.6	0.5	0	336.77
obstáculo 5	1.5	1.7	0.25	0	50

Cuadro	5.1:	Dimensiones	obstáculos.
--------	------	-------------	-------------

En primera instancia el volumen solido se define con la clase "G4Tubs", como es un tubo se debe especificar: el nombre (dependiendo del obstáculo), radio interior y exterior, altura, y los ángulos inicial y final. Con la clase "G4LogicalVolume" se define el volumen lógico el cual esta constituido del volumen solido, material del que esta hecho cada obstáculo, como ya se ha dicho son de aluminio, el nombre, y la posición. Finalmente en el volumen físico, haciendo uso de la clase "G4PVPlacement" se ubicara en dichas posiciones obedeciendo a diferentes tipos de rotación. Sin embargo, los obstáculos 1,2,3,5 aparecen con su eje de simetría (eje-z) a lo largo del volumen mundo, por lo cual es necesario rotar cada uno de los obstáculos, para esto se utiliza la clase "G4RotationMatrix", se declara la matriz de rotación ("rm") y se define la rotación según se necesite.

Lo anterior puede ser visto para el obstáculo 2 de la forma

Volumen Solido:

det\_geo["Obstaculo2"] = new G4Tubs("Obstaculo2" , innerRadiusTube2, outRadiusTube2, hight, 0\*deg,72\*deg);

Volumen Lógico:

det\_Log["Obstaculo2"] = new G4LogicalVolume(det\_geo["Obstaculo2"], Aluminio, "Obstaculo2");

Volumen Físico

det\_Phys["Obstaculo2"] = new G4PVPlacement(rotEsfera, PosObstaculo2, det\_Log["Obstaculo3"], motherVolume, false,0);

#### 5.4.3. Volumen del detector

El volumen del detector Geiger-Müller esta ubicado en el módulo "S1Detector.cc" donde son definidas unas variables auxiliares:

- DetectorCylinder\_dz: altura media del dectector.
- DetectorCylinder\_dr: radio del detector.

Ahora, se define el volumen como ya es conocido, empezando por el volumen solido. Con la clase "G4Tubs" se define el detector-solido, donde se especifica el nombre ("Detector"), el radio mínimo y máximo, la altura media, y los ángulos inicial y final. El volumen lógico es construido de forma análoga al de los obstáculos, con una única diferencia, el material del cual esta compuesto el detector es de Argón. Finalmente el volumen físico posee una rotación en el eje Y de 90° y en el eje X de 28°, para definir este volumen se utiliza la clase "G4PVPlamecent" de la misma forma que para cada uno de los obstáculos.

### 5.4.4. Atributos de visualización

Geant4 con ayuda de un visualizador permite mostrar la disposición de los volúmenes en el espacio. Con la variable "VisAttributes" se define el atributo visual del volumen, esto hace referencia al color con el cual se visualizará el volumen. "G4Colour(1.0, 1.0, 1.0)" corresponde al color blanco, en consecuencia el mundo, el obstáculo 4 y 5 se visualizará de color blanco. "G4Colour(0.0, 1.0, 0.0)" corresponde al color verde, por lo tanto, el detector y el soporte 3 se visualizaran con este color. El soporte 4 corresponde a "G4Colour(1.0, 0.0, 0.0)" que es el color rojo y por ultimo el soporte 2 con "G4Colour(0.0, 0.0, 1.0) que corresponde al color azul.

El argumento de la función "G4Colour" son tres números, en la escala que va de 0 a 255, que representa la intensidad del color, a esto se le denomina el código RGB de colores. El primer número corresponde a una intensidad de color rojo (R=red), el segundo número es el verde (G=green), y el tercer número corresponde al azul (B=blue). Para indicar con que proporción mezclamos cada color, se asigna un valor a cada uno de los colores primarios, de tal manera que por ejemplo, el valor 0 significa que no interviene con la mezcla y, a medida que este valor aumenta, se entiende que aporta más intensidad a la mezcla.

Ahora la ausencia de color (lo que conocemos como color negro) se obtiene cuando las tres componentes son 0, (0,0,0). La combinación de dos colores a nivel de 255 con un tercero en nivel 0 da lugar a tres colores intermedios. De esta forma el amarillo es (1.0,1.0,0.0), el cyan (0.0,1.0,1.0) y el magneta (1.0,0.0,1.0). Obviamente, el color blanco se forma con los tres colores primarios a su máximo nivel (1.0,1.0,1.0).

### 5.5. Descripción de la fuente de rayos beta

En el módulo "S1PrimaryGeneratorAction.cc" se definen las partículas que van a salir hasta llegar al detector, este modulo es derivado de la clase G4VUserPrimaryGeneratorAction y es la que se encargada de generar las particulas primarias en la simulación. Con la variable "n-particle" se enumera las partículas que se van a utilizar, en este caso son electrones; en consecuencia, solo tenemos una clase de partículas. Con la clase "G4GeneralParticleSource" se define el disparador de partículas (gps). En la clase "G4ParticleTable" se encuentras todas las partículas que se maneja en Geant4, en esta tabla buscamos los rayos beta con "FindParticle('beta')" y se define la partícula que va a lanzar el disparador con "SetParticleDefinition(beta)". Finalmente con la función "G4UniformRand" se genera un número aleatorio de energía entre 1 a 2500 keV.

#### 5.6. Resultados



Figura 5.4: Esquema de la simulación mostrado por openGL.

La simulación que se realizó con ayuda del código Geant4 se muestra en la Figura 5.4, se realizó con openGL el cual es un visualizador de Geant4. En el esquema se tiene una fuente de rayos beta de Sr-90, existe un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la trayectoria de los electrones emitidos durante la simulación, en donde dependiendo de su velocidad siguen una trayectoria circular determinada dentro de ese campo, por esta razón se ubico un detector, cuya función es la detectar a los electrones que han seguido dicha trayectoria. Los electrones interactuan con el aire, el campo magnético, los obstáculos de aluminio y el detector.

Inicialmente lo que se quería hacer era calibrar el aparato de medición, esto con el fin de tener una mayor precisión en los datos obtenidos en cada corrida, generando mas confianza en lo obtenido para el espectro de energía del Sr-90. De manera que se simulo un haz de 100 partículas con campos iguales a: 50,60,70,80,90,100,110,120,130,140,150 mT, donde para cada valor de campo se obtuvo una energía seleccionada para una cantidad

de electrones, y por lo tanto para cada energía se obtuvo una gráfica de fluencia.

Donde para el caso de un campo magnético igual a 60 mT se obtuvo una fluencia de electrones como se muestra en la Figura 5.5:



Figura 5.5: Espectro de Fluencia para un campo de 60 mT.

La anterior gráfica muestra la relación entre el número de partículas detectadas y la energía de las partículas seleccionadas en MeV según este campo. La energía seleccionada es aproximadamente 0.55 MeV y se observa un máximo aproximado de 2200 partículas.

Un segundo calculo de referencia es para un campo de 100 mT, obteniendo la fluencia mostrada en la Figura 5.6:



Figura 5.6: Espectro de Fluencia para un campo de 100 mT

Se observa que para el campo de 100 mT la energía seleccionada es de aproximadamente 1.050 MeV con un máximo de partículas de 1700. De esta misma manera se hizo para el resto de campos magnéticos lo que conlleva a obtener la recta de calibración del aparato, Figura (5.7), mostrada a continuación:



Figura 5.7: Recta de calibración: relación entre el campo magnético y la energía de las partículas seleccionadas.

La Figura (5.7) surge de la necesidad de tener nuestro aparato de medición calibrado, es decir, que cuando se obtenga los espectros de fluencias para cada campo la energía seleccionada de los electrones sea una sola y no se obtenga diferentes tipos de energía. Por tal razón, en la anterior figura se muestra que para los campos mencionados antes les corresponde una única energía seleccionada debida la fuerza de Lorentz la cual hace que la energía sea mayor entre mas intenso sea el campo magnético.

Una vez obtenida la recta de calibración se procede a obtener el espectro de energía del estroncio-90, graficando en el eje de las abscisas la energía seleccionada correspondiente a cada campo y en el eje de las ordenadas el numero de partículas detectas por el detector Geiger-müller, siendo el espectro de la forma



Figura 5.8: Espectro de energía Sr-90.

En la gráfica anterior se puede observar una energía máxima de  $689 \pm 0.06 \ KeV$ . Por otro lado, se puede observar como el numero de partículas disminuye con el aumento del campo magnético, teniendo la forma del espectro continuo de energía para el estroncio la cual es explicada debido a la emisión de un neutrino en el decaimiento.

Además, se puede observar como el máximo de la probabilidad empieza a correrse hacia la derecha, con respecto a la energía máxima. De tal manera que con el aumento de la energía máxima de decaimiento se simetriza el espectro alrededor de este valor de energía de máxima emisión, es decir, la forma del espectro cambia aumentando hacia energías superiores, de modo que lo obtenido mediante la simulación corrobora lo hecho teóricamente.

## Capítulo 6

## **CONCLUSIONES**

Este trabajo explora el proceso de interacción débil, cuya primera aproximación fue hecha por Enrico Fermi para explicar el decaimiento beta, en donde los procesos son tratados mediante acoples directos o interacciones de contacto, es decir, que los fermiones conocidos interactuan sin la necesidad de una partícula mediadora.

En el primer capítulo se estudió la Teoría de Fermi para el decaimiento beta, siendo esta una teoría de contacto donde el término de contacto describe cómo el estado cuántico neutrón puede trasmutar en un protón mas un par leptonico, electrón-neutrino. Similarmente para el decaimiento  $\beta^+$ . Con esto, a primer orden de perturbaciones, i.e., utilizando la regla de oro de Fermi, se puede obtener la forma estadística del espectro, el cual es continuo y de forma cualitativa similar a la obtenida experimentalmente.

La teoría de Fermi tiene, sin embargo, problemas en cuanto no contempla los cambios de espín entre el estado inicial y final del núcleo, así mismo no eran posibles los cambios en la paridad. Considerar estos hechos nos conlleva en el capítulo 2 a plantear varias correcciones, donde los cambios de espín se solucionan gracias a Gamow-Teller, quienes introducen nuevas constantes de acople, necesarias para introducir nuevos operadores en el hamiltoniano de interacción. Sin embargo, el par leptonico hasta el momento se había considerado en forma no relativista lo cual era incorrecto debido a que estos poseen energías cercanas a la de la luz. Por tal razón, se considero al electrón y el neutrino como partículas relativistas partiendo de la ecuación de Dirac para así poder llegar finalmente a un hamiltoniano que incluyera correcciones de este tipo. Hasta aquí parecía estar resultas las inconsistencias de la teoría planteada por Fermi, pero había algo más, si nos fijamos en la forma como era tratada la función de onda del electrón, pues hasta el momento había sido considerada como partícula libre, lo cual también es incorrecto debido a la interacción de Coulomb que existe entre el electrón y el núcleo residual. De manera que se incluyo un factor de corrección llamado la función de Fermi y de acuerdo a esto el espectro de energía está completo.

