MODELACIÓN MATEMÁTICA EN ESCENARIOS EXPLORATORIO-INVESTIGATIVOS

YURI CAROLINA NIÑO CASTILLO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA
2019

MODELACIÓN MATEMÁTICA EN ESCENARIOS EXPLORATORIO-INVESTIGATIVOS

YURI CAROLINA NIÑO CASTILLO

Trabajo de grado, requisito parcial para optar el título de Magister en Educación matemática

Directora: Dr. LIDA ESPERANZA RISCANEVO ESPITIA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
TUNJA

2019

Contenido

Resumen 5

Introducción 7

Capítulo 1. ¿Cómo se originó el objeto de estudio? 11

Reconociendo realidades acerca de la práctica docente 11

La reflexión sobre la práctica docente 11

Reflexiones derivadas de la formación inicial como licenciada en matemáticas 14

Reflexiones a partir del ejercicio de la docencia 16

La importancia de favorecer la exploración e indagación 18

Objetivos de la investigación 25

Capítulo 2. Referentes teóricos 27

Antecedentes 27

Educación Matemática Crítica 35

Formar ciudadanos críticos a través de las matemáticas 35

Reconocimiento del papel de la matemática en la sociedad 38

Ambientes de aprendizaje derivados de actividades exploratorio-investigativas 40

El diálogo en el aprendizaje 44

La modelación matemática 47

El concepto de función en matemáticas 51

Capítulo 3. Aspectos metodológicos ... 58

Estudio de caso ... 59

Categorías de análisis ... 61

El camino recorrido en la investigación ... 64

Análisis del papel de la modelación matemática en el aprendizaje de función ... 64

La proyección del alcance de los escenarios exploratorio-investigativos ... 65

La utilidad de los escenarios exploratorio-investigativos ... 67

Consideraciones éticas ... 71

Perspectiva de análisis de los datos ... 72

Capítulo 4. Análisis de la información ... 74

La Modelación matemática en el aprendizaje del concepto de función ... 74

Caracterización de las actividades exploratorio-investigativas ... 89

Contribución en el aprendizaje del concepto de función ... 97

Los diálogos ... 97

La función y sus representaciones ... 111

Conclusiones ... 116

Referencias ... 120

Anexos ... 131

Resumen

Este trabajo de investigación surgió como resultado de la reflexión sobre mi práctica docente, ésta me permitió reconocer que las aplicaciones de la matemática, específicamente del tema de funciones, generan dificultades para los estudiantes, lo cual refleja la necesidad de vincular en el aula de clase diversas actividades que permitan identificar los contextos en los que se puede usar el concepto. De esta manera el proyecto buscó responder ¿Cómo contribuyen los escenarios exploratorio-investigativos al aprendizaje del concepto de función, a través de la modelación matemática?; con el objetivo de caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través del modelado matemático en dichos escenarios. La investigación comprendió tres etapas: reconocer el papel de la modelación matemática en el aprendizaje del concepto de función, caracterizar las actividades propuestas como situaciones de enseñanza y determinar la contribución de los escenarios exploratorio-investigativos en el aprendizaje del concepto de función; y teniendo en cuenta que el punto de interés se concentró en el proceso que vivieron los estudiantes al implementar las actividades, más que en los resultados, el proyecto tuvo un enfoque cualitativo, desarrollado a través de un estudio de caso. Para recolectar la información se usaron grabaciones en audio, observación participante y entrevistas. El análisis de los datos permitió señalar que este tipo de actividades propicia el diálogo entre los estudiantes, que como proceso de interacción social contribuye en el aprendizaje del concepto de función, de igual manera, éstas favorecen la exploración e indagación, dentro y fuera del aula de clase. Por otro lado, la modelación, de la mano con los escenarios exploratorio-investigativos, contribuye en el aprendizaje del concepto de función, ya que facilita el reconocimiento de cantidades dependientes e independientes, así como la relación de variación existente entre éstas.

Palabras clave: función, modelación matemática, aprendizaje, escenarios exploratorio-investigativos.

Abstract

This research work emerged as a result of reflection on my teaching practice, this allowed me to recognize that the applications of mathematics, specifically the theme of functions, create difficulties for students, which reflects the need to link in the classroom various activities that allow identifying the contexts in which the concept can be used. In this way, the project sought to answer how do the exploratory-research scenarios contribute to learning the concept of function, through mathematical modeling? with the objective of characterizing students learning through mathematical modeling in these scenarios. The research comprised three stages to recognize the role of mathematical modeling in the learning of the concept of function, characterize the activities proposed as teaching situations and determine the contribution of the scenarios exploratorio-investigativos in the learning of the concept of function; and bearing in mind that the point of interest was concentrated in the process that the students lived to implement activities, rather than on the results, the project had a qualitative approach, developed through a case study. To collect the information, audio recordings, participant observation and interviews were used. The analysis of the data allowed to point out that this type of activity promotes the dialogue between students, wich as a process of social interaction contributing in the learning of the concept of function, in the same way, these favor exploration and inquiry, inside and outside the classroom. On the other hand, the modeling, the hand with the exploratorio-investigativos stages, contributes in the learning of the concept of function, since it facilitates the recognition of dependent and independent quantities, as well as the relationship of variation existing among these.

Keywords: function, mathematical modeling, learning and exploratorio-investigativos scenarios.

Introducción

En el ejercicio de cualquier actividad, siempre es necesario un análisis tanto retrospectivo como introspectivo, que permita superar dificultades y mejorar en el desarrollo de dicha actividad. Hablando específicamente de la docencia, la reflexión sobre la práctica docente permite identificar situaciones que merecen ser investigadas, y al hacerlo se genera una contribución en el fortalecimiento de ésta; desde el punto de vista de Salinas y Alanís (2009), la investigación educativa debe ser una actividad que rija la práctica docente, que fortalezca la toma de decisiones y propicie la innovación.

De cierto modo, desde su rol como como estudiante la investigadora pudo percibir que en matemáticas normalmente se acostumbra a los estudiantes a que el profesor realice unos cuantos ejemplos relacionados con cada temática, para que enseguida ellos procedan a realizar ejercicios similares a los que hizo previamente el docente, lo que lleva simplemente a mecanizar un procedimiento; de acuerdo a Cotton (1998, citado en Skovmose, 2000), esta fragmentación de la clase se conoce como el paradigma del ejercicio.

Ahora, es de tener en cuenta que se genera cierta actitud indiferente por parte del estudiante cuando no logra desarrollar una actividad al primer intento, o lo que es peor, a veces quizá se aísla considerando que no puede trabajar con los compañeros que no tienen las mismas dificultades que él, lo que pone en evidencia una de las razones por las que se debe promover el trabajo en grupo, el cual también ser bastante productivo hablando en términos del aprendizaje.

Por otro lado, al venir enfatizando la educación matemática en la vía abstracta y poco intuitiva (Ruiz, 2003), por lo general la matemática termina considerándose un producto cerrado y acabado (González, 2004), y cuando se presenta de esta manera, puede quizá tener su encanto, pero no es lo indicado para que los estudiantes logren independencia intelectual más que adoctrinamiento (Courant & Jhon, 1974, citados en González, 1991).

Del mismo modo, si la clase de matemáticas se remite simplemente a algoritmos sin tener en cuenta sus aplicaciones, se está restringiendo la posibilidad de evidenciar que también ha hecho muchos aportes en los avances de la humanidad, por lo que la modelación matemática se considera una herramienta útil para poner de relieve los distintos campos en los que esta asignatura se puede aplicar, dando solución a diferentes fenómenos y situaciones de la vida cotidiana, esto ayuda a recordar las razones que impulsaron el desarrollo de la matemática misma (Ugalde, 2014).

Así pues, partiendo del hecho de que se puede sacar más provecho a las aplicaciones de las matemáticas y al trabajo en grupo, se delimitó la finalidad de esta investigación, la cual priorizó la caracterización del aprendizaje de los estudiantes a través del modelado matemático en escenarios exploratorio-investigativos del concepto de función. Cabe mencionar que en dicha delimitación tuvo que ver también la participación en el semillero de investigación Resonantes, del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, ya que a través del diálogo con los integrantes de éste, se concretó de una manera específica la temática que se abordaría en el proyecto y sus respectivos objetivos.

Las actividades implementadas se diseñaron fusionando los planteamientos de Skovmose (2000) y Ponte (2004), y además pensando en dar libertad a los estudiantes para indagar y explorar, considerando que la labor de enseñanza podría centrarse en la creación de condiciones que les permitan a ellos apropiarse del conocimiento (Cantoral, 2001), teniendo en cuenta que la misión de las matemáticas debe centrarse en favorecer en el estudiante la creación de hábitos de pensar, razonar e interpretar, lo que también contribuye a recordarle que tiene todas las capacidades para crear, descubrir y transformar (Cárdenas & Muñoz, 2014).

En la investigación que se desarrolló se usó el estudio de caso, y para recopilar la información se usaron grabaciones en audio, la observación y entrevistas no estructuradas, y además permanentemente se realizó el análisis entre la bibliografía y los hallazgos durante la implementación de las actividades. En primera medida se determinó el papel que la modelación matemática puede tener en el aprendizaje del concepto de función, luego se caracterizaron las actividades para reconocer la exploración e indagación que éstas promovieron en los estudiantes; en seguida, con base en lo planteado por Alro y Skovmose (2012), se procedió a reconocer los diferentes actos dialógicos presentes a lo largo de los escenarios exploratorio-investigativos, para culminar relacionando las interpretaciones de los estudiantes con respecto a la función y cómo esto se reflejó en las distintas representaciones que usaron de la misma.

En los siguientes capítulos de este documento, se especifican los detalles acerca de la manera en la que se originó el objeto de estudio, así como las consideraciones teóricas y metodológicas tenidas en cuenta en esta investigación, para finalmente dar cuenta de la contribución que lograron las actividades implementadas, en el aprendizaje del concepto de función.

Capítulo 1. ¿Cómo se originó el objeto de estudio?

Reconociendo realidades acerca de la práctica docente

La sociedad está evolucionando constantemente, así que para acoplarse al cambio en algunas actividades se deben efectuar ajustes; es decir, estas deben actualizarse de acuerdo a los requerimientos que la evolución trae consigo. La labor docente no se ve exenta de dichos cambios, ya que debe adaptarse a las necesidades y exigencias sociales, por lo que adquiere importancia el hecho de reflexionar sobre este quehacer para tomar conciencia de las problemáticas y de la necesidad de intervenir en ellas, de esta manera se puede dar solución a las más relevantes.

La reflexión sobre la práctica docente

La necesidad de cambiar implica redefinir o asumir una nueva perspectiva para entender la enseñanza y el aprendizaje como dos procesos que tienen puntos en común, pero que aun así pueden llegar a refractarse, tomando direcciones distintas. Parto de reconocer en acuerdo con Riscanevo (2017) y Wenger (2001) que el proceso de enseñanza no se fundamenta en la transmisión y transferencia de conocimiento ya existente, y que el proceso de aprendizaje no implica únicamente la internalización individual de dicho conocimiento, sino que enseñanza y aprendizaje son procesos sociales dinámicos que implican participación de profesores y estudiantes en actividades culturalmente contextualizadas.

El aprendizaje, independientemente del área de trabajo, no puede quedarse estático, siempre se debe enlazar lo que se sabe con lo que se hace; es decir, establecer una relación continua de la teoría con la práctica. Freire (2006) proporciona un ejemplo que ayuda a comprender esta relación, refiriéndose a la práctica de navegar; menciona que para llevarla a cabo se necesita saber sobre las partes del barco y sus respectivas funciones, como el funcionamiento del motor y su relación con las demás partes, así como de las velas y la influencia que tienen sobre éstas los vientos debido a su fuerza y dirección, ya que en el desarrollo de esta práctica "se confirman, se modifican, o se amplían estos saberes" (p. 24). Lo mismo ocurre con nuestra práctica docente, todo lo que conocemos acerca del área que orientamos y de la docencia como tal (conocimientos sobre pedagogía y didáctica por ejemplo), es susceptible de cambio y perfeccionamiento.

Considero que la teoría no siempre dicta lo que se debe hacer en la práctica, ni la práctica por sí sola delimita la teoría; la relación entre las dos debe ser personal, complementaria y continua, y además, respecto al desarrollo de nuestra práctica docente, debemos cuestionarnos siempre sobre esta relación, ya que como menciona Stenhouse (1998, citado en Latorre, 2003) "el profesorado no debe ser objeto de investigación de personas externas, sino investigador de sí mismo" (p. 10). Así mismo, no se puede dejar de lado el hecho de que los docentes tenemos acceso a los datos que son trascendentales para tratar de entender lo que sucede en las aulas y nuestro papel es clave en la mejora de la calidad de la educación (Latorre, 2003), además estamos en todo el derecho de construir conocimientos nuevos a partir de la reflexión de nuestra práctica (Silva, 2010).

Por lo tanto, el cuestionar constantemente nuestra práctica docente es el principal factor que nos impulsa a fortalecerla, sin perder de vista el hecho de que los interrogantes pueden surgir al desarrollarla en cualquier nivel educativo; pero siempre equilibrando la relación que se puede crear entre docencia e investigación, ya que como mencionan Vidal y Quintanilla (1999, citado en Sancho, 2001), esta puede ser positiva facilitando la transferencia, o por el contrario, negativa creando interferencia.

El hecho de reflexionar sobre la práctica docente también influye en el mejoramiento del proceso de enseñanza y además puede generar aprendizajes para el docente. Al respecto, Zeichner (1993) menciona que "…las expresiones *profesional reflexivo* y *enseñanza reflexiva* se han convertido en lemas característicos a favor de la reforma de la enseñanza y la formación del profesorado en todo el mundo" (p. 1), además este autor agrega que a través de la reflexión los docentes también podemos construir nuevas teorías, las cuales podrían "contribuir a la constitución de una base codificada de conocimientos sobre la enseñanza" (p. 2); en otras palabras, podemos generar nuevas interpretaciones, nuevos significados para lo que hacemos en el aula de clase; es decir, se puede (re)significar dicha práctica (Jiménez, 2005).

Por otro lado, considero que es importante tener en cuenta que la docencia no sólo implica enseñar, sino también educar a través de lo que se enseña. Es por esto que la reflexión sobre nuestra práctica docente es el primer paso para empezar a lograr mejoras, pero ésta debe realizarse de manera crítica y objetiva, ya que como menciona Freire (2006), "la reflexión crítica sobre la práctica se torna una exigencia de la relación teoría /práctica sin la cual la teoría puede convertirse en palabrería y la práctica en activismo" (p. 24).

El reconocimiento de la realidad docente me implicó reflexionar sobre algunos momentos en los que me identifiqué en la tarea de enseñar. A muy temprana edad, cuando estaba terminando mi bachillerato, me ofrecí varias veces a brindarle ayuda a algunas personas con las matemáticas, siempre con la idea de que al enseñar necesariamente la otra persona tenía que aprender; en ese momento creía que la enseñanza directamente implicaba un aprendizaje; es decir, reconocía el proceso de enseñanza y de aprendizaje bajo una relación de causa-efecto. Con el paso del tiempo, como estudiante de Licenciatura en Matemáticas y ya como docente en esta área, he cuestionado esta relación, pues solía pensar que el trabajo del docente solo consistía en transmitir a los estudiantes los contenidos de una asignatura, dejando de lado aspectos de índole social que hoy reconozco como influyentes en el aprendizaje de las matemáticas.

Los diferentes momentos de formación me han venido señalando que la cultura, las ideologías religiosas o políticas, las relaciones interpersonales, e incluso los prejuicios, pueden ser factores que influyen en el aprendizaje, por tal motivo, considero relevante destacar en lo seguido del texto, los episodios que contribuyeron a reconocer estos aspectos como determinantes en el desarrollo de mi labor pedagógica e investigativa.

Reflexiones derivadas de la formación inicial como licenciada en matemáticas

El primer episodio que me generó interrogantes respecto a la labor de enseñanza se dio cuando era estudiante de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC). En la asignatura Lógica y Teoría de Conjuntos I tuve que realizar una pequeña práctica, la cual desarrollé en la institución educativa de donde soy egresada; dicha práctica debía ser dirigida por un docente titular, quien después de supervisar la primera clase que orienté, me sugirió que debía dictar los conceptos para que los estudiantes los consignaran en sus cuadernos y que además era conveniente propiciar el trabajo en grupo; en ese momento le presté más atención a la primera observación, preguntándome si tal vez la directriz de mi desempeño profesional giraría en torno a clases monótonas donde lo más importante sería dictar conceptos para memorizarlos; pero no le di trascendencia al trabajo grupal.

No obstante, en la asignatura "práctica integral"[1] del décimo semestre, me encontré nuevamente con la situación de copiar teoría en los cuadernos, ya que la docente titular asignaba un texto guía del que se copiaba, sin embargo, pude presenciar los efectos que el trabajo en grupo puede tener en el aprendizaje de los estudiantes. Por motivos de cantidad, se asignaba un libro por parejas, y luego de apuntar la teoría se procedía a resolver los ejercicios; entonces pude darme cuenta de la utilidad que puede tener esta dinámica de trabajo, ya que a través del diálogo y el debate los estudiantes aclaraban dudas; es decir, esta interacción propiciaba la colaboración no solo entres los integrantes de un grupo, también entre los grupos de la clase.

De esta manera, percibí la importancia del trabajo en grupo y lo útil que resulta para el aprendizaje, puede motivar a los estudiantes ya que les permite dialogar, expresar sus ideas y de algún modo relacionarlas con sus experiencias, lo cual me llevó a pensar que tal vez los estudiantes no sólo estaban memorizando soluciones, o replicando procedimientos que previamente mostraba el libro, sino que también estaban evidenciando la utilidad que tienen las matemáticas en el manejo de distintas situaciones.

A lo largo de la práctica integral verifiqué que para los estudiantes resulta más provechosa la clase cuando se incentiva la exploración, no se restringe su creatividad, ni se encasillan las actividades a realizar dentro de una única respuesta, teniendo en cuenta que pueden relacionarlas con situaciones que quizá viven a diario; esto puede ser porque "las matemáticas no son un conocimiento neutral, son un conocimiento/poder, del cual los seres humanos hacen uso en diversas situaciones de la vida social" (Valero, 2007, p. 2). Además, el estudiante manifiesta su decisión de aprender cuando asume la responsabilidad de resolver un problema matemático, para

[1] La práctica integral se cursa en el décimo semestre de la Licenciatura en Matemáticas como única asignatura, el estudiante debe orientar clase en una institución educativa durante 15 semanas, la intensidad horaria semanal de 9 a 12 horas. Además, se debe desarrollar una experiencia de aula con los cursos en los que se lleva a cabo dicha práctica.

lo cual busca la solución más óptima, y esto implica que debe adaptar sus conocimientos de acuerdo a lo que le exige cada situación, no el profesor (Godino, Font, Wilhelmi & De Castro, 2009), pero en ocasiones se le da más importancia a otros aspectos de la clase que al mismo aprendizaje.

Reflexiones a partir del ejercicio de la docencia

La realidad de la práctica docente empieza a visualizarse de una manera más clara en los primeros años del ejercicio profesional, desde allí se identifican las diferentes problemáticas en la labor de enseñanza, y así mismo el proceso de aprendizaje, problemáticas que se diversifican al tener que trabajar con grupos de diferentes edades e instituciones, y también al dialogar con colegas y conocer sus vivencias como docentes.

Al llevar cierto tiempo ejerciendo la docencia, tuve la oportunidad de orientar la asignatura Cálculo Diferencial en el nivel superior, donde percibí la trascendencia que se le da a la calificación, considerando que ésta puede describir lo que se sabe o aprende, algo que también experimenté cuando era estudiante; esto puede atribuirse al hecho de que los efectos de la enseñanza en el aprendizaje del estudiante suelen evaluarse con relación a su comportamiento escolar y a la aprobación o reprobación de la asignatura; se confunde “la acreditación con el aprendizaje” (Cantoral, 2001, p. 5). No sólo los estudiantes le dan protagonismo a la calificación, el docente en ocasiones también le da demasiada importancia, quizá porque desde nuestro rol como practicantes, al planear una clase, pensamos en diseñar objetivos que especifiquen lo que suponemos que el alumno debería aprender y las formas de evaluación que nos permitirán medir dicho aprendizaje (Jiménez, 2005).

Ahora bien, desde mi punto de vista considero que la memorización de algoritmos no es de utilidad si para los estudiantes no son claros los ámbitos en los que éstos se pueden aplicar, y esto es lo que finalmente puede dar sentido al hecho de aprenderlos; inclusive, “la habilidad en la aplicación mecánica de una regla memorizada no necesariamente manifiesta el desarrollo de procesos de pensamiento vinculados a la matemática” (Salinas, Alanís y Pulido, 2011, p. 2).

De acuerdo a Jiménez y Areizaga (2001), normalmente los estudiantes conocen el manejo algorítmico mecánico del Cálculo, pero no han asimilado los conceptos; lo cual podría considerarse un factor a tener en cuenta respecto al desempeño y actitud a la hora de abordar ejercicios que involucren más que la sola mecanización para su respectiva solución. Un ejemplo, es el problema que quizá se les puede presentar a los estudiantes y docentes de enseñanza media para entender a profundidad el concepto de función, puede ser que realicen “una manipulación algebraica relativa al concepto”, y esto acarrea una comprensión limitada (Hitt, 2003, p. 2), así que se cuestiona esta dinámica de enseñanza por el aprendizaje sin comprensión, la apatía frente a dicho aprendizaje y los altos índices de reprobación que genera (Salinas & Alanís, 2009).

Por lo anterior, se sugeriría que el trabajo con las matemáticas sea más aplicado que algorítmico, pero resulta que el trabajo con las aplicaciones puede presentar ciertas dificultades, ya que los estudiantes no tienen mucho éxito en la traducción de problemas verbales al lenguaje matemático (Cantoral, 1993; López y Sosa, 2008; Trigueros, 2009). Algunas veces se entra en el dilema de elegir el momento más adecuado para abordar el tema y de este modo facilitar su aprendizaje; al respecto Cantoral (1993) habla de lo que él denomina *aritmética curricular*, la cual “[…] opera sobre temas o conceptos matemáticos mediante las operaciones +, - , x, /. (+): Agregar algunos temas, (-): quitar algunos otros, (/): repartir un tema en distintos cursos o sectores de un curso, y (x): repetir un tema o una idea en varios sitios [...]” (p. 3), agrega que al usarla, los contenidos como tal no se modifican, sólo su ubicación, y esto en algunos casos permite obtener resultados distintos, pero la sensación de que la gran mayoría de los estudiantes no aprenden cálculo, sigue existiendo.

De este modo, no quisiera encasillar mi práctica docente, o como menciona Jiménez (2005), reproducir maneras de actuar de los profesores, vividas cuando yo era estudiante. Por el contrario, quisiera fortalecerla buscando herramientas que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes, así que teniendo en cuenta lo útil que puede resultar el diálogo en grupos de trabajo y vinculándolo con la importancia de las aplicaciones de la matemática, planteé la siguiente pregunta de investigación ¿Cómo contribuyen los escenarios exploratorio-investigativos al aprendizaje del concepto de función, a través de la modelación matemática?

La importancia de favorecer la exploración e indagación

En cualquier ámbito, reconocer la existencia de una problemática es el primer paso para poder buscar su respectiva solución o en su defecto, mitigación. En el caso específico de la docencia, es muy difícil eliminar los obstáculos que se presentan, por el contrario lo que se busca es "modificar la estructura y las funciones de los dispositivos didácticos existentes" (Gascón, 1997, p. 21). De este modo, siempre existirán argumentos que justifiquen la búsqueda de herramientas que faciliten la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; además, las teorías propias de la Didáctica de la Matemática apoyan la formulación de proyectos de investigación que se enfoquen en construir o mejorar modelos para enseñar y aprender esta materia (Morales & Peña, 2013).

Respecto a la relevancia que tiene el aprendizaje de las matemáticas en la formación de los ciudadanos, buscando expresar la importancia de la educación matemática, se resalta "el propósito de formar ciudadanos competentes en el desarrollo y comprensión de los avances científicos y tecnológicos, para lo cual su formación matemática es indispensable" (Ministerio de Educación Nacional de Colombia -MEN, 1995, citado en Perry, Valero, Castro, Gómez & Agudelo, 1998, p.4). Sin embargo, es posible que gran parte de los alumnos no le den la suficiente importancia al hecho de aprender la matemática, por lo que consideran que para dominar satisfactoriamente el área en mención, lo mejor es no tratar de comprender sino funcionar mecánicamente (Artigue, 2001, citado en Salinas & Alanís, 2009), por ejemplo en el caso del álgebra, ésta se enseña como un conjunto de reglas que relacionan letras y números sin fundamento, pero que el alumno debe "memorizar y aprender a aplicar a ciegas" (Protti, 2003, p. 253).

La situación mencionada anteriormente, quizá se está dando porque a través de los años, los métodos de enseñanza de la matemática se han inspirado en las ideas de las matemáticas formales, así las estrategias didácticas se basan en la memoria y el manejo de algoritmos, lo cual no le permite al estudiante percibir los vínculos que tiene cada procedimiento con las aplicaciones que puede encontrar a su alrededor; de esta manera, se le está privando de experimentar sus aprendizajes en escenarios diferentes a los que se le proporcionan en clase, por lo que de cierto modo no concibe las matemáticas como un área importante (Cantoral, 2001; Aravena, Caamaño, Giménez, 2008); además se desvanece su interés y se propicia un aprendizaje superficial que se basa en la memorización y la reproducción (Salinas & Alanís, 2009).

En cuanto a la que probablemente sea la causa de enseñar las matemáticas de esta manera, podría considerarse el hecho de que

> (…) quizá la visión más extendida entre los profesores sea aquella que consiste en asumir que los conceptos matemáticos son entidades ya elaboradas y que sólo deben ser comunicados a sus alumnos en una enseñanza pulcra y libre de dificultades, olvidando que esos conceptos deben ser construidos por los estudiantes como herramientas que deben aplicarse en varias situaciones (Cantoral, 2001, p.9).

Teniendo en cuenta entonces, que los métodos de enseñanza que se han usado, datan de hace mucho tiempo, y que la sociedad está en constante cambio, se ve la necesidad de hacer algunos ajustes. Cajiao (2004, citado en Jiménez, 2005), afirma que, para lograr una verdadera ruptura del paradigma escolar vigente, se requiere de la "no-escuela", que se refiere a una educación que deje de reproducir tantos vicios y malas costumbres, que deje de hacer "más de lo mismo" (p. 11). En el caso específico de las matemáticas se considera necesaria la superación de la enseñanza que se basa únicamente en algoritmos fuera de contexto (Silva, 2010), teniendo en cuenta que la problemática evidente en la enseñanza de esta materia consiste en lo difícil que es lograr que los estudiantes revelen una comprensión satisfactoria de los métodos y conceptos involucrados en la misma (Artigue, 1995), por lo que se debería procurar el uso de herramientas que favorezcan su aprendizaje y la manifestación del mismo.

Para Cantoral, Cordero, Farfán e Imaz (1990, citados en Salinas & Alanís, 2009), la base menos apropiada para comunicar las ideas del Cálculo es el discurso matemático teórico; argumentan que lo primordial a tener en cuenta, es que la enseñanza de esta área es para futuros usuarios de la misma; así que se ratifica la necesidad de repensar la enseñanza del cálculo, para poder superar la limitada comprensión de sus nociones y procedimientos (Salinas & Alanís, 2009). No obstante, aunque estos autores se refieren específicamente al Cálculo, se puede decir que no sólo aplica para esta área sino que tal vez la situación se da en las matemáticas a nivel general.

Ahora bien, la mayoría de las veces la efectividad de la enseñanza se mide a través de la cantidad de estudiantes que aprueban; es decir, se asume como símbolo de bienestar académico el hecho de que la deserción o reprobación sea mínima, dejando de lado la realidad de que se puede permanecer en la escuela y aprobar las asignaturas con notas relativamente altas, sin haberlas aprendido realmente (Cantoral, 2001); lo que da muestra de que se le está asignando un papel muy importante a la calificación. Cabe la posibilidad de que sin hacerlo de manera intencional, a través de esta dinámica se esté generando un ambiente de exclusión en el aula de clase, ya que como menciona Valero (1996, citado en Sánchez & Torres, 2009), "la clase de matemáticas ha sido históricamente la que mayor exclusión ha generado, pues en esta área del saber son pocos los que consiguen un aprendizaje exitoso" (p. 4); por lo que no tiene sentido generarle beneficios o perjuicios al estudiante de acuerdo a lo que indique una calificación (Sánchez & Torres, 2009).

Al vincular en el aula de clase actividades que estén fuera del ámbito tradicional, se tienen en cuenta entonces las aplicaciones de las matemáticas en diferentes áreas. Se considera que los estudiantes aprenden de una manera más significativa cuando se realiza una introducción contextualizada de los conceptos (Trigueros, 2009), pero esto es difícil de lograr cuando "los ejercicios que se resuelven son determinados por una autoridad externa a la clase en sí" (Skovmose, 2000), lo que "significa que la justificación de la relevancia del ejercicio no es parte de la lección de matemáticas como tal" (p.1).

De este modo, el fracaso en el área de matemáticas se atribuye al hecho de que los ejercicios que se manejan están dentro de un contexto alejado de la realidad (Valero, 1996, citado en Sánchez & Torres, 2009), o a que hubo un posicionamiento inicial que opacó las capacidades de cada estudiante en el área, el cual es provocado en muchos de los casos, "por la inadecuada introducción por parte de sus maestros" (Guzmán, 1992, p.14). Puede ser que se está en un círculo vicioso donde algunas de las costumbres y puntos de vista de los docentes de matemáticas fueron adquiridos durante su proceso de formación; por un lado, cuando eran estudiantes tal vez hacían matemáticas en sus variedades de reproducción y reconstrucción (Maza, 1994); por el otro, quizá algunos teoremas les fueron presentados "como verdades que salen de la oscuridad y se dirigen hacia la nada" (Guzmán, 1992, p. 16).

