Soluciones discontinuas al problema de Cauchy de algunas EDP cuasilineales de primer orden

Autores: Jhon Edwin Gil Maldonado
Jose Daniel Caro Castillo

Director: Gilberto Pérez P.

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Facultad Seccional Duitama
Escuela de Matemáticas y Estadística
Duitama,
Noviembre de 2015

Índice general

Nota de aceptación

____

____

____

____

____

____

Firma del presidente del jurado

____

Firma del jurado

____

Firma del jurado

Dedicatoria

A Jesucristo por guiar mis pasos hasta esta instancia de mi vida, a mis padres Yolanda y Euripides quienes han sido incondicionales conmigo, a mi hermano Edisson una de las personas que más quiero en este mundo. *Jhon Edwin* .

A Dios por haber permitido este camino para mi futuro, a mis padres Ana y José por darme la vida y la oportunidad de realizarme como persona, a mis hermanos Diana, Diego y Laura quienes estuvieron conmigo en todo momento. *José Daniel.*

Agradecimientos

Nuestro más generoso, profundo y sincero agradecimiento es para nuestro director el profesor Gilberto Pérez Poblador, quien con su guía y colaboración llevamos a buen término este proyecto, también al grupo de Seminario de investigación de Álgebra y Análisis, al licenciado Fredy Alberto Ramírez, quien apoyó este trabajo en todo momento, al Profesor Dairo Gil, quien con sus charlas nos motivó a seguir avanzando con nuestra monografía, a nuestros amigos y los docentes que contribuyeron a nuestra formación en el transcurso de pregrado.

Introducción

Las soluciones de los problemas de Cauchy para ecuaciones diferenciales, se entienden como funciones definidas sobre un dominio[1] determinado, que satisfacen la ecuación diferencial y el dato inicial, y que además sus derivadas correspondientes al orden de la ecuación son continuas. Este tipo de soluciones son llamadas *soluciones clásicas*. Si la solución está definida sobre todo el dominio considerado, se dice que la *solución es global.* En el caso que la solución esté definida sólo en un subconjunto abierto de este dominio, se dice que la *solución es local.*

En este trabajo se consideran algunas ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, cuyo problema de Cauchy para algunos datos iniciales no tienen solución global en el sentido clásico. De manera particular se analiza el problema

$$u_t + u^n u_x = -ku,\ \ x \in \mathbb{R},\, t > 0,\ \ k > 0$$
$$u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right),\ \ x \in \mathbb{R},\, u_0 \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}\right),$$

y algunos problemas sencillos de *leyes de conservación escalares*[2]*, que* son problemas de la física cuyo planteamiento es

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right), \end{cases} \tag{1}$$

donde u representa una densidad y f un flujo que debe tener segunda derivada continua. Si la función u es suave, el problema (1) puede escribirse como

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right). \end{cases} \tag{2}$$

La ecuación del problema (2) es lineal en las derivadas u_t y u_x, pero no es lineal en u (excepto si $f'\left(u\right)$ es constante). Esta clase de ecuaciones se llaman *ecuaciones*

[1] Se entiende por dominio a un subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$.

[2] El término escalar se refiere a que las funciones u y f son funciones reales.

diferenciales cuasilineales, y un método que se utiliza para encontrar sus soluciones es el *método de las características*, el cual será explicado en el segundo capítulo de este trabajo.

Cuando f es convexa, es decir $f'' > 0$, y u_0 es decreciente en algún intervalo de su dominio, no es posible encontrar una solución global clásica al problema (2). En este caso, si u_0 tiene primera derivada continua sólo se garantiza la existencia de una solución local clásica en una franja abierta de la forma $(0, T) \times \mathbb{R}$, con $T > 0$.

Para encontrar soluciones globales del problema (1) se debe extender el concepto de solución, admitiendo como soluciones funciones discontinuas que satisfagan la ecuación integral

$$\int \int_{t>0} \left[u\phi_t + f(u)\phi_x \right] dxdt + \int_{t=0} u_0 \phi dx = 0, \tag{3}$$

donde ϕ es una función con primera derivada continua y soporte compacto. Si una función u satisface (3), se dice que es una solución débil del problema (1).

Una desventaja de las soluciones débiles es que pueden ser no únicas, lo que obliga a establecer criterios para determinar las que sean físicamente admisibles. Cabe anotar que en este trabajo no se expondrá la teoría que establece las condiciones que conllevan a una solución única, ni los criterios para establecer aquellas que de alguna manera sean físicamente admisibles.

Un problema particular de leyes de conservación es el *problema de Riemann,* el cual corresponde al problema (1), pero con el dato inicial de la forma

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & \text{si } x < 0, \\ u_r & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donde u_l y u_r son constantes reales. Ecuaciones de este tipo son fundamentales en el estudio de la mecánica de fluidos y aparece en varias áreas de la matemática aplicada, tales como en el modelamiento de la dinámica de gases y el flujo del tráfico, [3]. En este trabajo también se presentarán algunos detalles sobre las soluciones del problema de Riemann.

Justificación

En el curso de ecuaciones diferenciales del programa de Licenciatura en Matemáticas y Estadística, sólo es posible tratar ecuaciones diferenciales ordinarias y algunas de sus aplicaciones.

Un medio para comprender mejor y avanzar en el estudio de un concepto matemático es su utilización en la solución de problemas concretos. Un ejemplo son las ecuaciones en derivadas parciales, a través de las cuales se modelan múltiples problemas de las ciencias aplicadas. La solución de estos problemas requiere desde el conocimiento del cálculo elemental hasta el dominio de ideas avanzadas de Análisis Matemático.

Aunque en este proyecto sólo se estudiarán algunos problemas elementales y no se darán detalles sobre las herramientas del análisis funcional que soportan la teoría que dan sentido a las soluciones débiles, será suficiente para motivar la adquisición de nuevo conocimiento por parte de quienes realizamos el proyecto. Además, será una oportunidad para afianzar los conocimientos adquiridos en asignaturas como Cálculo, Ecuaciones Diferenciales y Análisis.

Los ejemplos que se expondrán del problema (1), permitirán observar las dificultades que se presentan cuando se trata de hallar soluciones clásicas a algunos de estos problemas, y dar lugar a conocimiento de las ideas básicas que se utilizan para encontrar soluciones en un sentido más general.

Con referencia al problema (1), este es el punto de partida para el estudio de los *sistemas de leyes de conservación,* campo de la física sobre el que actualmente se desarrollan numerosas investigaciones, [3].

Objetivos

1. **Objetivo general**

Adquirir los conocimientos básicos para hallar soluciones discontinuas a problemas de Cauchy elementales de algunas EDP cuasilineales de primer orden

2. **Objetivos específicos**

   2.1. Comprender el método de las características para usarlo en la solución del problema de Cauchy de EDP cuasilineales de primer orden

   2.2. Identificar problemas de Cauchy con EDP cuasilineales de primer orden, que no tengan solución global en el sentido clásico.

   2.3. Hallar soluciones discontinuas de algunos problemas específicos de leyes de conservación escalares

   2.4. Determinar las soluciones débiles del problema de Riemann para leyes de conservación escalares

   2.5. Elaborar un documento que contenga los detalles del trabajo realizado.

Capítulo 1

Teoría preliminar

En este capítulo se consignan algunos teoremas que se utilizarán en la obtención de algunos resultados presentados en los demás capítulos.
El primero de estos teoremas establece cómo hallar las derivadas parciales de una función compuesta de varias variables.

Teorema 1.1 (Regla de la cadena) *Sea* u *una función diferenciable de las* n *variables* $x_{1,}\, x_2, ..., x_n$ *donde cada* x_k *es una función diferenciable de las* m *variables* $t_1, t_2, ..., t_m$*. Entonces* u *es función de* $t_1, t_2, ..., t_m$ *y*

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_k} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_k}, \quad \text{para cada} \;\; k = 1, 2, 3, ..., m.$$

En particular si u *es una función diferenciable de las* n *variables* $x_{1,}\, x_2, ..., x_n$ *donde cada* x_k *es una función diferenciable de* t*, entonces* u *puede considerarse sólo como función de la variable* t*, y*

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

El Teorema de Green que relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada

C en el plano $\mathbb{R}^2$, con una integral doble sobre una región encerrada por C, Figura 1.1.

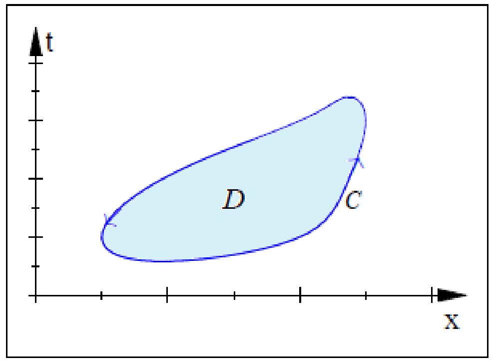

Figura 1.1

Teorema 1.2 (Teorema de Green) *Sea C una curva suave a trozos, cerrada simple y positivamente orientada en el plano tx, y sea D la región limitada por C.*
Si $P : D \to \mathbb{R}$ y $Q : D \to \mathbb{R}$ tienen derivadas parciales continuas en un región abierta que contiene a D, entonces

$$\oint_C Pdx + Qdt = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} \right) dxdt. \tag{1.1}$$

La regla de Leibniz establece la manera de intercambiar la derivación con la integración parcial de una función de dos variable.

Teorema 1.3 (Regla de Leibniz) *Sean I, J intervalos reales no triviales, con I abierto y J compacto. Sea $G : I \times J \to \mathbb{R}$ una función continua en $I \times J$ tal que $G(\cdot, x)$ es derivable en J para todo $x \in J$. Supóngase además que $\dfrac{\partial G}{\partial t}$ es continua en $I \times J$. Sean $u, v : I \to J$ funciones derivables. Entonces,*
(a) $\dfrac{\partial G}{\partial t}(t, \cdot)$ es integrable para todo t en I,
(b) $F(t) = \int_u^v G(t, x)\, dx$ es derivable en I para todo $x \in J$, y se cumple la regla de derivación de Leibniz,

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_u^v \frac{\partial}{\partial t} G(t, x)\, dx + G(t, v) \frac{dv}{dt} - G(t, u) \frac{du}{dt}.$$

Si u y v son constantes, la regla de Leibniz se reduce a,

$$\frac{d}{dt} F(t) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} G(t, x)\, dx.$$

El Teorema de la Función Inversa establece condiciones bajo las cuales las variables $x_1, ..., x_n$ en el sistema (1.2) pueden ser resueltas como funciones de las variables $y_1, ..., y_n$.

Teorema 1.4 (Teorema de la función inversa) *Sea* $U \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y*

$$f_1 : U \longrightarrow \mathbb{R}, ..., f_n : U \longrightarrow \mathbb{R},$$

funciones con derivadas parciales continuas. Considérense las ecuaciones

$$\begin{cases} y_1 = & f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & \vdots \\ y_n = & f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{1.2}$$

definidas cerca de una solución dada $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$. *Si* $f = (f_1, ..., f_n)$ *y el determinante jacobiano*

$$J(f)(\mathbf{x}_0) = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces (1.2) se puede resolver de manera única como $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$ *para* $\mathbf{x}$ *en un entorno* A *de* $\mathbf{x}_0$ *y* $\mathbf{y}$ *en un entorno* B *de* $\mathbf{y}_0$. *Además, la función* g *tiene derivadas parciales continuas.*

La función g obtenida en el teorema anterior se llama *inversa local* de f.
El teorema siguiente establece condiciones suficientes bajo las cuales una ecuación en varias variables permite definir a una de ellas como función implícita de las demás.

Teorema 1.5 (Caso particular del teorema de la función implícita.) *Supóngase que* $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ *tiene derivadas parciales continuas, y denótense por* $(\mathbf{x}, z)$ *los puntos de* $\mathbb{R}^{n+1}$, *donde* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$. *Si* $(\mathbf{x}_0, z_0)$ *satisface*

$$F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0,$$

entonces existe una bola abierta B *que contiene a* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *y una vecindad* V *de* z_0 *en* $\mathbb{R}$ *tal que existe una función única* $z = g(\mathbf{x})$ *definida para todo* $\mathbf{x} \in B$ *y* z *en* V *que satisface* $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$. *Más aún, si* $\mathbf{x} \in B$ *y* $z \in V$ *satisfacen* $F(\mathbf{x}, z) = 0$, *entonces*

$z = g(\mathbf{x})$. *Finalmente,* $z = g(\mathbf{x})$ *es continuamente diferenciable, con la derivada dada por*

$$\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x},z)} \left.\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x},z)\right|_{z=g(\mathbf{x})},$$

donde $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F$ *denota la derivada (parcial) de* F *con respecto a la variable* $\mathbf{x}$, *esto es, se tiene* $\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)$; *en otras palabras*

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}, \quad i = 1, ..., n.$$

Los teoremas anteriores pueden consultarse en [7].

Los dos resultados siguientes serán utilizados cuando se introduzca el concepto de *solución débil* en el Capítulo III. El primero hace referencia a una propiedad de las funciones que son integrables de Lebesgue[1] sobre conjuntos compactos (llamadas funciones localmente integrables) y el segundo a funciones continuas. El conjunto Ω representa un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y ϕ una función prueba (véase su definición en la sección 3.1). Decir que una propiedad se cumple *c.t.p* sobre Ω, significa que la propiedad se satisface sobre Ω excepto quizá en un subconjunto de Ω con medida nula.

Teorema 1.6 *Si* f *es una función localmente integrable* ($f \in L^1_{loc}(\Omega)$) *tal que*

$$\int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,dx = 0, \qquad \text{para todo } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

entonces $f = 0$ *c.t.p sobre* Ω.

Teorema 1.7 *Si* f *es una función continua en* Ω *tal que*

$$\int_\Omega f(x)\,\phi(x)\,dx = 0, \qquad \text{para todo } \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega),$$

entonces $f = 0$ *en* Ω.

Los dos teoremas anteriores pueden consultarse en textos de análisis funcional, por ejemplo en el texto "Analyse Fonctionnelle" del autor Haïm BREZIS, editorial Masson, París, 1987, y las nociones de medida e integral de Lebesque en textos como "The Elements of Integrations and Lebesgue Measure" del autor Robert G. Bartle, editorial John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[1] Las integrales que aparecen en este trabajo pueden entenderse como si fueran integrales de Riemann.

Capítulo 2

Ecuaciones cuasilineales de primer orden y el problema de Cauchy

2.1. Ecuaciones cuasilineales

Las ecuaciones en derivadas parciales (EDP) tienen aplicaciones en muchos campos de la física y la ingeniería, por ejemplo en dinámica, electricidad, propagación de ondas, mecánica y transferencia del calor, [5].
Una EDP es en general una ecuación que contiene derivadas parciales de una función incógnita definida en dos o más variables. De manera particular, una EDP de primer orden es aquella en la que las derivadas parciales que aparecen son de primer orden, por ejemplo una EDP de primer orden cuya función incógnita es $u\,(t,x)$ tiene la forma

$$F\,(t,x,u,u_t,u_x)=0, \tag{2.1}$$

donde F es una función definida en una región R de $\mathbb{R}^n$, entendiéndose por región a un conjunto que es la unión de conjunto abierto y conexo con quizá algunos de los puntos de su frontera.
Si la función F es lineal en la variable dependiente u y en sus derivadas u_t y u_x, se dice que la ecuación es lineal; y puede escribirse en la forma

$$g_1(t,x)u_t+g_2(t,x)u_x=g(t,x)u.$$

Por ejemplo $xu_t+t^2u_x=u$ es lineal, mientras que $u_t+u^2u_x=0$ es no lineal.
Si la función F en la ecuación (2.1) es lineal en u_t y u_x, aunque no lo sea en u, se dice que la ecuación es *cuasilineal*. La forma explícita de una ecuación cuasilineal con función incógnita $u\,(t,x)$ es,

$$g_1(t,x,u)u_t+g_2(t,x,u)u_x=g\,(t,x,u)\,. \tag{2.2}$$

Por ejemplo,

$$u_t + uu_x = u^2$$

es una ecuación cuasilineal, mientras que

$$u_t u_x + u = 0$$

no es cuasilineal.