Con estas consideraciones, e introduciendo el concepto de vida media y vida media comparativa en el capítulo 3, podemos determinar el valor de la constante de acople para las transiciones de Fermi y la razón entre acoples para Gamow-Teller. Donde para las transiciones de Fermi se obtuvo un valor promedio aproximado de vida media comparativa de  $4019 \pm 9 s$ , siendo este un valor extremadamente alto comparado con lo obtenido por Kistener y Rustard de  $3120 \pm 46 s$  [12]. Sin embargo, los datos para los primeros decaimientos  $C^{10} \rightarrow B^{10}$  y  $O^{14} \rightarrow N^{14}$  entran sobre la incertidumbre obtenida. Esto tiene varias posibles explicaciones: una puede involucrar el hecho que la función integrada de Fermi tiene mayor impacto en los átomos relativamente grandes, otra explicación estaría involucrando el método numérico usado en la época del que puede diferir con el usado en este trabajo.

Entonces de acuerdo a estos valores y los hallados para las matrices de Fermi y Gamow-Teller de cada elemento, se cálculo la razón entre las constantes de acoplamiento tanto de Fermi como de Gamow-Teller  $(C_{GT}/C_F)$ utilizando los datos para los decaimientos especulares, obteniendo un valor promedio de  $1,18 \pm 0,03$  lo que entra entre la incertidumbre del valor encontrados por Kistener y Rustad de  $1,24 \pm 0,06$  [12], este promedio se hizo sin tener en cuenta la razón entre las constantes de acoplamiento para el decaimiento  $Ca^{39} \rightarrow K^{39}$  ya que este presentaba una enorme diferencia con el valor verdadero. Esta omisión puede estar sustentada si se tiene en cuenta que en el trabajo no se consideraron correcciones por momento magnético, donde se afecta en gran proporción los datos para los átomos pesados. También puede ser explicado debido a que la teoría de Fermi es una teoría efectiva en cuyo caso para núcleos pesados no es buena su precisión.

Finalmente obtenemos las gráficas de los espectros de energías donde se puede apreciar la forma del espectro continuo predicho en el decaimiento beta. Además, se logra observar el cambio de su forma con respecto a la posición relativa del máximo de probabilidad con el aumento de la energía máxima de emisión, el cual se corre hacia la derecha de tal manera que el espectro se empieza a simetrizar alrededor de este máximo. Así mismo, se observa como la corrección por campo de Coulomb da un valor distinto de cero a la probabilidad de emisión de electrones con la energía minina en el decaimiento beta. Sin embargo, este efecto es bastante pequeño debido a que el número atómico de los núcleos estudiados es pequeño. Por otro lado, los espectros normalizados para los decaimientos  $O^{15} \rightarrow N^{15}$ ,  $F^{17} \rightarrow O^{17}$ prácticamente idénticos, de donde se tiene que la forma del espectro tiene una dependencia mayor en el valor de la energía máxima y no en parámetros como el peso atómico.

En el capítulo 5 se simulo una fuente radiactiva de estroncio-90 mediante el código Geant-4, siendo este una herramienta de gran utilidad para procesos de interacción radiación materia, en nuestro caso se logró un manejo aceptable de este código. Por otro lado, el espectro de energía para dicha fuente tiene algunas diferencias con lo obtenido teóricamente debido a la geometría impuesta, donde surgen errores de calibración de la posición del detector o la ubicación de la abertura final. Por tal razón, para algunas fluencias no solo se observa una energía única de electrones si no que se observan algunos electrones de diferentes energías, haciendo que el espectro se modifique un poco.

Para el estudio de la teoría de Fermi nos basamos en herramientas tales como la regla de oro de Fermi, el método de la traza, operadores escalera y el modelo de capas o modelo de partícula independiente, ademas también, se utilizo la teoría electromagnética y el teorema de Wigner-Eckart. Finalmente para solucionar la Función integrada de Fermi utilizamos el método numérico clenshaw-curtis rule. Un interés particular de este trabajo es el estudio de los neutrinos, por ejemplo en el campo de la astrofísica donde esté es un posible candidato a materia oscura caliente, o para estudiar las propiedades de dicha partícula en los experimentos de Kamioka.

Finalmente la teoría de Fermi es un herramienta para estudiar procesos de lo que hoy conocemos como interacción débil, sin embargo, esta teoría es valida para bajas energías de modo que cuando la energía es elevada dicha teoría falla y no es útil. Eventualmente la teoría fue reemplazada por una donde existen bosones vectoriales intermediarios.

# Bibliografía

- [1] ABBASI, R., ABDOU, Y., ACKERMANN, M., ADAMS, J., AGUILAR, J., AHLERS, M., ALTMANN, D., ANDEEN, K., AUFFENBERG, J., BAI, X., ET AL. Searches for high-energy neutrino emission in the galaxy with the combined icecube-amanda detector. *The Astrophysical Journal 763*, 1 (2013), 33.
- [2] CAKMAK, S., NABI, J.-U., BABACAN, T., AND SELAM, C. Study of gamow-teller transitions in isotopes of titanium within the quasi particle random phase approximation. *Astrophysics and Space Science* (2014), 1–19.
- [3] EGUCHI, K., ENOMOTO, S., FURUNO, K., GOLDMAN, J., HANADA, H., IKEDA, H., IKEDA, K., INOUE, K., ISHIHARA, K., ITOH, W., ET AL. First results from kamland: evidence for reactor antineutrino disappearance. *Physical Review Letters 90*, 2 (2003), 021802.
- [4] EVANS, R. D., AND NOYAU, A. *The atomic nucleus*, vol. 582. McGraw-Hill New York, 1955.
- [5] FEYNMAN, R. P. The theory of fundamental processes. Tech. rep., Benjamin New York, 1962.
- [6] FRANKLIN, A. The road to the neutrino. *Physics Today* 53, 2 (2000), 22–28.
- [7] GOLDSTEIN, H. Mecánica clásica. Reverté, 1987.
- [8] GREINER, W. *Relativistic quantum mechanics. Wave equations.* Springer, 2000.
- [9] GREINER, W., REINHARDT, J., AND BROMLEY, D. A. *Quantum electrodynamics*, vol. 405. Springer, 1994.
- [10] GRIFFITHS, D. Introduction to elementary particles. John Wiley & Sons, 2008.
- [11] KÄLLÉN, G. Radiative corrections in elementary particle physics. Springer, 1968.
- [12] KISTNER, O., AND RUSTAD, B. Ratio of the gamow-teller and fermi coupling constants determined from ft values. *Physical Review* 114, 5 (1959), 1329.

- [13] KOSE, U. Study of neutrino oscillations in the opera experiment. *arXiv preprint arXiv:1305.2513* (2013).
- [14] MAHAUX, C., AND SARTOR, R. Single-particle motion in nuclei. In *Advances in nuclear physics*. Springer, 1991, pp. 1–223.
- [15] MANTHURUTHIL, J., POIRIER, C., SASTRY, K., PETRY, R., CANTRELL, B., AND WILKINSON, R. Beta-gamma correlations and matrix elements for some first-forbidden nonunique beta transitions. *Physical Review C 4*, 3 (1971), 960.
- [16] MAYER, M. G., AND JENSEN, J. H. D. Elementary theory of nuclear shell structure.
- [17] PANDOLA, L. Status of double beta decay experiments using isotopes other than xe-136. *arXiv preprint arXiv:1403.3329* (2014).
- [18] QUIGG, C. Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions. Princeton University Press, 2013.
- [19] SAKURAI, J. J., AND TUAN, S. F. *Modern quantum mechanics*, vol. 1. Addison-Wesley Reading, Massachusetts, 1985.
- [20] SORIA, A. F. Física nuclear y de partículas. Universitat de València, 2011.
- [21] STABIN, M. G. Radiation protection and dosimetry: an introduction to health physics. Springer, 2007.
- [22] WILKINSON, D., AND MACEFIELD, B. A parametrization of the phase space factor for allowed  $\beta$ -decay. *Nuclear Physics A 232*, 1 (1974), 58–92.

## Apéndice A

#### Regla de Oro de Fermi

En este apéndice trataremos el método de teoría de perturbaciones dependientes del tiempo, el cual permite estudiar las transiciones posibles entre estados cuánticos de sistemas en los que actúan perturbaciones dependientes del tiempo. Por medio de la teoría de perturbaciones a primer orden es posible estimar la amplitud de transición del estado inicial en el que se encuentra el sistema, al estado final, en el que quedará el sistema en el instante en que deja de actuar la perturbación. La probabilidad de transición, obtenida por ese método, se conoce como ROF.

La dinámica del sistema físico se puede describir mediante la solución a la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, la cual está dada como:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \mathcal{H}(t) |\psi\rangle.$$
 (A.1)

Con un hamiltoniano de la forma:

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0 + H'(t), \tag{A.2}$$

donde el termino  $H_0$  es independiente del tiempo, y el termino H'(t) representa la perturbación dependiente del tiempo, siendo el termino de energía potencial.

La ecuación (A.1) en general no tiene solución exacta. Si se cumple que  $\mathcal{H}'(t) \ll \mathcal{H}_0$ , entonces se puede aplicar teoría de perturbaciones planteando una solución analítica aproximada a la (A.1). El hamiltoniano no perturbado  $\mathcal{H}_0$  es independiente del tiempo, y sus valores y estados propios se suponen conocidos, denotados por

$$\mathcal{H}_0 \left| \psi_n^0 \right\rangle = E_n^0 \left| \psi_n^0 \right\rangle. \tag{A.3}$$

El propósito es solucionar (A.1) de forma aproximada, y para eso se asume que su solución tiene una forma perturbativa dada:

$$\left|\psi_{n}\right\rangle = \left|\psi_{n}^{0}\right\rangle + \left|\psi_{n}^{'}\right\rangle,$$
(A.4)

donde:

- $|\psi_n^0\rangle$ = Representa la solución de orden cero.
- $|\psi'_n\rangle$ = Corrección perturbativa.