A partir de lo anterior, se podría decir que aún sigue vigente una visión de la matemática como una materia formal y abstracta (Villa, Bustamante, Berrío, Osorio y Ocampo, 2008) por lo que llega a los estudiantes como “un producto dogmático, cerrado y acabado” (González, 2004, p.1). Tal vez la educación matemática se ha enfatizado en la vía abstracta y poco intuitiva (Ruiz, 2003), pero no se puede despertar en el estudiante una capacidad crítica si las temáticas se presentan de una manera cerrada, acabada y estática (González, 1991).

Respecto a las funciones por ejemplo, para enseñarlas generalmente su definición se aborda como una correspondencia entre dos conjuntos, pero no se hace mucho énfasis en la regla que determina dicha relación de correspondencia; es decir, en su definición como relación entre variables, lo que no propicia las condiciones para considerar la funcionalidad del concepto que permite entender, modelar y explicar fenómenos que involucran variación, lo cual genera dificultades en su aprendizaje (López & Sosa, 2008). Además, cuando el docente hace uso de los diferentes sistemas de representación de la función como instrumentos algorítmicos, convierte su aprendizaje en un proceso meramente mecánico, el cual no ofrece garantías de una comprensión real del sentido que ésta tiene (Riscanevo, Cristancho & Fonseca, 2011).

Con el fin de favorecer el aprendizaje de las matemáticas, podrían implementarse actividades que le permitan al estudiante indagar y explorar; en otras palabras, podría centrarse la labor de enseñanza en la creación de condiciones que le permitan al alumno apropiarse del conocimiento (Cantoral, 2001), ya que esta materia en cuestión debería enfocarse en “crear en el estudiante hábitos de pensar, razonar e interpretar, además de hacerlo sentir importante como ente que puede crear, descubrir y transformar” (Cárdenas & Muñoz, 2014, p.17).

Es importante considerar que a raíz del constante cambio de la sociedad, toman protagonismo el conocimiento y la creatividad (Salett & Hein, 2004), sin embargo, el docente no puede prever la totalidad de los contenidos que requerirán los estudiantes dentro de unos años, pero estimulando en ellos la curiosidad y el interés por aprender, tendrán herramientas para adaptarse a los cambios (Zapico, 2006), además, lo más valioso que se le puede proporcionar a los estudiantes son procesos de pensamiento que no se vuelvan obsoletos con el tiempo, a diferencia de los contenidos mismos (Guzmán, 1992).

Es de tener en cuenta que la modelación puede ser de bastante utilidad para dejar de lado el carácter abstracto y aburrido de la matemática, que probablemente se basa en demostraciones o formalizaciones estrictamente teóricas; por el contrario permite explorar y asociar experiencias vividas; es decir, contribuye a relacionar esta asignatura con el contexto del estudiante; en otras palabras, la modelación puede ser una herramienta potencial para motivar la exploración e indagación por parte de los estudiantes, ya que generalmente tiene una naturaleza problemática que los desafía, además que de acuerdo a la estructura del enunciado que se presente, una actividad de este tipo puede generar problemas o investigaciones (Ponte, 2004).

La justificación para darle más trascendencia al trabajo con aplicaciones que con demostraciones o replicación de algoritmos, se puede encontrar en la esencia de la matemática misma. Por ejemplo, sus orígenes se remontan a la búsqueda de soluciones de problemas reales, una muestra de esto lo da la formalización del concepto de función, proceso que se dio a través de sus aplicaciones, en las cuales éste no se enunciaba de manera explícita, pero se fue puliendo con el trascurrir de los años a través de las diferentes realidades que se vivían (véase, por ejemplo, Sastre, Rey y Boubee, 2008). Si se adopta esta perspectiva del área en mención, se podría decir entonces que “una demostración matemática no puede dar cuenta de ningún fenómeno real, sino tan sólo de enunciados matemáticos abstractos” (Skovmose, 1999, p. 47), y que por el contrario, la modelación matemática favorece identificar conexiones entre las matemáticas escolares y las de la cotidianidad, promueve la comunicación, disminuye la ansiedad hacia esta materia (Aravena y Caamaño, 2009, citados en Rodríguez, Quiroz, Illanez, 2013) y se considera una herramienta para el aprendizaje de la misma (Villa et al., 2008; Villa, 2010).

El trabajo con las aplicaciones de la matemática no solo es importante, sino que también es necesario en el aula de clase. De acuerdo con los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998, citado en Bustos, Bustos & Novoa, 2013), para darle sentido a las actividades desarrolladas en el aula es necesario que los contenidos del área involucren la realidad de los estudiantes. En este sentido, la modelación matemática como actividad que puede vincular parcial o totalmente la realidad, se puede usar para facilitar y promover el proceso de aprendizaje, siendo clave entonces en la introducción y desarrollo de nuevos conceptos (Trigueros, 2009), por ejemplo el de función.

Así mismo, en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) se menciona que se deben relacionar los contenidos de esta materia con las experiencias de la vida cotidiana, presentándose y enseñándose en un contexto de situaciones problemáticas donde se promueva el intercambio de puntos de vista; sin embargo, se está dejando de lado el análisis del por qué un estudiante decide involucrarse en las discusiones que se dan en el aula, la manera en la que allí se da la comunicación (Triana, Cortés, Mancera y Camelo, 2012) y cómo esto influye en su aprendizaje, por lo que sería relevante propiciar un ambiente de igualdad al interior de la clase, es decir, promover en los estudiantes la confianza para dialogar y expresar, defender y discutir sus ideas (Camelo, Perilla y Mancera, 2016).

Por otro lado, se cree que a los estudiantes no se les pueden asignar actividades que vinculen temáticas que aún no se han abordado en la clase (D'Amore, 2006); es decir, se ha generalizado la idea de que ellos no pueden dar solución a determinada tarea si no se ha enseñado el método específico que les permitirá hacerlo, justificando así el poco protagonismo que se le da a los problemas de modelación como herramienta para la introducción de conceptos matemáticos (Ponte, 2004; Villa et al., 2009). Pero resulta que ellos fuera de la escuela también pueden aprender y además pueden usar dichos aprendizajes en el aula de clase, resulta más útil que descubran el método que les permita resolver determinada situación a que esperen para aprender el método que les enseñe el profesor y puedan reconocer el momento más adecuado para aplicarlo (Ponte, 2004). Por ejemplo para Pólya (1975, citado en Ponte, 2004) el docente debe proponer problemas que reten las capacidades de sus alumnos y que les permitan "experimentar el gusto por el descubrimiento" (p. 3).

Pues bien, el paso del bachillerato a la universidad también trae consigo cambios inevitables así como algunas dificultades, y esto puede ser por los puntos de vista que se tienen en cada nivel académico. Trigueros (2009), considera que en el bachillerato se ha dado un poco más de importancia a la búsqueda de soluciones a los problemas en el aprendizaje de las matemáticas, mientras que en la universidad "esta preocupación ha tardado más en llegar", ya que en este nivel educativo es donde la enseñanza tiende a ser más tradicional (p. 76), por lo que toma importancia el hecho de implementar las aplicaciones más a menudo en el aula de clase, teniendo en cuenta que podrían favorecer el aprendizaje de los estudiantes, dejando de lado dicha dinámica; además, el docente de matemáticas, independientemente del área de formación profesional en la que se desenvuelva, debe buscar estrategias que brinden sentido a los conocimientos matemáticos que se describen en cada programa académico (Rosa, Mendible, Rodríguez, Arrieta & Villa, 2015).

Objetivos de la investigación

Para dar respuesta a la pregunta de investigación formulada anteriormente, se plantean los siguientes objetivos.

Objetivo general

- ✓ Caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través del modelado matemático en escenarios exploratorio-investigativos del concepto de función

Objetivos específicos

- ✓ Reconocer el papel de la modelación matemática en el aprendizaje del concepto de función
- ✓ Caracterizar actividades exploratorio-investigativas del concepto de función como situaciones de enseñanza
- ✓ Determinar la contribución de los escenarios exploratorio-investigativos como metodología de enseñanza en el aprendizaje del concepto de función.

Capítulo 2. Referentes teóricos

Antecedentes

En este apartado se exponen algunas investigaciones que contribuyen en aspectos teóricos o metodológicos a la fundamentación y desarrollo del presente proyecto. Desde la perspectiva teórica se analizan desarrollos investigativos que consideren la modelación matemática, los escenarios exploratorio-investigativos y aprendizaje del concepto de función, como base conceptual; y desde la perspectiva metodológica, el estudio de caso. Bajo estos criterios se realizó una búsqueda a nivel internacional y nacional.

El primer referente a mencionar es Trigueros (2009), quien realizó una investigación sobre el uso que se le puede dar a la modelación en la enseñanza de las matemáticas. A través de una revisión bibliográfica reconoció diferentes posturas frente al uso de la modelación matemática como método de enseñanza, para luego mostrar el trabajo que desarrolló un grupo de investigadores del Instituto Tecnológico Autónomo de México- ITAM, que, experimentando la posibilidad de enseñar matemáticas en el nivel universitario a través de la modelación matemática, la vinculó además con una teoría de la Didáctica de la Matemática: Acción, Proceso, Objeto, Esquema- APOE. Como resultado de la investigación los autores exponen tres de los modelos implementados con sus respectivos resultados. A nivel general, los estudiantes primeramente analizaban el comportamiento de las variables para encontrar una relación; pero los autores reconocen la cautela que se debe tener al plantear las situaciones que se van a abordar, ya que pueden presentarle inconvenientes a los estudiantes respecto al conocimiento que tienen de otras áreas con las que quizá se relacione la situación; si ésta se plantea adecuadamente, los estudiantes estarán más comprometidos en la solución y aprendizaje de conceptos.

Lo anterior fue de relevancia al momento de diseñar las actividades que se iban a implementar en la presente investigación, ya que también vincula la modelación con una de las teorías de la Didáctica de la Matemática, que es la Educación Matemática Crítica, además que también fue aplicada en el nivel universitario y puede poner en evidencia la utilidad de la modelación matemática en el aula de clase.

Así mismo, Rosa, Mendible, Rodríguez, Arrieta y Villa (2015) realizaron una revisión de la literatura sobre la modelación en la formación matemática de los estudiantes universitarios. El estudio se centró en describir la importancia de la modelación y la tecnología en la construcción de significados de objetos matemáticos, los aspectos a tener en cuenta para implementar la modelación matemática en el aula de clase, su dimensión crítica y reflexiva, y el papel de la modelación en la profesionalización de los docentes de matemáticas. Para el desarrollo de esta investigación se revisaron más detalladamente el segundo y tercer aspecto, que exponen las condiciones propicias para llevarla a cabo y ponen en evidencia el carácter crítico de la modelación matemática, ya que de acuerdo a los autores mencionados, el alumno podrá intervenir en su realidad cuando estudia cada situación a través de debates críticos y reflexivos para construir el modelo matemático. Además, se toma en cuenta la consideración de los autores respecto al hecho de que se requieren más ejemplos que evidencien las posibilidades y maneras de implementar la modelación en los niveles universitarios, para lo cual esta investigación puede ser de utilidad.

Del mismo modo, la literatura ofrece tres artículos que hacen parte de una misma investigación relacionada con la modelación matemática. Por una parte, Villa, Bustamante, Berrío, Osorio, y Ocampo (2008), desarrollan una revisión teórica mencionando desde cuándo se incluyó en las aulas de matemáticas en Colombia la modelación matemática, enfatizando en el hecho de que a pesar de su inclusión aún predomina la visión de una matemática formal y abstracta; concluyen que la modelación matemática tiene utilidad en el aprendizaje de esta materia, ya que posibilita una mejor comprensión de sus conceptos. En el artículo se mencionan las etapas que se contemplarán en la investigación sin dar mayor detalle al respecto. Primero se identificaron las concepciones que tienen los profesores sobre la importancia de la modelación matemática, y con base en estos resultados se procedió al diseño de actividades que motiven la reflexión e implementación en el aula de clase.

En Villa, Bustamante, Berrío, Osorio y Ocampo (2009) se muestran los resultados de analizar las concepciones de dos docentes, con más de 10 años de experiencia en los niveles de Educación Básica Secundaria, a través del estudio de caso. Encontraron que hay diferencias entre lo que expresan acerca de la importancia de la matemática, así como la manera de enseñarla, y lo que realmente ejecutan en el aula de clase. Para ellos la matemática ocupa un lugar muy importante en el currículo, porque aporta en la formación del pensamiento lógico y crítico, sin embargo consideran que el aporte se logra a través de la transmisión y ejercitación procedimental. Puede ser entonces, de acuerdo a estos autores, que los programas de formación de profesores se concentren en presentar elementos teóricos para su apropiación, pero no necesariamente esto trasciende a la transformación de la práctica docente. Así mismo, en cuanto a la modelación, el docente debe observar y evaluar su propia práctica, al igual que los comportamientos y forma de aprender que tienen los estudiantes; también debe identificar las situaciones del contexto que son de utilidad para movilizar el conocimiento de los mismos, esto lo denominan reflexión y sentido de realidad, respectivamente.

En relación con esta misma temática, en Villa (2007) se exponen elementos para convertir la modelación en una herramienta didáctica que favorezca la construcción de conceptos matemáticos. El autor menciona que es de tener en cuenta que al elegir las situaciones que se modelarán, el docente debe analizar los diferentes momentos que se darán en el aula de clase al realizar la actividad de modelación, como son: observación y experimentación, delimitación del problema, selección de estrategias, evaluación y validación, y conexión con otros modelos y situaciones; así que se proporciona como ejemplo una situación relacionada con la economía, analizando cada uno de estos momentos y sugiriendo al docente cómo los podría manejar. El autor ratifica la importancia de la modelación para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, además de potenciar su capacidad de asumir posiciones críticas frente a diferentes situaciones. Así, las tres fuentes mencionadas anteriormente, se toman como referentes respecto a la labor del docente cuando se realiza una actividad de modelación en el aula de clase.

En cuanto al carácter crítico de la modelación matemática, Camelo, Perilla y Mancera (2016) desarrollaron una investigación en un colegio público de Bogotá, Colombia, con estudiantes de grado undécimo. En este caso se toma la modelación como recurso para generar ambientes de clase donde se analicen fenómenos sociales y los conocimientos matemáticos que surgen a raíz de los debates al realizar dicho análisis; no solo se buscaba desarrollar habilidades para realizar cálculos y procedimientos matemáticos, sino motivar a los estudiantes a participar críticamente en la sociedad. Para esto se construyó un ambiente de modelación en la perspectiva crítica, tomando entre otros referentes, a Skovmose (1999); y la información se recogió a través de audios y videos. Aunque se enfoca más en partir de situaciones que sean socialmente relevantes para los estudiantes, se concentra también en estimular el debate entre ellos, lo cual hace parte de lo propuesto por la Educación Matemática Crítica y es fundamental para lograr el objetivo de la presente investigación. Así mismo, los investigadores concluyen que al abordar los modelos matemáticos desde una perspectiva socio crítica, se promueve una participación crítica de los estudiantes, eligiendo democráticamente la situación a modelar y discutiendo asuntos sociales en la construcción del modelo.

Por otro lado, Aravena, Caamaño, y Giménez (2008), trabajaron los modelos matemáticos a través de proyectos. La propuesta tenía un enfoque cualitativo, y se diseñó como una herramienta didáctica para el tema de funciones, apoyada en la modelización. Se involucraron a 98 estudiantes de 3 cursos de educación media en un colegio en Chile, formaron grupos de 4 o 5 personas, de los que se eligieron 4 para el estudio de caso. La variable de estudio se centró en las capacidades desarrolladas en el trabajo de proyectos. El trabajo se desarrolló en tres etapas: primero el docente presentaba el trabajo, se conformaron los grupos y eligieron los temas; luego cada grupo debía elaborar un informe escrito y finalmente realizar una exposición oral. A través de un análisis interpretativo, se identificaron las capacidades desarrolladas en la exposición oral, las cuáles comprendían las cognitivas y meta cognitivas. Se pudo reconocer que la modelación matemática es útil para que los estudiantes participen más activamente en el ámbito social y cultural, además se favorece la expresión de ideas y se adquieren elementos para opinar de forma más crítica. A partir de estas conclusiones, esta investigación se considera la más representativa porque tiene similitudes en cuanto a sus principales componentes con la que se pretende desarrollar, como lo es el trabajo por proyectos, la modelación matemática, el tema de funciones y el estudio de caso.

Sin embargo, cabe mencionar que no se intenta replicar la investigación de Aravena y cols. (2008), ya que también hay diferencias entre ésta y la que se va a realizar; por ejemplo, de acuerdo a los autores mencionados, el punto de partida para desarrollar los proyectos es una situación real, además el trabajo por proyectos está ubicado dentro de “un escenario que ofrece posibilidades para realizar investigaciones y representa un ambiente de aprendizaje” distinto al paradigma del ejercicio (Skovmose, 2000, p 4), mientras que la investigación que se desarrollará vincula lo planteado por Skovmose (2000) con lo que formula Ponte (2004), hablando entonces de escenarios exploratorio-investigativos. Por otro lado, el punto de partida para las actividades en este caso no siempre serán situaciones reales y además, el objetivo se centra en el aprendizaje del concepto de función.

En el ámbito de los escenarios de investigación, Triana, Cortés, Mancera y Camelo (2012) planearon, aplicaron y analizaron una actividad de este tipo en grado sexto, asumiendo principalmente que los factores sociales y el diálogo se deben tener en cuenta para el aprendizaje, pero se concentraron en las acciones, intenciones y disposiciones (Skovmose, 1999) de los estudiantes. La propuesta de corte cualitativo se desarrolló en un colegio de Bosa, Bogotá, Colombia, con el propósito de que ellos diseñaran un proyecto usando la modelación matemática para investigar y analizar datos, elaborando representaciones de sus resultados. Los estudiantes debían desarrollar un proyecto que permitiera decidir sobre la logística de una actividad denominada compartir nutritivo, denominación que se asignó porque se querían ofrecer productos que aportaran 300 kcal, pero tenían cierto presupuesto para lograr el objetivo, por lo que se pretendía que recurrieran a la modelación para analizar datos como el precio y la información nutricional, lo cual relacionaba conocimientos matemáticos y aportes nutricionales. La actividad completa comprendió cuatro etapas: contextualización del proyecto, organización de trabajo por equipos, socialización y elección del menú, y finalmente ejecutar el compartir. Identificaron como disposiciones de los estudiantes: su baja experiencia en proyectos de investigación y la tendencia a elegir subjetivamente. Además en cada grupo se reconoció un líder que es quien motiva las acciones de los demás integrantes, y los grupos mejor consolidados mostraron disposición de orientar su aprendizaje hacia el uso de medios electrónicos.

Así mismo, Bustos, Bustos y Novoa (2013) desarrollaron una propuesta de ambientes de aprendizaje para la enseñanza de la modelación matemática desde la perspectiva crítica, ésta se desarrolló con estudiantes de noveno grado de un colegio distrital de la ciudad de Bogotá, para identificar los procesos de modelación matemática que ellos usaban, y comprendió tres etapas. En la primera se hizo un reconocimiento de problemas sociales como drogadicción, embarazos, pandillas, inseguridad, por lo que en la segunda etapa se generó una discusión sobre las distintas consecuencias que podría acarrear el dejar de asistir a la clase culpando a cualquiera de esos problemas, así que se debían reconocer variables y hacer tablas de valores que permitieran tener una idea de lo que pasaría más adelante. Para la tercera etapa, se implementó un ambiente de aprendizaje en el marco del escenario de investigación enfocado en la realidad, pero a pesar de que los estudiantes conocían el comportamiento de sus datos, no realizaron un modelo; por lo que se concluyó que el paso por los 5 primeros ambientes de aprendizaje planteados por Skovmose (2000), proporcionó herramientas a los estudiantes para trabajar en el ambiente 6; sin embargo, los estudiantes no llegaron a construir un modelo matemático que diera respuesta a la pregunta planteada, ésta se generó de una forma más subjetiva.

Estas dos investigaciones se consideran relevantes, ya que además de vincular la modelación con aspectos de la Educación Matemática Crítica, también dan importancia a la subjetividad y al diálogo como facilitador del aprendizaje de las matemáticas. A pesar de que no fueron aplicadas específicamente en la universidad, los resultados o las afirmaciones de la utilidad de cada una, pueden llevarse a este nivel educativo.

Ahora bien, respecto al aprendizaje de las funciones, Hitt (2003) muestra los resultados de una investigación centrada en reconocer las dificultades que se pueden encontrar al aprender algunos conceptos del cálculo, como el de función. En una institución educativa en México se solicitó a 9 profesores de enseñanza media que diseñaran una clase del tema que desearan y uno de ellos eligió la función lineal. De acuerdo a lo que planteó para la clase se pudo concluir que al desarrollarla de ese modo se generarían conflictos en los estudiantes, ya que se usaban diferentes términos para la misma expresión, el enunciado para la actividad propuesta conducía a una expresión distinta a la que esperaba el docente, entre otras cosas; así que con este método, a futuro los estudiantes no reconocerán cuando algo anda mal, es decir, cuando hay una contradicción, por lo que tendrán un bajo desempeño en resolución de problemas, y si el docente no es consciente de esto será muy difícil que pueda ayudarlos, lo cual convierte esos conflictos en obstáculos de aprendizaje de las funciones.

Por esta misma línea, López y Sosa (2008) desarrollaron un proyecto de investigación que buscaba determinar los factores influyentes en las dificultades relacionadas con el aprendizaje de las funciones. Para lograrlo contemplaron tres etapas: revisión documental, exploración y diseño de instrumentos, y análisis e interpretación de resultados. Con base en las nociones o ideas obtenidas en la primera etapa, procedieron a realizar un cuestionario que se aplicó a 20 estudiantes de cuarto semestre de un Colegio de Bachilleres en el estado de Yucatán, México. Se reconocieron algunas dificultades que tienen los estudiantes al estudiar funciones, como distinguir entre una función y una ecuación, identificar el carácter unívoco de las funciones y enunciar fenómenos que tengan en cuenta la relación entre variables.

Las dos investigaciones mencionadas anteriormente ponen en evidencia algunas de las dificultades que se presentan en el aprendizaje de las funciones, y además, los resultados que presentan corroboran la descripción de una problemática que en este caso, no es del todo ajena a la investigadora, por lo que también dejan ver lo pertinente que es este proyecto, orientándolo en el reconocimiento de dificultades similares en el contexto en el que se desarrollará. Cabe mencionar, que en relación con la temática que dichas investigaciones abordan, Riscanevo, Cristancho y Fonseca (2011), muestran los resultados de las dos primeras fases de un proyecto de investigación, que aunque se centra principalmente en el contrato didáctico y sus efectos en el aprendizaje del concepto de función, realizan aportes importantes en cuanto al análisis del desarrollo histórico del mismo, lo cual resulta útil a la hora de relacionar su aprendizaje con la modelación matemática; de igual manera, identifican una serie de obstáculos epistemológicos y didácticos, como la complejidad del concepto en sí mismo y la metodología que elige el docente para enseñarlo; que a su vez son influyentes en la enseñanza y aprendizaje del concepto de función, y deberían tenerse en cuenta para abordar este objeto matemático.

Educación Matemática Crítica

Formar ciudadanos críticos a través de las matemáticas

Las matemáticas, como un área de formación interdisciplinar se vislumbran como posibilitadoras del fortalecimiento de las capacidades de cada individuo para tomar decisiones de manera crítica y objetiva en su diario vivir. Sin embargo, para el danés Ole Skovmose (1999), la enseñanza de las matemáticas en contextos escolares no contribuye en algunos casos en el logro de este objetivo. Su punto de vista le ha permitido fundamentar en los últimos años, una perspectiva teórica que muestra lo útil que puede llegar a ser la educación matemática formando ciudadanos capaces de tomar decisiones de una manera crítica.

Es de tener en cuenta que para Skovmose (1999) “algo andaba mal en la manera como la educación matemática silenciaba y suprimía a las personas” (p.X), ya que la actitud autoritaria del profesor lograba controlar y aplacar a los estudiantes, así que se propuso generar cambios a través de su labor como docente, evitando que dicha autoridad se convirtiera en represión. De esta manera, se ha dado a la tarea de emitir escritos que puedan transmitir posibilidades de una práctica docente distinta; es decir, que conduzcan a una educación matemática crítica, que le permita al estudiante relacionar esta asignatura con diferentes ámbitos de la sociedad y desarrollar también habilidades sociales.

Por lo anterior se habla entonces de la relación entre educación y democracia. Skovmose (1999), unifica algunos aspectos claves de la democracia, el principal es que ésta se refiere a los procedimientos formales usados para designar un gobierno. Así mismo, ésta asume una existencia de oportunidades y obligaciones en igualdad de condiciones, lo cual va de la mano con la distribución equitativa de los bienes y servicios; en consecuencia todos los ciudadanos están en libertad de participar en las discusiones y evaluaciones de cada gobierno.

Sin embargo, para que se den las condiciones mencionadas anteriormente es necesario que haya un aprecio por los valores democráticos, como igualdad, fraternidad, tolerancia, entre otros, el cual puede lograrse a través de la educación, es decir, ésta se puede ver como una preparación para la vida democrática, por lo que debe representarla, así que “en una sociedad democrática cada niño y adolescente debería tener igualdad de acceso a la escolaridad y al aprendizaje” (Skovmose, 1999, p.33), de esta manera, su característica trascendental se basa en no estar dirigida solo a la élite, sino también a las mayorías (Silva, 2010). Así pues, el objetivo de la enseñanza debería centrarse en facilitarle a los estudiantes el desarrollo de habilidades que promuevan la interacción con la sociedad (Salett y Hein, 2004).

En el caso específico de Colombia, en la Constitución Política de 1991 se proyecta la visión de un nuevo ciudadano, capaz de participar activamente en los procesos políticos y democráticos, por lo que el aporte de las matemáticas en la formación de esta competencia se argumenta desde dos aspectos: por un lado, las habilidades matemáticas permiten modelar situaciones reales, lo que le abre las puertas a las soluciones que se le pueden dar a una situación cotidiana; y por el otro, la formación matemática y las facultades de modelaje están relacionadas con la capacidad crítica del ciudadano para deliberar acerca de las decisiones que toman sus dirigentes, y a esto se suma el desarrollo de las habilidades para trabajar cooperativamente con los demás, al actuar de manera colectiva en la solución de problemas contextualizados, lo cual favorece el diálogo y el respeto (Gómez y Valero, 1995). Así mismo, en los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) se pone en evidencia la relación de la educación matemática con la democracia, ya que se establece que esta

> (…) debe responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos (MEN, 2006, p. 46).

Partiendo entonces, de la sociedad y la democracia como puntos en común entre la alfabetización y la educación crítica, y argumentando que la primera es el eje central de la segunda, Skovmose se ha propuesto revisar el papel que tienen las matemáticas en la sociedad, y por ende en la formación de sus integrantes, lo que permite hacer referencia a la alfabetización matemática como parte de una educación matemática crítica (Skovmose, 1999), teniendo en cuenta que no sólo se refiere a habilidades matemáticas, sino también a la capacidad para interpretar y actuar en una situación que ha sido estructurada a través de esta materia (Skovmose, 2000).

Reconocimiento del papel de la matemática en la sociedad

Bajo la perspectiva anterior, toma importancia el hecho de comprender la posición que tienen las matemáticas en la sociedad; es decir, que a cada ciudadano se le deberían suministrar las herramientas necesarias que le permitan lograrlo; así que el propósito de la educación matemática se debe centrar en lograr que los estudiantes estén en capacidad de identificar, comprender, juzgar y aprovechar las aplicaciones de las matemáticas en la sociedad (Niss, 1983, citado en Skovmose, 1999). Al reflexionar sobre las práctica pedagógica y los materiales y recursos sobre los que ésta se apoya, es probable encontrarse con el desarrollo de actividades que ponen de relieve desigualdades sociales, como la sumisión o dominación, las cuales como afirma Skovmose (1999) se derivan en muchos casos de propuestas pedagógicas tradicionales, que quizá solo invitan al estudiante a replicar lo que hace el docente; de este modo no hay cabida a los interrogantes que faciliten la comprensión de las temáticas, ni a actividades que le den la oportunidad de manifestar aprendizajes generados en otros contextos.

Estas actividades son reconocidas desde la educación matemática crítica como aquellas enmarcadas en el paradigma del ejercicio. Bajo este paradigma las clases de matemáticas se fragmentan en dos partes, en la primera, el profesor expone algunas ideas y técnicas matemáticas, y en la segunda, los estudiantes trabajan en ejercicios que el profesor ha seleccionado previamente; este patrón puede variar en cuanto a la exposición que hace el profesor, o al esquema de trabajo que usan los estudiantes (Cotton, 1998, citado en Skovmose, 2000), pero a nivel general, estas dos partes siempre están presentes, así mismo, la premisa central de este paradigma se basa en el hecho de que en cada actividad hay una y sólo una respuesta correcta (Skovmose, 2000). Puede ser que los ejercicios seleccionados por el docente tengan un espacio en el desarrollo de las clases, sin embargo, pueden convertirse en una actividad poco interesante y monótona, corriendo el riesgo de que ellos se desmotiven, por lo que deben elegirse de manera muy cuidadosa para que permitan examinar el grado de comprensión que se tiene de los conceptos fundamentales (Ponte, 2004).