La ecuación (2.2) junto con la condición $u(0,x) = u_0(x)$, donde u_0 es una función, constituyen un problema de Cauchy.

En este capítulo se expone de manera resumida la teoría para resolver el problema de Cauchy para ecuaciones cuasilineales de primer orden. El método expuesto tiene una motivación geométrica y se llama *método de las características.* La teoría expuesta aquí puede complementarse consultando los textos [5] y [8].

2.2. Problema de Cauchy para ecuaciones cuasilineales de primer orden

Sean g_1, g_2, y g funciones definidas sobre un conjunto abierto Ω de $\mathbb{R}^3$, con g_1, g_2, g en $\mathcal{C}^1(\Omega)$.

Considérese el problema de Cauchy

$$g_1(t,x,u)\,u_t + g_2(t,x,u)\,u_x = g(t,x,u), \tag{2.3}$$

$$u(t_0,x) = u_0(x). \tag{2.4}$$

Definición 2.1 *Sea O un abierto en $\mathbb{R}^2$. Una solución local del problema (2.3)-(2.4) es una función real ϕ en $\mathcal{C}^1(O)$, tal que para cada (t,x) en O, $(t,x,\phi(t,x))$ está en Ω, y $\phi(t,x)$ satisface la ecuación diferencial y $\phi(t_0,x) = u_0(x)$.*

Si

$$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$$

satisface la ecuación (2.3), entonces

$$(g_1, g_2, g) \cdot (\phi_t, \phi_x, -1) = 0.$$

Sea

$$S = \{(t,x,\phi(t,x)) : (t,x) \in O\},$$

la gráfica de la función ϕ en el espacio txu. Haciendo $u = \phi(t, x)$ y definiendo $F(t, x, u) = \phi(t, x) - u$, se tiene que S es la superficie de nivel cero de $F(t, x, u)$, y así

$$\nabla F = (\phi_t, \phi_x, -1),$$

es ortogonal a S en cada punto de S. Entonces ∇F es a la vez ortogonal a S y al campo vectorial $G = (g_1(t, x, \phi(t, x)), g_2(t, x, \phi(t, x)), g(t, x, \phi(t, x)))$, Figura 2.1, luego G debe ser tangente a S en cada punto de S.

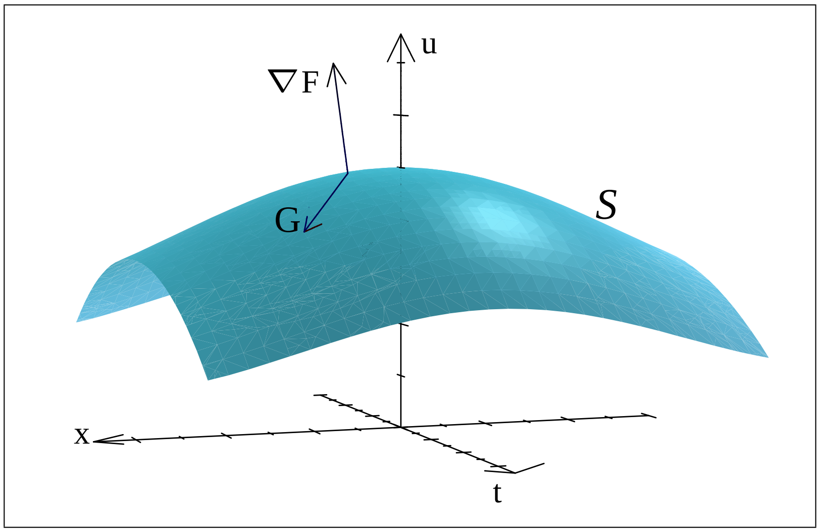

Figura 2.1

Esto motiva intentar hallar la superficie solución a partir de las curvas que son tangentes a G en cada punto y que para $t = t_0$ se intersecan con la curva $(t_0, x, u_0(x))$. Supóngase que tales curvas están definidas paramétricamente por

$$(t(\tau), x(\tau), u(\tau)),$$

y que la parametrización de la curva dato es

$$\gamma(s) = (t_0, s, u_0(s)).$$

Entonces como G es tangente a S y las curvas intersecan a γ cuando $t = t_0$, puede suponerse que

$$(t(0), x(0), u(0)) = (t_0, s, u_0(s)) \in \Omega,$$

esto es, para $\tau = 0$ las curvas $(t(\tau), x(\tau), u(\tau))$ intersecan a la curva γ, luego se debe satisfacer el sistema autónomo

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = g_1(t,x,u), & t(0) = t_0 \\ \dfrac{dx}{d\tau} = g_2(t,x,u), & x(0) = s \\ \dfrac{du}{d\tau} = g(t,x,u), & u(0) = u_0(s). \end{cases} \tag{2.5}$$

A (2.5) se le llama *sistema característico* del problema de Cauchy (2.3) - (2.4), y la gráfica en $\mathbb{R}^3$ de su solución para cada valor de s (s variando en algún intervalo) se llama *curva característica*[1].

Pero, la curva $(t(\tau), x(\tau), u(\tau))$ puede intersecar a la curva $(t_0, s, u_0(s))$ en $\tau = 0$ sólo si el vector tangente $(t'(0), x'(0), u'(0))$ no es paralelo al vector tangente $(0, 1, u_0'(s))$. Esto significa que se debe tener

$$rango \begin{pmatrix} g_1(t_0, s, u_0(s)), & 0 \\ g_2(t_0, s, u_0(s)), & 1 \\ g(t_0, s, u_0(s)), & u_0'(s). \end{pmatrix} = 2,$$

pero a cambio de esta condición puede suponerse que

$$\det \begin{pmatrix} g_1(t_0, s, u_0(s)), & 0 \\ g_2(t_0, s, u_0(s)), & 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

equivalente a que se cumpla

$$g_1(t_0, s, u_0(s)) \neq 0. \tag{2.6}$$

A (2.6) se le llama *condición de transversalidad* de la curva dato γ y el campo de vectores $(g_1(t,x,u), g_2(t,x,u), g(t,x,u))$ que define la ecuación (2.3).

En general las soluciones del sistema característico tienen la forma

$$t = T(\tau, s), \ x = X(\tau, s), \ u = U(\tau, s),$$

que constituyen una familia de curvas características cuando s varía en todo su dominio. Puede establecerse, como lo enuncia el Teorema 2.2, que bajo ciertas condiciones de los

[1] A la proyección de una curva característica sobre el plano tx se le llama a veces curva característica plana.

coeficientes de la ecuación y de la función dato u_0, la unión de las curvas características genera una superficie suave, cuya parametrización tiene la forma

$$\Gamma(\tau, s) = (T(\tau, s), X(\tau, s), U(\tau, s)).$$

Además, si $(T(\tau, s), X(\tau, s))$ tiene inversa, aunque sólo sea de carácter local, se obtiene

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbb{T}(t, x) \\ s &= \mathbb{S}(t, x), \end{aligned}$$

y así se tendría la solución

$$u(t, x) = U(\mathbb{T}(t, x), \mathbb{S}(t, x)).$$

Al respecto se enuncia el teorema que da las condiciones suficientes bajo las cuales esto puede ser posible.

Teorema 2.2 *Sea I un intervalo abierto en $\mathbb{R}$ y Ω un dominio en $\mathbb{R}^3$. Si las funciones $g_1, g_2, g \in \mathcal{C}^1(\Omega), u_0 \in \mathcal{C}^1(I)$; y se cumple la condición de transversalidad (2.6), entonces el problema de Cauchy (2.3) - (2.4) tiene una única solución local con primeras derivadas continuas.*

Nota 2.3 *Lo expuesto hasta aquí en este capítulo, es una adaptación del contenido que al respecto se encuentra en el texto [8]. Varios detalles y ejemplos de aplicación de este método pueden consultarse también en [9].*

A continuación se dan algunos ejemplos de la aplicación del método de las características para analizar algunos problemas de Cauchy con ecuaciones cuasilineales.
Como en particular el método de las características es aplicable a los problemas lineales, para ilustrar de manera sencilla la aplicación de este método, se expone como primer ejemplo un problema lineal.

Ejemplo 2.4 *Resolver el problema*

$$\begin{cases} au_t + bu_x = c, \ t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde a, b, c son constantes reales y $u_0(x)$ tiene primera derivada continua.

Solución. Por la condición de transversavilidad (2.6) se debe asumir que $a \neq 0$. La curva dato parametrizada es $\gamma = (0, s, u_0(s))$ con $s \in \mathbb{R}$. Entonces el sistema característico correspondiente es

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = a, & t(0) = 0 \\[2ex] \dfrac{dx}{d\tau} = b, & x(0) = s \\[2ex] \dfrac{du}{d\tau} = c, & u(0) = u_0(s), \end{cases}$$

con solución

$$t = a\tau, \; x = b\tau + s, \; u = c\tau + u_0(s).$$

Esto significa que la parametrización de la curva característica $(t(\tau), x(\tau), u(\tau))$ que para $\tau = 0$ interseca a la curva dato $\gamma = (0, s, u_0(s))$ para un determinado valor de s, es

$$(t(\tau), x(\tau), u(\tau)) = (a\tau, b\tau + s, c\tau + u_0(s)),$$

y en general las soluciones del sistema característico tienen la forma,

$$t = T(\tau, s) = a\tau, \; x = X(\tau, s) = b\tau + s, \; u = U(\tau, s) = c\tau + u_0(s),$$

que constituyen una familia de curvas características cuando s varía en $\mathbb{R}$. La unión de esta familia de curvas genera la superficie solución, ya que se satisfacen las condiciones del Teorema 2.2. Esta superficie queda representada de forma paramétrica por

$$\Gamma(\tau, s) = (T(\tau, s), X(\tau, s), U(\tau, s)) = (a\tau, b\tau + s, c\tau + u_0(s)).$$

Ahora, obsérvese que la inversa de la función

$$(t, x) = (T(\tau, s), X(\tau, s)) = (a\tau, b\tau + s),$$

es

$$(\tau, s) = (\mathbb{T}(t, x), \mathbb{S}(t, x)) = \left(\frac{t}{a}, x - \frac{b}{a}t\right),$$

y así se obtiene la solución explícita del problema definida por,

$$u(t, x) = U(\mathbb{T}(t, x), \mathbb{S}(t, x)) = \frac{c}{a}t + u_0\left(x - \frac{b}{a}t\right).$$

Supóngase en particular para este ejemplo que $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ y $u_0(x) = x^2 + 5$. Entonces las curvas características están dadas por

$$t = \tau, \; x = 2\tau + s, \; u = 3\tau + s^2 + 5,$$

y la solución del problema es

$$u(t,x) = 3t + (x-2t)^2 + 5.$$

En la Figura 2.2 se dibujan la curva dato, algunas curvas características que en este caso son rectas, y la gráfica de la superficie solución.

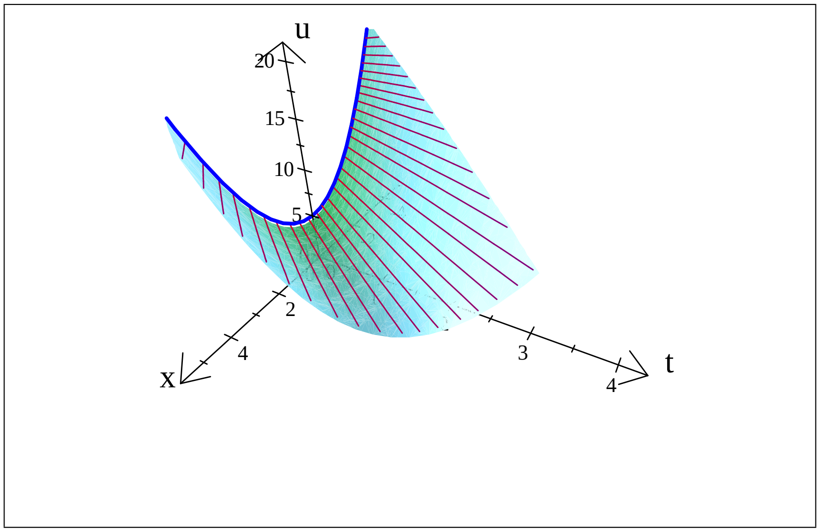

Figura 2.2

Los tres ejemplos que se exponen a continuación están propuestos como ejercicios en la referencia [6].

Ejemplo 2.5 *Determinar condiciones sobre* u_0 *para que exista solución clásica global del problema,*

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = -ku,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ k > 0 \\ &u(0,x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R},\ u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Solución. De la tercera ecuación del sistema característico

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = 1, & t(0) = 0 \\ \dfrac{dx}{d\tau} = u, & x(0) = s \\ \dfrac{du}{d\tau} = -ku, & u(0) = u_0(s), \end{cases}$$

se obtiene

$$|u| = |u_0(s)|\, e^{-k\tau},$$

de donde

$$u = u_0\left(s\right)e^{-k\tau},$$

que es la opción que satisface la condición inicial. Reemplazando u en la segunda ecuación del sistema característico y solucionando la ecuación resultante se obtiene

$$x = \frac{-1}{k}u_0\left(s\right)e^{-k\tau} + s + \frac{1}{k}u_0\left(s\right).$$

Entonces la solución local garantizada por el Teorema 2.2, está definida por las ecuaciones paramétricas

$$t = \tau, \quad x = \frac{-1}{k}u_0\left(s\right)e^{-k\tau} + s + \frac{1}{k}u_0\left(s\right), \quad u = u_0\left(s\right)e^{-k\tau}.$$

Obsérvese que x puede escribirse como

$$x = \frac{-1}{k}u + s + \frac{1}{k}ue^{kt},$$

de donde

$$s = x + \frac{u}{k}\left(1 - e^{kt}\right),$$

y así la solución en términos de t y x queda definida implícitamente por

$$u\left(t,x\right) = u_0\left(x + \frac{u\left(t,x\right)}{k}\left(1 - e^{kt}\right)\right)e^{-kt}. \tag{2.8}$$

Simplificando escritura,

$$u = u_0\left(x + \frac{u}{k}\left(1 - e^{kt}\right)\right)e^{-kt},$$

o también

$$u = u_0 e^{-kt}.$$

Derivando la expresión (2.8) implícitamente con respecto a t, se obtiene

$$u_t = u_0'.\left(\frac{u_t}{k}\left(1 - e^{kt}\right) - ue^{kt}\right)e^{-kt} - ku_0e^{-kt},$$

o también

$$u_t = u_0'.\left(\frac{u_t}{k}\left(1 - e^{kt}\right) - ue^{kt}\right)e^{-kt} - ku,$$

de donde

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{\left(ku + uu_0'e^{kt}e^{-kt}\right)}{\frac{1}{k}u_0'e^{-kt}\left(e^{kt} - 1\right) + 1} \\ &= -\frac{ku\left(k + u_0'\right)}{k + u_0'.\left(1 - e^{-kt}\right)} \\ &= -\frac{ku_0e^{-kt}\left(k + u_0'\right)}{k + u_0'.\left(1 - e^{-kt}\right)}. \end{aligned}$$

De manera similar, derivando a (2.8) implícitamente con respecto a x, se obtiene

$$u_x = u_0'.\left(1 + \frac{u_x}{k}\left(1 - e^{kt}\right)\right) e^{-kt},$$

de donde

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u_0' e^{-kt}}{\frac{1}{k} u_0' e^{-kt}\left(e^{kt} - 1\right) + 1} \\ &= \frac{k u_0' e^{-kt}}{k + u_0'.\left(1 - e^{-kt}\right)}. \end{aligned}$$

Siempre que $u(t,x)$ dada por (2.8) esté definida y sus derivadas parciales sean continuas, satisfará la ecuación diferencial y el dato inicial, ya que

$$\begin{aligned} u_t + u u_x &= -\frac{ku\left(k + u_0'\right)}{k + u_0'.\left(1 - e^{-kt}\right)} + u\frac{k u_0' e^{-kt}}{k + u_0'.\left(1 - e^{-kt}\right)} \\ &= -ku\frac{k + u_0'.\left(1 - e^{-kt}\right)}{k + u_0'.\left(1 - e^{-kt}\right)} \\ &= -ku, \end{aligned}$$

y

$$u(0,x) = u_0\left(x + \frac{u(0,x)}{k}\left(1 - e^{k\times 0}\right)\right) e^{-k\times 0} = u_0(x).$$

No existirá solución clásica global del problema (2.7), si se encuentran puntos (t,x) en los cuales las derivadas parciales de $u(t,x)$ sean discontinuas.