Utilizando el operador hamiltoniano descrito por (A.2) y reemplazando en la ecuación de Schrödinger:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi_{n}\rangle = \mathcal{H}_{0}|\psi_{n}\rangle + \mathcal{H}'|\psi_{n}\rangle.$$
(A.5)

Ahora, el estado arbitrario  $|\psi_n(t)\rangle$  se puede expresar como una superposición de los elementos de la base de los estados propios de la hamiltoniana sin perturbar  $\{|\psi_n^0\rangle\}$ , es decir:

$$\left|\psi_{n}(t)\right\rangle = \sum_{n} a_{n}(t) e^{-\frac{iE_{n}^{0}t}{\hbar}} \left|\psi_{n}^{0}\right\rangle, \qquad (A.6)$$

donde los coeficientes  $a_n(t)$  son funciones del tiempo, y se ha supuesto un espectro discreto.

Reemplazando (A.6) en (A.5):

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n}a_{n}(t)e^{-\frac{iE_{n}^{0}t}{\hbar}}\left|\psi_{n}^{0}\right\rangle = \mathcal{H}_{0}\sum_{n}a_{n}(t)e^{-\frac{iE_{n}^{0}t}{\hbar}}\left|\psi_{n}^{0}\right\rangle + \mathcal{H}'\sum_{n}a_{n}(t)e^{-\frac{iE_{n}^{0}t}{\hbar}}\left|\psi_{n}^{0}\right\rangle.$$
 (A.7)

En primera instancia resolveremos la parte izquierda de la ecuación de Schrödinger, derivando con respecto al tiempo donde (A.7) nos resulta:

$$i\hbar\sum_{n} \left(\frac{\partial}{\partial t}a_{n}(t)e^{-\frac{iE_{n}^{0}t}{\hbar}}\left|\psi_{n}^{0}\right\rangle + a_{n}(t)\left(-\frac{iE_{n}^{0}}{\hbar}\right)e^{-\frac{iE_{n}^{0}t}{\hbar}}\left|\psi_{n}^{0}\right\rangle\right) = \mathcal{H}_{0}\sum_{n}a_{n}(t)e^{-\frac{iE_{n}^{0}t}{\hbar}}\left|\psi_{n}^{0}\right\rangle + \mathcal{H}'\sum_{n}a_{n}(t)e^{-\frac{iE_{n}^{0}t}{\hbar}}\left|\psi_{n}^{0}\right\rangle.$$
(A.8)

De acuerdo a la relación (A.3), el segundo termino de la parte izquierda de (A.8) es de la misma forma que el primer termino de la derecha, cancelando

estos términos, la ecuación de Schrödinger resulta ser:

$$\sum_{n} i\hbar \frac{d}{dt} a_n(t) e^{-\frac{iE_n^0 t}{\hbar}} \left| \psi_n^0 \right\rangle = \mathcal{H}' \sum_{n} a_n(t) e^{-\frac{iE_n^0 t}{\hbar}} \left| \psi_n^0 \right\rangle. \tag{A.9}$$

Aplicando la condición de ortonormalidad  $\langle \psi_a^0 | \psi_b^0 \rangle = \delta_{ab}$ , nos resulta:

$$i\hbar \frac{d}{dt}a_k(t) = \sum_n a_n(t)e^{-\frac{i(E_k^0 - E_n^0)t}{\hbar}}\mathcal{H}'_{kn},$$
(A.10)

 $\operatorname{con}\,\mathcal{H}_{kn}^{'}=\langle\psi_{k}^{0}|\,\mathcal{H}\,|\psi_{n}^{0}\rangle.$ 

Introduciendo la frecuencia de transición del estado k al estado n de la forma  $\hbar w_{kn} = E_k^0 - E_n^0$  en (A.10), donde finalmente la ecuación de Schrödinger (A.1) es equivalente a la ecuación (A.10) pero expresada en términos de los coeficientes  $a_n(t)$ :

$$i\hbar \frac{d}{dt}a_{k}(t) = \sum_{n} a_{n}(t)e^{iw_{kn}t}\mathcal{H}_{kn}^{'}.$$
(A.11)

A partir de aquí se podrá conocer la variación en el tiempo de la amplitud de probabilidad de encontrar la partícula en el estado k.

En este punto, consideramos la expansión de la perturbación de los coeficientes que definen el vector de estado desconocido en (A.6) como:

$$a_n(t) = a_n^0 + a_n^1 + a_n^2 + \dots, (A.12)$$

donde el termino  $a_n^0$  es independiente del tiempo. Para nuestros propósitos, vamos a detener la expansión de la perturbación después del termino de primer orden, insertando (A.12) en (A.11):

$$\dot{a}_n^{(0)}(t) = 0,$$
 (A.13)

$$\dot{a}_{n}^{1}(t) = \sum_{n} a_{n}^{0}(t) e^{iw_{kn}t} \mathcal{H}_{kn}^{'}.$$
(A.14)

La primera de estas ecuaciones muestra que para orden cero el estado permanece en su condición inicial, ya que para este orden no se produce transiciones, en la expansión de la perturbación de primer orden sí se produce transiciones. Con una primera aproximación en (A.14), el sistema es asumido inicialmente en el estado *m*, en cuyo caso,  $a_n^0(t) = \delta_{nm}$ , la sumatoria desaparece al aplicar el delta de kronecker. Donde de la ecuación (A.14) se puede realizar explicitamente la integral sobre el tiempo obteniendo la expresión:

$$i\hbar a_k^1(t) = \int_0^\tau e^{iw_{km}t} \mathcal{H}'_{km} dt.$$
(A.15)

Supondremos que la perturbación  $\mathcal{H}'_{km}$  es constante en este intervalo de tiempo, y por ello se puede sacar de la integral, en consecuencia, la solución de la integral (A.15) se muestra a continuación:

$$a_{k}^{1}(t) = \mathcal{H}_{km}^{'} \frac{1}{(i)^{2} w_{km} \hbar} \left( e^{i w_{km} \tau} - 1 \right).$$
(A.16)

Usando la relación:

$$\left(e^{iw_{km}\tau} - 1\right) = 2isen\left(\frac{w_{km}\tau}{2}\right)e^{\frac{iw_{km}\tau}{2}},\tag{A.17}$$

se sigue:

$$a_k^1(t) = -\frac{\mathcal{H}'_{km}}{w_{km}\hbar} \left(2isen\left(\frac{w_{km}\tau}{2}\right)e^{\frac{iw_{km}\tau}{2}}\right).$$
(A.18)

Donde (A.18) es la amplitud de probabilidad de transición de que el sistema estando en un estado  $|\psi_m^0\rangle$  en t = 0 pase al estado  $|\psi_k^0\rangle$  en un tiempo  $\tau$ . La probabilidad  $P_k(t)$  que el sistema sufra una transición de un estado m a un estado k es:

$$P_{k}(t) = |a_{k}(\tau)|^{2} = a_{k}^{*}a_{k} \approx \frac{|\mathcal{H}'_{km}|^{2}}{w_{km}^{2}\hbar^{2}} \left(4sen^{2}\left(\frac{w_{km}\tau}{2}\right)\right).$$
(A.19)

Cuando las energías de los estados k y m son cercanos, la frecuencia de transición es aproximadamente igual a cero,  $w_{km} = 0$ , por tanto sólo hay transiciones entre estados cercanos.

La rata o "tasa media" de la transición está dada por:

$$w_k = \frac{P_k(t)}{t}.$$
(A.20)

En general, habrá un numero de estados dn dentro de un intervalo  $dw_{km}$ . Denotando  $\rho_k(E_k)$ , como la densidad de niveles con energía  $E_k$ :

$$\rho(k) = \frac{dn}{dE_k}.$$
(A.21)

La rata total de transición de los estados cerca al estado k es:

$$w_{k} = \frac{1}{t} \sum_{k} P_{k'}(t).$$
 (A.22)

Esta suma es sustituida por una integral  $dE_k$ :

$$w_{k} = \frac{1}{t} \int P_{k'}(t)\rho_{k}dE_{k'}$$

$$w_{k} = \frac{1}{t} \int \frac{\left|\mathcal{H}_{km}'\right|^{2}}{w^{2}\hbar^{2}} \left(4sen^{2}\left(\frac{w\tau}{2}\right)\right)\rho_{k}dE_{k}$$

$$w_{k} = \frac{4\left|\mathcal{H}_{km}'\right|^{2}}{\hbar^{2}}\rho_{k} \int \frac{1}{t}\frac{sen^{2}\left(\frac{w\tau}{2}\right)}{w^{2}}dw.$$
(A.23)

La integral anterior es resuelta por medio del teorema de Cauchy teniendo un valor de  $\frac{\pi}{2}$ . Teniendo este resultado y reemplazando en (A.23) se obtiene:

$$w_k = \frac{4\left|\mathcal{H}'\right|^2}{\hbar^2} \rho_k(E_k) \left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{A.24}$$

Cancelando el termino $\frac{\pi}{2}$  con 4. Llegando a la Regla de Oro de Fermi:

$$w_{k} = \frac{2\pi}{\hbar^{2}} \left| \mathcal{H}_{km}^{\prime} \right|^{2} \rho_{k}(E_{k}).$$
(A.25)

## Apéndice B

## Densidad de Estados

Para calcular la densidad de estados finales , $\rho(E_f)$ , la cual determina la forma del espectro energético  $\beta$ , denotamos por p al momento del electrón y q al momento del neutrino. Notemos que el espectro será escrito en términos de la energía, y por lo tanto la dirección de p y q no nos interesa. Si nos imaginamos un sistema de coordenadas cuyos ejes son  $p_x$ ,  $p_y$  y  $p_z$ , el lugar geométrico que representa estos puntos es:

$$|p| = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{\frac{1}{2}}.$$
(B.1)

Lo que significa que se trata de una esfera de radio p = |p|. Esto quiere decir que los puntos  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  representan el momento en el rango dp y p + dp, cuyo volumen diferencial es igual a  $4\pi p^2 dp$ . Si el electrón esta confinado en una caja de volumen V,<sup>1</sup> la función de onda en el espacio de momentos es de la forma :

$$\psi(p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \int dV' e^{\frac{i\vec{p}\vec{r}'}{\hbar}} \psi(\vec{r})' = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{V} e^{\frac{i\vec{p}\vec{r}}{\hbar}}, \tag{B.2}$$

con la función de onda plana  $\psi(\vec{r})^{'}$  y la exponencial  $e^{\frac{i\vec{p}\vec{r}^{'}}{\hbar}}$  aproximadamente constante.