Ahora, asumir nuevas relaciones de la matemática con la sociedad, exige alejarse de este paradigma y desarrollar en los contextos escolares, prácticas pedagógicas que motiven a los estudiantes a indagar e investigar, y les concedan la libertad de decidir hasta dónde quieren llegar con sus aprendizajes. Un factor a tener en cuenta en este proceso es que al introducir un nuevo tema en el aula de clase, el docente se puede valer de los que Skovmose (2000) denomina tipos de referencias y para Ponte (2004) son tipos de tareas de acuerdo al contexto; las clasifican entre las que son puramente matemáticas, las que se relacionan con una situación remirreal, y las que son situaciones de la vida real. Las situaciones semirreales plantean una realidad construida, vista como una situación que tiene aportes de la realidad pero también contempla aspectos que sería poco probable que se dieran en ésta; así, al plantear las situaciones reales que se abordarán en el aula de clase, se debe vincular el ambiente social de los estudiantes, sus intereses y preocupaciones; es decir, es necesario conocer y entender el contexto (Ponte, 2004; Sánchez y Torres, 2009). Tener claridad en cuanto a estos aspectos puede ser útil para poder asumir actividades en contextos escolares desde un paradigma investigativo.

Skovmose (2000) establece un paralelo de las implicaciones de moverse en los paradigmas citados en el caso de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que son constituyentes de ambientes de aprendizaje, ya que para este autor el paradigma del ejercicio puede cambiar su curso, dándole un enfoque investigativo, es decir, que es importante mostrarle tanto a estudiantes como a docentes, que el conocimiento matemático también se puede generar a partir de actos creativos que se relacionan con métodos de búsqueda (Silva, 2010). De este modo, al combinar los tipos de referencias mencionados anteriormente, con el paradigma del ejercicio y actividades que constituyan un escenario de investigación, se tienen seis ambientes de aprendizaje como se identifican en la siguiente tabla.

Tabla 1: ambientes de aprendizaje

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Fuente: Skovsmose, 2000.

Ambientes de aprendizaje derivados de actividades exploratorio-investigativas

Al darle cabida a actividades de carácter investigativo en el aula de clase, que inviten a los estudiantes a indagar, formular preguntas y buscar explicaciones, el docente debe invitarlos a participar a través de la pregunta ¿qué sucede si…?; cuando ellos acepten la invitación, las actividades empezarán a revelar su potencial, por lo que se dará inicio a la búsqueda de explicaciones a la pregunta que se ha planteado, si los estudiantes se apropian de este proceso de exploración y explicación, se constituye un escenario de investigación, por lo que el interrogante de si un escenario tiene un enfoque investigativo o no, toma un carácter empírico;, es decir, se debe responder a través de la práctica (Skovmose, 2000).

De otra parte, la investigadora considera que el hecho de que en una actividad se indague, se explore, implica que no siempre se llegará a la solución de igual manera, ya que esta puede variar de acuerdo a la interpretación que realice cada estudiante; es decir, en todos los casos no se usarán las mismas estrategias para dar solución a las situaciones planteadas, en consecuencia no hay garantía de obtener respuestas idénticas, por lo que pierde relevancia la premisa central del paradigma del ejercicio, lo que quiere decir que éste empezaría a diluirse.

Siguiendo estos presupuestos de lo que implica un escenario investigativo, se puede interpretar que los ambientes de aprendizaje generados sugieren tipos de tareas especiales por parte del profesor. Así, Ponte (2004) habla de los tipos de tareas, recalcando el hecho de que éstas son el componente principal de una buena estrategia de enseñanza, ya que los alumnos logran su aprendizaje a partir de la actividad que realizan y la reflexión de efectúan en el proceso, es decir, "la tarea es el objetivo de la actividad" (p. 2), así que cuando se está involucrado en la actividad matemática se está llevando a cabo determinada tarea. Esta clasificación de las tareas, tiene en cuenta el grado de dificultad, que puede ser *accesible* o *difícil;* y su estructura, que se refiere a *cerrada* o *abierta;* es decir, puede que sea explicita con lo que solicita o por el contrario asigne un grado de incertidumbre al respecto combinando las dimensiones mencionadas se tienen cuatro cuadrantes (Figura 1), en los que se ubican finalmente los tipos de tareas: de exploración, de investigación, ejercicios y problemas, por ejemplo un ejercicio es una tarea cerrada y accesible.

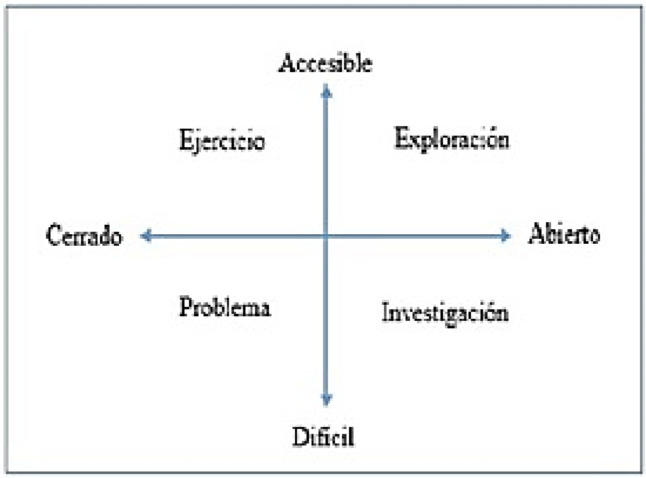


Figura 1: Tipos de Tareas Fuente: Ponte (2004)

Por otro lado, las diferentes tareas pueden tener una duración corta, media o larga, así que se debe ser cuidadoso, ya que si las tareas tienen altos grados de dificultad sumados a prolongados tiempos de duración, puede que los estudiantes en cierto punto desistan (Ponte, 2004); no obstante, desde el punto de vista de Skovmose (2000), acerca del enfoque investigativo que se puede adoptar en las clases de matemáticas, éste puede abordarse desde el trabajo por proyectos, proceso que evidentemente lleva tiempo y mucho más compromiso que otras tareas.

Teniendo en cuenta que las actividades que tienen un carácter plenamente investigativo pueden llevar un tiempo considerable, que es impredecible en la mayoría de los casos, por lo que los estudiantes pueden perder el interés en algún punto (Ponte, 2004), y que para catalogar una actividad de este tipo se requiere de la comprobación empírica (Skovmose, 2000); se proponen actividades que tengan una duración promedio, de modo que se abordan sin encasillar los caminos de solución, tampoco se consideran exclusivamente investigativas, sino que tienen en cuenta la exploración y la indagación, para de cierto modo motivar al estudiante a explorar diferentes soluciones, y a indagar para argumentar las soluciones que plantea, por lo que se acudirá a fusionar la denominación de Skovmose (2000) en cuanto a escenario investigativo y la de Ponte (2004) respecto a tareas de exploración y de investigación, por tal motivo las actividades se enmarcarán escenarios exploratorio-investigativos.

En este tipo de actividades toma importancia otro factor, y es que el trabajo en equipo puede tener efectos bastante positivos en el aprendizaje de los estudiantes, ya que “los procesos relacionados con la educación matemática sobrepasan el ámbito de lo individual” (Valero, 2006, p. 2). Así mismo, desde la experiencia de la investigadora, al trabajar en grupo se pueden aclarar dudas y superar dificultades, que si se quedaran en el análisis individual podrían llegar a convertirse en algo frustrante.

No obstante, tiende a dársele prioridad a la respuesta que más agrade al profesor, y el hecho de que el docente plantee una pregunta y evalúe la respuesta que proporciona el estudiante, puede ser un patrón de comunicación que puede acarrear graves consecuencias en la actividad que éste desarrolle, ya que puede llegar a limitarse rechazando sus propias respuestas, guardando silencio, parafraseando las respuestas de otros compañeros, etc.; así que las actividades que inviten al estudiante a explorar e indagar, pueden cuestionar la manera en la que se organiza el aula de clase tradicional, dando espacio a nuevas formas de comunicación en el aula que favorezcan un aprendizaje dialógico (Alro y Skovmose, 2012). Además, de acuerdo con Skovmose (2000), en los ambientes de aprendizaje las formas de comunicarse pueden ir desde el discurso establecido por el paradigma del ejercicio, hasta el diálogo, en este caso se intenta proponer actividades que estén fuera de dicho paradigma, así que es importante prestarle atención al diálogo como factor influyente en el aprendizaje.

El diálogo en el aprendizaje

En el intercambio de ideas cada individuo pasa por diferentes momentos, ya que de acuerdo a la interpretación que le asigne a las respuestas de los demás, puede ratificar, complementar o modificar sus puntos de vista. Trasladando este hecho al aula de clase de matemáticas, se puede decir entonces que la comunicación puede promover aprendizajes (Ponte et al, citados en Leguizamón, 2017), así que la calidad de ésta "influye en la calidad del aprendizaje" (Alro y Skovmose, 2012, p. 150), además, el intercambio de interpretaciones es un elemento esencial para las posibilidades de aprendizaje de cada persona (Valero, 2006).

En concordancia con el hecho de que la interacción entre las personas es trascendental para fortalecer sus aprendizajes, se puede decir entonces, que a través de dicha interacción el aprendizaje podría relacionarse con aspectos tantos personales como sociales (Llinares, 2007), o incluso, que un aspecto esencial para el aprendizaje es precisamente el hecho de que el ser humano es un ser social (Wenger, 2001). Para Andrew (2010), el que aprende se considera un ser social que participa activamente en el proceso de interacción con los otros; sin embargo, las diferentes perspectivas que un individuo adopta a lo largo de dicho proceso, se ven limitadas en ocasiones, por condiciones sociales.

Lo anterior deja en evidencia que el aprendizaje del ser humano puede compactarse o por el contrario fragmentarse cuando entra en contacto con otros; es decir, es un proceso que se vive de manera colectiva (Riscanevo, 2016), puede transformar lo que es el ser humano y lo que puede hacer, convirtiéndolo en una persona determinada (Wenger, 2001), lo cual pone en juego evidentemente aspecto sociales. A esto se suma el hecho de que precisamente a través del aprendizaje la persona interioriza aspectos propios del grupo social al que pertenece, por lo que la comunicación entra a jugar un papel importante, ya que por medio de esta los miembros de una comunidad pueden llegar a tener puntos en común (Dewey, 1998), y en este marco el lenguaje se considera un medio de comunicación social (Vygotsky, 1978). Por otro lado, la educación debe ser una herramienta de integración, que permita el desarrollo de las capacidades necesarias para participar activamente en los procesos sociales en los que cada individuo debe desenvolverse (Bustamante, 2006), en consecuencia, la escuela debe contribuir a motivar la comunicación y propiciar la cooperación (Martínez, 2001).

De esta manera, a raíz de que en el aula de clase, como se mencionó anteriormente, pueden surgir diferentes maneras de comunicarse, se habla del diálogo como factor influyente en el aprendizaje. Alro y Skovmose (2012) catalogan el diálogo como una forma de comunicación que incluye tomar riesgos, conserva la igualdad y se relaciona con un proceso de indagación que busca adquirir nuevas comprensiones, por lo que sus participantes actúan con curiosidad y sentido crítico, abordando temas que pueden ser impredecibles, con los que se puede llegar a un punto muerto; pero también se pueden llegar a ver las cosas de una manera distinta, nueva; es decir, se puede generar un aprendizaje.

Teniendo en cuenta que el diálogo en este caso está relacionado con un proceso de indagación, el cual puede interpretarse como aprender a través del hablar y el hacer, se hace referencia a los actos dialógicos como componentes de esta forma de comunicación, los cuales se consideran manifestaciones particulares del acto de habla y se agrupan en un modelo de cooperación indagativa – modelo CI -, además “proporcionan aprendizaje con cualidades dialógicas”, así que se hace referencia a un aprendizaje dialógico cuando en un proceso de enseñanza y aprendizaje, se incluye una variedad de actos dialógicos (Alro y Skovmose, 2012, p. 157).

Los actos dialógicos se enuncian en un orden específico, sin embargo, no quiere decir que en la realidad lo conserven; la jerarquía que se tiene en cuenta para enunciarlos es: entrar en contacto, localizar, identificar, defender, pensar en voz alta, reformular, controvertir y evaluar. A continuación se describe en que consiste cada acto dialógico de acuerdo a Alro y Skovmose (2012).

Entrar en contacto hace referencia a estar presente y consciente a lo largo de la conversación, poniéndose a tono con el otro, este contacto puede perderse cuando no logran captarse realmente las ideas propuestas por el otro. Así mismo, el docente y los estudiantes pueden localizar nuevas perspectivas, que quizá están latentes, pero no han emergido en la conversación, esto lo pueden lograr explorando diferentes posibilidades. También a lo largo del diálogo se pueden identificar ideas matemáticas, prioridades y perspectivas globales, cuando se dan explicaciones más profundas.

En cuanto al acto dialógico de defender, no precisamente hace alusión al hecho de tratar de convencer a los otros de la propia interpretación, sino que se refiere a examinar las perspectivas personales, determinar hasta dónde puede encontrar apoyo argumentándolas adecuadamente y así mismo, ser objetivo frente a las propuestas de los demás, y si es el caso, argumentar a favor de éstas también. De hecho, pensar en voz alta hace alusión a expresar con total libertad, los pensamientos, ideas y emociones, que pueden surgir a lo largo del proceso de indagación, esto teniendo en cuenta la igualdad que se debe mantener en el diálogo, además que no sólo se da de manera verbal, ya que puede vincularse el lenguaje corporal, por ejemplo señalando en un pliego el aspecto que se apoya o refuta.

Ahora, respecto a reformular, esto se evidencia cuando se repite lo que se ha dicho, pero en un tono de voz distinto o adicionando algo, y no solo se da cuando alguien reformula sus propias ideas, sino que también comprende lo que el otro plantea y lo complementa. Controvertir se refiere al cuestionamiento que puede surgir respecto a supuestos que ya han sido aceptados, por lo que se debe efectuar de manera prudente y cautelosa, ya que si se hace de manera muy directa puede contribuir a que el proceso de indagación se detenga; este acto dialógico puede ayudar a percibir otras posibilidades que esperan ser localizadas. Finalmente, cuando se corrige, se critica, se confirma, se está realizando una evaluación.

Es de tener en cuenta que la invitación a un escenario de investigación y al aprendizaje dialógico no representa la respuesta a cualquier dificultad en el proceso de aprendizaje; sin embargo, es importante pensar en una educación matemática que se preocupe por fortalecer la reflexión sobre las cosas que se pueden hacer por medio de las matemáticas, ya que la reflexión crítica sobre esta materia es un factor que influye en el desarrollo de una ciudadanía crítica; de esta manera, se considera que el aprendizaje dialógico yendo de la mano con la indagación y reflexión, es un elemento importante para el aprendizaje crítico de las matemáticas (Alro y Skovmose, 2012). Así pues, para promover precisamente el diálogo y la comunicación entre los estudiantes, de modo que favorezca el aprendizaje del área en mención, se propone entonces la modelación matemática (Aravena y Caamaño, 2009, citados en Rodríguez et al., 2013).

La modelación matemática

Pueden existir distintos puntos de vista respecto a las matemáticas, en consecuencia los puede haber también de la modelación matemática; pero es importante que no se entienda como la simple aplicación de una fórmula, o peor aún, su memorización; esta no consiste en aprenderse fórmulas o modelos inventados y aprobados por otros (Vasco, 2003). Para Camarena (2012) por ejemplo, “la modelación matemática se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un evento u objeto del área del contexto" (p.190).

Por otro lado, la modelación matemática también puede verse como un arte, el de producir modelos matemáticos que simulen lo que ocurre en la realidad, o dicho de otro modo, que proporcionen un retrato aproximado de ésta (Vasco, 2003; Barbosa, 2009, citado en Villa, Bustamante y Berrio, 2010). Si se priorizara la modelación como un arte, no como una ciencia, se podría decir entonces que no hay "una lógica de producir modelos matemáticos, pero sí la hay para ponerlos a prueba, ajustarlos, compararlos y, generalizarlos o descartarlos" (Vasco, 2003, p. 10).

La incorporación de la modelación matemática en el aula de clase, de acuerdo con Guzmán (1992) se cataloga como una tendencia innovadora para la enseñanza de las matemáticas, este autor argumenta que dentro de la educación matemática existe una corriente que defiende la necesidad de que el aprendizaje de esta asignatura no se dé a partir del estudio de sus formas cristalizadas, sino del contacto permanente con las realidades de donde se originaron, las cuales pueden seguirle dando motivación y vitalidad a la materia; y precisamente la modelación es la forma de describir la relación entre la realidad y las matemáticas (MEN, 1998).

Para implementar la modelación, se deben tener en cuenta unas fases, a través de las cuales la construcción de un modelo no se da de forma instantánea en el aula; dichas fases conforman el denominado "ciclo de la modelación" (Villa & Ruiz, 2009, p.5); que para algunos autores comprende sólo dos etapas, y para otros tres, como es el caso de Camarena (2012).

Para esta autora, en el primer momento se realiza la identificación de las variables que intervienen en el evento, y en el segundo se identifican las relaciones existentes entre éstas y distintos conceptos tanto de la matemática como del contexto en el que se da la situación, pero Janvier (1996, citado en Posada & Villa, 2006) agrupa estos dos momentos en una primera fase, que es la de formulación; en ésta se establecen las relaciones entre las variables de la situación, lo cual se puede hacer por medio de medidas o conjeturas, para luego hacer una serie de transformaciones matemáticas que permitirán expresar el modelo matemático con simbología algebraica; es decir, se delimita la situación por medio de la simplificación y estructuración, entonces los objetos relevantes, los datos, las relaciones, condiciones e hipótesis, se trasladan hacia las matemáticas (Villa et al., 2010). Así el modelo matemático es un conjunto de relaciones matemáticas y de símbolos que representan, de cierta forma, el fenómeno en cuestión (Salett & Hein, 1999; 2004); es decir, intenta explicar, predecir y solucionar algunos aspectos del mismo (Villa, 2007).

Por otra parte, Blum (2007, citado en Villa et al., 2010), considera que el proceso de modelación no finaliza con la obtención de un modelo, sino que se deben usar métodos y procedimientos matemáticos que permitan obtener resultados pertinentes, que puedan interpretarse de acuerdo al contexto, para validarse como razonables y compatibles con este. Para Camarena (2012) éste sería un tercer momento en el proceso, pero para Janvier (1996, citado en Posada y Villa, 2006), simplemente se trata de la segunda fase en el proceso de modelación, que es la validación, a través de la cual se verifica la validez del modelo, contrastándolo con la situación que lo originó.

Al respecto, Caldeira (2007, citado en Araujo, 2009) no se refiere a dos o tres etapas en el proceso de modelación, simplemente lo define como "un proceso de obtención y validación de un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas presentes en un objeto estudiado" (p.60).

Así mismo, la modelación matemática ayuda a los estudiantes a comprender mejor los entornos en los que se desenvuelven; apoya la motivación, comprensión y aprendizaje de las matemáticas; promueve el desarrollo de algunas competencias y actitudes favorables frente a esta materia, así como una visión adecuada de la misma (Blum y Borromeo, 2009, citados en Villa, 2010), por lo que la modelación puede considerarse un contexto de aprendizaje que motiva a los alumnos a investigar y cuestionar situaciones que hacen alusión a la realidad; y el uso de las matemáticas les brindaría una oportunidad para debatir el papel que éstas tienen en la sociedad, así como la naturaleza de los modelos matemáticos (Trigueros, 2009).

De este modo se plantea el hecho de que la modelación matemática también puede tener un enfoque crítico, ya que a través de ésta se pueden proporcionar herramientas a los estudiantes para que como ciudadanos en continua formación puedan actuar y transformar su entorno (Rosa, Reis y Orey, 2012), desarrollando su capacidad crítica de análisis ante diferentes demandas sociales, al interpretar datos y leer diferentes situaciones, proponer y probar hipótesis, y plantear y validar modelos; además, fortalece la autonomía de los estudiantes, amplía la visión que poseen de su entorno, contribuyendo en el ejercicio pleno de su ciudadanía (Orey y Rosa, 2007). Así mismo, se podría decir que la modelación matemática, los escenarios de investigación y las tareas de exploración, tienen en común que el punto de partida no son los algoritmos matemáticos para luego ejercitar su uso a través de diferentes situaciones, sino que éstos surgen a lo largo del proceso de indagación, por lo que se podría implementar también bajo los supuestos de la Educación Matemática Crítica.

El hecho de que los estudiantes puedan reconocer la utilidad que tienen las matemáticas en la sociedad, a través del proceso requerido para obtener un modelo y validarlo, pone en evidencia el poder formativo que estas tienen. Para Skovmose (1999), el modelo matemático surge a partir de determinada interpretación de la realidad, identificando elementos importantes de ésta, y las relaciones que existen entre ellos, así que al obtener el modelo, analizarlo y ponerlo en práctica, se están llevando a cabo acciones con ciertos intereses, y en todo el proceso las matemáticas influyen fuertemente y se están relacionando de manera permanente con aspectos sociales, por lo que el autor considera que la modelación puede convertirse en una herramienta con gran potencial para que el área en mención ejerza su poder formativo; aquí se reconoce entonces otro aspecto que podría relacionar la modelación y la Educación Matemática Crítica.

Específicamente, Araujo (2009) explica que al abordar la modelación según la Educación Matemática Crítica se vincula el diálogo, a través del cual los estudiantes negocian, debaten y aprenden a respetar las ideas de los demás; es decir, se pueden propiciar ambientes democráticos en el aula de clase que favorezcan un actuar crítico dentro y fuera de ella; esto pone de relieve la relación de la modelación con otro de los aspectos que en este documento se ha mencionado: el aprendizaje a través del diálogo. Así mismo, se considera que la modelación también contribuye a preparar estudiantes que ejerzan una ciudadanía responsable, ya que les permite participar más activamente en el desarrollo de una sociedad que poco a poco demanda más competencias en modelación (Blum & Borromeo, 2009), teniendo en cuenta también que el objetivo de ésta es despertar el sentido crítico y creativo del estudiante (Hein & Salett, 2006).

Por otro lado, la modelación también puede resultar útil para abordar diferentes conceptos matemáticos, más bien, debido a que facilita y fortalece el aprendizaje, se ha convertido en una herramienta clave a la hora de introducir nuevos conceptos en el aula de clase (Trigueros, 2009), como por ejemplo el concepto de función.

El concepto de función en matemáticas

La matemática posee diversidad de aplicaciones, así como ramas y conceptos, por lo que el interés por concentrarse específicamente en determinado concepto puede deberse a diferentes razones. Desde el punto de vista de Font (2011), no todos tienen la misma importancia para lograr comprender la disciplina que de ellos se encarga, pero la función es un concepto que toma protagonismo en la matemática por “su naturaleza unificante y modelizadora” (p. 146). La importancia de este concepto se atribuye también a que tiene un campo amplio de aplicaciones prácticas (Azcárate & Deulofeu, 1996), así mismo, para Spivak (1996) el concepto de función es el más importante de las matemáticas, al punto de que las ramas de la matemática moderna, en su mayoría, centran sus investigaciones en el estudio de las funciones.

Es de tener en cuenta que al concepto se le ha otorgado tal importancia por los diversos ámbitos en los que se reconoció; diferentes autores muestran que antes de formalizarse el concepto, ya se usaban las diferentes maneras de representar la función, de acuerdo a las necesidades que surgían a través de los años (véase, por ejemplo, Font, 2011; Hitt, 2002; Riscanevo et al., 2011), es decir, el concepto en sí mismo ha tenido un proceso evolutivo que se ha visto influenciado por las necesidades y avances de la humanidad, por lo que con el paso del tiempo se vio representado de diversas maneras.

En la actualidad se reconocen cuatro maneras de representar una función: la expresión verbal, con la que textualmente se describe la situación que se está representando; la simbólica, en la que se usan variables para denotar las diferentes cantidades que intervienen en la situación planteada; la tabla de valores, que proporciona una visión cuantitativa de la situación, sin embargo, no permite extraer características globales de la función; y la gráfica que le corresponde a esta, la cual se considera un excelente instrumento para poner de relieve características de la dependencia entre las variables (Azcárate y Deulofeu, 1996). Dependiendo de las situaciones, puede que un tipo de representación se considere más adecuada que las otras (Ugalde, 2014), ya que como se mencionó, cada una está diseñada para destacar ciertas características de la función.

Ciertas situaciones pueden conducir a la preferencia de un tipo de representación por encima de las otras; es decir, la gráfica y la expresión simbólica o algebraica, se consideran las más complejas de interpretar, ya que proporcionan una visión general y completa de la función, además que brindan información más amplia que permite caracterizar modelos (Azcárate y Deulofeu, 1996); sin embargo, no es favorable para el aprendizaje de los estudiantes darle prioridad, por ejemplo, a la representación algebraica sin transitar por las otras, ya que no es suficiente contar con varias representaciones si no se desarrolla la habilidad de pasar de una a otra cuando sea necesario (Acosta, 2005).

Ahora, el paso de una representación a otra se conoce como conversión, y los ajustes realizados para mejorar una de estas se denomina traducción (Janvier, 1987, citado en Font, 2011), aunque las diferentes maneras de representar la función no siempre coexistieron, el proceso que sufrieron para desarrollarse fue un elemento importante en la comprensión de la función, ya que las conversiones y traducciones – o tratamientos - entre las distintas representaciones de un objeto matemático, resultan fundamentales para comprenderlo, en consecuencia, para enseñarlo y aprenderlo (Duval, 2006).

Las primeras representaciones de la función - de las cuatro mencionadas anteriormente -, que coexistieron, fueron las tablas y el lenguaje verbal, y esto sucedió a través de los babilonios; por su parte los griegos usaron también el lenguaje verbal, pero a este se sumaron las figuras geométricas como recurso para representar la función. Durante la edad media se dieron los primeros acercamientos a la representación gráfica, tomando como punto de partida los trabajos realizados por Nicolás Oresme, que se complementaron con los de Galileo Galilei, quien buscó establecer relaciones entre magnitudes, lo cual fue trascendental para desarrollar la noción de función (Sastre et al.,2008). En cuanto a la representación analítica, esta surgió gracias a la aparición del álgebra simbólica durante la edad moderna, y a partir de esta época, grandes pensadores como Descartes, Fermat, Newton, Leibnitz, Bernoulli, Euler, Lagrange, Dirichlet, etc., hicieron aportes importantes en la formalización del concepto de función (Azcárate & Deulofeu, 1996; Font, 2011; Ugalde, 2014).

La evolución histórica de la función pone en evidencia que se ha entendido de diversas maneras, en las cuales se recurre a propiedades y representaciones distintas, por lo que también se pueden resolver diferentes problemas (Font, 2011); por esto, tal vez es comprensible el hecho de que en ocasiones se encuentren definiciones que difieran entre sí (véase, por ejemplo, Azcárate y Deulofeu, 1996), quizá han tenido que ver las circunstancias bajo las que estas surgieron, y la interpretación que se le dio a determinadas situaciones.

Sin embargo, también hubo definiciones a lo largo de los años que tenían un mismo enfoque en cuanto a la manera de ver la función. El término función apareció propiamente en 1673 en un manuscrito de Leibnitz (Azcárate & Deulofeu, 1996; Ugalde, 2014), y de acuerdo a Font (2011), la primera definición del objeto matemático en cuestión surgió en 1718 con Bernoulli, quien la veía como “una cantidad compuesta de cualquier manera con una magnitud variable y de constantes” (p. 149), pero este autor señala que más tarde Euler se dio a la búsqueda de una definición que contemplara todas las curvas posibles en una sola expresión, en la que surgió tanto x representando una cantidad variable, como las cantidades que dependían de x sin denominarlas aún de manera específica. Posteriormente, Dirichlet (1837, citado en Font, 2011) proporcionó una definición en la que se parte de tomar dos valores fijos a y b sobre un intervalo, y se designa x “como una cantidad variable que toma sucesivamente todos los valores comprendidos entre a y b” (p. 150), para cada valor de x corresponde un valor único y, además, a medida que x recorre el intervalo de manera continua, $y = f(x)$ también varía, por lo que y representa una función para dicho intervalo.

Respecto a la expresión $y = f(x)$, una de las representaciones simbólicas de la función, Azcárate y Deulofeu (1996) indican que es una fórmula abstracta que expresa la correspondencia entre las variables x e y, por lo que puede simbolizar una función cualquiera, además, para estos autores el hecho de plantear una expresión en términos de x e y, permite representar la dependencia entre dos cantidades variables, así se da la posibilidad de "calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra" (p. 47).

Así mismo, Font (2011) considera que comprender el concepto de función es muy importante, debido a los diferentes ámbitos en los que se puede encontrar, una manera de verla se relaciona con la dependencia entre cantidades; por ejemplo, los medios de comunicación ofrecen tablas y gráficos que dejan ver el cambio de una variable a consecuencia del cambio de otra, lo cual se evidencia también en ciertas situaciones de la naturaleza; así pues el autor argumenta que al empezar el estudio sobre funciones la idea más general con la que se trabaja, se basa en que la función es una dependencia entre magnitudes que son susceptibles de cambio, en otras palabras, simplemente se asume como "una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables" (Azcárate & Deulofeu, 1996, p.17).

Al hablar entonces de correspondencia entre variables; es decir, asumir que a través de la función se relaciona una variable independiente con otra dependiente, de modo que cada valor de la primera le corresponda un único valor de la segunda (Hitt, 2002), surge el dominio de una función, que engloba todos los valores que adopta la variable independiente; y el conjunto de llegada de la función, que es el conjunto de valores de la variable dependiente (Font, 2011). Para Azcárate y Deulofeu, (1996), la función está conformada por tres componentes, a saber: el dominio, el conjunto de llegada, y una regla específica encargada de hacer corresponder un único elemento del conjunto de llegada a cada elemento del dominio.