Las derivadas parciales de u son discontinuas en aquellos puntos (t,x), en los que

$$k + u_0'.\left(1 - e^{-kt}\right) = 0,$$

de donde $u_0'(x_0) \neq 0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ (porque $k \neq 0$), y así debe tenerse

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{u_0'(x_0)}{k + u_0'(x_0)}\right) = -\frac{1}{k}\ln\left(1 + \frac{k}{u_0'(x_0)}\right).$$

Designando por x_0 (a cambio de s) el valor en que la característica corta el eje horizontal, entonces se tendrá discontinuidad en las derivadas parciales cuando exista x_0 tal que

$$\frac{u_0'(x_0)}{k + u_0'(x_0)} > 1,$$

ya que se ha supuesto $t > 0$ y $k > 0$. De esta desigualdad se sigue que

$$u_0'(x_0) < -k.$$

Se concluye que el problema (2.7) tendrá solución clásica global en el dominio $[0,\infty)\times(-\infty,\infty)$ si y sólo si se satisface $u_0'(x_0)\geq -k$. Si $u_0'(x_0)<-k$, entonces existirá solución clásica sólo en la franja $[0,T]\times(-\infty,\infty)$, donde

$$T=\inf_{x_0\in\mathbb{R}}\left\{-\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{k}{u_0'(x_0)}\right)\right\}.$$

Para hacer una ilustración simple de la exposición anterior, supónganse que:
$u_0(x)=x,\ k=1,\qquad$ (b) $u_0(x)=-2x,\ k=1.$

(a) La solución implícita obtenida a partir de (2.8) es

$$u(t,x)=\left(x+u(t,x)\left(1-e^{t}\right)\right)e^{-t}$$

de donde

$$u(t,x)=\frac{x}{2e^{t}-1},$$

cuyas derivadas parciales son

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{-2xe^{t}}{(2e^{t}-1)^{2}},\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2e^{t}-1},$$

las cuales son continuas en todo el dominio $(0,\infty)\times(-\infty,\infty)$, y entonces $u(t,x)$ es una solución clásica global. Obsérvese que en este ejemplo $u_0'(x_0)=1\geq -1=-k$.

(b) Primero se hace un análisis desde el punto de vista de las curvas características, para mostrar como a través de ellas pueden sacarse conclusiones sobre la solución.
La ecuación de la característica que corta al eje horizontal en $x=x_0$ es

$$x=2x_0e^{-t}-x_0,$$

y como la solución del problema está dada por

$$u(t,x)=u(x_0)\,e^{-t},$$

entonces para evaluar u en un punto (t,x), Figura 2.3, se debe primero encontrar el valor x_0 en el que la característica que pasa por el punto (t,x) corta al eje horizontal,

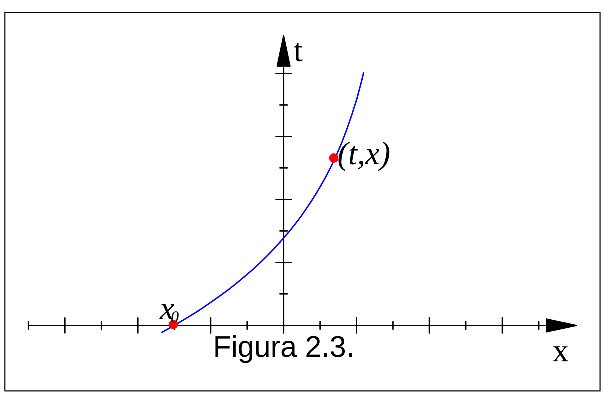

Figura 2.3.

pero puede ocurrir que por el punto (t,x) pase más de una característica o no pase ninguna, y entonces $u\,(t,x)$ queda multivaluada o no queda definida. Para ver esto supóngase $x_1 \neq x_2$, entonces las ecuaciones de las características que cortan al eje horizontal en $x = x_1$ y $x = x_2$ son respectivamente

$$x = 2x_1 e^{-t} - x_1, \quad x = 2x_2 e^{-t} - x_2,$$

de donde $(t,x) = (\ln 2, 0)$. Esto quiere decir que por el punto $(t,x) = (\ln 2, 0)$ pasan todas las curvas características y así,

$$u\,(\ln 2, 0) = -2x_0 e^{-\ln 2} = -x_0, \text{ para todo } x_0 \in \mathbb{R},$$

luego $u\,(t,x)$ queda multivaluada en punto $(\ln 2, 0)$, Figura 2.4.
Ahora, al intentar encontrar curvas características que pasen por los puntos de la forma $(\ln 2, x)$, se llega a

$$x = 2x_0 e^{-\ln 2} - x_0,$$

de donde $x = 0$, lo cual quiere decir que para $x \neq 0$ no estará definida $u\,(\ln 2, x)$, y así $u\,(t,x)$ no es solución global del problema. En la Figura 2.4 se muestra el mapa de características en el semiplano $t > 0$, donde se observa que este conjunto de curvas cubren el semiplano, excepto cuando $t = \ln 2$ y todo $x \neq 0$.

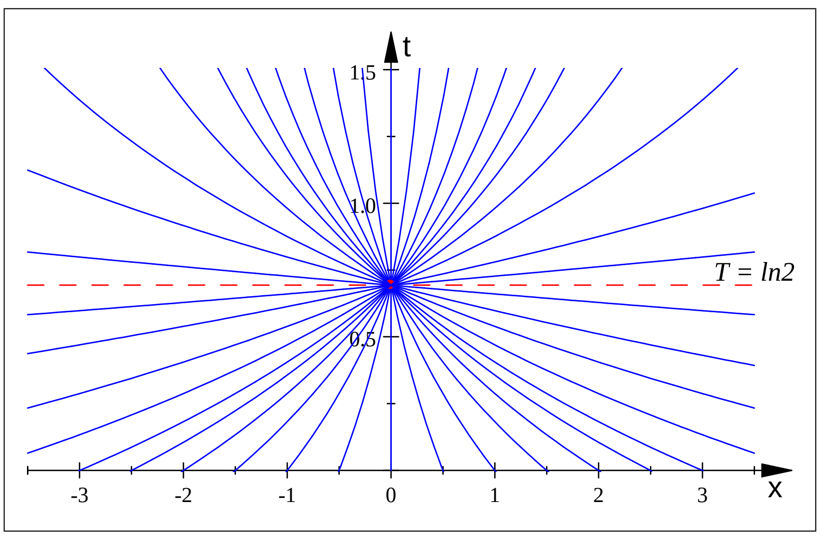

Figura 2.4

Recurriendo a la expresión que suministra la solución implícita, se tiene

$$u\,(t,x) = \left(x + u\,(t,x)\left(1 - e^t\right)\right) e^{-t},$$

de donde

$$u\left(t,x\right)=\frac{2x}{e^{t}-2},$$

que es discontinua cuando $t=\ln 2$. Obsérvese que

$$\begin{aligned} T &= \inf_{x_0\in\mathbb{R}}\left\{-\frac{1}{k}\ln\left(1+\frac{1}{u_0'\left(x_0\right)}\right)\right\} \\ &= \inf_{x_0\in\mathbb{R}}\left\{-\ln\left(1+\frac{1}{-2}\right)\right\}=\ln 2. \end{aligned}$$

Entonces existe solución clásica sólo en la franja $[0,\ln 2)\times(-\infty,\infty)$. Obsérvese que en este ejemplo $u_0'\left(x_0\right)=-2<-1=-k$.

Ejemplo 2.6 *Para el problema*

$$u_t+u^n u_x=-ku,\ \ n\geq 1,\ \ x\in\mathbb{R},\, t>0,\ \ k>0,$$

$$u\left(0,x\right)=u_0\left(x\right),\ \ x\in\mathbb{R},\, u_0\in\mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}\right),$$

determinar condiciones sobre u_0 para que exista solución clásica global.

Solución. La solución del sistema característico es

$$t=\tau,\quad x=\frac{-1}{nk}u_0^n\left(s\right)e^{-nk\tau}+s+\frac{1}{nk}u_0^n\left(s\right),\quad u=u_0\left(s\right)e^{-nk\tau},$$

de donde se obtiene $u\left(t,x\right)$ definida implicítitamente por

$$u\left(t,x\right)=u_0\left(x+\frac{u^n\left(t,x\right)}{nk}\left(1-e^{nkt}\right)\right)e^{-nkt},\tag{2.9}$$

y cuyas derivadas parciales son,

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{-ke^{-kt}\left(ku_0+u^n u_0' e^{knt}\right)}{k+u^{n-1}\left(e^{knt}-1\right)u_0' e^{-kt}}, \\ u_x &= \frac{ku_0' e^{-kt}}{k+u^{n-1}\left(e^{knt}-1\right)u_0' e^{-kt}}, \end{aligned}$$

donde

$$u=u_0\left(x_0\right)e^{-kt}\quad \text{y}\quad x_0=s=x+\frac{u^n}{nk}\left(1-e^{nkt}\right),$$

y así

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{-ke^{-kt}\left(ku_0+u_0^n u_0'\right)}{k+\left(1-e^{-nkt}\right)u_0' u_0^{n-1}}, \\ u_x &= \frac{ku_0' e^{-kt}}{k+\left(1-e^{-nkt}\right)u_0' u_0^{n-1}}. \end{aligned}$$

Entonces no existirá solución clásica global si existe x_0 tal que

$$0 = k + \left(1 - e^{-nkt}\right) u_0'(x_0)\, u_0^{n-1}(x_0) = k + \left(1 - e^{-nkt}\right) \frac{1}{n} \frac{d}{dx_0} \left(u_0^n(x_0)\right),$$

es decir, si existe x_0 tal que

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{nk} \ln \left(\frac{\frac{1}{n}\frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)|_{x=x_0}}{k + \frac{1}{n}\frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)|_{x=x_0}} \right) = -\frac{1}{nk} \ln \left(\frac{kn + \frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)|_{x=x_0}}{\frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)|_{x=x_0}} \right) \\ &= -\frac{1}{nk} \ln \left(1 + \frac{kn}{\frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)|_{x=x_0}} \right) > 0. \end{aligned}$$

Como $t > 0$, observando la primera expresión que representa a t, debe tenerse

$$\frac{\frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)|_{x=x_0}}{kn + \frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)|_{x=x_0}} - 1 > 0,$$

o

$$\frac{-k}{kn + \frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)|_{x=x_0}} > 0,$$

y siendo $k > 0$,

$$kn + \frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)|_{x=x_0} < 0,$$

esto es, cuando

$$\frac{1}{n}\frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)|_{x=x_0} < -k.$$

En conclusión, si no existe solución global para el problema (2.7), existirá una solución clásica local dada por (2.9) y definida sobre la franja

$$[0, T) \times (-\infty, \infty),$$

donde

$$T = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{1}{nk} \ln \left(1 + \frac{kn}{\frac{d}{dx}\left(u_0^n(x)\right)} \right) \right\} > 0.$$

Ejemplo 2.7 *Para el problema*

$$u_t + uu_x = -ku^2,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$u(0, x) = u_0(x),\ x \in \mathbb{R},\ u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}),$$

establecer bajo qué condiciones de u_0 el problema no tiene solución clásica global.

Solución: La solución del sistema característico es

$$t=\tau, \quad u=\frac{u_0\left(x_0\right)}{1+k\tau u_0\left(x_0\right)}, \quad x=\frac{1}{k}\ln\left|1+k\tau u_0\right|+x_0.$$

Como

$$u_0=\frac{u}{1-ktu},$$

entonces

$$x=\frac{1}{k}\ln\left|\frac{1}{1-ktu}\right|+x_0,$$

y

$$x_0=x+\frac{1}{k}\ln\left|1-ktu\right|.$$

Así, $u\left(t,x\right)$ está definida implícitamente por

$$\begin{aligned} u\left(t,x\right) &= \frac{u_0\left(x+\dfrac{1}{k}\ln\left|1-ktu\left(t,x\right)\right|\right)}{1+ktu_0\left(x+\dfrac{1}{k}\ln\left|1-ktu\left(t,x\right)\right|\right)} \\ &= \frac{1}{kt+u_0^{-1}\left(x+\dfrac{1}{k}\ln\left|1-ktu\left(t,x\right)\right|\right)}. \end{aligned}$$

Derivando implícitamente a u con respecto a t y teniendo en cuenta que $u_0=u_0\left(x_0\right)$, se tiene

$$u_t=\frac{-k+u_0^{-2}u_0'.\left(\dfrac{1}{1-ktu}\right)\left(-u-tu_t\right)}{\dfrac{1}{u^2}},$$

de donde

$$u_t=\frac{-ku^2-\dfrac{u_0^{-2}u^3u_0'}{1-ktu}}{1+\dfrac{u_0^{-2}u^2u_0't}{1-ktu}}=\frac{-ku_0^2-u_0u_0'}{\left(1+ktu_0\right)\left(1+ktu_0+u_0't\right)},$$

donde se ha efectuado la sustitución

$$u=\frac{u_0}{1+ktu_0}.$$

De manera similar se obtiene

$$u_x=\frac{u_0^{-2}u_0'.\left(1-\dfrac{tu_x}{1-ktu}\right)}{\dfrac{1}{u^2}},$$

y así

$$u_x = \frac{u_0^{-2}u^2u_0'}{1+\dfrac{u_0^{-2}u^2u_0't}{1-ktu}} = \frac{u_0'}{(1+ktu_0)(1+ktu_0+u_0't)}.$$

En efecto $u(t,x)$ satisface la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} u+uu_x &= \frac{1}{(1+ktu_0)(1+ktu_0+u_0't)}\left((-ku_0^2-u_0u_0')+\frac{u_0}{1+ktu_0}u_0'\right) \\ &= \frac{-k^2u_0^2.(1+ktu_0+u_0')}{(1+ktu_0)^2(1+ktu_0+u_0't)} = -k\left(\frac{u_0}{1+ktu_0}\right)^2 = -ku^2. \end{aligned}$$

De las derivadas parciales se concluye que el problema no tendrá solución clásica global si existe x_0 tal que

$$t = -\frac{1}{ku_0(x_0)} > 0,$$

o si

$$t = -\frac{1}{ku_0(x_0)+u_0'(x_0)} = -\frac{e^{kx_0}}{(u_0(x_0)e^{kx_0})'} > 0,$$

esto es, si existen puntos x_0 en los cuales $u_0(x_0) < 0$, o $u_0(x_0)e^{kx_0}$ es decreciente.
Ya que $u(t,x) = \dfrac{u_0(x_0)}{1+ktu_0(x_0)}$, el problema no tendrá solución global continua si existe x_0 tal que $u_0(x_0) < 0$.
El problema siguiente corresponde a una ley de conservación escalar.

Ejemplo 2.8 *Para el problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} &u_t + u^2u_x = 0,\ x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ &u(0,x) = u_0(x), \end{aligned}$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x-1}, & si\ x<0 \\ 1, & si\ x\geq 0, \end{cases}$$

dibujar el dato inicial y determinar el salto en u_x y u_t. Dibujar el diagrama de características y aproximar el tiempo T para el que se pierde la continuidad de la solución a lo largo de la característica $x = t$.

Solución. En este ejemplo, el dato es continuo pero no tiene primera derivada continua, Figura 2.5, lo que hace pensar en lo poco probable de la existencia de una solución clásica, ni siquiera local.