De donde

$$|\psi_p|^2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}.$$
 (B.3)

En consecuencia, la densidad de estados para electrones  $dn_e$  y neutrinos  $dn_{\nu}$  para un valor fijo del momento y en un intervalo entre p y dp (o q y dq) es:

 $<sup>{}^{1}</sup>$ El volumen V sólo se utiliza para que la función de onda sea normalizada, este volumen desaparecerá en el resultado final.
$$dn_e = |\psi|^2 4\pi p_e^2 dp_e$$
  
=  $\frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} p_e^2 dp_e.$  (B.4)

$$dn_v = \frac{V}{2\pi^2 \hbar^3} q_v^2 dq_v. \tag{B.5}$$

y por tanto la densidad de estados finales que tienen simultáneamente un electrón y un neutrino con un momento determinado es:

$$dn^{2} = \frac{p_{e}^{2}q_{v}^{2}dp_{e}dq_{v}V^{2}}{4\pi^{4}\hbar^{6}}.$$
(B.6)

El número total de estados finales con energía en el intervalo  $E_0$  y  $E_0 + dE_0$  se encuentra a partir del producto entre el número de estados para el par leptonico:

$$\frac{dn}{dE_0} = \frac{dn_e dn_v}{dE_0} = \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6} \frac{p_e^2 q_v^2 dp_e dq_v}{dE_0}.$$
(B.7)

La energía total  $E_0$  del sistema electrón-neutrino es

$$E_0 = E_e + E_v, \tag{B.8}$$

donde para el electrón tenemos de la relación de dispersión:

$$E_e^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4, (B.9)$$

y para el neutrino tomando su masa igual a cero, se tiene:

$$E_v = qc, \tag{B.10}$$

Por lo tanto, la energía total disponible  $E_0$  es igual a  $E_e + E_v = E_e + qc$  y para una energía dada  $\frac{dq}{dE_0} = \frac{1}{c}$ . En consecuencia la densidad de estados para el par leptonico en un intervalo de energía  $E_0$  y  $E_0 + dE_0$  es:

$$\frac{dn}{dE_0} = \frac{V^2}{4\pi^4\hbar^6 c^3} E_e p_e (E_0 - E_e)^2 dE_e.$$
(B.11)

De acuerdo al resultado anterior y haciendo uso de la matriz de Fermi (1.16), finalmente la probabilidad de emisión de un electrón con energía  $E_e$ 

es:

$$P(E_e)dE_e = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{g^2}{V^2} \left| \int 1 \right|^2 \frac{V^2}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} E_e p_e (E_0 - E_e)^2 dE_e, \tag{B.12}$$

cancelando los términos de  $\pi$ y de  $V^2$  la probabilidad de emisión de un electrón es

$$P(E_e)dE_e = \frac{g^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \left| \int 1 \right|^2 E_e p_e (E_0 - E_e)^2 dE_e.$$
(B.13)

# Apéndice C

## Consideraciones sobre la Teoría de Fermi

### C.1. Espín de los Leptones

La densidad hamiltoniana de interacción será el producto de las formas bilineales de las funciones de onda tanto de los leptones como de los nucleones. Este producto ha de permanecer invariante bajo rotaciones en el espacio, debido a que el decaimiento beta no depende de una escogencia especial de sistema de coordenadas.

De modo que para el par leptonico se tienen cuatro distintas formas bilineales covariantes,

$$\psi_e^{\dagger}\psi_{\nu} \qquad y \qquad \psi_e^{+}\sigma_i\psi, \tag{C.1}$$

con  $\sigma_i$  las matrices de Pauli, i = x, y, z. Las cuales son expresadas explícitamente como:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} y \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
 (C.2)

Con el fin de saber si los espinores son invariantes bajo rotaciones se debe conocer la forma como transforma cada uno de estos usando la regla de transformación dada por:

$$\psi^{\dagger} = e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{s}}\psi \quad \psi = e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{s}}\psi, \tag{C.3}$$

simbolizando como  $\theta$  al ángulo de giro en torno a cierto eje de simetría (por ejemplo, el eje z o el eje x) y donde *S* es el generador de rotaciones, que es el operador de espín de los leptones dado por:

$$S = \frac{\sigma_i}{2}.$$
 (C.4)

Ya que sabemos como cada espinor transforma podemos demostrar que las formas bilineales son invariantes, por lo tanto

• Demostración del par leptonico  $\psi_e^{\dagger}\psi_{\nu}$ 

$$\psi_e^{\dagger}\psi_{\nu} = \psi_e^{\dagger}e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{s}}e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{s}}\psi_{\nu} = \psi_e^{\dagger}\psi. \tag{C.5}$$

En la demostración anterior se le aplicó a las componentes de las funciones de onda del par leptonico una rotación, el cual se representa como (C.3), y significa que es un invariante bajo rotaciones.

De forma similar para la segunda componente, la cual transforma como la i-ésima componente de un vector bajo rotaciones,

• Demostración del par leptonico  $\psi_e^+ \sigma_i \psi_{\nu}$ 

$$\psi_e^+ \sigma_i \psi_\nu = \psi_e^\dagger e^{i\vec{\theta}\cdot\vec{s}} \sigma_i e^{-i\vec{\theta}\cdot\vec{s}} \psi_\nu = R_i^j \sigma_j. \tag{C.6}$$

siendo R matriz de rotaciones.

Concluimos que bajo transformaciones de este tipo, el producto de las formas bilineales (C.1) permanecen invariantes tal que  $R^{\dagger} = R = 1$ . Para las componentes de las funciones de onda de los nucleones se tienen los mismos resultados.

### C.2. Formulación Relativista del Decaimiento Beta

Hasta el momento se han tratado a los leptones de forma no relativista lo cual no es cierto debido a que estos poseen velocidades cercanas a la de la luz, de manera que es necesario utilizar las funciones de onda como Espinores de Dirac  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}$  los cuales son una representación importante para SO(3,1), en nuestro caso que se trabaja con partículas Fermionicas (Leptones). La construcción de estas representaciones se hace partiendo del álgebra de Clifford, las cuales tienen como base las matrices de Pauli [6].

En el caso relativista hay 16 productos covariantes de la forma  $\psi_i^* \psi_j$ , donde  $i \neq j$  van de 1 a 4, los cuales pueden tener distintas combinaciones lineales para la construcción de cantidades con comportamientos de transformación distinta, de modo que sea invariantes bajo transformaciones de Lorentz. Dichos productos son:

- 1.  $\bar{\psi}\psi = Escalar$
- 2.  $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi = Vector$
- 3.  $\bar{\psi}\gamma^5\psi = Pseudoescalar$
- 4.  $\bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi = Pseudovector$

5.  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi = Tensor$ ,

 $\operatorname{con}\,\bar\psi=\psi\gamma^0.$ 

Estos operadores corresponden a las distintas combinaciones que se encuentran en la mecánica cuántica relativista. Para demostrar que los operadores bilineales son covariantes bajo transformaciones de Lorentz se debe tener en cuenta las siguientes propiedades [10].

- $\hat{S}^{-1}\hat{S} = 1.$
- $\hat{S}^{-1}\gamma^0\hat{S}=\gamma^0.$
- $\hat{S}^{-1}\gamma^{\mu}\hat{S} = \Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}.$
- $\hat{S}^{-1}\gamma^5 \hat{S} = \det |\Lambda| \gamma^5.$
- $(\gamma^0)^2 = 1.$
- $\imath \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^5$ .

Con  ${\cal S}$  la mariz de transformación de espinores bajo transformaciones de Lorentz.

Donde cada espinor transforma de la siguiente forma:

$$\psi \to \psi' = S\psi, \tag{C.7}$$

con  $\omega_{ij}$  una matriz antisimetrica. Teniendo como base las matrices  $\sigma$  o las matrices de Pauli, y con S la mariz de transformación de espinores bajo transformaciones de Lorentz.

De modo que bajo estos supuestos se hará la demostración para cada operador covariante.

Demostración (1):

$$\bar{\psi}\psi = \psi^{\dagger}S^{-1}\gamma^{0}S\psi$$

$$= \psi^{\dagger}\gamma^{0}\psi$$

$$= \bar{\psi}\psi.$$
(C.8)

Demostración (2):

$$\begin{split} \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi &\to \bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi' \\ &= \bar{\psi}S^{-1}\gamma^{\mu}S\psi \\ &= \bar{\psi}\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}\psi \\ &= \Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi. \end{split}$$
(C.9)

Demostración (3):

$$\bar{\psi}\gamma^{5}\psi = \bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi' 
= \bar{\psi}S^{-1}\gamma^{5}S\psi 
= \bar{\psi}det |\Lambda| \gamma^{5}\psi 
= det |\Lambda| \bar{\psi}\gamma^{5}\psi.$$
(C.10)

Demostración (4):

$$\begin{split} \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi &= \bar{\psi}'\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi' \\ &= \bar{\psi}S^{-1}\gamma^{\mu}\gamma^{5}S\psi \\ &= \bar{\psi}det \left|\Lambda\right|\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}\gamma^{5}\psi \\ &= det \left|\Lambda\right|\Lambda^{\mu}_{\nu}\bar{\psi}\gamma^{\nu}\gamma^{5}\psi \end{split}$$
(C.11)

Demostración (5):

$$\begin{split} \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi &= \frac{i}{4}\bar{\psi}\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\psi \\ &= \frac{i}{4}\bar{\psi}S^{-1}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}S\psi - \frac{i}{4}\bar{\psi}S^{-1}\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}S\psi \\ &= \frac{i}{4}\bar{\psi}\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}\Lambda^{\nu}_{\rho}\gamma^{\rho}\psi - \frac{i}{4}\bar{\psi}\Lambda^{\nu}_{l}\gamma^{l}\Lambda^{\mu}_{a}\gamma^{a}\psi \\ &= \frac{i}{4}\Lambda^{\mu}_{\nu}\Lambda^{\nu}_{\rho}\bar{\psi}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\psi - \frac{i}{4}\Lambda^{\nu}_{l}\Lambda^{\mu}_{a}\bar{\psi}\gamma^{l}\gamma^{a}\psi \\ &= \frac{i}{4}\Lambda^{\mu}_{\nu}\Lambda^{\nu}_{\rho}\Lambda^{\nu}_{l}\Lambda^{\mu}_{a}\bar{\psi}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}-\gamma^{l}\gamma^{a}\right)\psi \end{split}$$
(C.12)

## C.3. Demostración densidad hamiltoniana de interacción

Partiendo de la ecuación (2.28):

$$\mathcal{H}_{\beta} = C_s \left( \bar{\psi}_p \psi_n \right) \left( \bar{\psi}_e \psi_\nu \right) + C_\nu \left( \bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n \right) \left( \bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu \right) + C_p \left( \bar{\psi}_p \gamma^5 \psi_n \right) \left( \bar{\psi}_e \gamma_5 \psi_\nu \right) + C_A \left( \bar{\psi}_p \gamma^5 \gamma^\mu \psi_n \right) \left( \bar{\psi}_e \gamma_5 \gamma_\mu \psi_\nu \right) + C_T \left( \bar{\psi}_p \sigma^{\mu\nu} \psi_n \right) \left( \bar{\psi}_e \sigma_{\mu\nu} \psi_\nu \right) + h.c.,$$
(C.13)