Así pues, se pone en evidencia que la función puede interpretarse de diferentes maneras, y aun así ninguna se considera errónea; para Azcárate y Deulofeu (1996), las diferentes maneras de verla pueden clasificarse según el aspecto que consideran más relevante, por ejemplo, por la correspondencia entre valores de variables, entre elementos de dos conjuntos, la dependencia entre variables, pero el principal problema radica en que por un lado, las interpretaciones más intuitivas pueden carecer de rigor, y por el otro las más rigurosas probablemente se alejan de los problemas concretos, por lo que podría resultar más práctico que el estudiante pueda determinar un concepto que sea lo suficientemente útil y operativo, el cual surge de acuerdo a la manera en la que interpreta o generaliza una serie de situaciones en las que se tiene una relación entre magnitudes (Font, 2011); es decir, las situaciones deben tener un aspecto en común: la existencia de magnitudes variables y dependientes entre sí, aspecto que a su vez se puede expresar mediante diferentes representaciones (Azcárate & Deulofeu, 1996).

Las situaciones que permitan al estudiante acercarse al concepto de función podrían abordarse a través de la modelación matemática, que precisamente toma como punto de partida la relación existente entre las variables que intervienen en determinada situación; así mismo, los escenarios exploratorio-investigativos resultan de utilidad en este ámbito, en la medida en que dan libertad al estudiante de establecer sus propias conclusiones, dando espacio a sus puntos de vista. En definitiva, la delimitación teórica mostrada en este capítulo se toma como argumento para tratar de contribuir en el aprendizaje del concepto de función a través de la modelación matemática, implementándola desde escenarios exploratorio investigativos. A continuación se describe la manera en la que precisamente se pretende hacer esto, asumiendo dos etapas en el ciclo de modelación.

Capítulo 3. Aspectos metodológicos

A partir de la delimitación de los objetivos de la investigación, dirigidos a determinar la contribución de los escenarios exploratorio-investigativos en el aprendizaje del concepto de función, tomando como elemento determinante en este proceso los diálogos de los estudiantes, además de la manera en que sus planteamientos se van modificando en el desarrollo de las actividades propuestas y el modo en el que interactúan entre sí, se establece la investigación desde un enfoque cualitativo, el cual se concentra en la comprensión de los fenómenos basándose en la perspectiva y experiencia de los participantes. Este tipo de enfoque se elige cuando el estudio se concentra en examinar los puntos de vista, interpretaciones y significados que los involucrados le otorgan al fenómeno (Hernández, Fernández y Baptista, 2014).

De este modo, el interés del estudio se centró en el proceso que desarrollaron los estudiantes a lo largo de cada actividad, y cómo en el transcurso de este se fortalecieron sus habilidades; precisamente esta es una característica de la investigación cualitativa, la cual es flexible y se interesa más en el proceso que en la obtención de resultados (Monje, 2011). En este mismo sentido, Garnica (2005) menciona que en este tipo de investigaciones se debe tener claro que los resultados son transitorios, que el investigador no puede asumir una posición neutral al interpretar el fenómeno, que no se fijan hipótesis a priori con el fin de comprobarlas o refutarlas, y mucho menos se busca generalizar algún tipo de reglas. En este caso, en acuerdo con el autor, la investigación no pretende establecer los escenarios exploratorio-investigativos como el recurso didáctico más adecuado para propiciar el aprendizaje del concepto de función, sino vislumbrar la manera en la que este tipo de actividades contribuyen en dicho proceso, interpretando las situaciones que se desprenden a lo largo de su implementación.

Por otro lado, la literatura fue de bastante utilidad para delimitar los conceptos clave en esta investigación y tener más herramientas teóricas para la comprensión de los resultados, ya que con base en esta se fijaron a priori algunas categorías de análisis relevantes, relacionadas con los actos dialógicos y el ciclo de modelación. Así mismo, teniendo en cuenta que, a diferencia de los estudios cuantitativos, los cualitativos se aplican a un número reducido de casos que permitan trabajar hasta comprender el fenómeno y responder al planteamiento del problema (Hernández et al., 2014), se realizó un estudio de caso para lograr determinar el aprendizaje de los estudiantes al implementar las actividades mencionadas anteriormente.

Estudio de caso

La investigación cualitativa puede ser de diferentes tipos, uno de ellos es el estudio de caso, que precisamente tiene como objetivo comprender con claridad los "cómo" y "por qués" del caso elegido (Ponte, 2006, p.2). Este tipo de estudio se realiza cuando a pesar de tener diversidad de casos que se refieren al mismo fenómeno, el investigador opta por concentrarse en uno de muchos, en éste siempre se trata de comprender cómo ven las cosas las personas estudiadas (Stake, 2007).

Esta investigación se desarrolló en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Sede Central, con un grupo de 22 estudiantes que cursaban la asignatura Matemática aplicada a la informática; la cual se basa en el hecho de que la matemática ha venido adquiriendo protagonismo en diferentes ámbitos, por lo que toma importancia el conocer y comprender sus aplicaciones, las cuales, como se ha mencionado a lo largo de este documento, pueden abordarse a través de la modelación matemática. La asignatura en mención contempla la función como concepto matemático dentro de sus contenidos programáticos, lo cual facilitó la implementación de los escenarios exploratorio-investigativos para trabajar dicho concepto.

Teniendo en cuenta que un estudio de caso busca conocer una entidad bien definida, que puede ser una persona, una institución, un curso completo, una disciplina, un sistema educativo, etc. (Fiorentini & Lorenzato, 2010; Ponte, 2006), en esta investigación se tomó uno de los grupos de trabajo conformados en el aula de clase para las actividades planeadas, para el estudio de caso.

Así mismo, al existir la posibilidad de que no todos los casos se desarrollaran de la mejor manera, se hizo una valoración en los primeros momentos de la investigación con distintos grupos, para decidir si convenía abandonar estos casos y seleccionar otros (Stake, 2007), pero principalmente los criterios tenidos en cuenta para seleccionar el grupo se establecieron sobre la marcha, el grupo se eligió porque en el desarrollo de las actividades se notó un aumento progresivo en la participación de sus integrantes; del mismo modo, se pudo reconocer que para unos estudiantes en el grupo, las actividades se facilitaban más que para otros, por lo que se daban situaciones de colaboración entre ellos, mientras que en otros grupos todos los integrantes participaban de manera activa, o incluso en algunos, hubo estudiantes cuya participación fue imperceptible; a esto se sumó el hecho de que la mayoría de los grupos se mostraban un poco tímidos al notar que se les estaba observando.

De acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2014), en las investigaciones con enfoque cualitativo, los datos se obtienen a través de fuentes características de dicho enfoque, lo cual en este caso aplica ya que se emplearon la observación directa no estructurada, las notas de campo y la entrevista no estructurada para registrar el proceso que siguieron los estudiantes en el desarrollo de las actividades; además, en un estudio de caso es trascendental registrar el comportamiento de los involucrados en el fenómeno que se está estudiando (Martínez, 2011), para lo cual se usaron también grabaciones en audio.

Así mismo, los estudios de caso se clasifican en tres categorías: descriptivos, interpretativos y evaluativos (Monje, 2011); el estudio de caso llevado a cabo en esta investigación se incluye en los de la segunda categoría, ya que como se ha mencionado, el objetivo de la investigación se centró en describir e interpretar el proceso que vivieron los estudiantes al tener contacto con actividades que los motivaran a indagar y explorar; esto con base en categorías de análisis que de cierto modo son consecuentes con la delimitación teórica que se realizó previamente.

Categorías de análisis

Al recopilar información se hace necesario organizarla de la manera más pertinente, para que así se facilite su análisis e interpretación, por lo que se agrupa en categorías y subcategorías, las cuales respectivamente indican un tópico en sí mismo o lo detallan en micro aspectos (Cisterna, 2005). Las categorías de análisis se establecieron teniendo en cuenta los objetivos trazados previamente, por lo que cada una de ellas pretendía alcanzar un objetivo específico y contribuir en el logro del objetivo principal de la investigación. Además, se fijaron teniendo en cuenta que involucraran tanto la revisión de la literatura como su relación con las actividades y el desarrollo de las mismas.

Respecto a la información obtenida a través de los instrumentos usados para tal fin, se fijaron categorías de análisis apriorísticas con base en los referentes teóricos que se seleccionaron, como lo fueron los escenarios de investigación, las tareas de exploración, el aprendizaje dialógico, la modelación matemática y el concepto de función, sin descartar la posibilidad de que emergieran nuevas categorías sobre la marcha (Cisterna, 2005), ya que estas dos formas de categorización, deductiva e inductiva, se pueden dar de manera simultánea, complementándose una con la otra (Romero, 2005). Teniendo en cuenta el interrogante planteado en esta investigación, las categorías que se fijaron a priori se relacionan con el marco teórico delimitado previamente, y hubo una categoría emergente, por lo que fue necesario incluir dicha temática en el marco teórico.

El ciclo de modelación se estableció como una categoría de análisis, asumiéndolo como el proceso que se da con el fin de obtener un modelo matemático que representa determinada situación, y que además se compone de dos fases, que son precisamente las subcategorías denominadas como formulación y validación del modelo (Tabla 2). En la formulación, los aspectos que se tienen en cuenta son el reconocimiento de las variables, las relaciones entre éstas y el modelo que se obtiene, para luego ser validado. Este proceso de validación completa el ciclo de modelación y tiene como finalidad verificar que el modelo realmente represente la situación planteada. Así mismo, se fijó con el fin de lograr el primer objetivo específico de esta investigación, que corresponde precisamente a reconocer cuál es el papel que tiene la modelación matemática en el aprendizaje del concepto de función, por lo que en paralelo se realizó el contraste de los hallazgos bibliográficos con lo sucedido durante el desarrollo de las actividades implementadas.

Tabla 2*:* Primera categoría de análisis

Categoría	**Subcategorías**
Ciclo de modelación	Formulación del modelo
	Validación del modelo

Por la naturaleza de los escenarios exploratorio-investigativos, al adoptarlos como categoría de análisis, pueden poner de relieve procesos de exploración e indagación, por lo que estos procesos se toman como subcategorías de análisis (Tabla 3). En cuanto a la exploración, esta se cataloga como una actividad experimental que tiene un carácter investigativo (Camargo, 2010); es decir que el estudiante aplica conocimientos previos, identifica aspectos que desconoce y pone a prueba sus puntos de vista; por lo que a través de la indagación, aclara sus dudas, relaciona lo que ya sabía con lo que ha podido aprender, e identifica la manera en la que puede aplicar todo esto a la situación planteada; en otras palabras al indagar busca explicaciones (Skovmose, 2000). Al igual que la primera categoría de análisis, la segunda se estableció buscando dar cuenta del cumplimiento del segundo objetivo específico de la investigación, enlazando la caracterización de los escenarios exploratorio-investigativos como situaciones de enseñanza, con lo que sucedió en la aplicación de los mismos.

Tabla 3*:* Segunda categoría de análisis

Categoría	**Subcategorías**
Escenarios exploratorio-investigativos	Exploración
	Indagación

Finalmente, teniendo en cuenta el objetivo general de la investigación, se consideró relevante analizar la contribución que las actividades implementadas lograron en el aprendizaje del concepto de función, así que este aspecto se tomó como una categoría de análisis. Para determinar la contribución de los escenarios exploratorio-investigativos en el proceso mencionado anteriormente, se recurrió a tres subcategorías de análisis, como fueron: aprendizaje a partir del diálogo, las representaciones de la función y las distintas maneras en las que se interpreta (Tabla 4).

En cuanto a estas subcategorías, se considera que el diálogo puede generar un aprendizaje cuando se presentan diversos actos dialógicos, como: entrar en contacto, localizar, identificar, defender, pensar en voz alta, reformular, controvertir y evaluar (Alro & Skovmose, 2012). Así mismo, la función puede interpretarse de diferentes maneras, por ejemplo, puede verse como una correspondencia entre los valores que adoptan las variables que intervienen en la situación, o la dependencia existente entre dichas variables (Azcárate & Deulofeu, 1996). Cabe mencionar, que estas dos subcategorías se fijaron a priori, y la que se refiere a las diferentes maneras de representar la función, emergió en el desarrollo de la investigación. Este aspecto tomó importancia al tener en cuenta que el éxito en la comprensión de un concepto en matemáticas, depende en gran medida de las habilidades a la hora de reconocer e interpretar sus diferentes representaciones (Azcárate & Deulofeu, 1996), que en el caso de la función, la representaciones son: verbal, tabular, gráfica y simbólica.

Tabla 4*:* Categoría 3 de análisis

Categoría	**Subcategorías**
Contribución en el aprendizaje del concepto de función	Aprendizaje a partir del diálogo
	Representaciones de la función
	Maneras de ver la función

El camino recorrido en la investigación

Análisis del papel de la modelación matemática en el aprendizaje de función

Teniendo en cuenta la temática involucrada en la investigación, se debía determinar el papel que podría tener la modelación matemática en el aprendizaje del concepto de función, así que con el fin de dar cumplimiento a este primer objetivo, se realizó una revisión bibliográfica sobre el proceso histórico que tuvo la formalización de dicho concepto, tomando como base investigaciones realizadas por diferentes autores; con esto se encontraron relaciones teóricas entre la modelación matemática y la formalización del concepto de función, lo cual de cierto modo continuaba dejando en evidencia la pertinencia de usarla en los escenarios exploratorio-investigativos para el aprendizaje de dicho concepto; además, a través de la primera categoría de análisis se establecieron relaciones entre los hallazgos bibliográficos y lo sucedido a nivel práctico al implementarlos en el aula de clase.

La proyección del alcance de los escenarios exploratorio-investigativos

Como se mencionó anteriormente, las relaciones entre modelación matemática y el proceso de formalización del concepto de función se identificaron en primera medida a nivel teórico; así que asumiendo que de alguna manera era posible que la modelación matemática contribuyera en el aprendizaje de este concepto, se procedió entonces al diseño de los escenarios exploratorio-investigativos que la vincularan; dicho diseño tuvo en cuenta los tipos de referencias que se pueden usar en matemáticas para abordar una temática, como las que involucran simplemente matemáticas, las realidades artificiales y las que son netamente reales.

Respecto a las actividades basadas en las dos primeras referencias: matemáticas puras y situaciones semirreales, se revisaron algunos ejercicios propuestos en libros de cálculo, como el de Leithold (1998) y el de Stewart (2012); es decir, se tomaron como punto de partida para aplicarles algunas reformas que permitieran caracterizarlos ya no como ejercicios, sino como tareas que propiciaran procesos exploratorios e indagativos, con base en los referentes teóricos de Skovmose (2000) y Ponte (2004).

En cuanto a la tercera actividad, basada en datos reales, el análisis partió de identificar situaciones cercanas a la realidad de los estudiantes, por lo que se indagó acerca de las actividades que ellos desempeñaban fuera de la Universidad; es decir, al hacer parte de un programa ofrecido en la jornada nocturna, como lo es la Licenciatura en Informática y Tecnología, era probable que se desempeñaran en el ámbito académico y laboral a la vez, por lo que inicialmente se contempló la idea de abordar datos obtenidos de sus ambientes laborales, pero finalmente se optó por elegir simplemente un tema de agrado al interior de cada grupo, así que los estudiantes debían llevar a cabo ciertas indagaciones para obtener un modelo matemático que representara la situación.

A nivel general, en este escenario se tuvieron en cuenta cuatro etapas, inicialmente se debían establecer las finalidades de la actividad, para luego planificar cómo se lograría el objetivo y se recopilaría la información, con la planificación establecida se procedería a ejecutarla; la evaluación se menciona como una cuarta etapa, sin embargo, más bien tuvo un carácter transversal, ya que se realizó un seguimiento constante en cada etapa (Mora, 2009). Así mismo, los estudiantes debían presentar un informe final sobre la actividad.

Luego de diseñar los escenarios exploratorio-investigativos, se procedió a caracterizarlos. Vale la pena decir que la intención de caracterizar las actividades anteriormente mencionadas con base en los planteamientos de Skovmose (2000) y Ponte (2004), no era precisamente encasillar lo que cada una lograría al ser implementada en el aula de clase, sino vislumbrar los efectos mínimos que se esperaba que tuvieran; es decir, el grado de indagación y exploración que favorecerían en los estudiantes; para luego, a través de la segunda categoría de análisis verificar los alcances que tuvieron dichas actividades durante su implementación.

La utilidad de los escenarios exploratorio-investigativos

La implementación de los escenarios exploratorio-investigativos se llevó a cabo en sesiones de 2 a 3 horas, que no fueron consecutivas, ya que en la clase inmediatamente siguiente al desarrollo de cada actividad, la docente realizaba una revisión de la misma de manera colectiva con el grupo de los 22 estudiantes, haciendo algunas observaciones generales, ya que en algunos grupos no se presentaban procedimientos matemáticos coherentes con los resultados propuestos; es decir, la finalidad no era consolidar el mismo modelo para todos los grupos, sino aclarar incoherencias encontradas en sus producciones escritas.

Así mismo se consideró que quizá las actividades podrían resultar más interesantes para los estudiantes si no se abordaban de manera sucesiva, por lo que en los tiempos intermedios de la aplicación de las mismas, se trabajó el manejo del software Geogebra, así como las ecuaciones lineales, la pendiente como razón de cambio y la modelación con ecuaciones, esto naturalmente con el fin de involucrar a los alumnos con procesos de modelación.

Para obtener los datos en el proceso de investigación cualitativa se debe tener en cuenta que éstos deben ser descripciones minuciosas de las situaciones que se presentaron en el mismo, así como de las actitudes, interacciones y conductas de las personas (Patton, 2011, citado en Hernández et al., 2014). Sin embargo, según estos autores, esto no encasilla los instrumentos usados para obtener la información, ya que este tipo de investigaciones se basa en métodos no estandarizados, por lo que se puede trabajar con múltiples métodos, como material auditivo, observaciones, notas de campo y entrevistas no estructuradas, los cuales son propios de la investigación cualitativa, y además son consecuentes también con el estudio de caso.

Respecto al material auditivo, se grabaron audios de los diálogos que sostuvieron los estudiantes al interior de cada grupo, para tener abiertas las posibilidades al momento de seleccionar el caso en el que el estudio se centraría. Durante la implementación del primer y segundo escenario, se recopilaron grabaciones del trabajo desarrollado por los estudiantes para registrar sus opiniones, diálogos y posibles aprendizajes; es decir, el material auditivo se recopiló con el fin de reconocer los actos dialógicos que se pusieron de manifiesto, así como los avances que pudieran darse en cuanto a la manera como los estudiantes expresaban sus ideas, lo cual de una u otra manera ponía en evidencia los aprendizajes que se generaron a partir del trabajo colectivo.

Los audios se recopilaron de manera independiente para la solución de cada numeral en las actividades (Anexos 1, 2, 3); es decir, en el primer escenario exploratorio-investigativo se obtuvo cuatro audios, ya que la actividad tenía cuatro ítems; la segunda actividad tenía tres ítems pero los estudiantes grabaron cuatro audios y para la tercera, se grabó una entrevista no estructurada por cada etapa de esta actividad.

De igual forma, las transcripciones se plasmaron de manera independiente para cada audio, enumerándolas de acuerdo al orden de éstos, especificando el numeral y la actividad a la que pertenecía, la fecha de la grabación y la duración de la misma. Para transcribir se tuvieron en cuenta las indicaciones mencionadas por Tusón (2002), quien argumenta que esta tarea es una parte trascendental para el análisis de la información, como una primera manipulación de los datos; esta autora indica que se deben enumerar las intervenciones de los participantes en el orden en el que se van dando y proporciona convenciones para indicar por ejemplo el hecho de que varias personas hablan al tiempo con los signos =…=, o riéndose usando [riendo], así mismo los tiempos de silencio se indican con < >, y las palabras que no logran entenderse en los audios se transcriben usando el símbolo de interrogación (???). En cuanto a la numeración de las intervenciones, debido a que cada audio se transcribió de manera independiente, dicha numeración se consideró también independiente para cada uno; sin embargo, para el análisis de la información sólo se tomaron los apartes que se consideraron relevantes en la consecución del objetivo de la investigación.

Al implementar las actividades exploratorio-investigativas, además de orientar a los estudiantes, teniendo cuidado de no influir en sus opiniones o puntos de vista, la investigadora observó sus actitudes y debates, lo cual hace parte de los propósitos de la observación, que consiste en comprender los procesos y relaciones entre las personas, las circunstancias y las situaciones que se presentan durante el estudio del fenómeno en cuestión (Hernández, et al., 2014), además, en ocasiones algunas de las conclusiones de los investigadores surgen a partir de sus observaciones (Stake, 2007).

Así mismo es de mencionar el papel que tuvo la observadora durante la investigación. A raíz de que era la docente a cargo de la asignatura Matemática Aplicada a la informática, su participación en las actividades fue moderada, orientando a los estudiantes sobre algunos aspectos que no eran claros en cuanto a lo solicitado en cada actividad, o en algunos casos planteando preguntas abiertas, lo que en ocasiones desencadenaba diálogos y debates con los integrantes del grupo; esto debido a que los estudios de caso se concentran en las relaciones e interacciones entre los participantes, por lo que demandan la participación del investigador (Álvarez y San Fabián, 2012).

Teniendo en cuenta que parte de la observación consiste en tomar notas (Hernández et al., 2014), se apuntaron a la mayor brevedad posible los aspectos que estuvieron al alcance de la observación realizada por la investigadora; es decir que, de acuerdo a Fiorentini y Lorenzato

(2010), se llevó a cabo una observación participante, la cual consiste justamente en participar registrando las observaciones, generando poca interferencia en el ambiente de estudio.

Ahora, en el desarrollo de la investigación, algunos aspectos pudieron pasar desapercibidos a la observación realizada por la investigadora, por lo que para complementarla se pueden realizar entrevistas (Hernández, et al., 2014; Fiorentini & Lorenzato, 2010). Teniendo en cuenta que el punto de vista de los participantes acerca de las actividades que fueron implementadas, también era relevante para lograr una interpretación un poco más acertada de la información, a través de las entrevistas no estructuradas se aprovechó para preguntar a los estudiantes su opinión respecto a las actividades propuestas.

Durante el desarrollo del escenario exploratorio-investigativo basado en la referencia real, con el fin de realizar un seguimiento y evaluación permanente al trabajo que se estaba llevando a cabo, los avances de cada etapa se verificaban a través de entrevistas no-estructuradas, las cuales se caracterizan por ser totalmente abiertas, manejan una guía general del tema a tratar, pero el entrevistador tiene total libertad para desarrollar la entrevista (Hernández et al., 2014). En este caso, se consideró pertinente realizarla de esta manera, ya que precisamente de acuerdo a la temática abordada y las respuesta iniciales de los estudiantes, se podrían implementar otras preguntas para verificar o ampliar la información que ellos proporcionaban, lo cual a mi parecer, conserva de cierto modo los supuestos de la educación matemática crítica, ya que a los implicados en la investigación se les brindó un ambiente de igualdad y libertad para expresar sus perspectivas a través de la entrevista. Finalmente, para determinar la contribución de los escenarios exploratorio-investigativos en el aprendizaje del concepto de función, se recurrió a la tercera categoría de análisis.

Consideraciones éticas

Teniendo en cuenta que la información obtenida en la investigación sería publicada a través de una ponencia, un artículo y el trabajo de grado de la Maestría en Educación Matemática, además de que no se descartaba la posibilidad de realizar trabajos futuros con base en los resultados de la misma, claramente tomaba relevancia el hecho de adquirir la autorización por parte de los implicados, a través de un formato de consentimiento informado (Anexo 4), el cual se tuvo que adaptar para el caso de una estudiante menor de edad (Anexo 5), en el cual se describía de manera clara el interés de la investigación y los instrumentos para la recolección de la información, así como las especificaciones respecto a la publicación de los resultados.

Por otro lado, se consideró también como un aspecto ético, el grado de interferencia de la investigadora en el fenómeno de investigación, que como se mencionó anteriormente, al ser la docente de la asignatura a través de la cual se implementaron los escenarios exploratorio-investigativos, no era posible que su participación se anulara por completo, así que se redujo a orientaciones o especificaciones respecto a las actividades; es decir, su participación fue moderada (Hernández, et al., 2014), con el fin de no interferir en el normal desarrollo de las situaciones propuestas.

Del mismo modo, en concordancia con el enfoque de la investigación, cuyo interés se concentra principalmente en el proceso que se vivió más que en los resultados (Monje, 2011), las actividades no se implementaron con el fin de obtener determinados efectos, o conclusiones planeadas, y los instrumentos para recolectar la información, además del material auditivo, se eligieron sobre la marcha, sin perder de vista el objetivo central de la investigación, y tomando cautela para no cometer errores de interpretación, ya que la investigación como proceso cambiante que es, abre la posibilidad de seguir distintos caminos que conlleven a dar respuesta a los interrogantes planteados, pero esta diversidad también puede conducir al investigador a cometer equivocaciones (Fiorentini y Lorenzato, 2010).

Respecto a las transcripciones del material auditivo, cada grabación se transcribió por completo conservando su originalidad, para esto se siguieron las convenciones que indica Tusón (2002), justamente para preservar la espontaneidad que se evidenció en los diálogos que sostuvieron los estudiantes, ya que en la secuencia del diálogo se replantean las afirmaciones o redirigen las conversaciones.

Perspectiva de análisis de los datos

Teniendo en cuenta las categorías de análisis mencionadas anteriormente, la interpretación de la información se realizó inicialmente a través de los audios y los escritos de los estudiantes. Primero se analizó el ciclo de modelación con sus respectivas subcategorías, enlazando la información obtenida a través de los audios con lo que plasmaron los estudiantes en sus pliegos. En la primera fase de este ciclo se tuvo en cuenta el hecho de que para obtener el modelo, se requiere de cierto tiempo, que le permita al estudiante relacionar los conocimientos matemáticos con la situación, así como identificar y representar las relaciones que existen entre las cantidades (Villa, 2007), así mismo se contrastaban de manera simultánea los hallazgos de la revisión bibliográfica con los que se evidenciaron al implementar las actividades.

Paso seguido, se analizaron las exploraciones e indagaciones que fueron necesarias por parte de los estudiantes, y las relaciones que quizá encontraron con otras situaciones vividas anteriormente para dar solución a las actividades planteadas; y posteriormente se procedió a reconocer en sus diálogos los actos dialógicos que se manifestaron, ya que no solo fueron relevantes sus producciones escritas, sino la interacción verbal que se dio entre ellos, para esto fue necesario realizar las transcripciones completas de los audios. Además, a través de la información auditiva y escrita se efectuó el reconocimiento de las diferentes maneras de interpretar la función y representarla.

Cada categoría de análisis se abordó usando la información obtenida a través de los pliegos de los estudiantes, los audios y la observación, procedimiento que formalmente se denomina triangulación entre las fuentes de información (Cisterna, 2005), o de acuerdo a la clasificación presentada por Álvarez y San Fabián (2012), sería una triangulación de métodos. De manera simultánea se contrastaron los resultados con el marco teórico, lo cual se conoce como triangulación con la teoría (Cisterna, 2005). Cabe mencionar, que este procedimiento se efectuó de manera independiente para cada categoría de análisis, y cada una se revisó de manera simultánea en los tres escenarios exploratorio-investigativos.

Capítulo 4. Análisis de la información

El análisis realizado permite inicialmente ampliar la fundamentación teórica respecto a la evolución histórica del concepto de función, para identificar los elementos que se pueden rescatar a través del ciclo de modelación matemática, esto fue previsto desde el planteamiento del primer objetivo específico de la investigación dirigido a reconocer el papel que puede tener la modelación matemática en el aprendizaje de dicho concepto y desencadenado a partir de la mirada holística de la teoría y los datos emergentes en el trabajo de campo.

La Modelación matemática en el aprendizaje del concepto de función

Al reflexionar sobre la práctica docente surge la intención de buscar una herramienta que favorezca el aprendizaje del concepto función y además propicie una dinámica distinta a la enseñanza tradicional, advirtiendo el hecho de que las problemáticas en el aprendizaje de funciones pueden generarse en ocasiones por la naturaleza compleja que tiene en sí mismo el concepto (Hitt, 2003), lo que se cataloga como un obstáculo epistemológico (Riscanevo et al., 2011).

Al abordar en el aula de clase las temáticas relacionadas con funciones se debe tener presente que si se habla de la función solo como una regla de correspondencia, deja de verse como un objeto matemático que se relaciona con la variación y el cambio entre dos o más cantidades; es decir, como un modelo matemático (Posada & Villa, 2006), y tampoco se tiene en cuenta que en el proceso de aprendizaje de dicho concepto, es muy importante el desarrollo de la idea intuitiva de variación (Hitt, 2002). De acuerdo a Posada y Villa (2006), si el concepto de función se presenta de manera formal, entendiéndola como un objeto matemático abstracto, no se está favoreciendo su comprensión; por el contrario, se está dejando de lado la interpretación matemática que se le puede dar a un fenómeno de variación, por lo que entender la función como un modelo matemático que representa la variación y el cambio, le da un sentido dinámico, mientras que si se ve como un objeto matemático abstracto tendrá un carácter estático; además, no es conveniente enseñar el concepto de función como un ente abstracto, porque se estaría dejando de lado el hecho de que precisamente la necesidad de entender fenómenos naturales y situaciones cotidianas, fue lo que le dio vida (Ugalde, 2014).