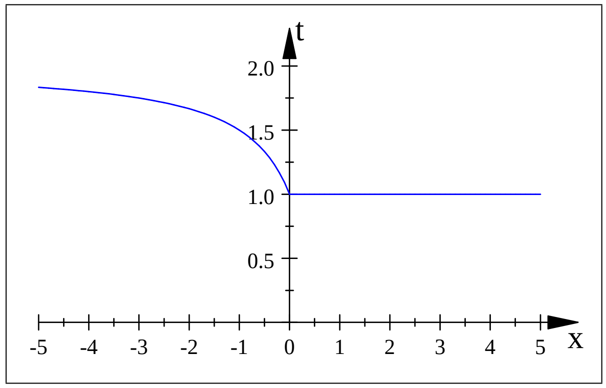

Figura 2.5

Del sistema característico

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = 1, & t(0) = 0 \\[2ex] \dfrac{dx}{d\tau} = u^2, & x(0) = s \\[2ex] \dfrac{du}{d\tau} = 0, & u(0) = u_0(s), \end{cases}$$

se deduce

$$t = \tau, \ x = u_0^2(s)\,\tau + s, \ u = u_0(s).$$

Sea $s = x_0$ el punto de corte de la curva característica plana con el eje x. Entonces si $x_0 \geq 0$,

$$t = \tau, \ x = t + x_0, \ u = 1,$$

y la ecuación de la curva característica plana es

$$x(t) = t + x_0.$$

Si $x_0 < 0$,

$$t = \tau, \ x = \left(\frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}\right)^2 t + s, \ u = \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1},$$

y la ecuación de la curva característica plana es

$$x(t) = \left(\frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}\right)^2 t + x.$$

En la Figura 2.6 se representa el correspondiente mapa de características planas.

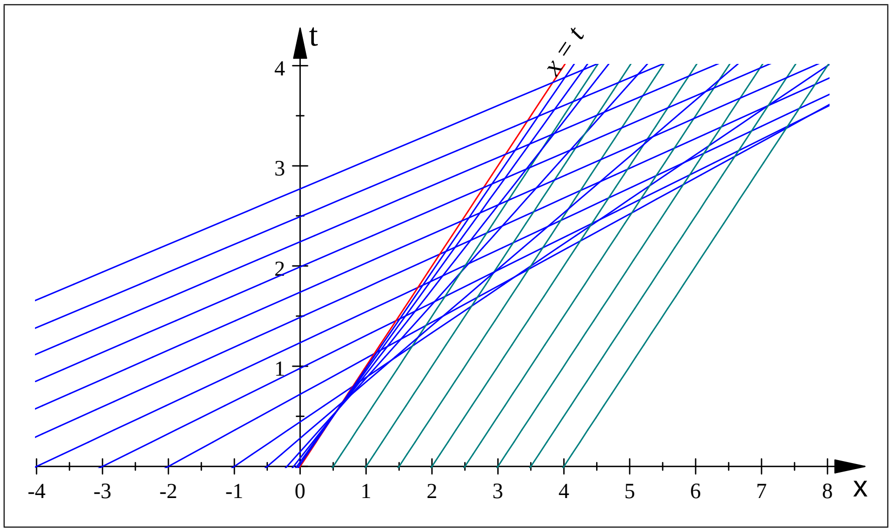

Figura 2.6

Si $x_0 < 0$, u queda definida implícitamente por

$$u = u_0\left(x - u^2 t\right),$$

y si $x_0 \geq 0$, entonces $u = 1$. Pero en el diagrama de características se observa que no existe solución clásica global para $t > 0$, ya que existe una región en la que u queda multivaluada en $x = t$ (que corta al eje horizontal en $x_0 = 0$), además está sobre la curva características que corta al eje horizontal en

$$x_0 = -\frac{\sqrt{5}+1}{2} < 0,$$

luego $u(1,1)$ puede asumir dos valores, en efecto

$$u(1,1) = \begin{cases} u_0\left(-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \\ \\ u_0(0) = 1. \end{cases}$$

Además hay puntos (t, x) donde u toma tres valores, por ejemplo, a través del punto

$$(t, x) = \left(\frac{32}{13}, \frac{59}{13}\right),$$

pasan las curvas características que cortan al eje horizontal en $x_0 = -3$, $x_0 = -1$ y en $x_0 = 27/13$, Figura 2.7, entonces

$$u\left(\frac{32}{13}, \frac{59}{13}\right) = u_0(x_0) = \begin{cases} u_0(-3) = 7/4, \\ u_0(-1) = 3/2, \\ u_0(27/13) = 1, \end{cases}$$

ya que u es constante a lo largo de las curvas características.

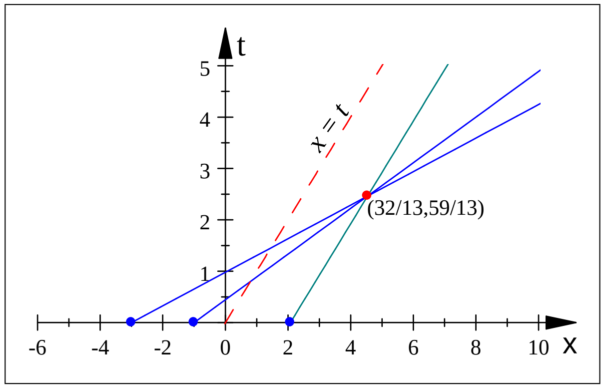

Figura 2.7

También en el diagrama de características, se observa en particular que $u(t,x)$ no puede ser continua a lo largo de toda la curva característica $x=t$, aún si se define $u(t,x)=1$ para $x \geq t$. En efecto, el tiempo en el que se intersecan las curvas características

$$x = \left(\frac{2x_0 - 1}{x_0 - 1}\right)^2 t + x_0 \quad \text{y} \quad x = t, \quad x_0 < 0,$$

está dado por la función decreciente

$$t = -\frac{(x_0 - 1)^2}{3x_0 - 2}, \quad x_0 < 0$$

y así el tiempo máximo en el que ninguna de estas curvas se interseca es

$$T = \inf_{x_0 < 0} \left\{ -\frac{1}{3x_0 - 2} \left(-2x_0 + x_0^2 + 1\right) \right\} = \frac{1}{2}.$$

Esto significa que el problema no tiene solución global continua, y sólo tiene solución local continua en la franja

$$[0, 1/2) \times (-\infty, \infty).$$

Entonces, cualquier función que quiera interpretarse como solución global, necesariamente será discontinua. En la Figura 2.8 se dibuja la superficie $(t, x, u(t,x))$ en el dominio $(0,\infty) \times (-\infty,\infty)$, en donde también se señala la franja donde u es función.

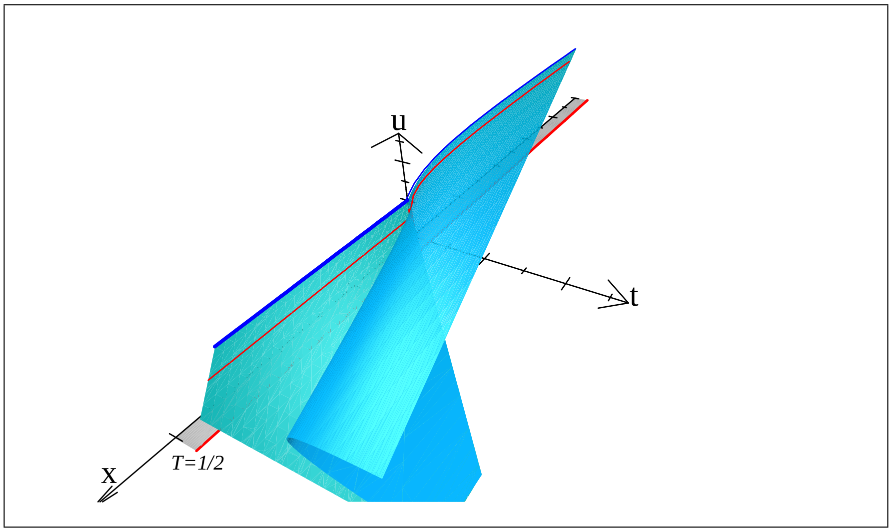

Figura 2.8

Ahora, a través de las derivadas parciales

$$u_t\left(t,x\right)=\begin{cases}\dfrac{-u_0^2\left(x_0\right)u_0'\left(x_0\right)}{1+2u_0\left(x_0\right)u_0'\left(x_0\right)t}, & \text{si } x_0<0,\\[2ex] 0 & \text{si } x_0\geq 0,\end{cases}$$

y

$$u_x\left(t,x\right)=\begin{cases}\dfrac{u_0'\left(x_0\right)}{1+2u_0\left(x_0\right)u_0'\left(x_0\right)t}, & \text{si } x_0<0,\\[2ex] 0 & \text{si } x_0\geq 0,\end{cases}$$

puede verse la no existencia de solución clásica local. En efecto, como u_0 es continua entonces

$$\lim_{x_0\to 0^-} u_t\left(t,x\right)=\lim_{x_0\to 0^-}\frac{-u_0^2\left(x_0\right)u_0'\left(x_0\right)}{1+2u_0\left(x_0\right)u_0'\left(x_0\right)t}=\frac{1}{1-2t},$$

y

$$\lim_{x_0\to 0^-} u_x\left(t,x\right)=\lim_{x_0\to 0^-}\frac{u_0'\left(x_0\right)}{1+2u_0\left(x_0\right)u_0'\left(x_0\right)t}=\frac{-1}{1-2t}.$$

Se concluye que a lo largo de la curva característica $x=t$, para ningún $t\geq 0$ existen las derivadas parciales de $u\left(t,x\right)$. Esto muestra la no existencia de solución local clásica.

Capítulo 3

Soluciones discontinuas de leyes de conservación escalares

Como se mencionó en la introducción del trabajo, el problema de Cauchy para una ley de conservación escalar no tiene soluciones clásicas cuando $f'' > 0$ y $u_0' < 0$ en algún intervalo de su dominio. En este capítulo se expondrán las ideas básicas sobre el estudio de este problema y algunos ejemplos particulares que mostrarán de manera explícita cómo encontrar soluciones discontinuas globales. Al final del capítulo también se considerará el *problema Riemann.*

3.1. Leyes de conservación escalares

El problema de Cauchy para una ley de conservación escalar

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right), \end{cases} \tag{3.1}$$

es equivalente al problema

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u\left(0, x\right) = u_0\left(x\right). \end{cases} \tag{3.2}$$

cuando f y u son suaves.

Aún siendo bastante limitada la presentación que se hace aquí sobre el problema de Cauchy para *leyes de conservación escalares,* alcanza a mostrar algunas dificultades que se presentan cuando no existen soluciones globales clásicas y se quiere encontrar soluciones globales en un sentido más general. Este es el primer paso a superar para abordar con profundidad y rigor la obtención de *soluciones globales en el sentido débil.* La justificación rigurosa de las *soluciones débiles* requiere de herramientas avanzadas de Análisis Funcional, como el concepto de *función generalizada* y *derivada distribucional,* los cuales no son estudiados en este trabajo, pero en realidad son el fundamento de esta teoría, véase el texto "*Functional Analysis and Application*" del autor Srinivasan Kesavan.

3.1.1. Significado de una ley de conservación escalar

Un ejemplo elemental de ley de conservación se obtiene al considerar el fenómeno del transporte. Supóngase que en una avenida los vehículos transitan en una dirección determinada. Si $u(t,x)$ representa la cantidad de vehículos por kilómetro en la vía (c/km) en un instante t (en horas) y en una posición x (en kilómetros), la derivada parcial u_t es la razón de cambio de u con respecto al tiempo en horas $((c/km)/h)$. Las dimensiones del flujo $f(u)$ es (c/h) y representa el número de vehículos que fluyen en algún punto de la vía cada hora. La derivada parcial $f(u)_x$ del flujo tiene dimensiones $((c/h)/km)$ que son las mismas de u_t, mientras que las dimensiones de u_x son $((c/km)/km = (c/km^2))$ y representa la variación de la densidad de los vehículos en la vía al paso de los kilómetros. Con referencia a la ecuación (3.2), $f'(u)$ tiene dimensiones $(c/h)/(c/km) = km/h$ y es la velocidad de los vehículos.
El resultado que se muestra a continuación justifica el por qué a la ecuación

$$u_t(t,x) + f(u(t,x))_x = 0,$$

se le llama *ley de conservación.*
Sean a y b números reales con $a < b$. Integrando la ecuación en (3.1) sobre un intervalo $[a,b]$ y aplicando la regla de Leibniz, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b (u_t(t,x) + f(u(t,x))_x)\,dx = \frac{d}{dt}\int_a^b u(t,x)\,dx + \int_a^b f(u(t,x))_x dx \\ &= \frac{d}{dt}\int_a^b u(t,x)\,dx + f(u(t,b)) - f(u(t,a)), \end{aligned}$$

y así

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(t,x)\,dx = f(u(t,a)) - f(u(t,b)).$$

La última igualdad se interpreta de la manera siguiente: la variación de una cantidad contenida en el intervalo $[a,b]$ en un instante t, es la cantidad que entra en a menos la cantidad que sale en b. Es decir, la cantidad ni se crea ni se destruye, sino que se *conserva*.

3.2. Soluciones débiles de una ley de conservación escalar

En esta sección se mostrará la no existencia de solución clásica global para el problema de Cauchy de una ley de conservación escalar, cuando el flujo es convexo, y el dato inicial es suave y decreciente en algún intervalo. También se expondrá la manera de generalizar el concepto de solución global para estos problemas cuando no existe solución clásica, es decir, el concepto de *solución débil*.

Como se mencionó en la introducción el problema de Cauchy para una ley de conservación,

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

se puede escribir en la forma

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

si f y u son funciones suaves.

Parametrizando el dato como $(0, s, u_0(s))$, el sistema característico correspondiente es

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = 1, & t(0) = 0 \\ \dfrac{dx}{d\tau} = f'(u), & x(0) = s \\ \dfrac{du}{d\tau} = 0, & u(0) = u_0(s). \end{cases} \tag{3.3}$$

De este sistema se deduce que u es constante a lo largo de la curva característica plana que resulta de solucionar el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = 1, & t(0) = 0 \\ \dfrac{dx}{d\tau} = f'(u), & x(0) = s. \end{cases} \tag{3.4}$$

Como $u = u_0(s)$ cuando $\tau = 0$, se deduce que

$$u = u_0(s),$$

a lo largo de la curva característica obtenida a partir de (3.4), y así el sistema (3.4) puede escribirse como

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = 1, & t(0) = 0 \\[2ex] \dfrac{dx}{d\tau} = f'(u_0(s)), & x(0) = s, \end{cases}$$

cuya solución es

$$\tau = t, \quad x = f'(u_0(s))\,\tau + s.$$

Entonces, la solución de (3.3) es

$$t = \tau, \quad x = f'(u_0(s))\,\tau + s, \quad u = u_0(s),$$

de donde

$$x = f'(u_0(s))\,t + s,$$

y así las curvas características planas son rectas que cortan al eje horizontal en $x = s$. Haciendo $s = x_0$, se tiene

$$u(t,x) = u_0(x_0),$$

a lo largo de la recta

$$x = f'(u_0(x_0))\,t + x_0. \tag{3.5}$$

Una posible solución $u(t,x)$ quedará definida implícitamente por

$$u(t,x) = u_0(x - f'(u(t,x))\,t), \tag{3.6}$$

la que puede también escribirse como

$$u(t, x_0 + f'(u_0(x_0))\,t) = u_0(x_0). \tag{3.7}$$

Para hallar el valor de u en un punto (t,x) a través de (3.7), se resuelve la ecuación

$$x = f'(u_0(x_0))\,t + x_0$$

para x_0 y se reemplaza su valor (o sus valores) en (3.7).
A continuación se exponen las dificultades para encontrar soluciones clásicas globales al problema (3.2) cuando el flujo es convexo ($f'' > 0$) y u_0 es decreciente ($u_0' < 0$) en algún intervalo.

Las ecuaciones de las curvas características que cortan al eje horizontal en $x = x_1$ y $x = x_2$, son respectivamente

$$x = f'(u_0(x_1))\,t + x_1 \quad \text{y} \quad x = f'(u_0(x_2))\,t + x_2.$$

Entonces, el tiempo t en el que estas dos rectas se intersecan es

$$t = -\frac{x_2 - x_1}{f'(u_0(x_2)) - f'(u_0(x_1))}. \tag{3.8}$$

Ya que f' es creciente y u_0 decreciente, el tiempo dado por (3.8) es positivo y entonces en el punto de corte $u(t,x)$ toma a la vez los valores $u_0(x_1)$ y $u_0(x_2)$. La interpretación de este hecho es que en ese instante u tiene un salto desde el valor $u_0(x_1)$ al valor $u_0(x_2)$, (en física se llama *choque de onda)*. Esto implica que es imposible encontrar una solución global clásica al problema de Cauchy.