En términos de la matrices  $\alpha$  y  $\beta$ 

$$\alpha^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{i} \\ \sigma^{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
(C.14)

con

$$\gamma^{5} = i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^{i} = \beta\alpha^{i} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{i}\\ -\sigma^{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{j} = \begin{pmatrix} \sigma^{j} & 0\\ 0 & \sigma^{j} \end{pmatrix}.$$
 (C.15)

Entonces lo que se va hacer es tomar cada acoplamiento de forma individual con el fin de hacer el calculó menos tedioso, donde cada acoplamiento obedece a la propiedad de espinor adjunto dado como  $\bar{\psi} = \gamma^0 \psi^{\dagger}$ . Por lo tanto, el acoplamiento escalar queda expresado como:

$$\left(\psi_p^{\dagger}\gamma^0\psi_n\right)\left(\psi_e^{\dagger}\gamma_0\psi_\nu\right) \tag{C.16}$$

donde la matriz  $\gamma^0=\beta$  , de tal manera que este operador es expresado en términos de la matriz  $\beta$ :

$$\left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\psi_{\nu}\right).$$
(C.17)

En el operador vectorial se observa que este posee parte espacial y parte temporal dada por la matriz  $\gamma^{\mu} = \gamma^{0}\gamma^{i}$ , en cuyo caso el acoplamiento debe estar escrito explicitamente en sus partes espacial y temporal para así finalmente poder ser expresado en las matrices  $\alpha$ , esto es:

$$\begin{bmatrix} \left(\psi_{p}^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{0}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\gamma_{0}\gamma_{0}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{i}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\gamma_{0}\gamma_{i}\psi_{\nu}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\psi_{p}^{\dagger}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\left(\beta\alpha^{i}\right)\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\left(\beta\alpha_{i}\right)\psi_{\nu}\right) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \left(\psi_{p}^{\dagger}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\alpha^{i}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\alpha_{i}\psi_{\nu}\right) \end{bmatrix}.$$
(C.18)

El operador Pseudo Escalar estará dado por:

$$(\bar{\psi}_p \gamma^5 \psi_n) (\bar{\psi}_e \gamma_5 \psi_\nu) = (\psi_p^{\dagger} \gamma^0 \gamma^5 \psi_n) (\psi_e^{\dagger} \gamma_0 \gamma_5 \psi_\nu)$$
  
=  $(\psi_p^{\dagger} \beta \gamma^5 \psi_n) (\psi_e^{\dagger} \beta \gamma_5 \psi_\nu).$  (C.19)

El operador Axial es :

$$\begin{aligned} \left(\bar{\psi}_{p}\gamma^{5}\gamma^{\mu}\psi_{n}\right)\left(\bar{\psi}_{e}\gamma_{5}\gamma_{\mu}\psi_{\nu}\right) &= \left[\left(\psi_{p}^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{5}\gamma^{0}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\gamma_{0}\gamma_{5}\gamma_{0}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{5}\gamma^{i}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\gamma_{0}\gamma_{5}\gamma_{i}\psi_{\nu}\right)\right] \\ &= \left[\left(\psi_{p}^{\dagger}\gamma^{5}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\gamma_{5}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{5}\left(\beta\alpha^{i}\right)\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\gamma_{0}\gamma_{5}\left(\beta\alpha_{i}\right)\psi\right)\right] \\ &= \left[\left(\psi_{p}^{\dagger}\gamma^{5}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\gamma_{5}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\gamma^{0}\gamma^{5}\left(\beta\alpha^{i}\right)\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\gamma_{0}\gamma_{5}\left(\beta\alpha_{i}\right)\psi\right)\right], \ (C.20) \end{aligned}$$

En esta parte es conveniente multiplicar las matrices de la segunda componente entre ellas, es decir, $(\gamma^0\gamma^5)$ , y  $(\beta \cdot \alpha^i)$ , donde este ultimo pertenece a los  $\gamma^i$ , luego se tiene:

$$\begin{bmatrix} \left(\psi_p^{\dagger}\gamma^5\psi_n\right)\left(\psi_e^{\dagger}\gamma_5\psi_\nu\right) - \left(\psi_p^{\dagger}\gamma^0\gamma^5\left(\beta\alpha^i\right)\psi_n\right)\left(\psi_e^{\dagger}\gamma_0\gamma_5\left(\beta\alpha_i\right)\psi\right) \end{bmatrix} = \left(\psi_p^{\dagger}\sigma^j\psi_n\right)\left(\psi_e^{\dagger}\sigma_j\psi\right) \\ - \left(\psi_p^{\dagger}\gamma^5\psi_n\right)\left(\psi_e^{\dagger}\gamma_5\psi_\nu\right).$$
(C.21)

Por ultimo la componente Tensorial es:

$$\begin{aligned} \left(\bar{\psi}_{p}\sigma^{\mu\nu}\psi_{n}\right)\left(\bar{\psi}_{e}\sigma_{\mu\nu}\psi_{\nu}\right) &= \left(\bar{\psi}_{p}i\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\psi_{n}\right)\left(\bar{\psi}_{e}i\gamma_{\mu}\gamma_{\nu}\psi_{\nu}\right) \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}i\gamma^{0}\gamma^{0}\gamma^{0}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\gamma_{0}\gamma_{0}\phi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}i\gamma^{0}\gamma^{0}\gamma^{i}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\gamma_{0}\gamma_{0}\gamma_{i}\psi_{\nu}\right) \\ &- \left(\psi_{p}^{\dagger}i\gamma^{0}\gamma^{i}\gamma^{0}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\gamma_{0}\gamma_{i}\phi_{\nu}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}i\gamma^{0}\gamma^{i}\gamma^{j}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\gamma_{0}\gamma_{i}\gamma_{j}\psi_{\nu}\right) \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}i\beta\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\beta\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}i\gamma^{0}\gamma^{0}\gamma^{i}\gamma^{j}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\gamma_{0}\gamma_{i}\gamma_{j}\psi_{\nu}\right) \\ &- \left(\psi_{p}^{\dagger}i\beta\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\beta\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}i\gamma^{0}\gamma^{0}\left(\beta\alpha^{i}\right)\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\gamma_{0}\gamma_{i}\gamma_{j}\psi_{\nu}\right) \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}i\beta\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\beta\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}i\gamma^{0}\gamma^{0}\left(\beta\alpha^{i}\right)\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\gamma_{0}\gamma_{0}\left(\beta\alpha_{i}\right)\psi_{\nu}\right) \\ &- \left(\psi_{p}^{\dagger}i\gamma^{0}\left(\beta\alpha^{i}\right)\gamma^{0}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\gamma_{0}\left(\beta\alpha_{i}\right)\gamma_{0}\psi_{\nu}\right) + \left(\psi_{p}^{\dagger}i\beta\sigma^{d}\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}i\beta\sigma_{d}\psi_{\nu}\right) \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\sigma\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\sigma\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\alpha\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\alpha\psi_{\nu}\right) \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\sigma\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\phi\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\phi\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\phi\psi_{\nu}\right) \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\phi\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\phi\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\phi\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\phi\psi_{\nu}\right) \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\phi\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\phi\psi_{\mu}\right) \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}\phi\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\phi\psi_{\mu}\right) \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}\phi\psi_{n}\right)\left(\psi_{e}^{\dagger}\phi\psi_{\mu}\right) \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}\phi\psi_{n}\right)\left(\psi_{p}^{\dagger}\phi\psi_{\mu}\right) \\ \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}\phi\psi_{n}\right)\left(\psi_{p}^{\dagger}\phi\psi_{\mu}\right) \\ \\ &= \left(\psi_{p}^{\dagger}\phi\psi_{$$

Así que finalmente la densidad hamiltoniana de interacción expresada en términos de las matrices  $\alpha$  y  $\beta$  es:

$$\mathcal{H}_{\beta} = C_{s} \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\psi_{\nu}\right) + C_{p} \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\gamma^{5}\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\gamma^{5}\psi_{\nu}\right) + C_{T} \left[\left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\sigma_{j}\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\sigma^{j}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\beta\alpha\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\beta\alpha\psi_{\nu}\right)\right] + C_{V} \left[\left(\psi_{p}^{\dagger}\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\alpha\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\alpha\psi_{\nu}\right)\right] + C_{A} \left[\left(\psi_{p}^{\dagger}\sigma_{j}\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\sigma_{j}\psi_{\nu}\right) - \left(\psi_{p}^{\dagger}\gamma^{5}\psi_{n}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\gamma^{5}\psi_{\nu}\right)\right] + h.c..$$
(C.23)

# Apéndice D

## Cálculo de $|H_{fi}|^2$

En este apéndice se hallará el espectro de energía de los rayos beta considerando interacciones relativistas, de modo que partiremos por el calculo del elemento matricial al cuadrado considerado como:

$$|\mathcal{H}_{fi}|^{2} = \sum_{k,l=1}^{8} \sum_{\sigma_{e}\sigma_{\nu}} C_{k} C_{l}^{*} \left(\psi_{e}^{\dagger} \Omega^{k} \psi_{\nu}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger} \Omega^{l} \psi_{\nu}\right)^{*} \left(\int \Omega_{k}\right) \left(\int \Omega_{l}\right)^{*}, \qquad (D.1)$$

donde  $\Omega^k$  y  $\Omega^l$  corresponden a los operadores del hamiltoniano descrito en (2.30).