Teniendo en cuenta la evolución histórica del concepto de función, de acuerdo a Mesa (2008), esta noción surgió desde épocas muy antiguas, aunque su formalización en el campo de la matemática es algo muy reciente. Por ejemplo, en las tablillas de los babilonios se puede ver que manejaban de manera implícita una de las ideas que contribuyeron en la construcción del concepto de función, que es la de relación, estableciendo una correspondencia entre algunos números y sus cuadrados, o sus raíces cuadradas (Hitt, 2002).

Así mismo, los griegos calcularon áreas y volúmenes relacionando magnitudes, y en la edad media se estudiaron distintos fenómenos como el movimiento uniformemente acelerado, generando algunas ideas que se basaban en cantidades dependientes e independientes, pero sin definirlas específicamente (Sastre, Rey y Boubee, 2008). En resumen, se trabajaban casos particulares que involucraban la dependencia entre dos cantidades, pero no aparecían nociones relacionadas con cantidades variables y funciones (Azcárate y Deulofeu, 1996).

De esta manera se pone en evidencia que mucho antes de intentar formalizar el concepto de función, ya se le daba un uso explícito a sus representaciones y aplicaciones, lo cual de cierto modo se da a lo largo del proceso de modelación, donde no se parte de un algoritmo formal sino que se pueden usar distintas representaciones del mismo fenómeno para llegar a dicha formalización.

Podría esperarse que al vincular la modelación en el aprendizaje del concepto de función, diluyendo el paradigma del ejercicio que se denota dentro del marco de la educación matemática tradicional, pueda mejorarse la práctica docente contribuyendo a superar algunos obstáculos de tipo didáctico, teniendo en cuenta que un obstáculo es el que se revela en los errores que se presentan frecuentemente en el proceso de enseñanza, o en el de aprendizaje, en este caso los obstáculos didácticos son los que “resultan de las elecciones didácticas hechas por el profesor[…] para establecer las situaciones de enseñanza” (Riscanevo, et al., 2011, p.127), lo que conlleva a recordar que la inadecuada introducción de las temáticas por parte del profesor, puede acarrear dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (Guzmán, 1992).

Por otra parte, teniendo en cuenta que “las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra” (Stewart, 2012, p. 10), y precisamente como se mencionó en el marco teórico, la primera etapa de la modelación consiste en identificar las variables que intervienen en la situación que se está abordando, donde claramente se identifican tanto las independientes como las dependientes, se considera que la modelación sí podría hacer aportes importantes en el aprendizaje del concepto de función, teniendo en cuenta que una de las dificultades en el aprendizaje del mismo es la confusión que existe entre lo que es la variable dependiente y la independiente (González, 2015), además, puede contribuir al trabajar de manera implícita la idea de variación. Así mismo, a nivel histórico el interés por establecer relaciones entre distintas magnitudes, fue determinante en el desarrollo del concepto de función (Font, 2011), y el identificar la relación existente entre las variables que intervienen en determinada situación, es también un componente de la primera etapa del ciclo de modelación.

De este modo, durante la aplicación de los escenarios exploratorio-investigativos, en el que estaba asociado a la matemática en sí misma, y el que involucraba una situación semirreal (Anexos 1 y 2), el primer paso fue precisamente establecer relaciones entre las variables que intervenían en la situación, para luego formular el modelo matemático correspondiente, aspecto que en la primera actividad no se dio, sin embargo en la segunda sí se obtuvo un modelo matemático que representaba la situación.

En la primera actividad los estudiantes reconocieron que las variables a considerar principalmente eran el largo y el ancho, clasificando relaciones entre éstas. Por ejemplo, la diferencia entre los valores del largo y el ancho, es inversamente proporcional al área del rectángulo respectivo; es decir, al tomar diversos rectángulos y verificar la diferencia entre dichas dimensiones, se encontró que si ésta es mínima, los rectángulos tendrán las mayores áreas. A continuación la intervención de la estudiante que identificó esta relación

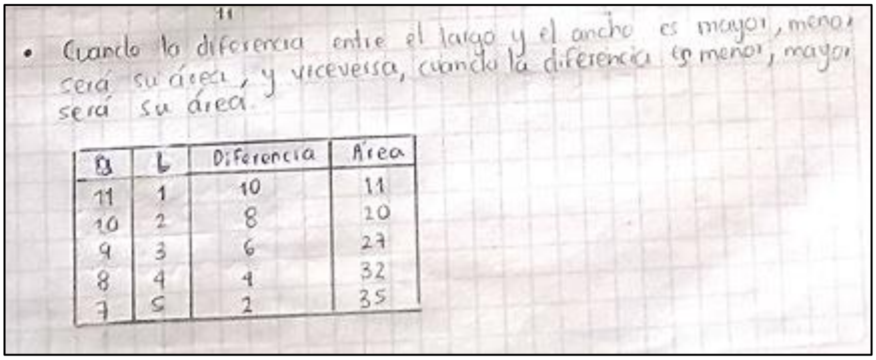
1. ***David -*** *¿existe relación entre las dimensiones de los rectángulos y su respectiva área? ¿De qué manera se podría representar dicha relación?*

<3>

2. ***Karol -*** *=eeee sí se tiene una relación ya que entre menor sea la diferencia entre el largo y el ancho, mayor es su área, y viceversa, es decir, que entre mayor sea la diferencia entre el largo y el ancho, menor es su área=*

(Transcripción de grabación en audio N° 2, 2018)

La tabla mostrada en la figura 2 permite visualizar claramente dicha relación



• Cuando la diferencia entre el largo y el ancho es mayor, menor será su área, y viceversa, cuando la diferencia es menor, mayor será su área.

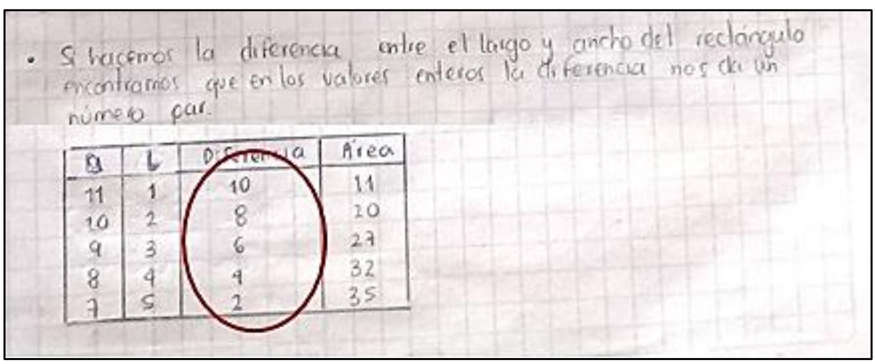
a	b	Diferencia	Área
11	1	10	11
10	2	8	20
9	3	6	27
8	4	4	32
7	5	2	35

Figura 2: relación entre el área y las dimensiones de cada rectángulo. Elaboración propia

Así mismo, los estudiantes establecieron que la diferencia entre el largo y el ancho siempre es par, es de recalcar que tanto en los audios como en los pliegos de los estudiantes, aclaran que la relación encontrada solo aplica para los valores enteros

24. ***Camilo -*** *entre el largo y el ancho*
25. ***Karol-*** *mayor es…*
26. ***Camilo -*** *su diferencia siempre va a ser par*
<3>
27. ***Marcela -*** *encontramos que en los valores enteros la diferencia siempre es par, ¿no? Porque si no, podemos tomar todos los valores*

(Transcripción de grabación en audio N° 2, 2018)



• Si hacemos la diferencia entre el largo y ancho del rectángulo encontramos que en los valores enteros la diferencia nos da un número par.

a	b	Diferencia	Área
11	1	10	11
10	2	8	20
9	3	6	27
8	4	4	32
7	5	2	35

Figura 3: Diferencia entre las dimensiones que son valores enteros. Elaboración propia

Se reconoce entonces que se identificó una relación entre las dimensiones que son valores enteros, es decir, hay una característica que estas deben tener para que tenga validez la relación encontrada, la cual consiste en que sean números enteros; de este modo la diferencia entre estas dimensiones siempre será un número par (Figura 3), sin dejar de lado el hecho de que son infinitas las posibilidades de construir rectángulos que tengan 24cm de perímetro. Como elemento final de esta primera etapa del ciclo de modelación se reconoció el planteamiento de fórmulas auxiliares en la construcción del modelo matemático que representa la situación

> **32.** ***Camilo*** **-** *=bueno, podemos concluir que, ya tenemos perímetro=*
> **33.** ***Marcela*** **-** *será… pero escribamos la pregunta, ¿ya está grabando? Aaa [risas]… entonces, ¿será posible determinar una manera que permita hallar el área de cualquiera de los rectángulos conociendo la medida de uno de sus lados? ¿Si, no, por qué?... en este caso sí podemos hallarla =ya que tenemos el perímetro=*
> **34.** ***Camilo*** **– =***porque ya tenemos la, el perímetro=*
> **35.** ***Karol*** **- =***perímetro=*
> **36.** ***Marcela*** **-** *que es igual a 24 cm, entonces si nos dan uno de sus lados, =sería ya con la fórmula =*
> **37.** ***Camilo*** **-** *=el perímetro y con uno de sus lados=, reemplazaríamos prácticamente en =la fórmula=*
> **38.** ***Marcela*** **– =***hallar el otro lado=*
> **39.** ***Karol*** **–** *=y se puede hallar claro=*
> **40.** ***Camilo*** **-** *bueno, entonces primero coloquemos eso y hacemos el ejercicio con la fórmula*
> **41.** ***Marcela*** **-** *sería, sí, de la fórmula del perímetro hallar el lado que no conocemos y ese lado pues ya lo multiplicamos para dar el área como tal del rectángulo*

(Transcripción de grabación en audio N° 4, 2018)

En el fragmento anterior se pone en evidencia cómo los estudiantes identifican como punto de partida el hecho de que se conoce el perímetro de los rectángulos, y la utilidad que éste tiene para poder plantear una posible manera de determinar el área de cualquiera de los rectángulos teniendo solo una de sus dimensiones. Así, plantean una expresión específica para determinar las dimensiones de cada rectángulo

> **65.** ***Camilo*** **-** *listo… entonces, utilizamos la primera fórmula que es la del perímetro, ¿no?, que es…*
> **66.** ***Marcela-*** *perímetro es igual a dos veces =“a”= por dos veces, más, “L”*
> **67.** ***Camilo*** **–** *dos veces = “a”=… “L” entonces reemplazamos, perímetro*
> **68.** ***Marcela*** **-** *24 es igual a…*
> **69.** ***Camilo*** **-** *24 es igual a… digamos que siete, si coloquemos siete, al azar*
> **70.** ***Marcela*** **-** *o lo podemos dejar expresado, o sea, pasar todo en términos de… a no*
> **71.** ***Camilo*** **-** *no, nos dan uno de sus lados, coloquemos siete como ejemplo, ¿o qué otro número?… si, siete, ¿no?*
> **72.** ***Marcela*** **–** *sí*

73. ***Camilo*** - *entonces dos por siete*
74. ***Marcela*** **-** *es igual a "zeta", entonces dos siete por dos "L", el 24 es igual a…*

<17>

75. ***Camilo*** - *entonces despejemos*
76. ***Karol*** **–** *14*
77. ***Camilo*** - *24, =14=*
78. ***Marcela*** **-** *=14 por 2=*
79. ***Camilo*** - *por 2, si*
80. ***Marcela*** **–** *14 por 2*
81. ***Camilo*** **–** *28*
82. ***Marcela*** - *¿28?*
83. ***Camilo*** **–** *sí*
84. ***Marcela*** **-** *¿si se puede multiplicar así, cierto?*
85. ***Camilo*** - *no porque no son de los mismos valores*
86. ***Marcela*** **–** *¿no?*
87. ***Camilo*** **-** *no, tenemos que pasar "L" para el otro lado*
88. ***Marcela*** **-** *aaa espere espere, ya sé… sería 24 sobre 14, igual a 2 "L"*

(Transcripción de grabación en audio N° 4, 2018)

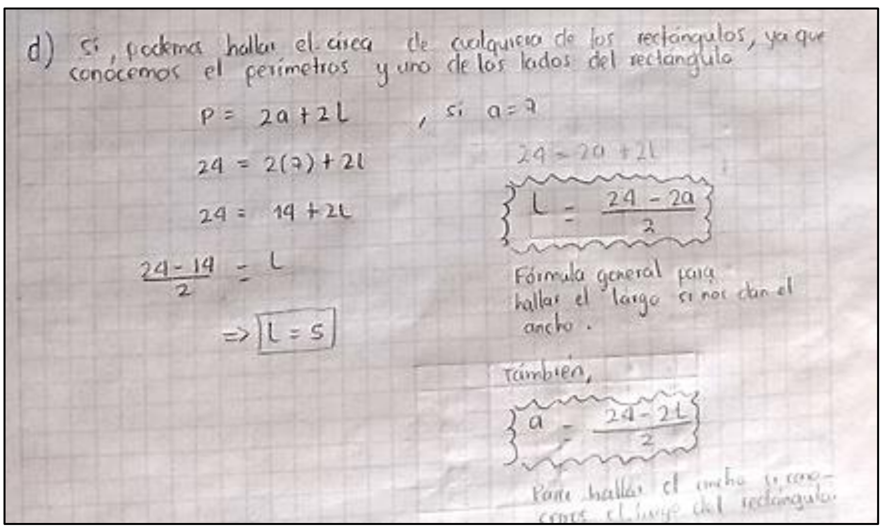


Figura 4. Cómo hallar la dimensión que hace falta para determinar el área. Elaboración propia

A pesar de que en la línea 88 de la transcripción, se dice que 24 se divide en 14, esto no es lo que se plasma en los pliegos (Figura 4); es decir, se tenía la idea clara de cómo plantear la expresión, pero al expresarla no hubo claridad. En este caso tomaron como ejemplo 7 cm para ser una de las dimensiones de cierto rectángulo, y determinaron el valor de la otra dimensión a través de la expresión que el grupo formuló, la cual es de utilidad; sin embargo no se plasmó un posible modelo matemático que permitiera hallar el área de determinado rectángulo.

En cuanto a la segunda actividad, el grupo eligió para la construcción de la caja una hoja de 17 cm de ancho por 24 cm de largo, y para la caja inicial recortaron cuadrados de 3 cm en las esquinas de la hoja, por lo que obtuvieron una caja con un volumen de 594 cm^3 = 3 cm * 17 cm * 24 cm. Luego procedieron a encontrar una manera de hallar el volumen de cualquiera de las cajas que se podía construir con la hoja de las dimensiones que escogieron.

1. ***David –*** *b, ¿utilizando el mismo tamaño de la hoja de papel se podrían construir cajas con diferente volumen?, de ser así ¿cómo se podría determinar el volumen de cualquiera de esas cajas?*
2. ***Camilo –*** *bueno, la fórmula que… ¿cuál es la fórmula que en sí está pensando? =porque entonces=*
3. ***Marcela –*** *= pues sería…= o sea…*
4. ***Camilo –*** *del alto… del ancho y del alto tenemos que colocarle "menos 2x"*
5. ***Marcela –*** *o sea, tomamos, o sea hacemos una… representación igual que en el punto anterior, pero en vez de tomar como 3 centímetros =ponerlo= en "x" porque pues puede ser cualquier número*
6. ***Camilo –*** *="x"=… sí*
7. ***Marcela –*** *entonces de acuerdo a eso pues saquemos el ancho, ¿el largo? ¿Si?*
8. ***Camilo –*** *¿o sea igual que la hoja? = ¿24 por 17?=*
9. ***Marcela –*** *=sí que que…= aja*
10. ***Camilo –*** *pero entonces sería la fórmula, sería, volumen igual a "x" por once menos "x", menos "2x", por 18, por 24 menos "2x"*
11. ***Marcela –*** *pues verifiquémosla, pues sacando de nuevo esto ¿no?*
12. ***Camilo –*** *entonces, mire, por lo menos sería aquí, pere una hoja, aquí [el estudiante solicita una hoja]*
13. ***Karol –*** *¿pero, es que luego no es el 3?*
14. ***Camilo –*** *volumen sería, yo lo que pienso =hacer así=*
15. ***Marcela –*** *= ¿cómo así?=*
16. ***Karol –*** *ese 3*
17. ***Camilo –*** *no, pare bolas*
18. ***Marcela –*** *no, =o sea= es que, o sea el punto de ahorita sería, o sea como si no tomáramos 3 centímetros sino cualquier valor, bueno*
19. ***Camilo –*** *="x"=… exacto*
20. ***Karol –*** *ah ya*
21. ***Camilo –*** *entonces sería, lo que yo pienso es "x" por 24 menos "2x", ¿sí?*
22. ***Marcela –*** *ujum*
23. ***Camilo –*** *eso normal, así, por 17 menos*
24. ***Marcela –*** *"2x"*
25. ***Camilo –*** *"2x", ¿por qué "2x"?*
26. ***Marcela –*** *porque… se quitan de lado a lado los, la medida del cuadrado*
27. ***Camilo –*** *exacto*

28. ***Karol*** *– ahí ya varía… = para cualquiera…varía acá este número =*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

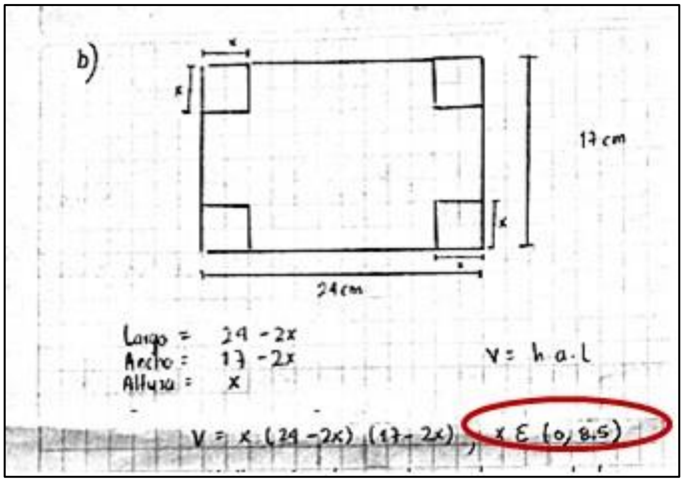


Figura 5. Volumen de determinada caja. Elaboración propia

En el fragmento de la transcripción de la grabación en audio N° 6, específicamente en las líneas 21 a 24, se define el modelo matemático que permite hallar el volumen de determinada caja, claro, construida a partir de una pieza rectangular con dimensiones de 17 cm * 24 cm. Así mismo, se argumenta por qué en dicho modelo se debe usar la expresión “2x”, teniendo en cuenta que la variable “x” representa las dimensiones de los rectángulos que se recortan en las esquinas de la hoja para construir la caja, aspecto que se evidencia en la figura 5. De esta manera se puede decir que la primera etapa del ciclo de modelación se evidenció a cabalidad en esta segunda actividad, a diferencia de lo sucedido en la anterior, ya que junto al modelo matemático, se reconocieron relaciones entre las variables y se definieron los valores que puede tomar la variable independiente (figura 5).

Respecto al reconocimiento de relaciones entre variables, los estudiantes identificaron que el volumen de cada caja varía de acuerdo al tamaño de los cuadrados que se recorten en las esquinas de la hoja para construirla, esto se originó a partir del siguiente diálogo

39. ***Camilo –*** *estamos tomando mal las medidas, porque nosotros lo tomamos de una vez completa la hoja*
40. ***Marcela –*** *es que…*
41. Camilo – *las dimensiones de la hoja*
42. Marcela – *ah si, o sea el anterior nos quedó, no, ¿sí?*
43. Camilo – *nos quedó mal*
44. Marcela – *ujum*
45. Karol – *ah sí, porque es el volumen como tal de la caja ya hecha =no de la hoja [risas]=*
46. Marcela – *= [risas]=*
47. Camilo *– sí, nos quedó mal estamos tomando las medidas… estamos tomando las medidas de la hoja completa*
48. Marcela *– o sea tendríamos que… o sea tendríamos… ¿o sea en el punto anterior tenemos que restarle esos 3 centímetros que le quitamos?*
49. Camilo *– literal*
50. Marcela *– acá =al largo y al ancho =*
51. Karol *– =o sea a la medida como tal de la…=*
52. Camilo - *=no, no= 3 centímetros no, 6 centímetros*
53. Marcela *– no porque o sea 3 al…*
54. Camilo - = *son por lado y lado= 3 y 3 son 6*
55. Karol - *=a 6, 6, ah si=*
56. Marcela– *6 al ancho y 6 al largo*
57. Karol – *ah si*
58. Camilo - *3 por ambos lados, bien sea por derecha o izquierda, son 6*
59. Marcela – *sí, bueno entonces arreglemos eso… llegando al punto b fue que tuvimos en cuenta que, o sea, de acuerdo a la variación que tomábamos de los cuadrados que íbamos a recortar, o sea, iba variando el volumen y {[riendo] ahí fue que no tuvimos en cuenta} de restarle a las medidas de la hoja los centímetros de los cuadrados que recortamos*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

Por otro lado, al buscar establecer los valores que podía tomar la variable “x”, los estudiantes reconocieron que al dividir 17 entre 2, obtendrían el valor de referencia para establecer de qué tamaños se podrían recortar los cuadrados para construir diferentes cajas; además, en el siguiente fragmento en las líneas 44 a 50, el estudiante le explica a su compañera por qué razón no se puede hacer el mismo procedimiento tomando la otra dimensión; es decir, el valor de 24, ya que si este se toma solo se podría recortar un cuadrado de 12cm *12cm, y esto anularía por completo la posibilidad de construir una caja, por lo que a continuación se presenta el diálogo a través del cual se estableció lo que comúnmente se conoce como dominio de la función

32. *Camilo* *– = ¿o sea hasta= hasta qué valor podríamos coger ese "x"? , ese debe tener un límite*
33. Marcela *– ajah*
34. Karol *– entonces toca hacerle…*
35. Camilo - *"x" debe llegar, o sea hasta aquí, o sea donde llegue aquí, antes de llegar a… al centro de acá, tiene que ser menor a ese número*
36. Marcela – *o sea, el… espere*
37. Camilo – *o sea el menor, 17 dividido en 2*
38. Marcela – *pero ahí…*
39. Camilo – *17 dividido en 2 sería 8.5, ¿cierto? Entonces tiene que ser menor que 8.5, no puede =ser igual a 8.5=*
40. Marcela – *= y mayor a cero=*
41. Camilo – *y mayor que cero*
42. Marcela – *porque tampoco puede quedar en cero*
43. Camilo – *sí, exacto, debe ser una condición esa (sic.)*
44. Marcela – *y el otro… pues con el otro… lado igual, ¿no?, 24, ¿no?*
45. Camilo – *a 24, no*
46. Marcela – *¿no?*
47. Camilo – *no porque es que si llega hasta aquí, porque estamos restando =es cuadrados=*
48. Marcela – *= a si si=*
49. Camilo – *si es la medida de acá, va a ser la misma =para este lado=*
50. Marcela – *=ah la misma en todos = los lados, sí*
51. Camilo – *entonces si sería esa, o sea =esa sería una condición=*
52. Marcela – *= y como esa= es la menor, sí*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

Ahora, es importante también considerar el hecho que "la función es un instrumento que permite modelar y solucionar diferentes situaciones del mundo real" (Riscanevo et al., 2011, p. 123); es decir, en la actualidad se ha evidenciado la gran utilidad que tiene para modelar el mundo y describir los fenómenos que se perciben (Ugalde, 2014), quizá esto se atribuya al hecho de que modelar un fenómeno, describir y analizar relaciones a través de las funciones, permite dejar de lado la "necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado" de cada una de las situaciones que se están describiendo (Hitt, 2002, p. 79), lo cual nuevamente relaciona la función y la modelación, proporcionando una razón más para abordar este concepto a través de la modelación matemática, y así mismo da pie para mencionar los hallazgos de la tercera actividad implementada, la cual debía basarse en una situación real que los estudiantes eligieron.

En este caso, el tema que se eligió fue la venta ambulante de productos de bonice[2] (Anexo 3), de acuerdo a la información que proporcionaron los estudiantes a través de las grabaciones en audio y el informe final de la actividad, las personas que se dedican a esto venden cinco productos que son: popetas grandes, popetas pequeñas, bonice pequeño, bonice sencillo y bonice doble; cada producto tiene un precio y una comisión de venta distinta, y los estudiantes se propusieron analizar los ingresos aproximados de estas personas, para compararlas con el salario mínimo. El primer acercamiento a la formulación del modelo para describir la situación, se da a continuación

18. ***Marcela –*** *modelar esos cinco productos por la cantidad de pro, o sea, de acuerdo, bueno…*
19. ***Camilo –*** *pues un modelo de ecuación el cual tomando solo la ganancia*
20. ***Marcela –*** *sí*
21. ***Camilo –*** *de cual, cuánto obtuvo en el día y cuánto necesita vender =aproximadamente=*
22. ***Karol -*** *=de cada producto=*
23. ***Camilo –*** *de cada producto*
24. ***Marcela –*** *=en función de cada, de la cantidad de… = [cantidad de productos]*
25. ***Camilo –*** *y una de todo*
26. ***Karol –*** *ujum*
27. ***Marcela –*** *sí*
28. ***Karol –*** *o sea uno de cada uno de cuánto necesita vender =más o menos=*

(Transcripción de grabación en audio N° 10, 2019)

A pesar de que en el fragmento anterior la estudiante en la línea 24 no termina su oración, se puede comprender que identifican la cantidad de productos vendidos como la variable independiente en el modelo, lo cual se confirma más adelante:

---

[2] Bonice es una línea de productos que se distribuye en Colombia por la empresa Quala; el producto que lleva este nombre es una barra congelada con variedad de sabores y tres tamaños distintos; las popetas son crispetas listas para el consumo, que también tienen diversos sabores y dos presentaciones en el tamaño.

75. ***Docente** – entonces vuelve la pregunta ¿qué valor va acá? ¿a qué valor respondería ese?[la variable indicada en el modelo matemático]*
76. ***Marcela – =**la cantidad de productos=*
77. ***Camilo - =**a la cantidad de= popetas que vendió, pero entonces se…*
78. ***Docente – ¿**en qué unidad de tiempo?*
79. ***Camilo** – entonces la unidad de tiempo no va a interesar*
80. ***Marcela – =** pues eso uno la…=*
81. ***Camilo – =** porque si yo coloco = las… cuántos vendió semanal y coloco la del mes, no va variar o sea lo único que varía es en la cantidad ¿sí?, pero entonces no hay ningún cambio*

(Transcripción de grabación en audio N° 11, 2019)

Sin embargo, esta propuesta cambia unos minutos después, ya que a los vendedores de bonice les dan un bono diario de $5000, por lo que este dinero debía contemplarse en el modelo matemático que se supone iba a representar las ganancias, aunque en este caso se establecieron cinco modelos matemáticos, teniendo en cuenta que cada producto tiene ganancias diferentes, así que el modelo final depende de la cantidad de productos vendidos a la semana, esto se evidencia tanto en la grabación de audio como en el informe entregado por los estudiantes:

61. ***Camilo –** aunque mejor dicho por día son 1000 pesos por producto*
62. ***Marcela** – ¿por día?*
63. ***Camilo –** claro*
64. ***Marcela –** mil pesos ¿cómo?*
65. ***Camilo –** claro, si me dan 5000 y son cinco productos*
66. ***Karol –** ah si*
67. ***Marcela –** ¡ay sí!*
68. ***Camilo –** = ¡claro! =*
69. ***Marcela – = ¡**ay sí! =*
70. ***Camilo –** o sea que nos ponemos a hacer esta otra fórmula, entonces sería… lo vamos a hacer la fórmula, hagámosla exacta, ¿sí o no?*
71. ***Marcela –** ujum*
72. ***Camilo –** que sea ¿qué? =semanal=*
73. ***Marcela -** =semanal=*
74. ***Camilo –** entonces son siete mil pesos, entonces en vez de “más y” aquí más 7000, nos da, números reales, 7000, son siete días ¿no?... y listo, y ahí si al final solo sumar*

(Transcripción de grabación en audio N° 12, 2019)

- **BonIce pequeño:**

b: Cantidad de BonIce pequeño vendidos por semana.
B (b) = (70 * b) + 7000

- **BonIce sencillo.**

s: Cantidad de BonIce sencillo vendidos por semana.
B (s) = (80 * s) + 7000

- **BonIce doble:**

d: Cantidad de BonIce Doble vendido por semana.
B (d) = (100 * d) + 7000

- **Popetas grandes:**

g: Cantidad de popetas grandes vendidas por semana.
P (g) = (160 * g) + 7000

- **Popetas pequeñas:**

q: Cantidad de popetas pequeñas vendidas por semana.
P (q) = (80 * q) + 7000

Figura 6. Modelos matemáticos de las ganancias en productos de bonice

Teniendo en cuenta el hecho de que la función es útil para modelar diferentes situaciones (Riscanevo et al., 2011), en el ciclo de modelación se tiene una segunda etapa, que consiste precisamente en validar el modelo matemático que se obtiene, con el fin de verificar que realmente describe la situación de la que se originó.