Para encontrar el menor tiempo de choque, supóngase que u_0 es decreciente en un intervalo I, y sean x_1 y x_2 puntos en I. El tiempo (3.8) puede escribirse como

$$t = -\frac{1}{\dfrac{f'(u_0(x_2)) - f'(u_0(x_1))}{x_2 - x_1}},$$

y como f' y u_0 son derivables, por el Teorema del Valor Medio existe z en el intervalo abierto de extremos x_1 y x_2 tal que

$$t = -\frac{1}{[(f' \circ u_0)(z)]'} = -\frac{1}{u_0'(x)\, f''(u_0(x))}, \tag{3.9}$$

y así el *tiempo mínimo de choque* es,

$$T = \min_{x \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{1}{u_0'(x)\, f''(u_0(x))} \right\}, \tag{3.10}$$

que es positivo, porque se ha supuesto f' creciente y u_0 decreciente. Esto significa que sólo se podrá encontrar una solución clásica en la franja $[0,T) \times (-\infty, \infty)$.

La no existencia de soluciones globales clásicas también puede mostrarse a través de las discontinuidades que presentan las derivadas parciales. En efecto, si u_0 es una función diferenciable, entonces el Teorema de la Función Implícita garantiza que (3.6) puede resolverse para u en un intervalo $[0,T)$ con T apropiadamente pequeño. Además, como

$$x_0 = x - f'(u(t,x))\,t,$$

se obtiene

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du_0}{dx_0}\frac{\partial x_0}{\partial t} = u_0' \cdot \left[-f'(u) - tf''(u)\frac{\partial u}{\partial t}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du_0}{dx_0}\frac{\partial x_0}{\partial x} = u_0' \cdot \left[1 - tf''(u)\frac{\partial u}{dx}\right],$$

de donde

$$u_t(t,x) = -\frac{f'(u)\,u_0'}{1+u_0'f''(u)\,t}, \quad u_x(t,x) = \frac{u_0'}{1+u_0'f''(u)\,t}, \tag{3.11}$$

que también puede escribirse como

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= -\frac{f'(u_0(x_0))\,u_0'(x_0)}{1+u_0'(x_0)\,f''(u_0(x_0))\,t}, \\ u_x(t,x) &= \frac{u_0'(x_0)}{1+u_0'(x_0)\,f''(u_0(x_0))\,t}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nota 3.1 *Las derivadas parciales de $u(t,x)$ también se pueden obtener aplicando directamente del Teorema de la Función Implícita, con*

$$\mathbf{x} = (t,x), \quad z = u, \quad \mathbf{x}_0 = (0,x), \quad z_0 = u_0,$$

y

$$F((x,t),u) = u - u_0(x - f'(u)\,t).$$

Si $u_0' \geq 0$ para todo x, las derivadas u_t y u_x son finitas para todo $t > 0$, y la solución u existe para todo tiempo $t > 0$, ya que se ha supuesto $f'' > 0$.
Si $u_0'(x_0) < 0$ en x_0, tanto $u_t(0,x_0)$ como $u_x(0,x_0)$ no tienen límite cuando

$$t \to -\frac{1}{u_0'(x_0)\,f''(u_0(x_0))},$$

con lo que se pierde la continuidad en las derivadas. Obsérvese que este es el mismo resultado obtenido en (3.9).

Ejemplo 3.2 *Considérese el problema*

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0, \\ u(0,x) = \dfrac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Aquí

$$f(u) = u^2/2, \quad f'(u) = u, \quad f''(u) = 1, \quad u_0(x_0) = 1/\left(1+x_0^2\right),$$

y

$$u_0'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0, \text{ cuando } x > 0.$$

Las curvas características son las rectas definidas por

$$x = x_0 + u_0(x_0)\, t = x_0 + \frac{1}{1+x_0^2} t,$$

y por (3.6)

$$u(t,x) = u_0(x - ut),$$

de donde se obtiene que las posibles soluciones están definidas implícitamente por la relación

$$u(t,x) = \frac{1}{1+(x-ut)^2},$$

que también puede expresarse como

$$u\left(t, x_0 + \frac{1}{1+x_0^2} t\right) = \frac{1}{1+x_0^2}.$$

De (3.10), el tiempo mínimo de choque es

$$\begin{aligned} T &= \min_{x_0 \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{1}{u_0'(x_0)} \right\} \\ &= \min_{x_0 \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{(1+x_0^2)^2}{2x_0} \right\}. \end{aligned}$$

Usando cálculo diferencial se obtiene que en $x_0 = \sqrt{3}/3$ la función $\dfrac{(1+x_0^2)^2}{2x_0}$ tiene un mínimo absoluto, entonces el tiempo mínimo de choque es

$$T = \frac{8}{9}\sqrt{3}.$$

Esto significa que el primer choque ocurre en el tiempo $t = 8\sqrt{3}/9$ y se da a lo largo de la curva característica que corta al eje horizontal en $x = x_0 = \sqrt{3}/3$. El valor de x donde se produce este choque es entonces

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{1+\left(\sqrt{3}/3\right)^2} \times \sqrt{3}/9 = \sqrt{3}.$$

Como

$$u_0(x_0) = u_0\left(\sqrt{3}/3\right) = \frac{3}{4},$$

la ecuación de la característica donde ocurre el primer choque es

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{3}{4}t,$$

y

$$(T, X) = \left(\frac{8}{9}\sqrt{3}, \sqrt{3}\right),$$

es el punto donde se presenta el primer choque.
En la Figura 3.1 están dibujadas las curvas características y el punto donde se produce el primer choque.
Ahora, si el análisis se quiere hacer de manera explícita sobre las derivadas parciales dadas por (3.12), se obtiene

$$u_t(t,x) = -\frac{u_0(x_0)\,u_0'(x_0)}{1 + u_0'(x_0)(1)\,t} = -\frac{-2x_0}{\left[(1+x_0^2)^2 - 2x_0 t\right](1+x_0^2)},$$

$$u_x(t,x) = \frac{u_0'(x_0)}{1 + u_0'(x_0)(1)\,t} = -\frac{-2x_0}{(1+x_0^2)^2 - 2x_0 t},$$

y estas no son continuas cuando

$$t = \frac{(1+x_0^2)^2}{2x_0}.$$

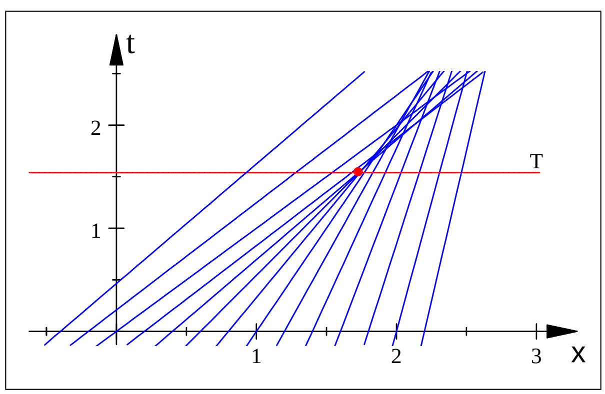

Figura 3.1

En la franja $\left[0, \frac{8}{9}\sqrt{3}\right) \times (-\infty, \infty)$, las características no se intersectan y el problema de Cauchy tiene solución local definida implícitamente por

$$u\left(t, x_0 + \frac{t}{1+x_0^2}\right) = \frac{1}{1+x_0^2},$$

o de manera equivalente por

$$u(t,x)=\frac{1}{1+(x-ut)^2}.$$

Para $t\geq T$, las características se cortan y no existe solución clásica. Cualquier función $u(t,x)$ que quiera interpretarse como solución global, necesariamente será discontinua. El valor (o valores) de u en un punto (t,x) dado se determina hallando la curva característica en la que se encuentra el punto y se procede a determinar el intercepto x_0 con el eje x de esta curva y entonces $u(t,x)=u_0(x_0)$. Por ejemplo si $(t,x)=(1,3/2)$ (obsérvese que $1<T$), resolviendo la ecuación

$$\frac{3}{2}=x_0+\frac{1}{1+x_0^2}$$

se obtiene como única solución real $x_0=1$, y así $u(1,3/2)=u_0(1)=1/2$.
Las derivadas parciales de u en $(1,3/2)$ las da (3.12), y son $u_t(1,3/2)=1/2$, $u_x(1,3/2)$.
Si el punto es $(2,2)$ (aquí $2\geq T$), de la ecuación

$$2=x_0+\frac{2}{1+x_0^2},$$

se obtiene

$$x_0=0 \quad \text{y} \quad x_0=1,$$

y u toma los valores $u_0(0)=1$ y $u_0(1)=1/2$.
Si el punto es $(3,5/2)$, al resolver la ecuación

$$\frac{5}{2}=x_0+\frac{3}{1+x_0^2},$$

se encuentran tres valores para x_0,

$$x_0=1,\quad x_0=\frac{1}{4}\sqrt{17}+\frac{3}{4},\quad x_0=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{17},$$

y entonces,

$$u(3,5/2)=\begin{cases} u_0(1)=\dfrac{1}{2}, \\[2ex] u_0\left(\dfrac{1}{4}\sqrt{17}+\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{7}{12}-\dfrac{1}{12}\sqrt{17}\simeq 0{,}24, \\[2ex] u_0\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{1}{4}\sqrt{17}\right)=\dfrac{1}{12}\sqrt{17}+\dfrac{7}{12}\simeq 0{,}95. \end{cases}$$

En la Figura 3.2 se muestran las tres características planas y tridimensionales correspondientes a los tres valores de x_0 y los respectivos valores de u a lo largo de estas rectas.

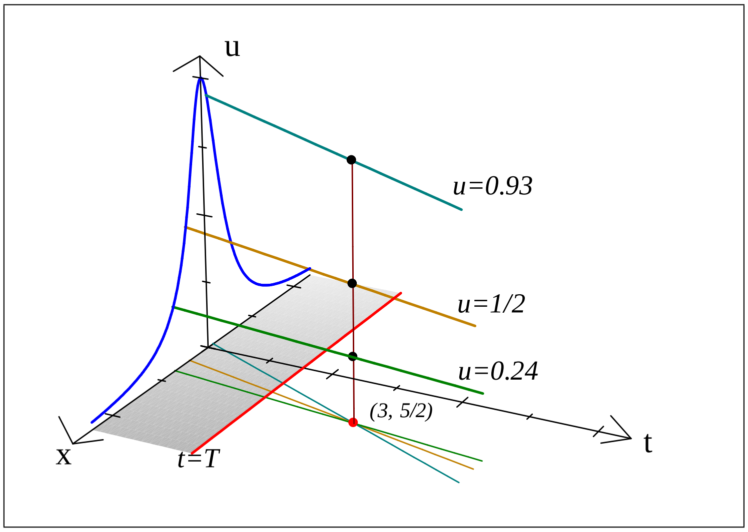

Figura 3.2

3.2.1. Solución débil

En esta sección se introduce la noción de solución del problema de Cauchy (3.1). La manera de darle sentido a la solución global cuando esta no existe en el sentido clásico, consiste en recuperar la forma integral de la ley de conservación. La idea básica es tomar la ecuación de (3.1), multiplicarla por una función prueba, integrar sobre el dominio y después aplicar la integración por partes para pasar las derivadas de la función u a la función prueba que es regular, [3].

Definición 3.3 (Soporte de una función) *El soporte de una función es la adherencia del conjunto de puntos donde la función no se anula, es decir, el soporte de una función* $\phi(t,x)$, *denotado por* $Spt(\phi)$, *es*

$$Spt(\phi) = \overline{\{x : \phi(t,x) \neq 0\}}.$$

Si ϕ es de $\mathrm{C}^1(\Omega)$ y el conjunto $Spt(\phi)$ es compacto, se dice que ϕ tiene soporte compacto y se escribe $\phi \in \mathrm{C}_0^1(\Omega)$. Estas funciones se llaman *funciones prueba.*

Ejemplo 3.4 *La función* ψ *con dominio* $\mathbb{R}$, *definida por*

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1, \end{cases}$$

es de $C_0^1(\mathbb{R})$, *con* $Spt(\phi) = [-1,1]$, *y la función* ϕ *con dominio* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *definida por*

$$\phi(t,x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2-t^2}}, & si\ x^2+t^2 < 1 \\ 0 & si\ x^2+t^2 \geq 1, \end{cases}$$

es de $C_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *y tiene soporte la bola cerrada* $\overline{B}(0,1)$, *Figuras 3.3a, 3.3b.*

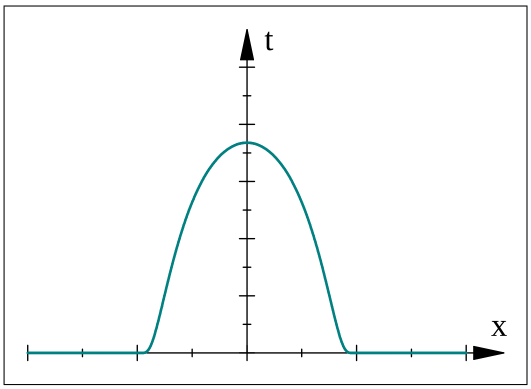

Figura 3.3a, $y = \psi(x)$.

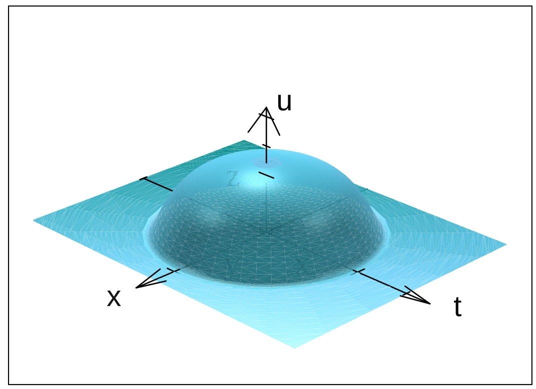

Figura 3.3b, $u = \phi(t,x)$.

Para construir soluciones del problema de Cauchy (3.1) en un sentido más general que el clásico, se consideran las funciones $\phi = \phi(t,x)$ de en $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ y un rectángulo D en el plano tx determinado por $a \leq x \leq b$ y $0 \leq t \leq T$, tal que $\phi(t,x) = 0$ para $x = a$, $x = b$, $t = T$ y para todo (t,x) en el semiplano superior exterior a D, es decir, $Spt(\phi) \cap \{(t,x),\ t \geq 0\} \subset D$, Figura 3.4. Entonces, para motivar la definición de solución débil de (3.1) se supone por el momento que u es una función suave.

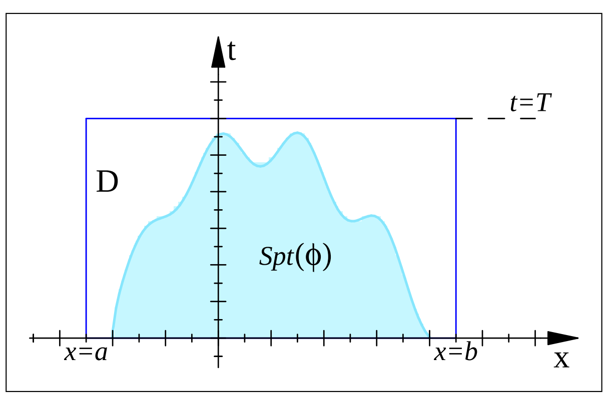

Figura 3.4

Multiplicando la ecuación del problema (3.1) por ϕ y aplicando integral doble se obtiene,

$$\begin{aligned}
0 &= \int\int_{(0,\infty)\ \times\mathbb{R}} \left(u_t + f\left(u\right)_x\right)\phi dtdx = \iint_D \left(u_t + f\left(u\right)_x\right)\phi dtdx \\
&= \int_0^T\int_a^b \left(u_t + f\left(u\right)_x\right)\phi dtdx \\
&= \int_a^b\int_0^T u_t\phi dtdx + \int_0^T\int_a^b f\left(u\right)_x\phi dxdt.
\end{aligned}$$

Usando integración por partes y teniendo en cuenta $\phi\left(t,x\right) = 0$ en $x = a$, $x = b$ y $t = T$, resulta

$$\begin{aligned}
\int_a^b\int_0^T u_t\phi dtdx &= \left(\int_a^b \phi u\left.\right|_0^T dx - \int_a^b\int_0^T u\phi_t dxdt\right) \\
&= \left(-\int_a^b u\left(0,x\right)\phi\left(0,x\right)dx - \int_a^b\int_0^T u\phi_t dtdx\right) \\
&= -\int_a^b u_0\left(x\right)\phi\left(0,x\right)dx - \int_0^T\int_a^b u\phi_t dxdt \\
&= -\int_{t=0} u_0\phi dx - \int\int_{t>0} u\phi_t dxdt,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_a^b f\left(u\right)_x\phi dxdt &= \int_0^T f\left(u\right)\phi_x\left.\right|_a^b dt - \int_0^T\int_a^b f(u)\phi_x dxdt \\
&= \left(0 - \int_0^T\int_a^b f(u)\phi_x dxdt\right) \\
&= -\int_0^T\int_a^b f(u)\phi_x dxdt \\
&= -\int\int_{t>0} f(u)\phi_x dxdt.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \int\int_{(0,\infty)\ \times\mathbb{R}} \left(u_t + f\left(u\right)_x\right)\phi dtdx \\
&= -\int\int_{t>0} \left[u\phi_t + f(u)\phi_x\right]dxdt - \int_{t=0} u_0\phi dx,
\end{aligned}$$

y se concluye que si u es una solución suave del problema (3.1), entonces la ecuación

$$\int\int_{t>0} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\, dxdt + \int_{t=0} u_0\phi dx = 0, \tag{3.13}$$

se satisface para toda ϕ en $\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^2)$, pero esta ecuación tiene sentido aún si u y u_0 no son suaves ni continuas, también tiene sentido si u y u_0 localmente integrables; ya que por ser compacto el soporte de ϕ, la integral se calcula sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$.