La segunda suma de (D.1) se expresa como:

$$\sum_{\sigma_{e}\sigma_{\nu}} \left(\psi_{e}^{\dagger}\Omega^{k}\psi_{\nu}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\Omega^{l}\psi_{\nu}\right)^{*} = \sum_{\sigma_{e}\sigma_{\nu}} \left(\psi_{e}^{\dagger}\Omega^{k}\psi_{\nu}\right) \left(\psi_{e}^{\dagger}\Omega^{l\dagger}\psi_{\nu}\right)$$

$$= \sum_{\sigma_{e}\sigma_{\nu}} \sum_{\lambda,\mu,\rho,\delta} \left(\psi_{\rho}^{e\dagger}\Omega_{\rho\delta}^{k}\psi_{\delta}^{\nu}\right) \left(\psi_{\lambda}^{\nu\dagger}\Omega_{\lambda\mu}^{l\dagger}\psi_{\mu}^{e}\right)$$

$$= \sum_{\sigma_{e}\sigma_{\nu}} \sum_{\lambda,\mu,\rho,\delta} \psi_{\rho}^{e\dagger}\Omega_{\rho\delta}^{k}\psi_{\delta}^{\nu}\psi_{\lambda}^{\nu\dagger}\Omega_{\lambda\mu}^{l\dagger}\psi_{\mu}^{e}$$

$$= \sum_{\sigma_{e}\sigma_{\nu}} \sum_{\lambda,\mu,\rho,\delta} \overline{\psi}_{\beta}^{e}\overline{\Omega}_{\beta\delta}\psi_{\delta}^{\nu}\overline{\psi}_{j}^{\nu}\overline{\Omega}_{j\mu}^{\ell}\psi_{\mu}^{e}.$$
(D.2)

Sin embargo, la suma anterior contiene los espinores tanto del electrón como del neutrino de forma explicita tratándose de una expresión bastante complicada de solucionar, por lo tanto, es necesario utilizar el cálculo de trazas lo cual evita la manipulación explicita de la unidad de espinores. De modo que usamos los operadores de proyección de energía dadas como

Con  $\varepsilon_r = +1 \ para$   $\hat{\Lambda}_+ \mathbf{y} \ \varepsilon_r = -1 \ para$   $\hat{\Lambda}_-$ .

También se hará uso de la relación de cierre:

$$\sum_{r=1}^{4} \varepsilon_r w_{\alpha}^r(p) \bar{w}_{\beta}^r(p) = \delta_{\alpha\beta}, \qquad (D.4)$$

aquí la suma se extiende sobre todos los 4 espinores solución a la ecuación de Dirac, tomando del primero una sola componente  $\alpha$  y del segundo adjunto una sola componente  $\beta$ . Utilizando la relación de cierre y el operador de proyección de energía, se ira reduciendo el espinor del electrón de la siguiente manera

$$\sum_{\sigma_e} \psi^e_{\beta} \bar{\psi}^e_{\mu} = \sum_{\gamma,r=1}^4 \varepsilon_r w^r_{\beta}(p) \bar{w}^r_{\gamma}(p) \cdot \left(\frac{\not p + m_0}{2m_0}\right)_{\gamma\mu} = \left(\frac{\not p + m_0}{2m_0}\right)_{\beta\mu} \tag{D.5}$$

De igual forma que para el espinor del electrón se hará el calculó para el neutrino. De manera que el calculó final para la suma de espín(D.2) es

$$\begin{split} \sum_{\sigma_e \sigma_\nu} \sum_{j,\mu,\beta,\delta} \left( \psi_e^{\dagger} \Omega^k \psi_\nu \right) \left( \psi_e^{\dagger} \Omega^l \psi_\nu \right)^* &= \bar{\psi}_{\delta}^{\nu} \bar{\Omega}_{\beta\delta} \left( \frac{\not p + m_0}{2m_0} \right)_{\beta\mu} \bar{\Omega}_{j\mu}^{\ell} \psi_{\mu}^{e} \\ &= \sum_{\sigma_v} \sum_{j,\mu,\beta,\delta} \bar{\psi}_{\delta}^{\nu} \bar{\Omega}_{\beta\delta} \left( \frac{\not p + m_0}{2m_0} \right)_{\beta\mu} \bar{\Omega}_{j\mu}^{\ell} \psi_{\mu}^{e} \\ &= \sum_{r=1}^{2} \sum_{\beta,\mu} \bar{w}_{\beta}^{r} \left( \bar{\Omega} \left( \frac{\not p + m_0}{2m_0} \right) \bar{\Omega}^{\ell} \right)_{\beta\mu} w_{\mu}^{r} \\ &= \sum_{r=1}^{4} \sum_{\beta,\mu,\tau} \varepsilon_r \bar{w}_{\beta}^{r} \left( \bar{\Omega} \left( \frac{\not p + m_0}{2m_0} \right) \bar{\Omega}^{\ell} \right)_{\beta\mu} \cdot \left( \frac{\not p + m_0}{2m_0} \right)_{\mu\tau} w_{\tau}^{r} \\ &= \sum_{\beta,\mu} \left( \bar{\Omega} \left( \frac{\not p + m_0}{2m_0} \right) \bar{\Omega}^{\ell} \right)_{\beta\mu} \cdot \left( \frac{\not p + m_0}{2m_0} \right)_{\mu\beta} \\ &= Tr \left[ \bar{\Omega} \left( \frac{\not p + m_0}{2m_0} \right) \bar{\Omega}^{\ell} \left( \frac{\not p + m_0}{2m_0} \right) \right] \\ &= Tr \left( \Omega^k D_v \Omega^{\ell\dagger} D_e \right), \end{split}$$

donde  $\frac{1}{2m_0}$  se ha cambiado por la energía *E* de tal manera que sea consistente con la masa del neutrino. Por lo tanto, los operadores de proyección D quedan expresados como:

$$D_e = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{c\sigma \cdot p + \beta mc^2}{E} \right] \quad para \ el \ electrón, \tag{D.7}$$

у

$$D_{\nu} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{c\sigma \cdot q}{E_{\nu}} \right] \quad para \ el \ antineutrino, \tag{D.8}$$

con q el momentum del antineutrino cuya masa se considera nula.

De acuerdo al resultado (D.6) se observa como la suma de los espines fue reducida al cálculo de trazas. Por lo tanto, se calculará las trazas para transiciones de Fermi y Gamow-Teller como se verá a continuación.

### D.1. Vector Axial

Se hará el calculo de traza para el acoplamiento axial, el cual tiene la siguiente forma

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}\left[1-\frac{c\sigma\cdot q}{E_{v}}\right]\sigma_{z}\frac{1}{2}\left[1-\frac{c\sigma\cdot p+\beta mc^{2}}{E_{e}}\right]\right)$$
(D.9)

Para el cálculo de las trazas se tendrá en cuenta las siguientes propiedades de las matrices de pauli.

1.  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$ 2.  $\sigma_x \cdot \sigma_y = i\sigma_z = i\sigma_j.$ 

3. 
$$Tr(\sigma_i) = 0.$$

Para M=0

De modo que para el primer termino de (D.9) se obtiene:

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}1\cdot\sigma_{z}\frac{1}{2}1\right) = \frac{1}{4}Tr\left(\sigma_{z}\right)^{2}$$
$$= \frac{1}{4}Tr\left(\mathcal{I}\right)$$
$$= 1.$$

Mientras que el segundo termino es de la forma:

$$Tr\left(\sigma_z \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma \cdot p}{E_e}\right),$$

donde cómo se puede observar la matriz  $\sigma$  contiene las matrices de pauli en x, y, z las cuales pueden ser tratadas de forma separada con el fin de hacer

el cálculo menos tedioso, de tal manera que el valor de la traza para  $\sigma_x$  es:

$$Tr\left(-\sigma_{z}\frac{1}{2}\cdot\sigma_{z}\frac{1}{2}\frac{c\sigma_{x}\cdot p_{x}}{E_{e}}\right) = -\frac{1}{4}\frac{c\cdot p_{x}}{E_{e}}Tr\left(\sigma_{z}\cdot\sigma_{z}\sigma_{x}\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{c\cdot p_{x}}{E_{e}}Tr\left(\sigma_{z}\sigma_{y}\right)$$
$$= 0.$$
(D.10)

Para las matrices y y z también se obtiene trazas nulas

$$Tr\left(-\sigma_z \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma_y \cdot p_y}{E_e}\right) = 0.$$
 (D.11)

$$Tr\left(-\sigma_z \frac{1}{2} \cdot \sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma_z \cdot p_z}{E_e}\right) = 0.$$
 (D.12)

Ahora, la traza para el término que involucra la matriz  $\beta$  es:

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}\cdot\sigma_{z}\frac{1}{2}\frac{\beta mc^{2}}{E_{e}}\right) = \frac{1}{4}\frac{mc^{2}}{E_{e}}Tr\left(\sigma_{z}\cdot\sigma_{z}\beta\right)$$
$$= 0.$$
(D.13)

Ya que las matrices  $\beta$  y  $\sigma$  son de traza nula, por lo tanto valores no nulos son dados solo por términos donde productos de potencias pares de estas o  $\gamma^5$  aparezcan, es decir, las trazas con número impar de matrices son nulas. De modo que las trazas para el termino

$$Tr\left(\sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma \cdot q}{E_v} \sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma \cdot p}{E_e}\right),\tag{D.14}$$

han de ser diferentes de cero, como se puede observar a continuación:

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}\frac{c\sigma_{x}\cdot q_{x}}{E_{v}}\sigma_{z}\frac{1}{2}\frac{c\sigma_{x}\cdot p_{x}}{E_{e}}\right) = \frac{1}{4}\frac{c^{2}\cdot q_{x}p_{x}}{E_{v}E_{e}}Tr\left(\sigma_{z}\sigma_{x}\sigma_{z}\sigma_{x}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{c^{2}\cdot q_{x}p_{x}}{E_{v}E_{e}}Tr\left(\underline{i}\sigma_{y}\overline{i}\sigma_{y}\right)$$
$$= -\frac{c^{2}\cdot q_{x}p_{x}}{E_{v}E_{e}}.$$
(D.15)

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}\frac{c\sigma_{y}\cdot q_{y}}{E_{v}}\cdot\sigma_{z}\frac{1}{2}\frac{c\sigma_{y}\cdot q_{y}}{E_{e}}\right) = \frac{1}{4}\frac{c^{2}\cdot q_{y}p_{y}}{E_{v}E_{e}}Tr\left(\sigma_{z}\sigma_{y}\sigma_{z}\sigma_{y}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{c^{2}\cdot q_{y}p_{y}}{E_{v}E_{e}}Tr\left(i\sigma_{x}i\sigma_{x}\right)$$
$$= -\frac{c^{2}\cdot q_{y}p_{y}}{E_{v}E_{e}}.$$
(D.16)

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}\frac{c\sigma_{z}\cdot q_{z}}{E_{v}}\cdot\sigma_{z}\frac{1}{2}\frac{c\sigma_{z}\cdot p_{z}}{E_{e}}\right) = \frac{1}{4}\frac{c^{2}\cdot q_{z}p_{z}}{E_{v}E_{e}}Tr\left(\sigma_{z}\sigma_{z}\sigma_{z}\sigma_{z}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\frac{c^{2}\cdot q_{z}p_{z}}{E_{v}E_{e}}Tr\left(\underline{\sigma_{z}\sigma_{z}\sigma_{z}\sigma_{z}}\right)$$
$$= \frac{c^{2}\cdot q_{z}p_{z}}{E_{v}E_{e}}.$$
(D.17)

De acuerdo a los resultados obtenidos anteriormente la traza final para M=0 es:

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}\left[1-\frac{c\sigma\cdot q}{E_{v}}\right]\sigma_{z}\frac{1}{2}\left[1-\frac{c\sigma\cdot p+\beta mc^{2}}{E_{e}}\right]\right)=1+\frac{-\overrightarrow{q}\cdot\overrightarrow{p}}{E_{v}E}c^{2}$$
(D.18)

• Para  $M = \pm 1$ :

$$\frac{1}{8}Tr\left(\left(\sigma_x \mp i\sigma_y\right)\left[1 - \frac{c\sigma \cdot q}{E_v}\right]\left(\sigma_x \mp i\sigma_y\right)\left[1 - \frac{c\sigma \cdot p + \beta mc^2}{E_e}\right]\right).$$
 (D.19)

Los únicos términos con traza no nula para  $M\pm 1$ , son los que involucran productos de potencias pares. De esta manera el primero término con traza diferente de cero es

$$\frac{1}{4}Tr\left(\sigma_{x}\cdot\sigma_{x}\right) = \frac{1}{4}Tr\left(\varphi_{x}^{2}\right)$$
$$= 1. \tag{D.20}$$

El segundo termino es de la forma

$$\frac{1}{4}Tr\left(-\sigma_x\frac{c\sigma\cdot q}{E_v}\cdot-\sigma_x\frac{c\sigma p}{E_e}\right),\tag{D.21}$$

El cual tiene traza nula para  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ , de modo que la única traza no nula es para la matriz  $\sigma_z$  de la siguiente manera:

$$\frac{1}{4}Tr\left(-\sigma_x \frac{c\sigma_z \cdot q_z}{E_v} \cdot -\sigma_x \frac{c\sigma_z p_z}{E_e}\right) = \frac{1}{4} \frac{c^2 \cdot q_z p_z}{E_v E_e} Tr\left(\sigma_x \sigma_z \cdot \sigma_x \sigma_z\right)$$

$$= \frac{1}{4} \frac{c^2 \cdot q_z p_z}{E_v E_e} Tr\left(i^2 \sigma_y^2\right)$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{c^2 \cdot q_z p_z}{E_v E_e} Tr\left(\mathcal{I}\right)$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{c^2 \cdot q_z p_z}{E_v E_e} Tr\left(\mathcal{I}\right)$$
(D.22)

Por ultimo los términos cruzados son traza diferente de cero

$$\mp Tr\left(-\frac{1}{2}i\sigma_x\left[\frac{c\sigma_x \cdot p_x}{E_v}\frac{c\sigma_y \cdot p_y}{E_v}\frac{c\sigma_z \cdot p_z}{E_v}\right] \cdot -i\sigma_y\frac{1}{2}\left[\frac{c\sigma_x \cdot p_x}{E_e}\frac{c\sigma_y \cdot p_y}{E_e}\frac{c\sigma_z \cdot p_z}{E_e}\right]\right) = \pm i\frac{1}{2}\frac{1}{2}Tr\left(\sigma_x D_v \sigma_y D_e\right)$$
(D.23)

$$\mp Tr\left(-\frac{1}{2}i\sigma_y\left[\frac{c\sigma_x \cdot p_x}{E_v}\frac{c\sigma_y \cdot p_y}{E_v}\frac{c\sigma_z \cdot p_z}{E_v}\right] \cdot -i\sigma_x\frac{1}{2}\left[\frac{c\sigma_x \cdot p_x}{E_e}\frac{c\sigma_y \cdot p_y}{E_e}\frac{c\sigma_z \cdot p_z}{E_e}\right]\right) = \mp i\frac{1}{2}\frac{1}{2}Tr\left(\sigma_x D_v \sigma_y D_e\right)$$
(D.24)

Ahora, cada valor de las trazas calculadas anteriormente deben ser multiplicadas por la matriz nuclear ( $Teorema \, de \, Wigner - Eckart$ ),

$$\frac{1}{2J_i+1}\sum_{M_fM_i}\left|\int \psi_{J_fM_f}^{\dagger}\sigma_M\psi_{J_iM_i}^{\dagger}d\tau\right| = \frac{1}{3}\left|\int\sigma\right|^2.$$
 (D.25)

Lo anterior coincide con la definición de vector axial, las cuales inducen a las transiciones de Gamow-Teller, el cual absorbe el factor  $(2J_f + 1) \cdot \left(\frac{1}{2J_i+1}\right)$  de la ecuación (2.42). Sumando sobre M, el elemento matricial es:

$$C_A^2 \left| \int \sigma \right|^2 \left( 1 - \frac{q \cdot p}{3E_v E} c^2 \right). \tag{D.26}$$

Multiplicando este ultimo resultado por la forma estadística del espectro, se obtiene el espectro de energías de los rayos beta.

### D.2. Tensor

En la traza de la ecuación (2.44) ambos  $\Omega^k$  y  $\Omega^{l\dagger}$  contienen la matriz  $\beta$  para el acoplamiento tensorial de tal manera que cuando  $\beta$  en  $\Omega^{l\dagger}$  es cambiada de la derecha al extremo izquierdo,  $\alpha$  cambia su signo, mientras que  $\sigma$  y  $\beta$  conmutan. La traza a calcular tiene la forma:

$$Tr\left(\beta\sigma_{z}\frac{1}{2}\left[1-\frac{c\sigma\cdot q}{E_{v}}\right]\beta\sigma_{z}\frac{1}{2}\left[1-\frac{c\sigma\cdot p+\beta mc^{2}}{E_{e}}\right]\right).$$
 (D.27)

Del mismo modo que para el vector axial los términos que involucran productos de potencias pares son diferentes de cero, de tal manera que para el acoplamiento tensorial obtenemos un resultado similar a lo obtenido en (D.26) con una única diferencia, el cambio de signo de  $\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p}$ , es decir:

$$C_T^2 \left| \int \sigma \right|^2 \left( 1 + \frac{\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p}}{3E_v E} c^2 \right).$$

Nuevamente si multiplicamos este último resultado por la forma estadística del espectro, se obtiene el espectro de energía de los rayos beta.

### D.3. Términos cruzados de vector axial y tensor

Se hará el calculo de traza para los términos cruzados entre el acoplamiento axial y tensorial. De modo que para M = 0, la traza entre vector axial y tensor tiene la forma:

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}\left[1-\frac{c\sigma\cdot q}{E_{v}}\right]\beta\sigma_{z}\frac{1}{2}\left[1-\frac{c\sigma\cdot p+\beta mc^{2}}{E_{e}}\right]\right)$$
(D.28)

Donde la traza del primer término en la anterior expresión es

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}\cdot\beta\sigma_{z}\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}Tr\left(\sigma_{z}\cdot\beta\sigma_{z}\right)$$
$$= 0 \tag{D.29}$$

De igual manera, para los términos  $\sigma$  que contienen a las matrices de pauli su traza es nula

$$Tr\left(-\sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma_x \cdot q_x}{E_v} \cdot -\beta \sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma_x \cdot p_x}{E_e}\right) = 0$$
 (D.30)

$$Tr\left(-\sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma_y \cdot q_y}{E_v} \cdot -\beta \sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma_y \cdot p_y}{E_e}\right) = 0$$
 (D.31)

$$Tr\left(-\sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma_z \cdot q_z}{E_v} \cdot -\beta \sigma_z \frac{1}{2} \frac{c\sigma_z \cdot p_z}{E_e}\right) = 0 \tag{D.32}$$

Donde el único término con traza no nula es la parte donde se incluye la masa del operador de proyección del electrón:

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}\cdot-\beta\sigma_{z}\frac{1}{2}\frac{\beta mc^{2}}{E_{e}}\right) = -\frac{1}{4}\frac{mc^{2}}{E_{e}}Tr\left(\sigma_{z}\cdot\beta\sigma_{z}\beta\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{mc^{2}}{E_{e}}Tr\left(\mathbf{1}\right)$$
$$= -\frac{mc^{2}}{E_{e}}.$$
(D.33)

En consecuencia, la traza de (D.28) nos resulta

$$Tr\left(\sigma_{z}\frac{1}{2}\left[1-\frac{c\sigma\cdot q}{E_{v}}\right]\beta\sigma_{z}\frac{1}{2}\left[1-\frac{c\sigma\cdot p+\beta mc^{2}}{E_{e}}\right]\right)=-\frac{mc^{2}}{E_{e}}$$
(D.34)

Para  $M = \pm 1$  se obtiene los mismos resultados que en (D.34) . Sumando sobre M, tenemos:

$$C_A C_T \left| \int \sigma \right|^2 \frac{mc^2}{E_e}.$$
 (D.35)

Se ha hecho uso de la relación

$$\int \beta \sigma = -\int \sigma. \tag{D.36}$$

Ahora, la traza para los términos cruzados entre acoplamiento escalar y vectorial es similar a lo obtenido en (D.35), por lo tanto

$$C_s C_v \left| \int \sigma \right|^2 \frac{mc^2}{E_e}.$$
 (D.37)

En las ecuaciones están dados explicitamente los momentos de los leptones.

El coeficiente de dependencia angular  $\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p} = qpCos\theta$  cambia de acuerdo con el acoplamiento de interacción, y es llamado el coeficiente de correlación electrón-neutrino. Para el espectro de rayos beta se tiene que integrar sobre el ángulo solido para los leptones, y el termino  $\overrightarrow{q} \cdot \overrightarrow{p}$  desaparece. Resumiendo los resultados, se tiene que el espectro de rayos beta esta dado por:

$$P(E) dE = \frac{1}{2\pi} \cdot pE (E_0 - E)^2 \xi \left[ 1 + \left( \frac{bmc^2}{E} \right) \right] dE,$$
 (D.38)

donde

$$\xi = \left[ \left( C_s^2 + C_v^2 \right) \left| \int 1 \right|^2 + \left( C_T^2 + C_A^2 \right) \left| \int \sigma \right|^2 \right]$$
(D.39)

$$\xi b = \pm 2 \left[ (C_s C_v) \left| \int 1 \right|^2 + (C_T C_A) \left| \int \sigma \right|^2 \right].$$
 (D.40)

Siendo las matrices de Fermi y Gamow-Teller,

$$\left|\int 1\right|^2 = \sum_{M_f} \left|\int \psi^{\dagger}_{j_f M_f} \sum_k \tau^k_{\pm} \psi_{j_i M_i} d\tau\right|^2.$$
(D.41)

$$\left|\int \sigma\right|^2 = \sum_{M_f} \left|\int \psi^{\dagger}_{j_f M_f} \sum_k \tau^k_{\pm} \sigma^k_M \psi_{j_i M_i} d\tau\right|^2.$$
(D.42)

La relación de las matrices reducidas a estas últimas ésta dada por

$$\left|\left\langle j_{f}\right|\Omega\left|j_{i}\right\rangle\right|^{2}\frac{2j_{f}+1}{2j_{i}+1}=\left|\int\Omega\right|^{2}.$$
(D.43)

El signo superior indica decaimiento por electrón, y el signo inferior para el positrón . Lo más importante de esta modificación aparece solo en los términos cruzados, y es llamada interferencia de Fierz.