En la primera actividad no se dio esta segunda etapa, ya que no se formuló un modelo matemático específico, sin embargo, en la segunda actividad a partir del modelo obtenido, los estudiantes tomaron como ejemplo la caja inicial que construyeron; es decir, el valor para la variable independiente que en la función representa la altura, fue de 3cm, a través del modelo calcularon el valor del ancho y del largo de la caja, comprobando que en efecto eran 11cm y 18 cm respectivamente; en consecuencia el valor que obtuvieron fue de 594cm^3, que es precisamente el volumen que habían determinado inicialmente, aún sin tener el modelo matemático. Esta validación la proporcionaron a modo de conclusión

> **67.** ***Marcela –*** *en conclusión nuestro rectángulo, bueno, nuestro rectángulo tiene las siguientes dimensiones, el rectángulo sin cortar los cuadrados, el ancho es igual a 17 centímetros y el largo es igual a 24 centímetros, quitamos cuadrados de 3 centímetros por 3 centímetros, y las medidas de la caja sería: el largo que es igual a 24 centímetros menos 6 centímetros de las medidas del cuadrado que quitamos que da un total de 18 centímetros de largo y el ancho sería 17 centímetros menos 6 centímetros de los cuadrados que nos da un ancho igual a once centímetros, el volumen de la caja será igual a: volumen igual a altura por el ancho por el largo, en nuestra caja sería el volumen igual a 3 centímetros por 11 centímetros por 18 centímetros dándonos un total de 594 centímetros cúbicos*

(Transcripción de grabación en audio N° 7, 2018)

En cuanto a la tercera actividad, la validación del modelo se llevó a cabo verificando los ingresos por concepto del bono diario de $5000, las cuales equivalen a $35000 semanales, y esto debía estar presente al sumar las ganancias obtenidas a través de cada modelo matemático. Así pues, teniendo en cuenta que los cinco modelos que se establecieron correspondían a las ganancias semanales por cada producto, se concluyó entonces que por cada uno había un bono de $7000 a la semana, y se verificó que en efecto se obtenían $35000 que eran fijos en los ingresos:

87. Marcela *– =son mil= son mil por día*
88. Camilo *– son mil por día, mil pesos por siete días*
89. Marcela *– siete por cinco treinta y cinco, =sí ahí está=*
90. Karol *– =ah sí da lo mismo=*
91. Camilo *– claro [risas]*

(Transcripción de grabación en audio N° 12, 2019)

Para finalizar, en esta primera parte del análisis de los datos cabe mencionar, que los avances que se evidenciaron en cuanto a la formulación del modelo matemático y las especificaciones sobre las variables, se relacionan con el hecho de que, para que los estudiantes tengan acceso a las definiciones matemáticas deben imitar el proceso histórico; es decir, construir definiciones en contextos empíricos para luego refinarlas y establecerlas de manera formal (Tall y Vinner, 2002, citados en Aya, Echeverry y Samper, 2016). En relación a este aspecto, Villa y Ruiz (2009) mencionan que

> El educador en matemáticas promueve la elaboración e interpretación de modelos, con el ánimo de construir un concepto matemático dotado de un significado, y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas debido a la relación que esta área del conocimiento tiene con los problemas del contexto real de los estudiantes. (p. 4)

Desde este punto de vista podría decirse que la modelación, al partir de las aplicaciones de la matemática, es una herramienta útil para tratar de imitar algunas características de la evolución histórica del concepto de función, lo cual puede resultar favorable para el aprendizaje del mismo

(Ugalde, 2014). De esta manera, teniendo en cuenta el tipo de situaciones que se usan como punto de partida en las actividades de modelación, se hace necesaria una caracterización de las mismas.

Caracterización de las actividades exploratorio-investigativas

Es natural procurar el uso de las herramientas didácticas más apropiadas para enseñar, buscando fortalecer el aprendizaje de los estudiantes; por lo que, para el aprendizaje del concepto de función se diseñaron e implementaron escenarios exploratorio-investigativos que vincularan la modelación matemática, teniendo en cuenta que como parte de la preparación de su clase y de acuerdo a los propósitos de la misma, es importante que el docente seleccione a priori las actividades que serán abordadas (Villa y Ruiz, 2009), por lo que también se establecen criterios de selección, sin dejar de lado los contextos que son representativos para los estudiantes (Villa, 2007).

Por otro lado, en cuanto a actividades que pretenden motivar la indagación y exploración, podría ser contraproducente proponer actividades que aborden contenidos matemáticos demasiado complejos, ya sea de manera explícita o implícita, porque se corre el riesgo de que los estudiantes se desmotiven (Mora, 2009), por lo que previamente se realizó una revisión de los conceptos necesarios para abordar cada actividad.

Las actividades se diseñaron pensando en dejar de lado el paradigma del ejercicio, ya que según Skovmose (2000), éste no contribuye a fortalecer el pensamiento crítico de los estudiantes, se les restringe lo que pueden hacer en el aula de clase, especialmente porque su premisa central es que sólo existe una respuesta correcta, además, teniendo en cuenta los tipos de referencias que plantea este autor, que Ponte (2004) toma como el tipo de tarea de acuerdo al contexto, la primera se asocia únicamente a las matemáticas y la segunda es cercana a la realidad.

Respecto a la caracterización de los dos primeros escenarios que se implementaron (Anexos 1 y 2), de acuerdo a la clasificación hecha por Ponte (2004), la primera se cataloga como una tarea de exploración, con un grado de dificultad accesible y una dimensión abierta, de acuerdo a Skovmose (2000) es un ambiente de aprendizaje de tipo (2). La segunda es una tarea de investigación con mayor grado de dificultad y una dimensión abierta, y constituye un ambiente de aprendizaje de tipo (4). Sin embargo, la exploración e indagación se dieron en las dos actividades.

En el primer escenario la exploración sale a flote cuando los estudiantes reconocieron lo que es perímetro y cómo usarlo para la construcción de los rectángulos, pero a su vez identificaron que no tenían claro si el cuadrado era un rectángulo, para de este modo incluirlo en la gama de posibilidades de rectángulos con 24cm de perímetro, en el siguiente fragmento de la transcripción del audio de la actividad se puede reconocer cómo los estudiantes plantean el debate para aclarar dicho aspecto

> **67.** ***Marcela-*** *pero, ¿el cuadrado se cuenta como rectángulo, no?*
> **68.** ***Camilo-*** *es que esa es la otra que la profesora nos dijo, ¿un cuadrado es un rectángulo?*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

Posteriormente, el grupo procede a la indagación, exponiendo sus puntos de vista y enlazando sus conocimientos previos con la actividad, dando argumentos a favor de considerar el cuadrado un rectángulo, cabe mencionar, que para esto procedieron a investigar en internet y además leer el artículo a través del cual se dan nociones claras para poder considerarlo de esa manera (Aya et al., 2016). Así, a través del siguiente diálogo decidieron considerar el cuadrado de 6cm * 6cm como uno de los rectángulos de 24cm de perímetro, y se pone de relieve la indagación aclarando las dudas acerca de considerar el cuadrado un rectángulo.

> **104.** ***Camilo -*** *cinco, y como damos vuelta entonces son 5 por 2, ay pero entonces, ¿vamos a tomar al 6 por 6?*

***105. Marcela -** yo creo que si*
***106. Camilo -** ¿lo tomamos?*
***107. Marcela -** yo creería, pero usted ¿qué opina?*
***108. Camilo -** cinco, entonces daría, daría 11, =11 rectángulos=*
***109. Marcela -** =el de 6, 6 no cambia= porque todos los lados son iguales…*
***110. Camilo -** porque dice la regla de los rectángulos, que todos sus ángulos son rectos*
***111. Marcela -** y el cuadrado pues… la cumple, ¿no?, =pues yo creería=*
***112. Camilo -** =… ¿pero cómo fue que usted dijo?= Que un cuadrado puede ser un rectángulo*
***113. Karol -** por eso*
***114. Camilo -** pero =todos, no todos los rectángulos pueden ser rectángulos =*
***115. Marcela -** = no todos los rectángulos pueden ser cuadrados=*
***116. David -** = no todos los rectángulos pueden ser cuadrados=*
***117. Camilo -** o sea que ese cuadrado puede ser rectángulo, y ese rectángulo cumple las leyes para ser cuadrado, podríamos tomarlo como rectángulo*
***118. Marcela -** sí, porque todos sus lados son iguales*
***119. Camilo -** entonces serían 11*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

Así mismo, relacionado con el primer proceso de exploración que realizaron los estudiantes donde reconocieron la noción de perímetro, se da otro proceso de indagación, a través del cual aclaran la manera en la que por medio de la fórmula del perímetro, teniendo la medida de uno de los lados del rectángulo, podrían determinar el valor del otro lado; es decir, al buscar la explicación de cómo se obtendría dicho valor, se obtuvieron las fórmulas auxiliares mencionadas en la anterior categoría de análisis, que quizá conllevarían a la formulación del modelo.

En el segundo escenario exploratorio-investigativo, los procesos de exploración e indagación fueron un poco más frecuentes, acorde con lo que se había proyectado a través de la caracterización, ya que se planteó que esta segunda actividad no se consideraba una tarea de exploración, sino de investigación.

Se pudo establecer que la exploración salió a flote cuando los estudiantes identificaron que a partir de hojas con el mismo tamaño se podrían construir infinitas cajas de diferente volumen, y establecieron que el modelo matemático se plantearía a partir del lado de los cuadrados que se recortaran en las esquinas de las hojas, así que a través de la indagación reconocieron que el lado del cuadrado sería la altura de la caja que se construyera, y que además como este valor era el punto de partida en dicha construcción, se podía representar con una variable. A continuación el fragmento de la transcripción donde se evidencia lo mencionado

2. ***Camilo –*** *entonces sí podemos colocar esa fórmula, o sea, que es lo que… o sea porque aquí se pueden sacar infinitas cantida… o sea, infinitas cajas de estas*
3. ***David –*** *de diferentes dimensiones*
4. ***Marcela –*** *porque =lo único que varía es la… el tamaño del cuadrado=[lado del cuadrado]*
5. ***Camilo –*** *=claro, porque podemos llegar hasta aquí hasta el puro (???)=*
6. ***Marcela –*** *o sea, el tamaño del cuadrado de cada esquina que le quitemos*
7. ***Camilo –*** *sí, exacto, entonces =sí podríamos colocar = la fórmula de que …*
8. ***Marcela -*** *=y dependiendo=, podemos hacer una fórmula general, o sea, tomando en cuenta la variación de…*
9. ***Karol –*** *=de los cuadrados=*
10. ***Camilo –*** *=de los cuadrados= que le quitamos de las esquinas*
11. ***Marcela –*** *aja … entonces tendríamos que plane… esto, plantear el largo y el ancho de acuerdo, tomando en cuenta las, lo que le quitamos de las "x"* (sic)
12. ***Camilo –*** *lo que varía de eso*
13. ***Marcela –*** *de la medida "x", o sea, pues la que es va…*
14. ***Camilo –*** *la que vamos a quitar*
15. ***Marcela –*** *sí, de la altura*
16. ***Camilo –*** *de la altura, por decirlo así, de los cuadrados de las esquinas*

<10>

17. ***Marcela –*** *o sea, sería como dibujar el, digamos la hoja rectangular, hacer las medidas y de acuerdo ahí… =o sea=*
18. ***Camilo -*** *= y a los cuadrados= colocar, nombrarlo "x" más bien*
19. ***Marcela –*** *si*
20. ***Camilo –*** *porque es una variable*
21. ***Marcela –*** *o sea, (???) y de acuerdo a eso entonces sacamos como la fórmula =del volumen= general, si*

(Transcripción de grabación en audio N° 7, 2018)

Por otro lado, en esta segunda actividad en las líneas 32 a 52 de la transcripción de la grabación en audio N° 6, mencionadas en la anterior categoría de análisis para evidenciar la manera en la que se determinó el dominio de la función que se había obtenido, los estudiantes exploraron para reconocer que el valor de la variable independiente debía tener un límite, de acuerdo con las dimensiones de la hoja a partir de la cual se construyó la caja, lo que conllevó a indagar para determinar cuál era dicho valor. Esta primera parte concluyó cuando se verificó que debía tenerse en cuenta la dimensión más grande de la hoja, para dividirla en dos partes iguales y así establecer el tamaño más grande que podían tener los rectángulos que se recortaran.

Así mismo, hay un tercer momento de exploración al definir si el modelo que han planteado los estudiantes es adecuado o no, y se genera la incertidumbre sobre si hay otra manera de hallar el volumen de la caja teniendo una de sus dimensiones; pero a través de la indagación se aclara esta duda y en efecto los estudiantes encuentran otra manera de calcular dicho volumen a partir de un solo valor (figura 6). A continuación el fragmento de la transcripción correspondiente

201. Camilo – *mmm ya, ahora sí… lo que yo pienso es, entonces tenemos las dimensiones de la hoja 24 por 17, ¿verdad?, si nos dan uno de sus lados, digamos… ¿cómo lo interpretamos?*
202. Marcela – *sí, largo, ancho ¿no?*
203. Camilo – *digamos, deme un número [sugiera un número]*
204. David – *ocho*
205. Camilo – *¿de qué? ¿ancho o largo?*
206. Karol – *=largo=*
207. Marcela – *=no pero se acuerda= que la condición está que no puede ser menor a 8.5*
208. David – *ah sí*
209. Camilo – *no, no interesa, ocho, ocho ¿verdad?, pere, ocho, ¿ocho de largo?... de largo, o sea el largo es este, este es el largo el 24 ¿cierto? ¿De 24?*
210. Karol – *sí, si si si porque =este es el ancho =*
211. Camilo – *listo, entonces hacemos 24 menos 8 que es el valor que esa persona nos dio, nos da un total de 16, 16 ¿listo?, esos 16 ¿qué hacemos? Los dividimos en 2 porque es que hay dos cuadrados en ese ancho, en ese largo, ¿sí o no?, nos da un total de 8 ¿es verdad? O sea cada cuadrado mide 8 centímetros uno de sus lados ¿si me está entendiendo más o menos?*
212. Karol – *o sea un cuadrado es de 8 y cada lado…*
213. Camilo – *24 es =el largo=*
214. Marcela – *=el largo =*
215. Camilo – *menos los 8 centímetros que nos dio* ***D,*** *ésta es la dimensión que les doy, tiene 8 centímetros de largo, entonces esos 8 centímetros son éstos, este de este lado ¿sí?, pero entonces no tenemos esto, entonces para hallar esto nosotros ya tenemos la medida total de la hoja, le descontamos eso, o sea uno y dos, o sea dividido en dos, o sea 24 menos 8 nos da lo que sobra ¿sí?, o sea esto*
216. Karol – *17*
217. Camilo – *y para coger cada uno entonces divido en dos nos da 8, 8 tiene de altura, 8 tiene de largo y 8 de la otra altura ¿sí?, entonces como nosotros sabemos que el patrón es que la altura es el mismo cuadrado que nosotros quitamos, ¿cierto? de las esquinas, entonces cada lado tiene 8 centímetros, 8, 8, 8 y aquí este, 8 centímetros, como esto*

tiene 8 y 8 son 16 del mismo, 16 centímetros pero ahora se lo descontamos al ancho que son 17 =¿cierto?=

***218. Karol –** =o sea=*

***219. Camilo –** nos da uno*

***220. Karol –** =entonces si se vale=*

***221. Camilo –** =uno de ancho=*

<3>

***222. Camilo** – y ahí ya tenemos todas las medidas para hallar el volumen*

***223. Karol –** sí*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

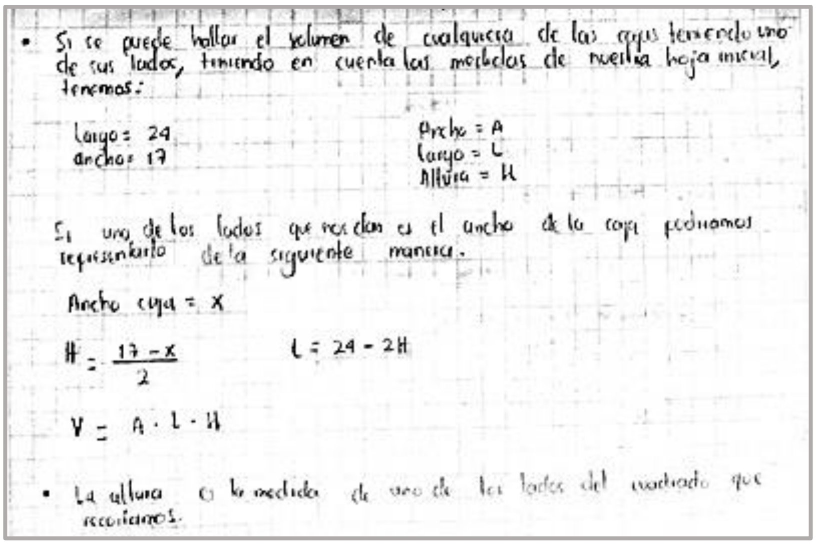


Figura 7. Otra manera de hallar el volumen de la caja. Elaboración propia

En cuanto a la tercera actividad (Anexo 3), su incorporación tuvo en cuenta el hecho de que se pueden abordar actividades bajo una referencia real, ya sea dentro del paradigma del ejercicio o de los escenarios de investigación (Skovmose, 2000), no obstante, considerando que la finalidad principal de esta investigación consistía en promover la indagación por parte de los estudiantes, se cataloga como un ambiente de aprendizaje de tipo (6), que el autor denomina como proyecto.

El trabajo por proyectos se considera uno de los principales componentes para desarrollar el espíritu crítico, ya que favorece la autonomía en los estudiantes, pues toman sus decisiones libremente sobre la solución de problemas (Aravena, et al., 2008); sin embargo, este no fue un proyecto rígido que tomara mucho tiempo a los estudiantes, o que tuviera un grado de dificultad tan elevado, ya que el tema principal en esta investigación no era el trabajo por proyectos, por lo que se tuvieron en cuenta las características principales para catalogarlo de esta manera, no obstante, se dio prioridad simplemente a la investigación y exploración que se podía promover en los estudiantes. En este caso, como se mencionó en el marco teórico, las tres actividades implementadas se catalogan a nivel general como escenarios exploratorio-investigativos, por lo que el tercer escenario no tuvo una duración muy prolongada.

En esta tercera actividad, la exploración se evidenció cuando los estudiantes reconocieron que desconocían aspectos específicos sobre la temática, como los precios de cada producto y las comisiones de venta, lo cual era indispensable para recopilar datos y formular el modelo matemático que representara la situación, que como se mencionó en la anterior categoría de análisis, fue la venta de productos de bonice. Así mismo, a través de la exploración relacionaron aspectos sociales de la actualidad, como la regulación de la venta ambulante, lo que permitió aclarar cómo se regula esta situación con los vendedores de los productos mencionados. A continuación el fragmento de la transcripción que evidencia lo anterior

3. ***Marcela –*** *pues sí, es que acá dice que la publicidad digamos, de acuerdo al nuevo producto =que ponen al carrito=*
4. ***Karol –*** *=por eso cada= cuanto es que cambian ese… y esos uniformes nunca los vuelven a cam [risas]*
5. ***Marcela –*** *que más dice… pero esto si ya es antiguo, digamos la forma, =digamos los productos=*
6. ***David –*** *=sí, porque luego eso ya no existe=*
7. ***Marcela –*** *todo esto si ya está descontinuado*
8. ***Karol –*** *y muy pronto todo [risas]*
9. ***David –*** *cual, ¿qué tienen que ver los policías?, ¿qué dice?*
10. ***Marcela –*** *regulan la venta ambulante*
11. ***Camilo –*** *jummm la competencia criminal, ¿si ve?*

12. ***Karol –*** *ahí, a ellos les dan unas firmas de donde tienen que estar, porque eso es un problema*
13. ***Marcela –*** *por la competencia, ¿no?*
14. ***Karol –*** *sí*

(Transcripción de grabación en audio N° 9, 2019)

En cuanto a la indagación, esta predominó durante el desarrollo inicial de la tercera actividad, ya que los estudiantes tuvieron que aclarar sus dudas acerca del salario de los vendedores de productos de bonice, para lo cual recurrieron a dos fuentes de información que fueron internet y un familiar de una de las integrantes del grupo; por un lado obtuvieron lo la información necesaria acerca de los bonos e incentivos para los vendedores, y por otra parte indagaron sobre la ganancia que se obtiene por la venta de cada producto, el funcionamiento de los permisos para la venta ambulante, la periodicidad con la que se supervisa la cantidad de productos vendidos, lo cual se requería para formular el modelo, teniendo en cuenta las finalidades que los estudiantes establecieron para la actividad, que se mencionan a través del siguiente fragmento de la trascripción

1. ***David*** *– bueno la finalidad de la actividad tiene dos puntos clave que son*
2. ***Karol*** *– crear un modelo para mirar, eeh cuánto gana el vendedor, un empleado normal y cuanto en bonice y cuánto necesita vender para compararse con un salario mínimo*

(Transcripción de grabación en audio N° 10, 2019)

Cabe mencionar que la exploración e indagación están implícitas en la primera etapa del ciclo de modelación, ya que los estudiantes relacionan la información sobre la venta de productos de bonice con conocimientos previos de modelos matemáticos, y además investigan para obtener la información necesaria que permita formular dicho modelo.

De esta manera además de caracterizar las actividades, finalmente se analizó la contribución que, vinculando la modelación matemática, hacen los escenarios exploratorio-investigativos en el aprendizaje del concepto de función.

Contribución en el aprendizaje del concepto de función

Como aspecto final a analizar, se consideró el aporte de los escenarios exploratorio-investigativos en el aprendizaje del concepto de función, así que para empezar, en esta tercera categoría se analizó el aprendizaje desde el punto de vista de la Educación Matemática Crítica; es decir, el aprendizaje dialógico (Alro y Skovmose, 2012), para luego analizar las representaciones de la función que salieron a flote y cómo estas pudieron dar indicios de la manera en la que el concepto se interpretó.

Los diálogos

Es de tener en cuenta que en el aprendizaje dialógico no es estrictamente necesario que se den absolutamente todos los actos dialógicos mencionados en el modelo de cooperación indagativa, sino que éste se da cuando los procesos de enseñanza y aprendizaje incluyen “una rica variedad de actos dialógicos”, además el orden en el que se explican no es el mismo orden en el que se presentan a lo largo de una actividad (Alro y Skovmose, 2012, p. 168). Cabe mencionar que la interacción que se dio en el aula de clase tuvo una intervención discreta por parte de la docente, la cual se da cuando los estudiantes están trabajando en grupo, el o la docente “se desplaza por el aula, aclara dudas, hace preguntas” (Leguizamón, 2017, p. 53), a su vez esto va en concordancia con la intención de los escenarios exploratorio-investigativos, que deja de lado cualquier actitud autoritaria para dar paso a la indagación y exploración por parte de los estudiantes, y motiva al diálogo y la interacción directa entre ellos.

En el primer escenario exploratorio-investigativo se dieron diferentes actos dialógicos como entrar en contacto, localizar, identificar, controvertir, defender y reformular. Por un lado, al abordar la actividad los integrantes del grupo establecen contacto al construir la representación de un rectángulo con 24cm de perímetro, en el siguiente fragmento de la transcripción se evidencia este acto dialógico en las líneas 7, 8 y 9, ya que los estudiantes mencionan al tiempo los valores de las dimensiones del rectángulo, lo cual indica que reconocen la idea que plantea el compañero, están en sintonía con él.

1. ***Camilo-*** *no por eso, yo =pensaria que acá los 24=*
2. ***Marcela-*** *=23 y aca uno=…*
3. ***Camilo-*** *coger los 24 cm, los dividimos en 4 ¿sí?, sería de a 12 ¿cierto? Digo…5 de a 6, 6 cm cada lado, cojo esos 6 cm y 2 de esos, como tenemos 4 y 6 cm, dos le añadimos 1 y le quitamos 1 a los otros, ¿si me entiende? O sea quedarían dos de 5 y los otros de 7, y ahí tendríamos los 4 lados, y sumando esto nos da 24*

<4>

4. ***Karol -*** *o sea…*
5. ***Camilo -*** *ese sería uno*
6. ***Karol -*** *si*
7. ***Camilo -*** *porque así tendríamos este aquí así, de 5, =5, 7 y 7=, ese sería uno y ahí podríamos empezar a jugar*
8. ***Karol -*** *= 5, 7 y 7=*
9. ***Marcela -*** *=7 y 7= mmm a si*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

Más adelante los estudiantes identifican que hay infinitas posibilidades para construir rectángulos que tengan 24cm de perímetro; sin embargo, cabe mencionar que en el siguiente fragmento de la transcripción respectiva, se reconocieron simultáneamente otros actos dialógicos

25. ***Karol -*** *ya habrían 3 opciones*
26. ***Camilo -*** *y el de 2 ya sería el de 10*

27. ***Marcela*** *- ujummmm si*
28. ***Camilo*** *- creo que no podemos más*
29. ***Marcela*** *- ¿por qué no?...ese se…*
30. ***Camilo*** *- ¿porque cual más?*
31. ***Marcela*** *- el máximo digámoslo por así decirlo =sería este=*
32. ***Camilo*** *- =el mínimo=*
33. ***Marcela*** *- sí, pero igual uno puede ponerle menos de uno… de uno… =¿no dijo usted que en decima...?, ay nooo=*
34. ***Camilo*** *- = ¿menos 1 cm?=*
35. ***Marcela*** *- debajo del uno quien va, =decimales=, sii*
36. ***Karol*** *- = ¿con decimales?=*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

Los estudiantes se encuentran en el proceso de determinar cuántos rectángulos de 24cm de perímetro se pueden construir, lo que los lleva a identificar que las dimensiones de éste pueden tomar valores decimales, así que aumentan las opciones. Así mismo, en la línea 29 de la transcripción anterior, la estudiante cuestiona lo que su compañero afirma en la línea 28, acerca de no tener más opciones, lo cual tiene que ver con el acto dialógico de controvertir, y el hecho de que él le responda preguntando qué otras opciones tendrían, conlleva a que la estudiante en las líneas inmediatamente siguientes, defienda la idea de usar decimales para las dimensiones de los rectángulos. Como derivado de esta situación, más adelante dicha idea aflora nuevamente, pero en este caso *Camilo* es objetivo y apoya a *Marcela* en la defensa de su propuesta, lo cual también se contempla en el acto dialógico de defender, ya que no solo se trata de argumentar los propios supuestos, sino que también se da cuando se pone de por medio la objetividad para dar argumentos a favor de las ideas de los otros, lo mencionado se evidencia en el siguiente fragmento de la transcripción respectiva

136. ***Marcela*** *- aja, y ya decimales si tomamos en cuenta que el ancho y el largo tiene que ser mayor a cero, y se debe cumplir que la suma de los lados sea 24, o sea que el perímetro sea igual a 24cm, serían como dos formas de ver la…*
137. ***Camilo*** *- si porque es que si los vamos a tomar decimales, entonces podemos tomar desde uno sobre 999999, o sea, hay una infinidad*
138. ***Marcela*** *- hay infinidad de combinaciones*

***139. Camilo** – sí, exacto*

(Transcripción de la grabación en audio N° 1, 2018)

Ahora, el acto dialógico de localizar hace referencia a reconocer aspectos que no se habían tenido en cuenta, o que quizá no se habían percibido, en este caso se localiza la idea de que al construir rectángulos con 24 cm de perímetro, aparece un cuadrado, y al parecer esta figura tendrá la mayor área posible con el perímetro mencionado, esto se evidencia a continuación

***42. Marcela** - o sea, en enteros, iría, este sería =el límite por así decirlo=*
***43. Camilo** - =si, el límite menor=, y el máximo sería este, porque si subimos este*
***44. Marcela** - 6, 6, 12*
***45. Camilo** - sería 6, 6 y =ya sería un cuadrado=*
***46. Marcela** - =el cuadrado=*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

Cabe mencionar que en las líneas 35 y 36, de la transcripción de la grabación en audio N° 1, así como en las líneas 42 a 46, se reconoce que se mantiene el contacto entre los integrantes del grupo, ya que hablan al tiempo comprendiendo a qué se está refiriendo el otro. Por otra parte, al localizar la idea que se puede tener un cuadrado con 24 cm de perímetro, hay incertidumbre acerca de considerar el cuadrado un rectángulo, lo que conlleva a *Marcela* a defender la afirmación hecha anteriormente en la línea 46:

***67. Marcela** - pero, ¿el cuadrado se cuenta como rectángulo, no?*
***68. Camilo** - es que esa es la otra que la profesora nos dijo, ¿un cuadrado es un rectángulo?*
***69. Marcela** - pues para mí sí lo es, o sea, pues yo me acuerdo más o menos, que, bueno a uno en la teoría le decían que ... todos los cuadrados son rectángulos, pero no todos los rectángulos son cuadrados [risas]... entonces, ¿ahí se tendría en cuenta la medida de 6, 6?*

<4>

70. Camilo - *yo creo*

(Transcripción de grabación en audio N°1, 2018)

El acto dialógico de defender que se evidenció anteriormente, relaciona las líneas 67 y 68 con el proceso de exploración abordado en la anterior categoría de análisis, en el que se establecen aspectos que se desconocen, lo cual a su vez abrió el debate para poder cristalizar la idea de que el cuadrado es un rectángulo, y esto tiene que ver con el acto dialógico de identificar, además, el hecho de aclarar las dudas al compañero *Camilo* se relaciona también con el proceso de indagación, de esto se da muestra en las siguientes líneas de la transcripción correspondiente

106. Camilo *- ¿lo tomamos?*
107. Marcela *- yo creería, pero usted ¿qué opina?*
108. Camilo *- cinco, entonces daría, daría 11, =11 rectángulos=*
109. Marcela *- =el de 6, 6 no cambia= porque todos los lados son iguales…*
110. Camilo *- porque dice la regla de los rectángulos, que todos sus ángulos son rectos*
111. Marcela *- y el cuadrado pues… la cumple, ¿no?, =pues yo creería=*
112. Camilo *- =… ¿pero cómo fue que usted dijo?= Que un cuadrado puede ser un rectángulo*
113. Karol *- por eso*
114. Camilo *- pero =todos, no todos los rectángulos pueden ser rectángulos =*
115. Marcela *- = no todos los rectángulos pueden ser cuadrados=*
116. David *- = no todos los rectángulos pueden ser cuadrados=*
117. Camilo *- o sea que ese cuadrado puede ser rectángulo, y ese rectángulo cumple las leyes para ser cuadrado, podríamos tomarlo como rectángulo*
118. Marcela *- sí, porque todos sus lados son iguales*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

En relación al debate sobre si incluir o no al cuadrado en los rectángulos con 24 cm de perímetro, también salió a flote el acto dialógico de reformular, a través del cual se aborda una idea planteada previamente, en este caso complementándola; el siguiente fragmento da muestra de que finalmente *Marcela* dio argumentos suficientes a sus compañeros para considerar al cuadrado un rectángulo, por lo que *Camilo* reformula la conclusión a la que se había llegado

142. Camilo *- entonces, tomamos en cuenta el cuadrado, =como rectángulo=*
143. David *- =como rectángulo, ya que cumple la ley…=*
144. Camilo *- =porque cum…= cumple la ley del rectángulo, de que todos sus ángulos tienen que ser rectos*

(Transcripción de grabación en audio N° 1, 2018)

En el proceso de encontrar relaciones entre las dimensiones de los rectángulos, también salen a flote varios actos dialógicos, primeramente se localiza dicha relación, que hasta cierto momento no se había tenido en cuenta, luego se identifica la idea más claramente, e inmersos en este proceso los estudiantes defienden sus ideas y reformulan las de sus compañeros:

48. ***Marcela –*** *(???) cuando la diferencia entre el ancho y el largo… ay no ¿cómo era? …*
49. ***Camilo –*** *no entiendo cuál trata de decir*
50. ***Marcela -*** *o sea cuando la diferencia… entre el largo y el ancho es menor… = mayor, es…no no=*
51. ***Karol -*** *=mayo… es, no= menor es su área*
52. ***Marcela –*** *cuando el ancho, la diferencia entre el ancho y el largo es =me…=*
53. ***Karol -*** *=menor, mayor es su…=*
54. ***Marcela -*** *=mayor=*
55. ***Camilo -*** *aaa ya le … si si*
56. ***Karol -*** *mayor es su…mayor es su área?, no*
57. ***Marcela -*** *espere, cuando el largo… la diferencia*
58. ***Camilo -*** *bueno la diferencia de éste es la mayor ¿sí o no?*
59. ***Marcela –*** *sii*
60. ***Camilo –*** *del uno y el oncee, entonces, cuando la diferencia es mayor =su área es la menor=*
61. ***Marcela –*** *=el área es menor= aja*
62. ***Camilo –*** *y cuando entre menor sea la diferencia, su área es la mayor*
63. ***Marcela -*** *=aja=*
64. ***Karol –*** *=ujum=*

(Transcripción de grabación en audio N° 2, 2018)

En las líneas 48 a 50 del fragmento anterior se evidencia la localización de la nueva relación entre las dimensiones de los rectángulos y sus respectivas áreas; en las líneas 51 a 64 se cristaliza la idea especificando en qué consiste dicha relación, en este punto cabe mencionar que esta identificación de las relaciones entre las variables tiene que ver con la primera etapa del ciclo de modelación. Por otro lado, en las líneas 52 a 56, se da el acto dialógico de reformular, ya que la estudiante *Karol* toma los indicios que le proporciona su compañera *Marcela* y los complementa.