Definición 3.5 (Solución débil del problema de Cauchy) *Una función* $u(t,x)$ *medible y acotada que satisfaga (3.13) para cada* $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ *con dato inicial* u_0 *medible y acotado, se llama* ***solución débil*** *del problema de Cauchy (3.1).*

Se observa que la ecuación (3.13) es válida aunque u no sea continua, sólo se necesita que u sea localmente integrable, ya que por ser compacto el soporte ϕ la integral se calcula sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$.

Proposición 3.6 *La solución débil definida por (3.13) es una generalización de la noción de solución clásica, es decir, si* u *es una solución débil de clase* $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, *entonces* u *es una solución clásica de la ecuación (3.1).*

Prueba. Debe probarse que si u es suave y satisface (3.13), entonces

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(0,x) = u_0(x).$$

Si se toma en particular cualquier $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$,

$$\int_{t=0} u_0\phi dx = \int_{t=0} u_0(x)\, 0dx = 0,$$

y la expresión (3.13) se reduce a

$$\int\int_{t>0} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\, dxdt = 0.$$

Integrando por partes se llega a

$$\int\int_{t>0} (u_t + f(u)_x)\, \phi dxdt = 0,$$

para toda $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R})$, y por el Teorema *1.7*

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

Multiplicando esta ecuación por $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ e integrando por partes sobre el rectángulo D, se obtiene

$$\left(-\int_a^b u(0,x)\,\phi(0,x)\,dx - \int_a^b\int_0^T u\phi_t dxdt\right) + \left(0 - \int_0^T\int_a^b f(u)\phi_x dxdt\right) = 0,$$

equivalente a

$$\int\int_{t>0} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\,dxdt + \int_a^b u(0,x)\,\phi(0,x)\,dx = 0.$$

Comparando la última igualdad con la (3.13) resulta

$$\int_{t=0} (u(0,x) - u_0(x))\,\phi(0,x)\,dx = 0,$$

y como las funciones u y u_0 son continuas y las ϕ son arbitrarias, el Teorema 1.7 implica que $u(0,x) = u_0(x)$. ■

Para funciones suaves, la ecuación en (3.1) y en (3.2) son equivalentes, pero (3.2) solo tiene sentido para funciones suaves. Cuando u tiene un salto en un punto, el lado izquierdo de la ecuación en (3.2) contendrá el producto de una función discontinua $f'(u)$ con u_x que también es discontinua, y entonces en general dicho producto no está bien definido. De otro lado, la ecuación en forma de divergencia en (3.1) permite considerar también soluciones discontinuas, las cuales son interpretadas como *funciones generalizadas* que tienen también derivadas en un sentido generalizado. Como se advirtió en la introducción de esta sección, no se darán detalles sobre estos conceptos en este trabajo.

3.2.2. Condición de salto

Ahora se deducirá la *condición de salto* que deben cumplir las discontinuidades en las soluciones débiles. Para tal efecto supóngase que u es una solución débil del problema (3.1), tal que u es de clase $\mathcal{C}^1$ por fuera de una curva suave Γ en el plano tx, pero que tiene una discontinuidad de salto a lo largo de Γ, en el sentido que a lo largo de la curva Γ los límites de u están bien definidos a ambos lados de Γ.

Sea P un punto en Γ, B una bola abierta centrada en P apropiadamente pequeña para que esté contenida en el semiplano $t > 0$ y $\phi \in \mathcal{C}_0(B)$, Figura 3.5. Supóngase que en B la curva Γ está definida por $x = x(t)$ y sean B_1 y B_2 las componentes de B determinadas por Γ.

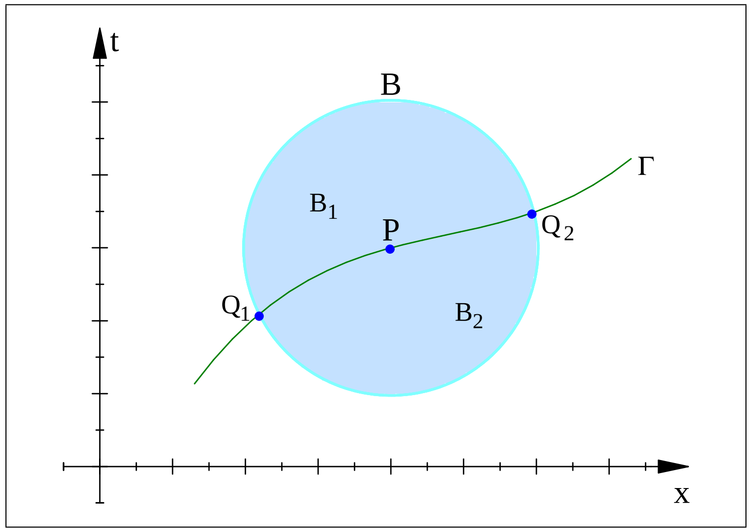

Figura 3.5

Como la bola B está contenida en el semiplano $t > 0$, $\phi(0,x) = 0$ para cada $\phi \in \mathcal{C}_0^1(B)$, y

$$\int_{t=0} u_0 \phi dx = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\, \phi(0,x)\, dx = 0,$$

quedando la ecuación (3.13) reducida a

$$\int \int_{t>0} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\, dxdt = \iint\limits_{B} [u\phi_t + f(u)\, \phi_x]\, dxdt = 0.$$

Ya que $u_t + f(u)_x = 0$,

$$\begin{aligned} u\phi_t + f(u)\,\phi_x &= (u_t + f(u)_x)\,\phi + u\phi_t + f(u)\,\phi_x \\ &= u_t\phi + u\phi_t + f(u)_x\,\phi + f(u)\,\phi_x \\ &= (u\phi)_t + (f(u)\,\phi)_x\,, \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \iint\limits_{B} [u\phi_t + f(u)\,\phi_x]\, dxdt \\ &= \iint\limits_{B_1} [(u\phi)_t + (f(u)\,\phi)_x]\, dxdt + \iint\limits_{B_2} [(u\phi)_t + (f(u)\,\phi)_x]\, dxdt. \end{aligned}$$

La función u es de clase $\mathcal{C}^1$ en los dominios B_1, B_2, entonces al aplicar el Teorema de Green por separado en estos dominios se obtiene,

$$\iint\limits_{B_1} \left[(u\phi)_t + (f\phi)_x\right] dxdt = \int\limits_{\partial B_1} f(u)\,\phi dt - u\phi dx = \int\limits_{\partial B_1} \phi\left(-udx + f(u)\,dt\right),$$

$$\iint\limits_{B_2} \left[(u\phi)_t + (f\phi)_x\right] dxdt = \int\limits_{\partial B_2} f(u)\,\phi dt - u\phi dx = \int\limits_{\partial B_2} \phi\left(-udx + f(u)\,dt\right),$$

de donde

$$0 = \int\limits_{\partial B_1} \phi\left(-udx + f(u)\,dt\right) + \int\limits_{\partial B_2} \phi\left(-udx + f(u)\,dt\right). \tag{3.14}$$

Si denotan los límites de u a los dos lados de la curva Γ por

$$u_l = \lim_{(t,x)\to\left(t_0,x_0^-\right)} u(t,x) \quad \text{y} \quad u_r = \lim_{(t,x)\to\left(t_0,x_0^+\right)} u(t,x),$$

para todo $(t_0, x_0) \in \Gamma$, entonces

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B_1} \phi\left(-udx + f(u)\,dt\right) &= \int\limits_{\Gamma} \phi\left(-u_l dx + f(u_l)\,dt\right) \\ &= \int_{Q_1}^{Q_2} \phi\left(-u_l dx + f(u_l)\,dt\right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial B_2} \phi\left(-udx + f(u)\,dt\right) &= \int\limits_{-\Gamma} \phi\left(-u_r dx + f(u_r)\,dt\right) \\ &= \int_{Q_2}^{Q_1} \phi\left(-u_r dx + f(u_r)\,dt\right). \end{aligned}$$

Obsevando que

$$\int\limits_{B} \phi\left(-udx + f(u)\,dt\right) = 0,$$

de (3.14) resulta,

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{\partial B_1} \phi\left(-u dx + f(u)\,dt\right) + \int_{\partial B_2} \phi\left(-u dx + f(u)\,dt\right) \\
&= \int_{\Gamma} \phi\left(-u_l dx + f(u_l)\,dt\right) + \int_{-\Gamma} \phi\left(-u_r dx + f(u_r)\,dt\right) \\
&= \int_{\Gamma} \phi\left(-u_l dx + f(u_l)\,dt\right) - \int_{\Gamma} \phi\left(-u_r dx + f(u_r)\,dt\right) \\
&= \int_{\Gamma} \phi\left[-\left(u_l - u_r\right) dx + \left(f(u_l) - f(u_r)\right) dt\right] \\
&= \int_{Q_1}^{Q_2} \phi\left[-\left(u_l - u_r\right) dx + \left(f(u_l) - f(u_r)\right) dt\right].
\end{aligned}$$

Como la curva Γ está definida por $x = x(t)$, su parametrización es $(t, x(t))$ y $Q_1 = (t_1, x(t_1))$, $Q_2 = (t_2, x(t_2))$; luego

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{Q_1}^{Q_2} \phi\left[-\left(u_l - u_r\right) dx + \left(f(u_l) - f(u_r)\right) dt\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \phi\left[-\left(u_l - u_r\right) x'(t)\,dt + \left(f(u_l) - f(u_r)\right) dt\right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \phi\left[-\left(u_l - u_r\right) \frac{dx}{dt} + \left(f(u_l) - f(u_r)\right)\right] dt,
\end{aligned}$$

y puesto que ϕ es arbitraria en $\mathcal{C}_0^1(B)$, por el Teorema (1.6) resulta

$$0 = -\left(u_l - u_r\right) \frac{dx}{dt} + \left(f(u_l) - f(u_r)\right).$$

Se concluye que si u satisface (3.13), debe cumplir la relación

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}, \tag{3.15}$$

en cada punto de la curva de discontinuidad Γ. La ecuación (3.15) se llama *condición de salto* y representa la *velocidad de choque*.

El ejemplo siguiente fue tomado de la referencia [10]. Aquí se muestran los detalles para obtener la solución, su interpretación gráfica y además se comprueba directamente que esta solución satisface (3.13). La ecuación considerada se llama *ecuación de Burgers*, y cuando u es suave puede escribirse como $u_t + uu_x = 0$, que es una ecuación cuasilineal.

Ejemplo 3.7 *Encontrar una solución débil del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + (u^2/2)_x = 0 \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

con

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & si \;\; x < 0 \\ 1 - x, & si \;\; 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & si \; 1 < x. \end{cases}$$

Solución: La función u_0 no tiene derivada en $x = 0$ y $x = 1$, además $u_0'(x) < 0$ en el intervalo $(0,1)$, Figura 3.6, y como

$$f''(u) = \frac{d^2}{du^2}\left(u^2/2\right) = 2 > 0,$$

no existirá solución clásica global del problema.

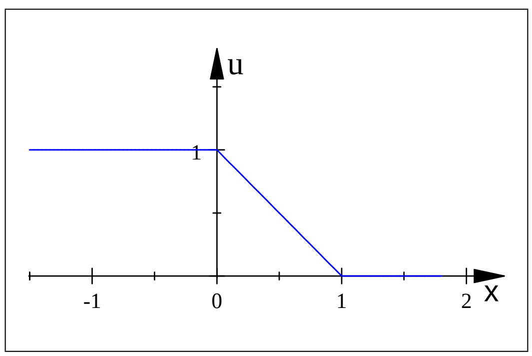

Figura 3.6, $u = u_0(x)$.

Considerando la ecuación en su forma cuasilineal, se parte del método de las características para encontrar la solución débil.
Las ecuaciones de las curvas características están dada por

$$x = ut + x_0,$$

donde $u = u_0(x_0)$, y las posibles soluciones quedan definidas implícitamente por

$$u(t,x) = u_0(x_0) = u_0(x - ut).$$

El tiempo mínimo de choque es

$$T = \min_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \frac{-1}{u_0'(x)} \right\} = \min_{0 \leq x \leq 1} \left\{ \frac{-1}{-1} \right\} = 1,$$

y entonces no puede existir solución clásica global.

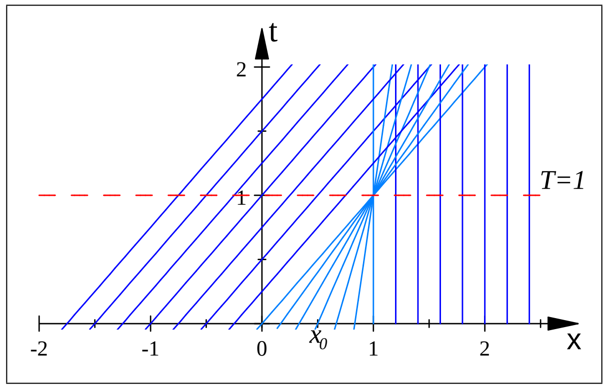

Figura 3.7

Ahora se hallan los valores de $u\,(t,x)$ en las regiones del plano $t > 0$ determinadas por las características, Figura 3.7, a partir de la relación existente entre x_0, y el punto (t,x) .

- Si $x_0 < 0$, el valor de u en los puntos (t,x) que estan sobre la característica $x = x_0 + t$, es

$$u\,(t,x) = u(x_0) = 1$$

y como $x_0 = x - t < 0$, entonces

$$u\,(t,x) = 1, \quad \text{si } x < t.$$

- Si $x_0 > 1$, la ecuación de la característica es $x = x_0$, entonces para los puntos (t,x) que están sobre estas rectas,

$$u\,(t,x) = u_0(x_0) = 0,$$

y como $x = x_0 > 1$,

$$u\,(t,x) = 0, \text{ si } x > 1.$$

- Si $0 \leq x_0 \leq 1$, la ecuación de la característica es $x = x_0 + (1 - x_0)t$, y si (t, x) está sobre esta recta

$$u(t, x) = u_0(x_0) = 1 - x_0.$$

De la ecuación de la característica se obtiene

$$x_0 = \frac{x - t}{1 - t},$$

y así

$$u(t, x) = \frac{1 - x}{1 - t}.$$

Como $0 \leq x_0 \leq 1$, entonces los puntos (t, x) deben satisfacer la condición

$$0 \leq \frac{x - t}{1 - t} \leq 1,$$

y de esta se obtiene que si $t < 1$, entonces $t \leq x \leq 1$, y si $t > 1$ entonces $1 \leq x \leq t$. Luego,

$$u(t, x) = \frac{1 - x}{1 - t}, \quad \text{si } t \leq x \leq 1 \ \text{ o } 1 \leq x \leq t.$$

Entonces para $t < 1$,

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ x < t \\ \dfrac{1 - x}{1 - t}, & \text{si } \ t \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{si } \ 1 < x, \end{cases}$$

es función, y se comprueba con facilidad que es continua aunque no tiene derivadas continuas.