# Apéndice E

### Matriz de Gamow-Teller

El elemento matricial para Gamow-Teller es

$$\left| \int \sigma \right|^{2} = \sum_{mf} \left| \int \phi_{T_{f}T_{f}}^{\dagger} \psi_{J_{f}M_{f}}^{\dagger} \sum_{k} \tau_{-}^{(k)} \sigma_{m}^{(k)} \phi_{T_{i}T_{iz}} \psi_{J_{i}M_{i}} dr_{1} dr_{2} \dots dr_{A} \right|^{2},$$
(E.1)

 $\operatorname{con} \tau_{-}^{(k)}$  el operador de isospín y  $\sigma_m^{(k)}$  las matrices de pauli. Por otro lado, se ha escrito de forma explicita a las funciones de onda de los nucleones, con  $\psi_f^{\dagger}$  y  $\psi_i$  las funciones de onda espacial y de espín, y  $\phi_f^{\dagger}$ ,  $\phi_i$  los llamados isospines.

Inicialmente lo que se quiere hacer es calcular la expresión para el elemento matricial (E.1). Para esto, calcularemos cada uno de los términos de la matriz  $\sigma_m^{(k)}$  la cual involucra tres componentes definidas como

$$\sigma_0 = \sigma_z, \qquad \sigma_{\pm} = \mp \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sigma_x \pm i\sigma_y\right).$$
 (E.2)

Por lo tanto, los valores a calcular son los de  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  y  $\sigma_0$  donde se utilizará como herramienta de calculo a los operadores escalera, cuya función es la de aumentar o disminuir el autovalor de otro operador. Sin embargo, en el primer término no existe contribución por parte de  $\sigma_+$ , debido a que la función de onda  $\psi_{JJ}$  ya se encuentra en su estado máximo de componente z de momento, es decir, la acción del operador escalera no puede aumentar el autovalor de este. El segundo termino por calcular es  $\sigma_-$ , dada la acción del operador  $J_-$  se tiene:

$$\psi_{JJ-1} = \left(\frac{1}{2J}\right) J_{-}\psi_{JJ}.$$
(E.3)

Y su hermitica conjugada:

$$\psi_{JJ-1}^{\dagger} = \left(\frac{1}{2J}\right)\psi_{JJ}^{\dagger}J_{-}.$$
(E.4)

Aquí J es la suma de los momentos angulares totales de los nucleones individuales, i.e.,

$$J_{\pm} = \sum_{k} j_{\pm}^{(k)}.$$
 (E.5)

Los operadores escalera frecuentemente son representados en una sola relación de la siguiente forma:

$$j_{\pm} = j_x \pm i j_y. \tag{E.6}$$

Aquí j y  $\sigma$  satisfacen las reglas de conmutación para momento angular

$$\left[j_{+}^{(k)}, \sigma_{-}^{(k)}\right] = 2\sigma_{z}^{(k)}, \neq 0 \text{ si } k \neq k'.$$
(E.7)

Para el calculo de  $\sigma_{-}$  se tiene tanto parte espacial y de espín cómo la de isospín. Por lo tanto, en la parte espacial y de espín los operadores escalera actúan directamente sobre las matrices sigma dejando constante el operador de isospín. En consecuencia, la matriz de Gamow-Teller es transformada como

$$\psi_{JJ}^{\dagger} \sum_{k} \sigma_{-1}^{(k)} t_{-}^{(k)} \psi_{JJ} = \left(\frac{1}{2J}\right)^{\frac{1}{2}} \psi_{JJ}^{\dagger} J_{+} \sum_{k} \sigma_{-1}^{(k)} t_{-}^{(k)} \psi_{JJ}$$

$$= \left(\frac{1}{2J}\right)^{\frac{1}{2}} \psi_{JJ}^{\dagger} \left(\sum_{k} \sigma_{-1}^{(k)} t_{-}^{(k)} J_{+} - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k} \sigma_{z}^{(k)} t_{z}^{(k)}\right) \psi_{JJ}$$

$$= \left(\frac{1}{J}\right)^{\frac{1}{2}} \psi_{JJ}^{\dagger} \sum_{k} \sigma_{z}^{(k)} t_{-}^{(k)} \psi_{JJ}.$$
(E.8)

Ahora, para la parte de isospín el operador escalera actúa directamente sobre el operador de isospín dejando invariante a las matrices sigma. En consecuencia, la componente z del elemento matricial para la parte de isospín es:

$$\phi_{-\frac{1}{2}}^{\dagger} \sum_{k} \sigma_{z}^{(k)} t_{-}^{(k)} \phi_{\frac{1}{2}} = \phi_{-\frac{1}{2}}^{\dagger} \sum_{k} \sigma_{z}^{(k)} t_{-}^{(k)} T_{+} \phi_{-\frac{1}{2}}$$

$$\phi_{-\frac{1}{2}}^{\dagger} \left| T_{+} \sum_{k} \sigma_{z}^{(k)} t_{-}^{(k)} - 2 \sum_{k} \sigma_{z}^{(k)} t_{z}^{(k)} \right| \phi_{-\frac{1}{2}}$$

$$-2\phi_{-\frac{1}{2}}^{\dagger} \sum_{k} \sigma_{z}^{(k)} t_{-}^{(k)} \phi_{-\frac{1}{2}}.$$
(E.9)

donde se hizo uso de la relación de conmutación para el operador de isospín

$$t_{-}^{(k)}t_{+}^{(k)} - t_{+}^{(k)}t_{-}^{(k)} = -2t_z,$$
(E.10)

los operadores  $t^{(k)}$  para diferentes nucleones conmutan.

Combinando los resultados obtenidos en (E.8) y en (E.9) se obtiene

$$\frac{1}{J} \left| 2 \left\langle \sum_{k} \sigma_{z}^{(k)} t_{z}^{(k)} \right\rangle_{M=J, T_{z}=-\frac{1}{2}} \right|^{2}, \qquad (E.11)$$

El termino  $\sigma_0$  solo depende de su parte de isospín por lo que esta dado por la ecuación (E.9) de la siguiente manera

$$\left| 2 \left\langle \sum_{k} \sigma_{z}^{(k)} t_{z}^{(k)} \right\rangle_{M=J, T_{z}=-\frac{1}{2}} \right|^{2}.$$
(E.12)

Reemplazando lo obtenido para  $\sigma_{-1}$  y  $\sigma_0$  en la expresión para la matriz de Gamow-Teller (E.1), se obtiene que el elemento matricial de Gamow-Teller para transiciones especulares es:

$$\left|\int \sigma\right|^2 = \frac{J+1}{J} \left| 2\left\langle \sum_k \sigma_z^{(k)} t_z^{(k)} \right\rangle_{M=J,T_z=-\frac{1}{2}} \right|^2, \tag{E.13}$$

donde el valor esperado es tomado para el estado M = J.

Sin embargo el elemento matricial no se encuentra todavía determinado debido a que la ecuación anterior depende del valor esperado para  $\sigma_z$  y  $2t_z$ , pero el valor esperado para  $2t_z$  es simplemente -1 de manera que solo quedaría por conocer el valor esperado para  $\sigma_z$ . Donde se utilizará la función de onda de la partícula con números cuánticos j y  $\mu$  en una expansión en armónicos esféricos

$$\psi_{j\mu} = \sum_{mm'} C_{j\mu}^{\ell \frac{1}{2}mm'} Y_{\ell m} \left(\theta, \phi\right) \chi_{m'}, \tag{E.14}$$

donde  $j,\ell$ ,  $\frac{1}{2}$ , son los momentos angulares total, orbital, y de espín respectivamente,  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  son los armónicos esféricos y los elementos de la base del espacio vectorial de un sistema de espín  $\frac{1}{2}$  son denominados espinores base y son notados como auto estados de  $\sigma_z$ . Los armónicos esféricos  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$  son normalizados de tal manera que:

$$\int Y_{\ell m}^{*}(\theta,\phi) Y_{\ell m}(\theta,\phi) d\Omega = \delta_{mm'} \delta_{\ell\ell'}, \qquad (E.15)$$

los números cuánticos  $\ell$ , m caracterizan los valores propios de los operadores momento angular. De modo que utilizando los armónicos esféricos y omitiendo la función de onda radial en la matriz de Gamow-Teller (E.1), el valor esperado para  $\sigma_z$  es por lo tanto

$$\int \psi_{j\mu}^{\dagger} \sigma_{z} \psi_{j\mu} d\Omega = \sum_{mm'} \sum_{m1m1'} C_{j\mu}^{\ell \frac{1}{2}mm'} C_{j\mu}^{\ell \frac{1}{2}m1m1'} \times \int Y_{\ell m}^{*} Y_{\ell m1} d\Omega \left( \chi_{m'}^{\dagger} \sigma_{z} \chi_{m1'} \right)$$
$$= \sum_{mm'} (-1)^{\frac{1}{2}-m'} \left( C_{j\mu}^{\ell \frac{1}{2}mm'} \right)^{2}, \qquad (E.16)$$

la suma sólo incluye dos términos  $m' = \pm \frac{1}{2}$ . El calculo explicito del valor esperado se hace reemplazando las expresiones de los coeficientes de Clebsh-Gordan, por lo tanto tenemos:

• Para  $\mu = j = \ell + \frac{1}{2}$ 

$$\langle \sigma_z \rangle = \frac{j + \mu - j + \mu}{2j} = \frac{2\mu}{2\ell + 1} = 1.$$
 (E.17)

• Para  $\mu = j = \ell - \frac{1}{2}$ 

$$\langle \sigma_z \rangle = \frac{j - \mu + 1 - j - \mu - 1}{2j + 2} = -\frac{2\mu}{2(j+1)} = -\frac{j}{j+1}.$$
 (E.18)

Finalmente si reemplazamos el valor esperado de  $\sigma_z$  en (3.19), se obtiene directamente la expresión de la matriz de Gamow-Teller para transiciones especulares

$$\left| \int \sigma \right|^2 = \begin{cases} \frac{j+1}{j} & para \, j_i = j_f = \ell + \frac{1}{2} \\ \frac{j}{j+1} & para \, j_i = j_f = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$
(E.19)

con  $j_i$  y  $j_f$  denotado esté el momento angular de un nucleón en un estado inicial e final.