En concordancia con el tema de determinar las relaciones entre los datos o variables de la situación, más adelante los estudiantes encuentran que si conocen el perímetro del rectángulo es posible establecer fórmulas a partir de éste, las cuales son útiles para determinar sus dimensiones, y en consecuencia su área; es decir, se identifica una relación entre el perímetro y las dimensiones de la figura en cuestión, lo cual también se relaciona con la primera etapa del ciclo de modelación, que anteriormente se analizó con la categoría respectiva, y se evidenció que condujo a plantear fórmulas auxiliares en la construcción del modelo matemático.

Ahora, durante el desarrollo del segundo escenario exploratorio-investigativo también se identificaron varios actos dialógicos. Para empezar, se localizó la idea que se podían construir infinitas cajas a partir de hojas del mismo tamaño, y lo que principalmente varía como cantidad independiente es el lado de los cuadrados que se recortan en las esquinas de dichas hojas

2. ***Camilo –*** *entonces sí podemos colocar esa fórmula, o sea, que es lo que… o sea porque aquí se pueden sacar infinitas cantida… o sea, infinitas cajas de estas*
3. ***David –*** *de diferentes dimensiones*
4. ***Marcela –*** *porque =lo único que varía es la… el tamaño del cuadrado= [lado del cuadrado]*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

El hecho de reconocer que el lado de los cuadrados podría ser la cantidad independiente en el modelo matemático, conlleva a que los estudiantes inicialmente identifiquen parcialmente cómo representar este hecho, usando la variable “x”:

17. ***Marcela –*** *o sea, sería como dibujar el, digamos la hoja rectangular, hacer las medidas y de acuerdo ahí… =o sea=*
18. ***Camilo -*** *= y a los cuadrados= colocar, nombrarlo “x” más bien*
19. ***Marcela –*** *sí*
20. ***Camilo –*** *porque es una variable*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

Sin embargo, más adelante se identifica otro aspecto relacionado con esta idea, el cual vincula el hecho de que en cada dimensión de la hoja rectangular se debe restar dos veces el lado de los cuadrados que se recortan; en este punto se cristaliza definitivamente la idea de representar a través de una letra el valor que varía en el modelo matemático, teniendo en cuenta el punto de partida en el que los cuadrados que recortaron eran de 3cm * 3cm, así que este valor se cambiaría por una variable, y en este caso nuevamente el identificar la relación entre las variables que intervienen en la situación, tiene que ver con la primera etapa del ciclo de modelación:

2. ***Camilo –*** *bueno, la fórmula que… ¿cuál es la fórmula que en sí está pensando? =porque entonces=*
3. ***Marcela –*** *= pues sería…= o sea…*
4. ***Camilo –*** *del alto… del ancho y del alto tenemos que colocarle "menos 2x"*
5. ***Marcela –*** *o sea, tomamos, o sea hacemos una… representación igual que en el punto anterior, pero en vez de tomar como 3 centímetros =ponerlo= en "x" porque pues puede ser cualquier número*
6. ***Camilo –*** *="x"=… sí*

(Transcripción de grabación en audio N° 7, 2018)

En esta segunda actividad, aparece por primera vez el acto dialógico de evaluar, a través del cual se valora lo que se ha hecho, lo que permite reconocer falencias y así tener la oportunidad de corregirlas. En las siguientes líneas se evidencia cómo los estudiantes identificaron una falla que habían tenido en los valores que tomaron para hallar el volumen de la caja:

34. ***Camilo –*** *nosotros estamos haciendo mal las medidas*
35. ***Marcela –*** *¿por qué?*
36. ***Karol –*** *=no, más bien varía es el ancho y el…=*
37. ***Camilo –*** *=porque si tomamos la medida de acá = listo, 17 centímetros, está bien, y este son 10 centímetros, 11 centímetros*
38. ***Karol –*** *es que la altura*
39. ***Camilo –*** *estamos tomando mal las medidas, porque nosotros lo tomamos de una vez completa la hoja*
40. ***Marcela –*** *es que…*
41. ***Camilo –*** *las dimensiones de la hoja*
42. ***Marcela –*** *ah sí, o sea el anterior nos quedó, no, ¿sí?*
43. ***Camilo –*** *nos quedó mal*
44. ***Marcela –*** *ujum*
45. ***Karol –*** *ah sí, porque es el volumen como tal de la caja ya hecha =no de la hoja [risas]=*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

Paso seguido proceden a establecer la manera en la que pueden corregir dicho procedimiento, y en este debate se da el acto dialógico de reformular, que empieza con una pregunta de verificación por parte de *Marcela* en la línea 48 del siguiente fragmento, lo que conlleva a que *Camilo* le explique cómo se deben corregir los valores para las dimensiones de la caja, y de este modo *Marcela* al comprender lo que su compañero quiere decir interpreta la idea que plantea, complementando lo que él dice, además en las líneas 54 a 56 se evidencia que el contacto entre los estudiantes se mantiene, precisamente porque se reconoce lo que el otro quiere decir:

48. ***Marcela*** *– o sea tendríamos que… o sea tendríamos… ¿o sea en el punto anterior tenemos que restarle esos 3 centímetros que le quitamos?*
49. ***Camilo*** *– literal*
50. ***Marcela*** *– acá =al largo y al ancho =*
51. ***Karol*** *– =o sea a la medida como tal de la…=*
52. ***Camilo -*** *=no, no= 3 centímetros no, 6 centímetros*
53. ***Marcela*** *– no porque o sea 3 al…*
54. ***Camilo - =*** *son por lado y lado= 3 y 3 son 6*
55. ***Karol -*** *=a 6, 6, ah si=*
56. ***Marcela –*** *6 al ancho y 6 al largo*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

A pesar de que *Camilo* reconoció de manera clara que se debían restar 6cm a cada dimensión de la hoja a partir de la cual se construyó la caja, en el momento de plantear este hecho de manera general, es decir, al formular el modelo matemático que representara lo dicho, el estudiante acudió al acto dialógico de controvertir, cuestionando por qué debía escribirse “2x” en la expresión, lo cual derivó en la defensa que hizo *Marcela* de la idea que ella había propuesto, esto se evidencia a continuación

21. ***Camilo –*** *entonces sería, lo que yo pienso es “x” por 24 menos “2x”, ¿sí?*
22. ***Marcela –*** *ujum*
23. ***Camilo –*** *eso normal, así, por 17 menos*
24. ***Marcela –*** *“2x”*
25. ***Camilo*** *– “2x”, ¿por qué “2x”?*
26. ***Marcela*** *– porque… se quitan de lado a lado los, la medida del cuadrado*
27. ***Camilo*** *– exacto*
28. ***Karol –*** *ahí ya varía… = para cualquiera…varía acá este número =*

(Transcripción de grabación en audio N° 7, 2018)

En este proceso de representar el lado de los cuadrados a través de una letra, en el siguiente fragmento, en la línea 32 se localiza la idea de que el valor de esta variable debería estar entre ciertos números, lo cual le daría más lógica a la expresión, teniendo en cuenta los datos que originaron el modelo matemático; esto a su vez conllevó en las líneas 33 a 48, a identificar dichos valores que establecían el dominio de la función que se había obtenido:

32. ***Camilo*** *– = ¿o sea hasta= hasta qué valor podríamos coger ese "x"? , ese debe tener un límite*
33. ***Marcela*** *– ajah*
34. ***Karol*** *– entonces toca hacerle…*
35. ***Camilo -*** *"x" debe llegar, o sea hasta aquí, o sea donde llegue aquí, antes de llegar a… al centro de acá, tiene que ser menor a ese número*
36. ***Marcela –*** *o sea, el … espere*
37. ***Camilo –*** *o sea el menor, 17 dividido en 2*
38. ***Marcela –*** *pero ahí…*
39. ***Camilo –*** *17 dividido en 2 sería 8.5, ¿cierto? Entonces tiene que ser menor que 8.5, no puede =ser igual a 8.5=*
40. ***Marcela –*** *= y mayor a cero=*
41. ***Camilo –*** *y mayor que cero*
42. ***Marcela –*** *porque tampoco puede quedar en cero*
43. ***Camilo*** *– sí, exacto, debe ser una condición esa*
44. ***Marcela*** *– y el otro… pues con el otro… lado igual, ¿no?, 24, ¿no?*
45. ***Camilo*** *– a 24, no*
46. ***Marcela*** *– ¿no?*
47. ***Camilo*** *– no porque es que si llega hasta aquí, porque estamos restando =es cuadrados=*
48. ***Marcela*** *– = ah sí sí=*

(Transcripción de grabación en audio N° 7, 2018)

En relación con el hecho de identificar que la variable independiente solo podía adoptar ciertos valores, la docente realiza algunas preguntas a los estudiantes acerca de dichos valores, teniendo en cuenta que no podía estar presente de manera permanente durante el desarrollo de la actividad, así que no presenció el momento exacto en el que se delimitó el dominio de la función, y en este caso *Marcela* apoya a su compañero *Camilo* en la defensa de la idea que planteó él anteriormente; este acto dialógico de defender se evidencia a continuación:

115. ***Docente –*** *se puede con esto, se puede con este paréntesis, lo mismo en el 8.5, el 8.5, ¿puede adquirir ese valor? ¿el "x" puede adquirir ese valor?*
116. ***Camilo –*** *= no = menor*
117. ***Marcela –*** *= no =*
118. ***Docente – ¿****no lo puede tomar?, ok, tengo una pregunta ¿cuál es el argumento para decir que va hasta 8.5?*
119. ***Camilo -*** *porque nuestra medida de la hoja es de 17, ¿sí? Entonces qué cogimos, 17 dividido en 2*
120. ***Docente –*** *ok =a bueno=*
121. ***Camilo – =****entonces= los cuadrados tiene que, o sea llegan hasta ese punto pero no pueden tomar el 8.5*
122. ***Docente -*** *¿qué pasa si toman el 8.5?*
123. ***Marcela –*** *quedaría la hoja doblada ¿no?*
124. ***Camilo –*** *sí, o sea no habría, no sería un rectángulo*
125. ***Docente –*** *¿no sería un rectángulo?*
126. ***Marcela – =*** *no se podría=*
127. ***Camilo – =****no sería una caja=*
128. ***Marcela –*** *sí, =no se podría armar=*

(Transcripción de grabación en audio N° 7, 2018)

Otro acto dialógico que se evidenció durante el desarrollo de este segundo escenario exploratorio-investigativo, fue el de identificar; en este caso se cristaliza una segunda manera de hallar el volumen de una caja conociendo una de sus dimensiones y el tamaño de la pieza rectangular a partir de la cual se construyó, a pesar de que en la línea 273 los cálculos no se hicieron correctamente, ya que el ancho de la caja sería de 1cm, y por otro lado, lo que obtuvieron no fue estrictamente un modelo matemático que depende de una única variable, sino un conjunto de fórmulas que del mismo modo permiten obtener el volumen de la caja; además esto tiene que ver con la caracterización de las actividades, ya que esta tenía una dimensión abierta y esto implica que los estudiantes podían determinar diversas formas de dar solución a la situación; todo lo mencionado se puso de relieve en las siguientes líneas de la transcripción correspondiente:

257. Camilo – *ahora, lo que entendimos entonces del… si nos dan uno de sus lados podemos hallar, o sea, los demás lados con la hoja que tenemos ¿cierto?*
258. ***Docente –*** *puede ser un punto de partida, usted conoce cuánto mide la hoja*
259. ***Camilo –*** *exacto, sabemos cuánto mide la hoja, entonces decimos el largo tenemos de 24 centímetros, 24 y el ancho 17 ¿sí?*
260. ***Docente –*** *sí*

261. **Camilo –** *digamos nos dan un enunciado "x" de que el largo es de 8 centímetros*
262. **Docente –** *el largo de… ¿la caja?*
263. **Camilo –** *de la caja*
264. **Docente –** *ah ok*
265. **Camilo –** *de la caja es de 8 centímetros, halle el resto de sus lados, basándonos en la medida de las hojas, =de la hoja= ¿sí?*
266. **Docente –** *=de la…= ok*
267. **Camilo –** *entonces, la ca… o sea no sabemos cómo plantear la fórmula pero tenemos la esta [la idea], entonces tenemos el largo que nos dan de la caja y de la hoja, entonces yo lo que hice fue 24 menos 8*
268. **Docente –** *ok*
269. **Camilo –** *nos dan dos restantes [corrige], un restante, lo cual lo divido en dos porque tenemos dos cuadrados en cada lado, entonces nos da 8, =como=*
270. **Docente –** *= ¿a qué equivaldría?=*
271. **Camilo –** *nos equivaldría a la altura y a un, uno de sus lados del cuadrado, como sabemos que todos los cuadrados son iguales entonces, todas las alturas, o sea todas las esquinas y cuadrados son de 8 centímetros, ahora le descontamos el ancho, 17 menos 8*
272. **Docente –** *sí*
273. **Camilo –** *nos da… listo, este quiere decir que ya tenemos otro de sus lados que es el ancho de 9 centímetros en caja, y ya con eso podemos hallar el volumen*

(Transcripción de grabación en audio N° 7, 2018)

Durante el desarrollo de la tercera actividad también se evidenciaron algunos actos dialógicos. Inicialmente, al establecer la manera en la que se recolectarían los datos, y cuáles se tendrían en cuenta para el modelo matemático, uno de los estudiantes cuestiona qué se haría con los datos que no se iban a tener en cuenta para el mismo, acto dialógico que se denomina controvertir, y este a su vez se derivó en el acto dialógico de defender, ya que otros dos integrantes del grupo argumentan por qué no se considerarían datos sobre los obsequios en el modelo matemático:

57. **Camilo** – *y los bonos, ¿qué hacemos con los bonos?*
58. **David -** *¿cuáles?, los de que si…*
59. **Karol –** *¿lo del plan padrino y toda esa vaina?*
60. **Camilo** – *lo del plan padrino, lo del mercado para ellos, lo de…*
61. **Karol** – *pero lo del mercado no tiene mucha relevancia, ¿o sí?*
62. **David -** *=lo del plan padrino=*
63. **Karol** – *=pues es que = lo del mercado es más que todo*
64. **Camilo** – *no porque esos son obsequios ¿no?*
65. **Karol** – *sí, si van todos los días a trabajar les dan el mercado a final de mes y si no, si faltan un día ya pierden el mercado*

(Transcripción de grabación en audio N° 10, 2019)

Este acto dialógico de defender se evidencia más adelante, cuando la docente solicita a los estudiantes una explicación sobre los modelos matemáticos que plantearon, donde los estudiantes argumentan por qué formularon cinco modelos y qué es lo que representa cada uno, lo cual da muestra de que hay claridad respecto a lo que plantean y las intenciones que fijaron de la actividad:

20. ***Docente –*** *a ok, bueno, respecto a los, a estos modelos que tiene acá escritos, todas estas expresiones, ¿cómo funciona? ¿qué pueden decirme de eso? ¿me los explicarían?*
21. ***Karol –*** *pues es reemplazar lo que llevaron de cada producto por los 160 que es lo que ganan por cada producto*
22. ***Marcela –*** *La comisión de cada producto*
23. ***Docente - ¿****qué producto?*
24. ***Camilo –*** *por ejemplo*
25. ***Docente – ¿****por qué hay cinco expresiones?, ustedes hablan…*
26. ***Karol – =*** *porque son cinco productos =*
27. ***Marcela – =*** *porque son cinco productos = diferentes*
28. ***Docente – ¿****ese a qué producto responde?*
29. ***Karol –*** *el de las =popetas grandes=*
30. ***Camilo – =****popetas grandes= son "a", popetas pequeñas "b"*
31. ***Marcela –*** *"a" es igual a "x" por 160 y las pequeñas "x" por 80, bonice pequeño "x" por 70*

(Transcripción de grabación en audio N° 11, 2019)

Ahora, teniendo en cuenta que el acto dialógico de reformular hace referencia a la repetición de una oración haciéndole ajustes, o a complementar las ideas de los compañeros, en el siguiente fragmento en la línea 96, el estudiante reformula lo que su compañera dice en la línea anterior acerca del valor que se reemplaza en los modelos matemáticos que se plantearon, lo cual también pone de relieve el hecho de que se mantiene el contacto en el equipo de trabajo, ya que los estudiantes están conectados, y comprenden a lo que se refieren sus compañeros:

94. ***Docente –*** *es decir, esto va a responder a la cantidad vendida por producto ¿al mes?*
95. ***Karol –*** *al mes*
96. ***Camilo -*** *al mes, al día o a la semana*
97. ***Docente -*** *ah el modelo funciona con cualquiera*
98. ***Marcela –*** *sí*

(Transcripción de grabación en audio N° 11, 2019)

Así mismo, en el siguiente fragmento se reconocieron los actos dialógicos de localizar y controvertir, por un lado, los estudiantes reconocen un aspecto que no habían tenido en cuenta en la formulación de los modelos matemáticos, y es que si al vendedor de productos de bonice le dan un bono de $5000 diarios, quiere decir que por cada producto hay un bono de $1000 diarios ya que son cinco productos, pero a su vez, hay una estudiante que cuestiona cómo pueden llegar a sumar $1000 diarios un total de $35000 a la semana:

61. ***Camilo –*** *aunque mejor dicho por día son 1000 pesos por producto*
62. ***Marcela –*** *¿por día?*
63. ***Camilo –*** *claro*
64. ***Marcela –*** *mil pesos ¿cómo?*
65. ***Camilo –*** *claro, si me dan 5000 y son cinco productos*
66. ***Karol –*** *ah sí*
67. ***Marcela –*** *¡ay sí!*

(Transcripción de grabación en audio N° 12, 2019)

A pesar de que en el fragmento anterior en la línea 64 la estudiante cuestiona el planteamiento de su compañero, no obtiene una explicación clara, por lo que se ve obligada a cuestionarlo nuevamente; esto conlleva a que su compañero defienda su idea, defensa que se ve apoyada por otra integrante del grupo, así que juntos explican a la compañera el funcionamiento del modelo y la razón por la que un bono de $1000 diarios por producto suma un total de $35000 semanales, que representan los $35000 por concepto de un bono diario de $5000, todo esto se refiere respectivamente a los actos dialógicos de controvertir, defender e identificar, a continuación el fragmento que evidencia lo mencionado:

83. ***Karol –*** *son 5000 usted está diciendo que es mil por cada producto*
84. ***Camilo –*** *exacto, entonces ¿si son siete días?*
85. ***Karol -*** *¿por qué va a dar 7000?*
86. ***Camilo*** *– porque =siete por uno =*
87. ***Marcela*** *– =son mil= son mil por día*
88. ***Camilo*** *– son mil por día, mil pesos por siete días*
89. ***Marcela*** *– siete por cinco treinta y cinco, =sí ahí está=*

90. Karol *– =ah sí da lo mismo=*
91. Camilo *– claro [risas]*

(Transcripción de grabación en audio N° 12, 2019)

Ahora, luego de determinar los actos dialógicos que emergieron en el desarrollo de los escenarios exploratorio-investigativos, se revisó cómo durante el proceso estas actividades contribuyeron para que emergieran las diferentes representaciones de la función, teniendo en cuenta que estas también son importantes en su aprendizaje.

La función y sus representaciones

Se consideró relevante analizar qué representaciones de la función surgieron a partir de una misma situación, teniendo en cuenta que este concepto normalmente se enseña abordando sus diversas representaciones de manera aislada, sin permitir que se conceptualice la función como una relación de correspondencia entre dos conjuntos ni como una relación entre variables (Hitt, 2003), dejando de lado también lo necesarias que son las representaciones y la matemática en contexto para la construcción del concepto de función (Hitt, 2002).

En el primer escenario exploratorio-investigativo se pueden rescatar dos representaciones, que aunque no son específicamente de la función que se buscaba como modelo matemático, permitieron establecer relaciones entre las variables que intervenían en la situación, y esto también se considera útil para lograr una mejor interpretación y aprendizaje del concepto de función. Por un lado, se tiene una representación tabular, que se usó para evidenciar las dimensiones de diferentes rectángulos, la diferencia entre éstas y las respectivas áreas, y por otra parte también se realizó una gráfica que representaba de manera más clara el comportamiento entre estos datos (figura 7); es decir, a pesar de que no se llegó a formular un modelo que permitiera hallar el área de cualquiera de los rectángulos de 24 cm de perímetro, la representación tabular que se hizo de los datos, permitió reconocer una relación entre las variables, y además al tomar dos columnas de la tabla, ya sea el ancho o el largo de cada rectángulo, con su respectiva área, está implícita la representación de la función de la que se buscaba su representación simbólica.

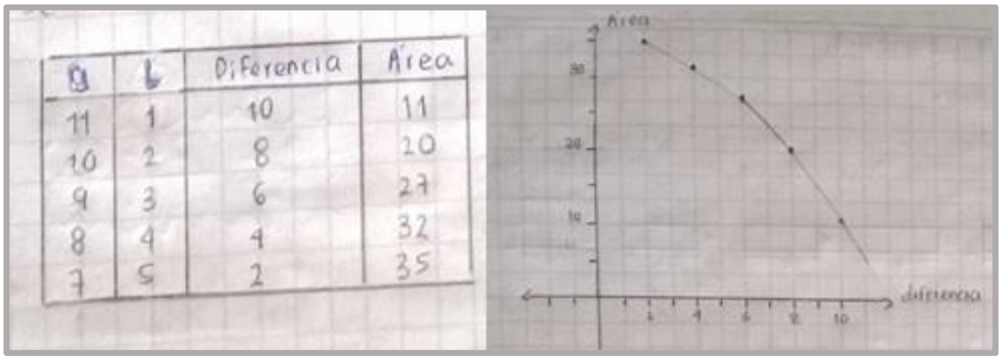


Figura 8. Representaciones del comportamiento de los datos. Elaboración propia

En este caso, es de tener en cuenta que el hecho de que aparezca la representación en el plano cartesiano, a pesar de que no es la representación específica de la función para el área de los rectángulos de 24cm de perímetro, esta no aparece de forma mecánica, sino que tiene una intención específica de representar determinada situación (Silva, 2010). Por otra parte, de acuerdo a lo evidenciado en el desarrollo de los escenarios exploratorio-investigativos, la función se interpretó como una dependencia entre variables, en esta primera actividad se relacionó el hecho de que el área de los rectángulos dependía específicamente de sus respectivas dimensiones, aunque no se manifestó de manera explícita, la representación de los datos en la tabla da a entender esto.

Respecto a la segunda actividad, no se dieron representaciones tabulares ni gráficas, solo la representación simbólica de la función, en este caso diseñada para hallar el volumen de cualquiera de las cajas que se podrían construir a partir de una hoja de 17cm * 24 cm (Figura 8), pero además se estableció el dominio de la función, esto se considera relevante ya que la expresión simbólica permite usar variables para representar los datos de la situación de donde se originó el modelo matemático y el hecho de delimitar los valores que puede tomar la variable independiente, da muestra de una interpretación de la situación, donde se relacionan las variables que intervienen en esta, validando la representación simbólica con los datos iniciales.

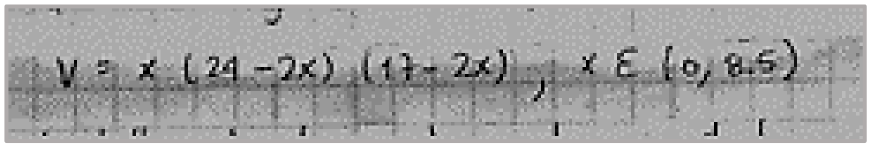


Figura 9. Representación simbólica de la función del volumen de la caja

En cuanto a la manera de ver la función, en esta actividad se reconoció que el volumen de la caja dependía del lado de los cuadrados que se recortaban en la esquina de la hoja para su construcción; es decir, nuevamente se puede decir que se interpretó la función como una dependencia entre las variables, lo cual se evidenció específicamente en el siguiente fragmento de la transcripción correspondiente

8. ***Marcela*** *- =y dependiendo=, podemos hacer una fórmula general, o sea, tomando en cuenta la variación de…*
9. ***Karol –*** *=de los cuadrados=*
10. ***Camilo –*** *=de los cuadrados= que le quitamos de las esquinas*
11. ***Marcela –*** *aja … entonces tendríamos que plane… esto, plantear el largo y el ancho de acuerdo, tomando en cuenta las, lo que le quitamos de las "x"*
12. ***Camilo –*** *lo que varía de eso*
13. ***Marcela –*** *de la medida "x", o sea, pues la que es va…*
14. ***Camilo –*** *la que vamos a quitar*
15. ***Marcela –*** *sí, de la altura*
16. ***Camilo –*** *de la altura [el lado], por decirlo así, de los cuadrados de las esquinas*

(Transcripción de grabación en audio N° 6, 2018)

Finalmente, en la tercera actividad se evidenciaron tanto la representación gráfica como la simbólica; por ejemplo, en el caso de las popetas grandes, se tiene la respectiva función como modelo matemático, así como el gráfico que la representa (figura 11). De la misma manera se representaron las funciones correspondientes a los otros cuatro productos, popetas pequeñas, bonice pequeño, bonice sencillo y bonice doble. En este caso se obtuvo cinco funciones lineales, en las cuales la variable independiente corresponde a la cantidad de productos vendidos en una semana, como lo concluyen los estudiantes (figura 10).

> Cada una de las gráficas nos demuestra que los modelos de los cinco productos son modelos lineales que varían de acuerdo a la cantidad de productos vendidos a la semana. Los valores de las variables, es decir, de la cantidad de productos, es mayor a cero.

Figura 10. Conclusión de los estudiantes respecto a los modelos matemáticos obtenidos

- **Popetas grandes:**

g: Cantidad de popetas grandes vendidas por semana.