En $t \geq 1$ las características se cortan y $u(t, x)$ deja de ser función. En efecto, cuando $t \geq 1$, $u(t, x)$ dada por

$$u(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ x < t \\ \dfrac{1 - x}{1 - t}, & \text{si } \ 1 \leq x \leq t \\ 0, & \text{si } \ 1 < x, \end{cases}$$

resulta multivaluada en la región $1 \leq x \leq t$, $t \geq 1$, Figura 3.8, tomando simultáneamente los valores 1, $(1-x)/(1-t)$ y 0.

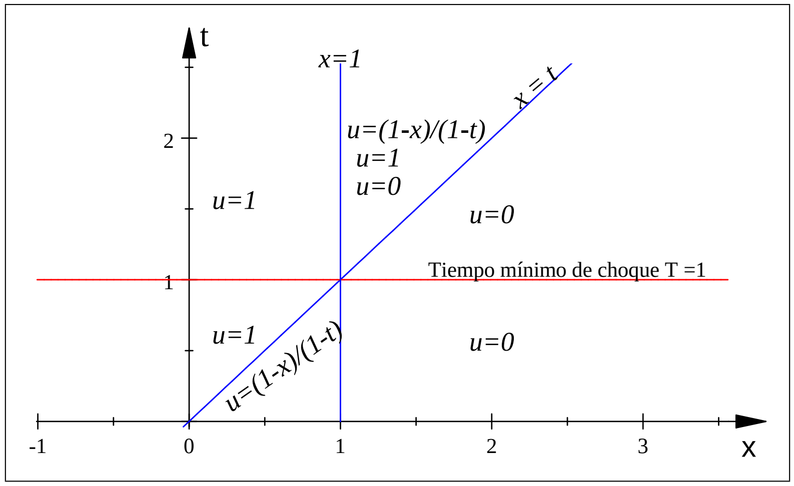

Figura 3.8

Para encontrar una solución débil en $t \geq 1$, se supone que la curva de choque pasa por el punto $(1,1)$ y es tal que $u_l = 1$ y $u_r = 0$. La condición de salto (3.15) para las soluciones débiles u de la ecuación de Burgers es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_l^2/2 - u_r^2/2}{u_l - u_r} = \frac{u_l + u_r}{2}, \tag{3.16}$$

y así la curva admisible de choque es

$$x(t) = \frac{t+1}{2},$$

ya que $x(1) = 1$. Entonces para $t \geq 1$ se define u por

$$u(t,x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < \dfrac{t+1}{2} \\[2ex] 0, & \text{si } \dfrac{t+1}{2} < x. \end{cases}$$

La Figura 3.9 muestra los valores de la solución global débil en el semiplano $t > 0$.

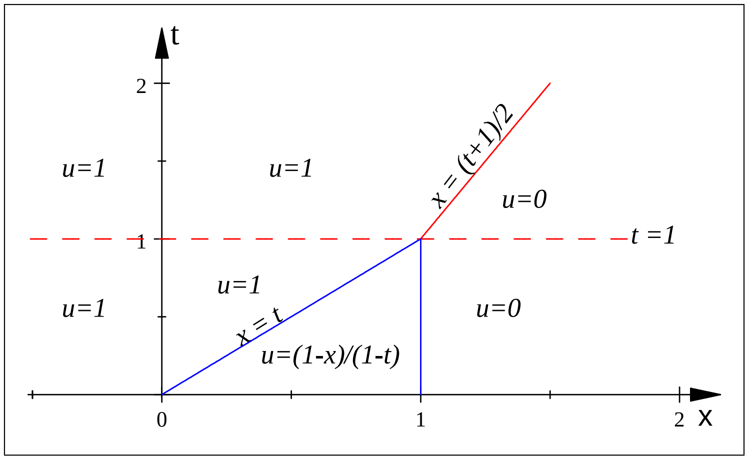

Figura 3.9

Ahora se muestra directamente que $u(t,x)$ es solución débil del problema, comprobando que satisface la ecuación (3.13). Para esto se considera la función $\phi(t,x) \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^2)$, el rectángulo de base determinada por los puntos $(0,a)$, $(0,b)$ y altura c, tal que el rectángulo contenga a $Spt(\phi)$. Para comprobar (3.13) conviene dividir la región rectangular en las siete (7) regiones señaladas en la Figura 3.10, donde la parte sombreada representa al $Spt(\phi)$.

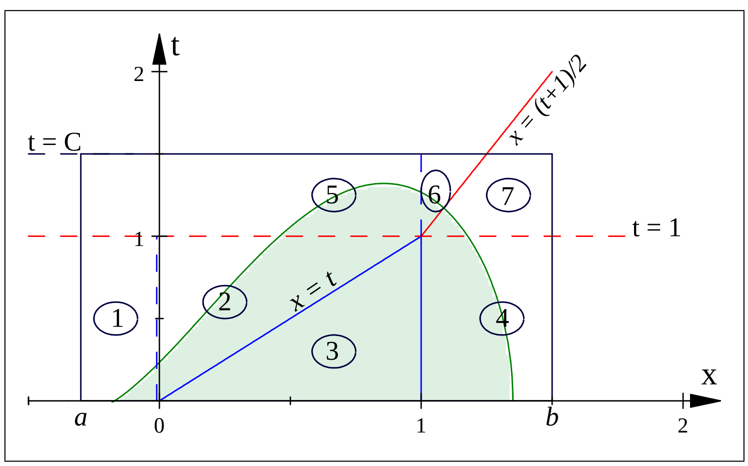

Figura 3.10

Las regiones y los valores de u sobre estas, se muestran en la tabla siguiente.

Región	Descripción de la región	$u(t,x)$
1	$0 < t < 1, \quad x < 0,$	1
2	$0 < t < 1, \quad 0 < x < t$	1
3	$0 < t < 1, \quad t < x < 1$	$\frac{1-x}{1-t}$
4	$0 < t < 1, \quad 1 < x$	0
5	$1 < t, \quad x < 1,$	1
6	$1 < t, \quad 1 < x < \frac{t+1}{2}$	1
7	$1 < t, \quad 1 < x < \frac{t+1}{2}$	0.

Téngase en cuenta que para el rectángulo[1] mostrado en la Figura 3.10, la función ϕ se anula en $x = a$, $x = b$ y $t = c$, pero no necesariamente en $t = 0$.
A continuación se calcula

$$\int\int_{t>0} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\, dxdt,$$

sobre cada región en la que u no es nula, y se comprueba que la suma de estas integrales es

$$-\int_{t=0} u_0 \phi dx.$$

Región 1:

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{t>0} [u\phi_t + f(u)\phi_x]\, dxdt &= \int_a^0 \int_0^1 \left[\phi_t(t,x) + \frac{1}{2}\phi_x(t,x)\right] dtdx \\
&= \int_a^0 \int_0^1 \phi_t(t,x)\, dtdx + \frac{1}{2}\int_0^1 \int_a^0 \phi_x(t,x)\, dxdt \qquad (3.17) \\
&= \int_a^0 [\phi(1,x) - \phi(0,x)]\, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \phi(t,0)\, dt.
\end{aligned}$$

[1]El soporte de ϕ y el rectángulo mostrados en la Figura 3.10 son los más generales, las demás opciones se reducen a casos particulares.

Región 2:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{t>0}\left[u\phi_t+f(u)\phi_x\right]dxdt &= \int_0^1\int_x^1\left[\phi_t\left(t,x\right)+\frac{1}{2}\phi_x\left(t,x\right)\right]dtdx\\ &= \int_0^1\int_x^1\phi_t\left(t,x\right)dtdx+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t\phi_x\left(t,x\right)dxdt\\ &= \int_0^1\left[\phi\left(1,x\right)-\phi\left(x,x\right)\right]dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left[\phi\left(t,t\right)-\phi\left(t,0\right)\right]dt.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Región 3:

$$\iint\limits_{t>0}\left[u\phi_t+f(u)\phi_x\right]dxdt=\int_0^1\int_0^x\frac{1-x}{1-t}\phi_t\left(t,x\right)dtdx+\frac{1}{2}\int_0^1\int_t^1\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^2\phi_x\left(t,x\right)dxdt.$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}\int_0^x\frac{1-x}{1-t}\phi_t\left(t,x\right)dt &= \frac{1-x}{1-t}\phi\left(t,x\right)\Big|_0^x-\int_0^x\frac{1-x}{\left(1-t\right)^2}\phi\left(t,x\right)dt\\ &= \phi\left(x,x\right)-\left(1-x\right)\phi\left(0,x\right)-\int_0^x\frac{1-x}{\left(1-t\right)^2}\phi\left(t,x\right)dt;\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\int_t^1\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^2\phi_x\left(t,x\right)dx &= \frac{\left(1-x\right)^2}{\left(1-t\right)^2}\phi\left(t,x\right)\Big|_t^1+2\int_t^1\frac{1-x}{\left(1-t\right)^2}\phi\left(t,x\right)dx\\ &= -\phi\left(t,t\right)+2\int_t^1\frac{1-x}{\left(1-t\right)^2}\phi\left(t,x\right)dx,\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^x\frac{1-x}{1-t}\phi_t\left(t,x\right)dtdx &= \int_0^1\left[\phi\left(x,x\right)-\left(1-x\right)\phi\left(0,x\right)\right]dx\\ &\quad -\int_0^1\int_0^x\frac{1-x}{\left(1-t\right)^2}\phi\left(t,x\right)dtdx,\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^1\int_t^1\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^2\phi_x\left(t,x\right)dxdt &= -\frac{1}{2}\int_0^1\phi\left(t,t\right)dt+\int_0^1\int_t^1\frac{1-x}{\left(1-t\right)^2}\phi\left(t,x\right)dxdt\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1\phi\left(t,t\right)dt+\int_0^1\int_0^x\frac{1-x}{\left(1-t\right)^2}\phi\left(t,x\right)dtdx.\end{aligned}$$

De estos dos últimos resultados se obtiene,

$$\iint\limits_{t>0} \left[u\phi_t + f(u)\phi_x\right] dxdt = \frac{1}{2}\int_0^1 \phi\,(x,x)\,dx - \int_0^1 (1-x)\,\phi\,(0,x)\,dx. \tag{3.19}$$

Región 5:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{t>0} \left[u\phi_t + f(u)\phi_x\right] dxdt &= \int_a^1\int_1^C \phi_t\,(t,x)\,dtdx + \frac{1}{2}\int_1^C\int_a^1 \phi_x\,(t,x)\,dxdt \\ &= -\int_a^1 \phi\,(1,x)\,dx + \frac{1}{2}\int_1^C \phi\,(t,1)\,dt.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Región 6:

$$\begin{aligned}\iint\limits_{t>0} \left[u\phi_t + f(u)\phi_x\right] dxdt &= \int_1^{\frac{C+1}{2}}\int_{2x-1}^C \phi_t\,(t,x)\,dtdx + \frac{1}{2}\int_1^C\int_a^{\frac{t+1}{2}} \phi_x\,(t,x)\,dxdt \\ &= -\int_1^{\frac{C+1}{2}} \phi\,(2x-1,x)\,dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_1^C \phi\left(t,\tfrac{t+1}{2}\right) dt - \frac{1}{2}\int_1^C \phi\,(t,1)\,dt.\end{aligned}$$

Haciendo $y = \dfrac{t+1}{2}$ en

$$\int_1^C \phi\left(t,\frac{t+1}{2}\right) dt,$$

se obtiene

$$\int_1^C \phi\left(t,\frac{t+1}{2}\right) dt = 2\int_1^{\frac{C+1}{2}} (2y-1,y)\,dy,$$

y así

$$\begin{aligned}\iint\limits_{t>0} \left[u\phi_t + f(u)\phi_x\right] dxdt &= -\int_1^{\frac{C+1}{2}} \phi\,(2x-1,x)\,dx \\ &\quad + \int_1^{\frac{C+1}{2}} (2y-1,y)\,dy - \frac{1}{2}\int_1^C \phi\,(t,1)\,dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^C \phi\,(t,1)\,dt.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Sumando las integrales (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21), se obtiene

$$-\int_a^0 \phi(0,x)\,dx - \int_0^1 (1-x)\,\phi(0,x)\,dx,$$

que en efecto es igual

$$-\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\,\phi(0,x)\,dx,$$

ya que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\,\phi(0,x)\,dx = \int_a^b u_0(x)\,\phi(0,x)\,dx = \int_a^0 1\phi(0,x)\,dx + \int_0^1 (1-x)\,\phi(0,x)\,dx.$$

3.3. Problema de Riemann

El problema de Cauchy

$$\begin{aligned} &u_t + f(u)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ &u(0,x) = u_0(x), \end{aligned} \tag{3.22}$$

donde

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & \text{si } x < 0 \\ u_r, & \text{si } x > 0, \end{cases} \tag{3.23}$$

y u_l, u_r son constantes, se llama *problema de Riemann* para una ley de conservación escalar. Aquí se presentará un estudio breve de este problema, comenzando con la *ecuación de Burgers*

$$u_t + uu_x = 0, \tag{3.24}$$

con dato inicial dado por (3.23), y los valores de u_l y u_r especificados. Luego se extienden los resultados obtenidos para la ecuación *Burgers* a la ecuación general $u_t + f'(u)\,u_x = 0$ cuando el flujo es convexo[2]. Finalmente se considera también el problema cuando el flujo es cóncavo.

La ecuación de Burgers escrita como ley de conservación escalar, es

$$u_t + \left(u^2/2\right)_x = 0,$$

siendo el flujo $f(u) = u^2/2$.

Las curvas características para este problema quedan definidas por

$$x(t) = u(x_0)\,t + x_0, \tag{3.25}$$

y para todo (t,x) de esta curva $u(t,x) = u_0(x_0)$.

[2] Para este caso véanse más detalles en [1].

Ejemplo 3.8 *Resolver el problema de Riemann para la ecuación (3.24), con el dato inicial*

$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & si \quad x < 0 \\ 1/2, & si \quad x > 0. \end{cases}$$

Solución. Si $x_0 < 0$, entonces la ecuación de la curva característica es $x = 2t + x_0$ y $u(t,x) = 2$ cuando $x < 2t$. Si $x_0 > 0$, la ecuación de la curva característica es $x = t/2 + x_0$, y $u(t,x) = 1/2$ cuando $x > t/2$. Entonces

$$u(t,x) = \begin{cases} 2, & \text{si } x < 2t \\ 1/2, & \text{si } x > t/2, \end{cases}$$

pero en la región $t/2 < x < 2t$, $u(t,x)$ toma a la vez los valores $1/2$ y 2. La Figura 3.10 muestra las curvas características y el valor de $u(t,x)$ en las tres regiones del plano (t,x) determinadas por las curvas características. También se observa que los primeros choques en el tiempo t, se presentan a lo largo de la recta $x = 2t$.

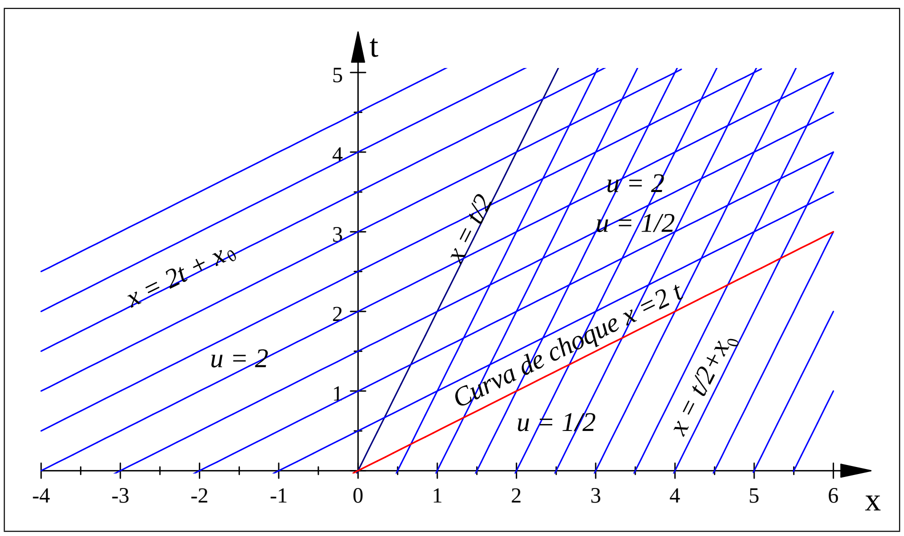

Figura 3.10

Para obtener una solución global débil se supone una curva de choque $x(t)$ que pase por el punto $(0,0)$ y cuya pendiente la de (3.15). Es claro que el valor de $u(t,x)$ a la izquierda de la curva de choque debe ser 2 y a derecha $1/2$. Como la velocidad de choque es

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u_l + u_r}{2} = \frac{2 + 1/2}{2} = \frac{5}{4},$$

la curva de choque admisible debe ser

$$x(t) = \frac{5t}{4},$$

y la solución queda definida por

$$u(t,x) = \begin{cases} 2, & \text{si } \ x < \dfrac{5t}{4} \\ 1/2, & \text{si } \ x > \dfrac{5t}{4}. \end{cases}$$

Ejemplo 3.9 *Ahora considérese la ecuación (3.24) con el dato inicial*

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \textit{si} \ \ x < 0 \\ 1, & \textit{si} \ \ x > 0. \end{cases}$$

Solución

Cuando $x_0 < 0$, la ecuación de la característica es $x = x_0$, y esto implica que $u(t,x) = 0$ para $x < 0$, y cuando $x_0 > 0$, la ecuación de la característica es $x = t + x_0$ y entonces $u(t,x) = 1$ para $x > t$, Figura 3.11. Entonces

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 0 \\ 1, & \text{si } \ x > t, \end{cases}$$

pero u no está definida en la región $0 < x < t$.

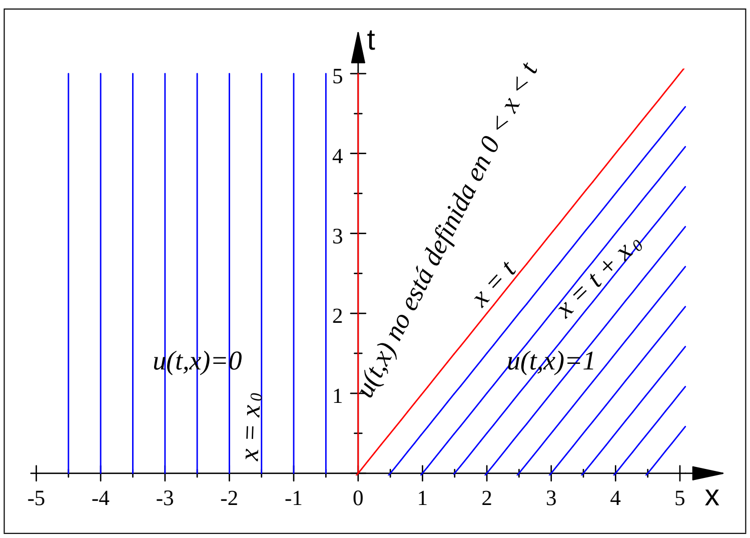

Figura 3.11

Una solución débil global se obtiene extendiendo la definición de $u(t,x)$ a partir de valores que toma en las regiones en que está definida, y determinando la curva de choque admisible que pase por el punto $(0,0)$ y satisfaga la condición de salto

$$\frac{dx}{dt} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Esta curva es $x = t/2$, y así la solución queda definida como

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < t/2 \\ 1, & \text{si } \ x > t/2. \end{cases}$$

Ahora, procediendo de manera heurística[3], véase [5], se supone que $u(t,x)$ toma inicialmente todos los valores entre 0 y 1 en el punto de $(0,0)$, (el procedimiento riguroso puede consultarse en [10]). Esto implica que hay una curva característica para cada uno de estos valores. Entonces para cada valor $u \in (0,1)$ la curva que comienzan en (0,0) tiene por ecuación $x = ut$, con $0 < u < 1$, obteniéndose

$$u(t,x) = x/t$$

en la región $0 < x < t$. Con este supuesto, el mapa de curvas características es el que se muestra en la Figura 3.12, y se obtiene otra solución global débil definida por

$$u(t,x) = \begin{cases} 0, & \text{si } \ x < 0 \\ x/t, & \text{si } \ 0 < x < t \\ 1, & \text{si } \ x > t, \end{cases} \tag{3.26}$$

la cual es continua en $t > 0$, ya que

$$\lim_{x \to 0^+} u(t,x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to t^-} u(t,x) = 1,$$

pero no tiene primeras derivadas continuas en todo el dominio $(0,\infty) \times (-\infty,\infty)$, porque para $0 < x < t$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{-x}{t^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{t},$$

y

$$0 \neq \lim_{x \to t^-} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{-1}{t} \quad \text{y} \quad 0 \neq \lim_{x \to t^-} \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 1.$$

Entonces, aunque $u(t,x)$ es continua en $(0,\infty)\times(-\infty,\infty)$ no es solución clásica, porque sus derivadas parciales son discontinuas a lo largo de la recta $x = t$.

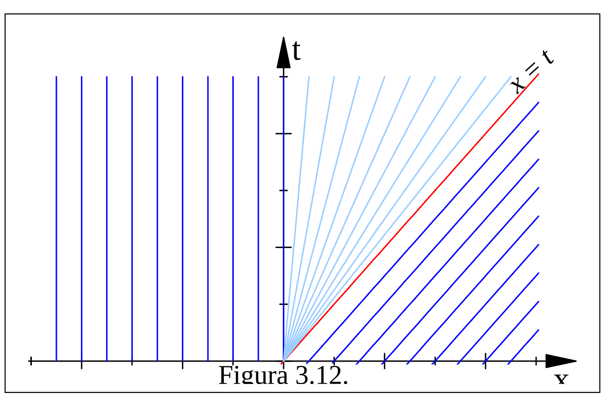

Figura 3.12.

[3]El análisis riguroso de la obtención de la solución (3.26) se encuentra en [3] o [10].

La Figura 3.13 muestra la superficie solución en el espacio (t, x, u).

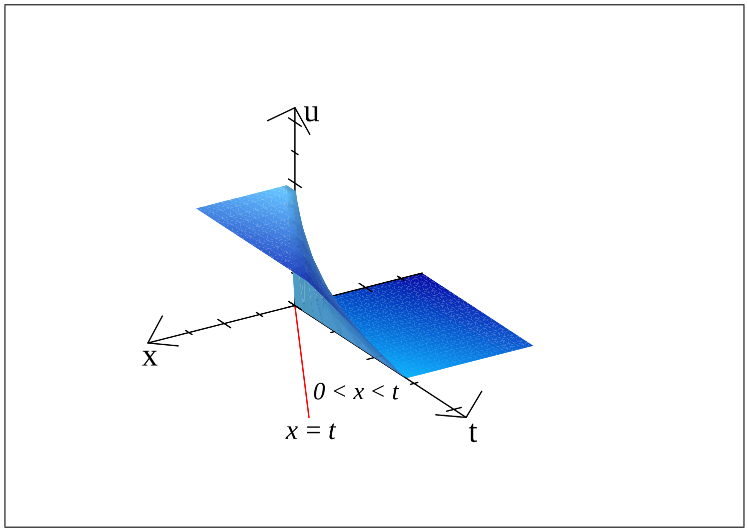

Figura 3.13

El ejemplo que se acaba de exponer muestra la pérdida de unicidad para la solución del problema de Riemann, cuando el concepto de solución es en el sentido débil. Hay problemas de Riemann que pueden tener hasta infinitas soluciones débiles, [10]. Entonces, para encontrar las que tengan algún sentido físico se requiere de ciertos criterios llamados *condiciones de admisibilidad*, [3].

3.3.1. Problema de Riemann con flujo convexo

Se considera el problema general de Riemann (3.22) cuando el flujo es convexo, es decir, cuando $f'' > 0$.

Las curvas características están definidas por

$$x(t) = f'(u)\,t + x_0,$$

y a lo largo de esta curva característica la función $u(t, x)$ toma el valor constante $u_0(x_0)$. La curva característica que corta al eje horizontal en $x = x_0$ es una línea recta de ecuación

$$x(t) = f'(u_0(x_0))\,t + x_0.$$

Para resolver el problema de Riemann se consideran por separado los dos casos $u_l > u_r$ y $u_l < u_r$.

1. Caso $u_l > u_r$.

Sea $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$. Las curvas características que cortan el eje horizontal en $x = x_1$ y $x = x_2$, están definidas respectivamente por las ecuaciones

$$x = f'(u_l)\,t + x_1 \quad \text{y} \quad x = f'(u_r)\,t + x_2.$$

Estas rectas se cortan en un tiempo

$$T = -\frac{x_1 - x_2}{f'(u_l) - f'(u_r)}.$$

Obsérvese que $T > 0$, ya que f' es creciente. Además si $x_1 \to 0^-$ y $x_2 \to 0^+$, entonces el tiempo de choque $T \to 0^+$. Esto significa que para todo $t > 0$, $u(t,x)$ está bivaluada en los puntos (T, X), donde

$$X = f'(u_l)\,T + x_1.$$

Para encontrar la solución $u(t,x)$, se halla la curva de choque admisible $x^*(t)$ definida por

$$\frac{dx^*}{dt} = v, \quad x^*(0) = 0,$$

donde

$$v = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}.$$

Entonces $x^*(t) = vt$, y la solución será la onda de choque

$$u(t,x) = \begin{cases} u_l, & \text{si } x < vt \\ u_r, & \text{si } x > vt. \end{cases}$$

2. Caso $u_l < u_r$.

Con $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$, las rectas

$$x = f'(u_l)\,t + x_1 \quad \text{y} \quad x = f'(u_r)\,t + x_2,$$

se cortan cuando

$$t = -\frac{x_1 - x_2}{f'(u_l) - f'(u_r)} < 0.$$

Esto significa que las rectas no se cortan en $t > 0$ y por tanto no existen choques. Ahora obsérvese que si $x_1 \to 0^-$ y $x_2 \to 0^+$, las rectas en mención tienden respectivamente a las rectas

$$x = f'(u_l)\,t \quad \text{y} \quad x = f'(u_r)\,t,$$

y así

$$u(t,x) = \begin{cases} u_l, & \text{si } x < f'(u_l)\,t \\ u_r, & \text{si } x > f'(u_r)\,t, \end{cases}$$

pero obsérvese que $u(t,x)$ queda sin definir en la región en forma de cuña

$$f'(u_l)\,t \leq x \leq f'(u_r)\,t,\ \ t > 0.$$

De manera análoga a como se procedió con la ecuación de Burgers, se obtienen por lo menos dos soluciones, la onda de choque

$$u(t,x) = \begin{cases} u_l, & \text{si } \ x < vt \\ u_r, & \text{si } x > vt \end{cases},$$

y la onda de rarefacción

$$u(t,x) = \begin{cases} u_l, & \text{si } \ x < \ f'(u_l)\,t \\ \dfrac{x}{t}, & \text{si } \ f'(u_l)\,t \leq x \leq f'(u_r)\,t \\ u_r, & \text{si } \ x > f'(u_r)\,t. \end{cases}$$

La determinación de la solución físicamente correcta dependerá de condiciones físicas de admisibilidad.

3.3.2. Problema de Riemann con flujo cóncavo

Cuando en el problema de Riemann (3.22) el flujo es cóncavo, es decir $f'' < 0$,, los mapas de las características planas tienen forma similar a los mostrados en las Figuras 3.14a y 3.14b, donde ya se ha incluido la onda de rarefacción.

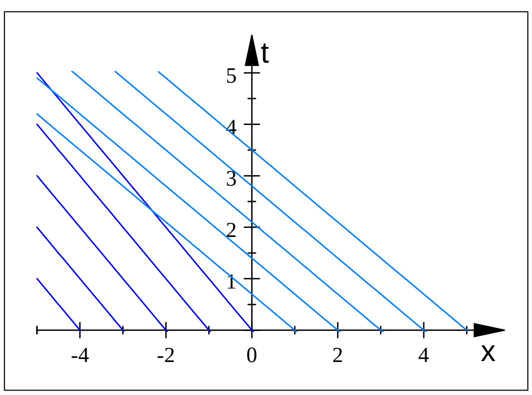

Figura 3.14a, $u_l < u_r$.

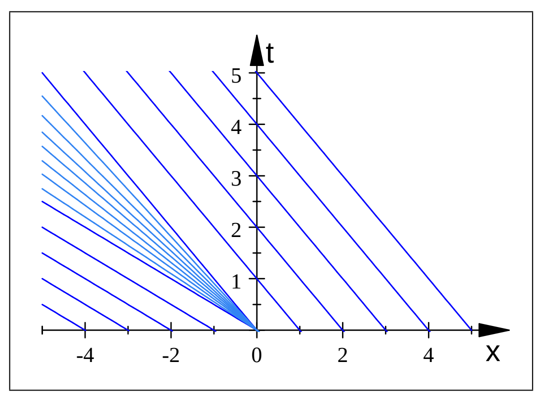

Figura 3.14b, $u_l > u_r$.

Con un análisis similar al realizado cuando el flujo es convexo, se puede concluir que si $u_l > u_r$ las soluciones globales débiles son las obtenidas para el caso $f'' > 0$ cuando $u_l < u_r$, y si $u_l < u_r$ la solución global débil es la obtenida cuando $f'' > 0$ y $u_l > u_r$.

Conclusiones

1. Los problemas de Cauchy para una EDP cuasilineal de primer no siempre tienen solución clásica global, aún siendo suave el dato inicial.

2. La no existencia de la solución global clásica de algunas EDP cuasilineales de primer orden, es consecuencia de la existencia de puntos (o aún regiones) donde las posibles soluciones obtenidas por el método de las características no están definidas o están multivaluadas.

3. En una ley de conservación escalar, cuando el flujo es convexo y el dato inicial es suave y decreciente en algún intervalo, no existe solución global clásica del problema Cauchy, pero se garantiza la existencia y unicidad de solución local clásica en una franja de la forma $[0, T) \times (-\infty, \infty)$.

4. La *soluciones débiles* de una ley de conservación admiten discontinuidades, pero deben ser discontinuidades de salto finito que satisfagan la condición de salto (3.15). Por la forma en que resulta expresada esta condición, se le llama velocidad de choque o velocidad de la discontinuidad.

5. La unicidad de la solución débil de un problema de Riemann para una ley de conservación escalar se pierde cuando el flujo es convexo y el estado inicial a izquierda es menor que el estado inicial a derecha.

Bibliografía

[1] ANGARITA L., Rubén D. *Una Introducción al Problema de Riemann para una Ley de Conservación Escalar*. Uptc Duitama, Trabajo de grado, 2010.

[2] BOYCE, William E. DIPRIMA , Richard C. *Ecuaciones Diferenciales y problemas con Valores en la Frontera.* Editorial Limusa S.A. México, 2001.

[3] BRESSAN, Alberto. *Hyperbolic Conservations Laws. An Illustred Tutorial.* Department of Mathematics, Penn State University, University Park, Pa. 168, Usa. December 2009.

[4] GUZMÁN, Miguel de. *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Editorial Alhambra 1980.

[5] HABERMAN, Richard, *Ecuaciones en Derivadas Parciales con series de Fourier y problemas de contorno.* Editorial Pearson Educación 2003.

[6] LOGAN, David. *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations.* Editorial Wiley-Interscience, 2008.

[7] MARSDEN, Jerrold E., TROMBA, J. Anthony, *Cálculo vectorial, cuarta edición.* Editorial Prentice Hall, 1998

[8] PERAL, Alonso Ireneo. *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales.* Editorial Wesley Iberoamericana, Wilmington, Delaware, E.U.A, 1995.

[9] RIVERA, Yaneth L. *Ecuaciones Diferenciales Parciales Cuasilineales de Primer Orden.* Uptc Tunja, Trabajo de grado 2009.

[10] SMOLLER, J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations.* Editorial Springer Verlag, 1983

[11] STEWART, James. *Cálculo Multivariable.* Cuarta Edición, Thomson Editores, S.A, 2002.