P (g) = (160 * g) + 7000

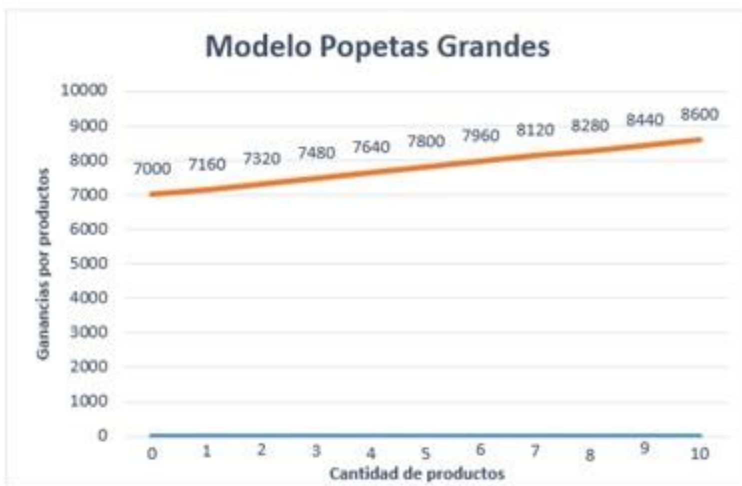


Figura 11. Representación simbólica y gráfica de la función correspondiente a los ingresos

Así mismo, a pesar de que no se dio la representación tabular de manera específica, los estudiantes muestran la correspondencia entre los valores de las variables determinando las ganancias para ciertas cantidades de productos vendidos (figura 12)

- Popetas grandes: P (86) = (160 * 86) + 7000 = 20760
- Popetas grandes: P (62) = (160 * 62) + 7000 = 16920
- Popetas grandes: P (53) = (160 * 53) + 7000 = 15480
- Popetas grandes: P (31) = (160 * 31) + 7000 = 11960
- Popetas grandes: P (77) = (160 * 77) + 7000 = 19320
- Popetas grandes: P (34) = (160 * 34) + 7000 = 12440
- Popetas grandes: P (109) = (160 * 109) + 7000 = 24440
- Popetas grandes: P (52) = (160 * 52) + 7000 = 15320

Figura 12. Cantidad de popetas grandes vendidas y sus respectivas ganancias

De este modo, el hecho de mencionar que el modelo lineal varía de acuerdo a la cantidad de productos vendidos semanalmente (figura 10) da muestra de que nuevamente se interpretó la función como una relación de dependencia entre las variables que intervienen en la situación, lo cual se evidenció también en la grabación de audio N° 11, fragmento que se incluye a continuación

79. ***Camilo*** – *entonces la unidad de tiempo no va a interesar*
80. ***Marcela – =*** *pues eso uno la…=*
81. ***Camilo – =*** *porque si yo coloco = las… cuántos vendió semanal y coloco la del mes, no va variar o sea lo único que varía es en la cantidad ¿sí?, pero entonces no hay ningún cambio*

(Transcripción de grabación en audio N° 11, 2019)

En el caso de esta tercera actividad, se podría decir que los estudiantes se relacionaron con las diferentes representaciones de la función, y las interpretaron de acuerdo a la situación de la que se originó el modelo matemático, lo cual contribuye en el aprendizaje del concepto de función, ya que como mencionan Azcárate y Deulofeu (1996), el desarrollo de las habilidades para reconocer e interpretar las representaciones de un concepto en matemáticas, influyen positivamente en el aprendizaje del mismo.

Conclusiones

En esta investigación las conclusiones se abordan atendiendo a contemplar lo que se generó a partir de un proceso que implicó en primer lugar, reflexionar sobre mi propio quehacer docente como profesora de matemáticas, y que permitió delimitar el objeto de investigación y su perspectiva de análisis.

De este modo, el desarrollo de las actividades implementadas sugiere en primer lugar, que cuando los estudiantes reconocen diferentes ámbitos en los que se pueden aplicar las matemáticas, en algunos casos cercanos a su cotidianidad, pueden incluso relacionar aspectos sociales de la actualidad; en este caso, salió a flote el tema de las sanciones a los vendedores ambulantes y los compradores, lo cual enriquece mi práctica docente, ya que ratifica lo importante que es salir del paradigma del ejercicio para fortalecer el aprendizaje de los estudiantes y canalizar sus intereses a través de las matemáticas; es decir, este tipo de situaciones contribuyen a (re)significar dicha práctica (Jiménez, 2005), dándome la oportunidad de interpretar de una manera distinta lo que, como docentes, ejecutamos en el aula de clase.

Frente al reconocimiento de la modelación en el aprendizaje del concepto de función, desde la primera etapa del ciclo de modelación se puede relacionar la contribución al reconocimiento de la idea de variación entre dos cantidades, lo cual se relaciona con el concepto en mención (Posada y Villa, 3006). Así mismo, teniendo en cuenta que el punto de partida en la modelación matemática son las aplicaciones, a través de estas se les facilita a los estudiantes delimitar e interpretar el dominio de una función.

Cuando los estudiantes tienen acceso a los diferentes datos que se originan de determinada situación, y además hay claridad acerca de la manera en la que surgen, puede evidenciarse cómo la modelación contribuye positivamente en la identificación y comprensión de cantidades dependientes e independientes, así como las relaciones de variación entre estas, lo cual interviene en el concepto de función. Además, el fortalecimiento de las habilidades de los estudiantes frente a cada actividad es progresivo; lo cual permite recalcar que si el estudiante se relaciona con un concepto desde un contexto empírico, esto le permite pulirlo poco a poco hasta llegar a formalizarlo, como lo afirman Tall y Vinner (2002, citados en Aya, Echeverry y Samper, 2016).

El hecho de involucrar a los estudiantes en situaciones reales que se pueden interpretar y solucionar a través de las matemáticas, hace referencia al proceso histórico que ha vivido el concepto de función, ya que éste surgió a raíz de lo necesario que era entender fenómenos naturales y situaciones de la cotidianidad (Ugalde, 2014). Así que la modelación es una herramienta importante para favorecer el aprendizaje del mismo desde sus aplicaciones, ya que también contribuye a imitar, de cierta forma, el proceso investigativo que giró en torno a su formalización, por lo que es de utilidad relacionarla con los escenarios exploratorio-investigativos, los cuales propician precisamente la exploración e indagación; además, la modelación en sí misma contribuye de igual forma en estos aspectos, debido a que no es lo mismo construir el modelo que contar con este desde el comienzo, ya que la misión de construirlo no es sencilla (Silva, 2010).

Al implementar los escenarios exploratorio-investigativos a través de la modelación matemática salen a flote varios actos dialógicos, que de acuerdo con Alro y Skovmose (2012) favorecen el aprendizaje dialógico, evidenciando que los estudiantes reformulan sus ideas teniendo en cuenta los planteamientos de sus compañeros, los cuales también apoyan o refutan objetivamente, fortaleciendo su aprendizaje al relacionar conocimientos previos con las nuevas temáticas; en este caso relacionadas con la modelación y el concepto de función, lo cual pone de relieve que el diálogo como proceso de interacción social, puede influir positivamente en el aprendizaje de las matemáticas.

La indagación que se deriva de los escenarios exploratorio-investigativos se relaciona, hasta cierto punto, con el acto dialógico de identificar, a través del cual se dan explicaciones y se cristalizan las ideas; es decir, el proceso de indagar tiene que ver con la búsqueda de explicaciones, y el acto dialógico de identificar, las concreta. Sin embargo, se identifica una diferencia entre los procesos mencionados, y es que no siempre identificar va de la mano con indagar, ya que en cuanto al acto dialógico se refiere, no siempre se da con el fin de aclarar dudas, porque puede ser que las ideas ya se hayan planteado, pero no de una manera clara. Aun así, sigue existiendo una relación ya que cuando se da la identificación tiene que ver con las explicaciones que se dan, las cuales están vinculadas al por qué de las cosas, y el hecho de explicar favorece el desarrollo de las matemáticas (Bishop, 1999, citado en Silva, 2010).

Por otro lado, la implementación de este tipo de actividades a través de la modelación, deja de ver la función como un ente abstracto, y más bien interpretarse como uno que se relaciona con la idea de variación y cambio entre dos variables; es decir, como un modelo matemático (Posada & Villa, 2006). En este mismo sentido, las representaciones de una función también juegan un papel importante en el aprendizaje del concepto, ya que se pueden interpretar de manera similar como una regla de correspondencia o como una relación de dependencia entre dos cantidades que varían.

Finalmente, cabe mencionar que al cambiar nuestros puntos de vista, es posible percibir cosas que estaban delante de nosotros, pero quizá no era posible reconocerlas porque permanecemos atados a ciertos patrones (Mariotti, 2000, citado en Salett & Hein, 2004). Sin embargo, como menciona Skovmose (1999), para lograr una comprensión de lo que sucede en la educación matemática, se debe ser prudente al creer en todo lo que se percibe, porque la realidad no siempre es como parece, y aun así lo que es real es muy difícil de ver. Además, como docentes nos falta mucho por aprender a analizar en los procesos de aprendizaje de nuestros estudiantes (Cantoral, 2001).

Referencias

Acosta, J. (2005). Tránsto entre representaciones en Matemáticas. ¿Pensamiento global o local? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18* (págs. 5-10). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Alro, H., & Skovmose, O. (2012). Aprendizaje dialógico en la investigación colaborativa. En P. Valero, & O. Skovmose, *Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (págs. 149-171). Bogotá: Una Empresa Docente.

Álvarez, C., & San Fabián, J. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa. *Gazeta de antropología, 28*(1).

Andrew, P. (2010). La identidad y el aprendizaje: una perspectiva social. *Multidisciplina, 6*, 5-13.

Araújo, J. (2009). Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 55-68.

Aravena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos Matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(1), 49-92.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, & l. Moreno, *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (págs. 97-140). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Aya, O., Echeverry, A., & Samper, C. (2016). ¿Es el cuadrado un rectángulo? *Sophia, 12*(1), 139-158.

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas.* Madrid: Síntesis.

Blum, B., & Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application, 1*(1), 45-58.

Bustamante, A. (2006). Educación, compromiso social y formación docente. *Revista Iberoamericana de Educación, 37*(4), 1-8.

Bustos, A., Bustos, G., & Novoa, Y. (2013). Propuesta de ambientes de aprendizaje para la promoción de la modelación matemática desde la perspectiva crítica. *Educación Científica y Tecnológica, Edición Especial*, 249-254.

Camarena, P. (2012). La matemática en el contexto de las ciencias y la modelación. *Cuadernos de investigación y formación en Educación Matemática*(10), 183-193.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Trabajo de grado, Doctorado en Matemáticas, Universidad de Valencia.

Camelo, F., Perilla, W., & Mancera, G. (2016). Prácticas de modelación matemática desde una perspectiva sociocrítica con estudiantes de grado undécimo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *9*(2), 67-84.

Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del Cálculo basada en la cognición. *Publicaciones Centroamericanas*, *7*, 391-410.

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la Matemática en el Nivel Superior. *Revista Electrónica Sinéctica*(19), 3-27.

Cárdenas, Y., & Muñoz, D. (2014). *Educación Matemática Crítica y Análisis Didáctico: una propuesta de construcción de saberes matemáticos en contextos de conflicto social.*

Trabajo de grado, Maestría en Educación Matemática, Universidad de Medellín, Colombia.

Cisterna, F. (2005). Categorización y triangulación como procesos de validación del conocimiento en investigación cualitativa. *Theoría*, *14*(1), 67-71.

D'Amore, B. (2006). Contrato Didáctico. En B. D'Amore, *Didáctica de las matemática* (págs. 113-135). Bogotá: Corporación Editorial Magisterio.

Dewey, J. (1998). *Democracia y educación. Una introducción a la filosofía de la educación.* (L. Luzuriaga, Trad.) Madrid, España: Morata (Original en inglés, 1916).

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Fionrentini, D., & Lorenzato, S. (2010). *Investigación en Educación Matemática.* (A. Jiménez, Trad.) Brasil: Autores Asociados LTDA. (Original en Portugués).

Font, V. (2011). Funciones. En J. Goñi, J. Barragués, M. Callejo, J. Fernández, S. Fernández, V. Font, & G. Torregrosa, *Matemáticas, Complementos de formación disciplinar* (págs. 145-185). Barcelona: Graó.

Freire, P. (2006). *Pedagogía de la Autonomía: saberes necesarios para la práctica educativa* (Original en Portugués, 1966 ed.). (G. Palacios, Trad.) México: Siglo XXI.

Garnica, A. (2005). A História Oral como recurso para a pesquisa em Educação Matemática: um estudo do caso brasileiro. *Anais do V CIBEM.* Porto.

Gascón, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. *Suma*, *26*, 11-21.

Giroux, H. (1989). Introducción: la alfabetización y la pedagogía de la habilitación política. En P. Freire, & D. Macedo, *Alfabetización. Lectura de la palabra y lectura de la realidad* (págs. 25-50). Barcelona: Paidós Ibérica S.A.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., & De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de las Matemáticas desde un enfoque Ontosemiótico. *Enseñanza de las ciencias, 27*(1), 59-76.

Gómez, P., & Valero, P. (1995). La potenciación del sistema de educación matemática en Colombia. *IX Comité Interamericano de Educación Matemática CIAEM* (págs. 1-10). Bogotá: Una Empresa Docente.

González, P. (1991). Historia de la Matemática: integración cultural de las Matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las ciencias, 9*(3), 281-289.

Gonzalez, P. (2004). La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma, 45*, 17-28.

González, P. (2015). *Dificultades en el aprendizaje de funciones.* Trabajo de grado, Maestría en formación del profesorado en Educación Secundaria, Universidad de Cantabria.

Guzmán, M. (1992). Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. *Simposio Iberoamericano sobre Educación Matemática*, (págs. 9-34). Buenos Aires, Argentina.

Hein, N., & Salett, M. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. *Memorias del V festival internacional de Matemática*, (págs. 1-25).

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación.* México: Mc Graw Hill.

Hitt, F. (2002). *Funciones en Contexto.* México: Pearson Educación.

Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del Cálculo. *Encuentro de profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior, Universidad Michoacan de San Nicolás de Hidalgo*, (págs. 1-25). Morelia, México.

Jiménez, A. (2005). *Formación de profesores de matemática: aprendizajes recíprocos Escuela-Universidad.* Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia: Buhos Editores.

Jiménez, M., & Areizaga, A. (2001). Refelxiones acerca de los obstáculos que aparecen, en la enseñanza de las matemáticas, al pasar del bachillerato a la Universidad. *IX Jornada de ASEPUMA.*

Latorre, A. (2003). El profesorado como investigador. En A. Latorre, *La investigación-acción conocer y cambiar la práctica educativa* (págs. 7-21). Graó.

Leguizamon, F. (2017). *Evolución de los patrones de interacción comunicativa de los docentes de matemáticas caso UPTC.* Tesis de Doctorado, Doctorado en Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja.

Leithold, L. (1998). Funciones como modelos matemáticos. En L. Leithold, *El cálculo* (págs. 20-28). México: Oxford University Press.

Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional. *Conferencia invitada en la XIII Jornada de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas -JAEM.* Granada.

López, J., & Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 308-318). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Martínez, J. (2001). Arqueología del concepto "compromiso social" en el discurso pedagógico y de formación docente. *Revista electrónica de investigación educativa*, *3*(1), 1-28.

Martinez, P. (2011). El método de estudio de caso. Estrategia metodológica de la investigación científica. *Revista científica Pensamiento y Gestión*, (20), 165-193.

Maza, C. (1994). Historia de las Matemáticas y su enseñanza: un análisis. *Suma*, *17*, 17-26.

Mesa, M. (2008). *El concepto de función cuadrática: un análisis de su desarrollo histórico.* Trabajo de grado. Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. Universidad de Antioquia.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia - MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares.* Bogotá, Colombia.

Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa.* Guía Didáctica. Universidad Surcolombiana, Neiva, Colombia.

Mora, D. (2009). Apectos pedagógicos y didácticos sobre el método de proyectos. En D. Mora, *Didáctica de las matemáticas desde una perspectiva crítica, investigativa, colaborativa y transformadora* (págs. 149-234). La paz: Fondo Editorial Ipasme.

Morales, J., & Peña, L. (2013). Propuesta metodológica para la enseñanza del Cálculo en Ingeniería. *VII CIBEM*, (págs. 577-587). Montevideo, Uruguay.

Orey, D., & Rosa, M. (2007). A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica. *Horizontes, 25*(2), 197-206.

Perry, P., Valero, P., Castro, M., Gómez, P., & Agudelo, C. (1998). Visión general de la problemática de las matemáticas escolares en Colombia. En P. Perry, P. Valero, M.

Castro, P. Gómez, & C. Agudelo, *Calidad de la Educación Matemática en Secundaria. Actores y procesos en la Institución Educativa* (págs. 1-15). Bogota, Colombia: Una empresa docente.

Ponte, J. (2004). Problemas y investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. Giménez, L. Santos, & J. Ponte, *La actividad matemática en el aula* (págs. 25-34). Barcelona: Graó.

Ponte, J. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Posada, F., & Villa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. *Didáctica de las matemáticas, 2*(2), 127-163.

Protti, O. (2003). La historia de las matemáticas como instrumentos pedagógico. *Uniciencia, 20*, 251-257.

Riscanevo, L. (2016). La teoría de la práctica social del aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas. *Revista de Investigación, desarrollo, innovación, RIDI, 7*(1), 93-110.

Riscanevo, L. (2017). *Aprendizaje, experiencia y formación investigativa del profesor de matemáticas: tejiendo historias.* Tesis de Doctorado, Doctorado en Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.

Riscanevo, L., Cristancho, K., & Fonseca, C. (2011). La influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función. *Praxis & saber, 2*(3), 119-137.

Rodríguez, R., Quiroz, S., & Illanez, L. (2013). Competencias de modelación y uso de tecnología en ecuaciones diferenciales. En R. Florez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 2121-2128). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Romero, C. (2005). La categorización, un aspecto crucial en la investigación cualitativa. *Revista de investigaciones Cesmag, 11*(11), 113-118.

Rosa, M., Mendible, A., Rodríguez, R., Arrieta, J., & Villa, J. (2015). Algunas reflexiones acerca de la modelación y la formación matemática en el nivel superior. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (págs. 1133-1141). Mexico: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Rosa, M., Reis, F., & Orey, D. (2012). modelagem matemática crítica nos cursos de formação de professores de matemática. *Acta Scientiae, Canoas, 14*(2), 159-184.

Ruiz, A. (2003). Uso de la historia en la Educación Matemática. En A. Ruiz, *Historia y Filosofía de las matemáticas* (págs. 537-556). San José: Editorial Universidad Estatal a Distancia-EUNED.

Salett, M., & Hein, N. (1999). Modelación matemática: estrategia para enseñar y aprender matemáticas. *Educación Matemática, 11*(1), 119- 134.

Salett, M., & Hein, N. (2004). Modelación Matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.

Salinas, P., & Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma de la enseñanza del cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(3), 355-382.

Salinas, P., Alanís, J., & Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable. Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza. *Didac, 56*(57), 62-69.

Sánchez, B., & Torres, J. (2009). Educación Matemática Crítica: Un abordaje desde la perspecticva sociopolítica a los Ambientes de Aprendizaje. *X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Pasto, Colombia.

Sancho, J. (2001). Docencia e investigación en la universidad: una profesión, dos mundos. *Educar, 28*, 41-60.

Sastre, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(16), 141-155.

Silva, D. (2010). De lo real a lo formal en matemática. *Integra Educativa, 3*(2), 157-178.

Skovmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica* (primera, Original en inglés, 1994 ed.). (P. Valero, Trad.) Bogotá, Colombia: Una empresa Docente.

Skovmose, O. (2000). Escenarios de Investigación. *EMA, 6*(1), 3-26.

Spivak, M. (1996). Funciones. En M. Spivak, *Cálculo infinitesimal* (págs. 49-70). México: Reverté S.A.

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos.* Madrid: Ediciones Morata S.L.

Stewart, J. (2012). Funciones y modelos. En J. Stewart, *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (págs. 9-75). México: Cengage Learning.

Triana, A., Cortés, S., Mancera, G., & Camelo, F. (2012). Disposiciones e intenciones en un escenario de investigación para una clase de matemáticas: el caso de un "compartir nutritivo". *XIII Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (págs. 1315-1320). Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemática. *Innovación Educativa*, *9*(46), 75-87.

Tusón, A. (2002). El análisis de la conversación: entre la estructura y el sentido. *Estudios de sociolingüística, 3*(1), 133-153.

Ugalde, W. (2014). Funciones, desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática, educación e internet*, *14*(1), 1-48.

Valero, P. (2006). ¿De carne y hueso? La vida social y política de la competencia matemática. *Foro Educativo Nacional*. Bogota, Colombia.

Valero, P. (2007). Investigación socio-política en educación matemática: raíces, tendencias y perspectivas. Obtenido de http://www. learning. aau. dk/en/department/staff/paola

Vasco, C. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. *Conferencia Interamericana de Educación Matemática - CIAEM*, (págs. 2009-2010).

Villa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*(19), 63-85.

Villa, J. (2010). La modelación Matemática en el currículo. Elementos para su discusión. *Memorias 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, (págs. 167-171).

Villa, J., & Ruiz, H. (2009). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista virtual Universidad Católica del Norte*(27).

Villa, J., Bustamante, C., & Berrío, M. (2010). Sentido de la realidad en la modelación matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa - ALME. 23*, págs. 1087-1096. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Villa, J., Bustamante, C., Berrio, M., Osorio, A., & Ocampo, D. (2008). El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos. *9o Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Valledupar, Colombia.

Villa, J., Bustamante, C., Berrío, M., Osorio, A., & Ocampo, D. (2009). El proceso de modelación matemática. Una mirada a la práctica del docente. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, ALME. 22*, págs. 1443- 1451. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Vygostky, L. (1978). *Pensamiento y Lenguaje.* La habana: Editorial Revolucionaria.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Ediciones Paidos Ibérica, S.A.

Zapico, I. (2006). Enseñar matemáticas con su historia. *Premisa*, *9*(29), 3-8.

Zeichner, K. (1993). El maestro como profesional reflexivo. *11º University of Wisconsin Reading Symposium: «Factors Related to Reading Performance».* Wisconsin, Estados Unidos: Traducido por Pablo Manzano Bernárdez.

Anexos

Anexo 1

Primer escenario exploratorio investigativo desde la matemática

Representar un rectángulo con un perímetro de 24 centímetros y calcular su área.

Responder las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuántos rectángulos con perímetro de 24 centímetros pueden construirse?
- ✓ ¿Existe relación entre las dimensiones de los rectángulos y su respectiva área? ¿De qué manera(s) se podría representar dicha relación?
- ✓ ¿Cuál es el rectángulo de mayor área que se puede construir?
- ✓ ¿Será posible determinar una manera que permita hallar el área de cualquiera de los rectángulos conociendo la medida de uno de sus lados? ¿Si, no, por qué?

Anexo 2

Segundo escenario exploratorio investigativo desde la semirrealidad

Tome una hoja de papel de forma rectangular y recortando cuadrados en sus esquinas construya una caja sin tapa. Responder las siguientes preguntas:

- ✓ ¿Cuál es el volumen de la caja?
- ✓ ¿Utilizando el mismo tamaño de la hoja de papel se podrán construir cajas con diferente volumen? ¿Cómo se podría calcular el volumen de cualquiera de esas cajas?
- ✓ ¿Con hojas de diferente tamaño se podrán construir cajas de igual volumen? Compare sus respuestas con dos de sus compañeros.

Anexo 3

Tercer escenario exploratorio investigativo desde la realidad

MATEMATICA APLICADA A LA INFORMATICA

TUNJA

2019

ACTIVIDAD MODELACIÓN

Tema: ¿Cuánto gana un vendedor ambulante de Bonice?

Finalidades de la actividad

Relevancia del tema:

Reuniendo los temas investigados por cada uno de nosotros, nos pareció importante e interesante el tema propuesto por nuestra compañera Dayana, la ganancia de un vendedor de BonIce; ya que es una situación cotidiana de la que podemos estudiar qué tan rentable y viable es un trabajo como éste, y si éste realmente les garantiza un salario mínimo y una vida digna, entre otros aspectos sociales y económicos.

¿Para qué serviría un modelo?

El modelo servirá para conocer cuánto gana un vendedor de BonIce en función de la cantidad que vende por cada producto, en nuestro caso de estudio, un total de cinco productos de referencia. Cada producto tiene su modelo puesto que las ganancias son diferentes para cada uno de ellos.

¿Dónde?

Se estudiará a dos vendedores ambulantes oriundos de la ciudad de Tunja:

Vendedor 1: María, trabaja en la zona de los colegios (zona de mayor afluencia de personas).

Vendedor 2: Felipe, trabaja en la zona del hospital (zona de menor afluencia de personas).

Vamos a hacer un modelado semanal en el cual estudiaremos siete días de la semana de las ventas de dos empleados ambulantes de BonIce, cada uno se ubica en una zona diferente de Tunja, una con mayor afluencia de personas y una con menor afluencia de personas, se estudiará el mes de febrero el cual se dividirá en cuatro semanas. El salario mínimo del año 2019 está en $ 828.116 pesos, semanalmente cada trabajador debería tener unas ganancias de $ 207.029 pesos si trabaja los siete día de la sema. Cada vendedor ambulante tiene una base diaria de $5.000.

PRODUCTOS	PRECIOS	GANANCIAS
Popetas Grandes	$ 1000	$ 160
Popetas Pequeñas	$ 500	$ 80
BonIce Pequeño	$ 200	$ 70

BonIce Sencillo	$ 400	$ 80
BonIce Doble	$ 500	$ 100

Planificación

Recolección de Datos

- **Fuentes**: Página web https://issuu.com/ipesmail/docs/manualboniceissuu.

En la página web observamos las diferentes dotaciones e información con respecto a uniformes, requerimientos, entre otros beneficios que les brinda la empresa.

- **Comunicación Personal:** Microempresa de BonIce Tunja.

Un familiar cercano a la compañera Dayana nos informó acerca de los precios en tiempo real, de los cinco productos que tomamos para el modelado, nos dio acceso a planillas para saber cuál era la venta diaria de los vendedores María y Felipe.

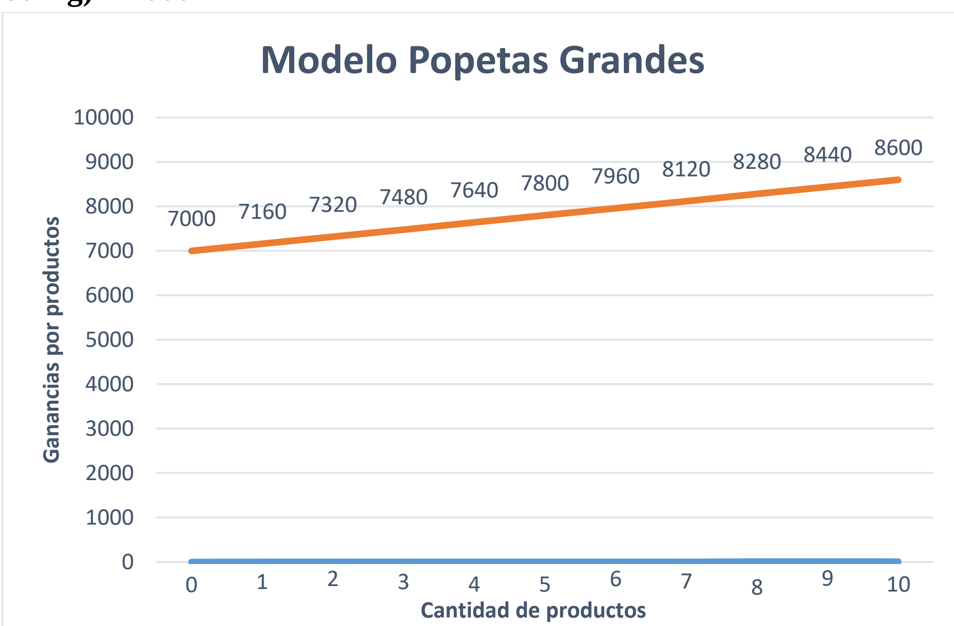
Modelo

Por cada producto se hace un modelo diferente, debido a que cada producto tiene una ganancia distinta, por tanto, se multiplica la cantidad de productos vendidos por la ganancia obtenida por éste y a esto se le adicionan $7.000, que es el resultado de dividir los $35.000 de base por semana ($5000 diarios x 7 días de la semana) en los 5 productos.

- **Popetas grandes:**

g: Cantidad de popetas grandes vendidas por semana.

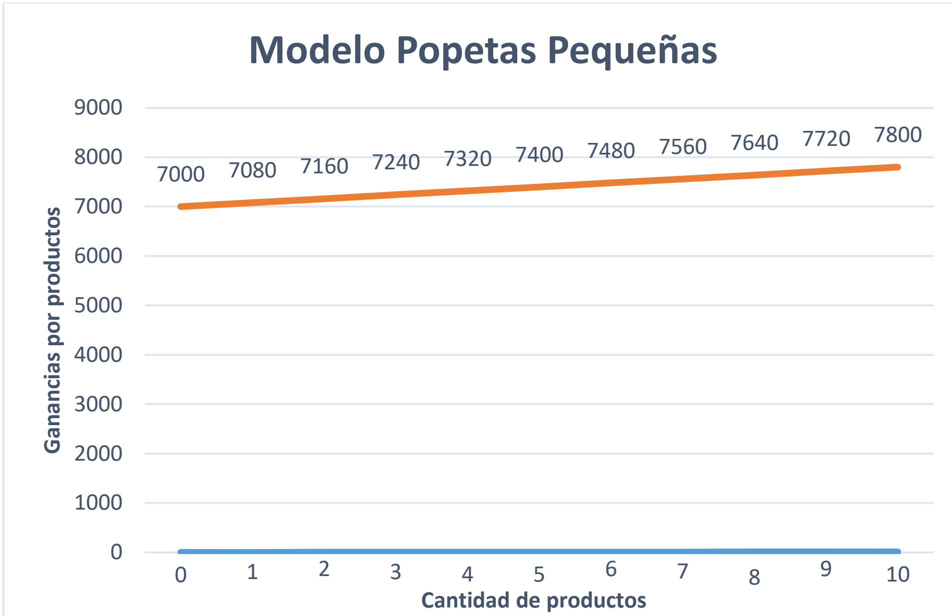
P (g) = (160 * g) + 7000



- **Popetas pequeñas:**

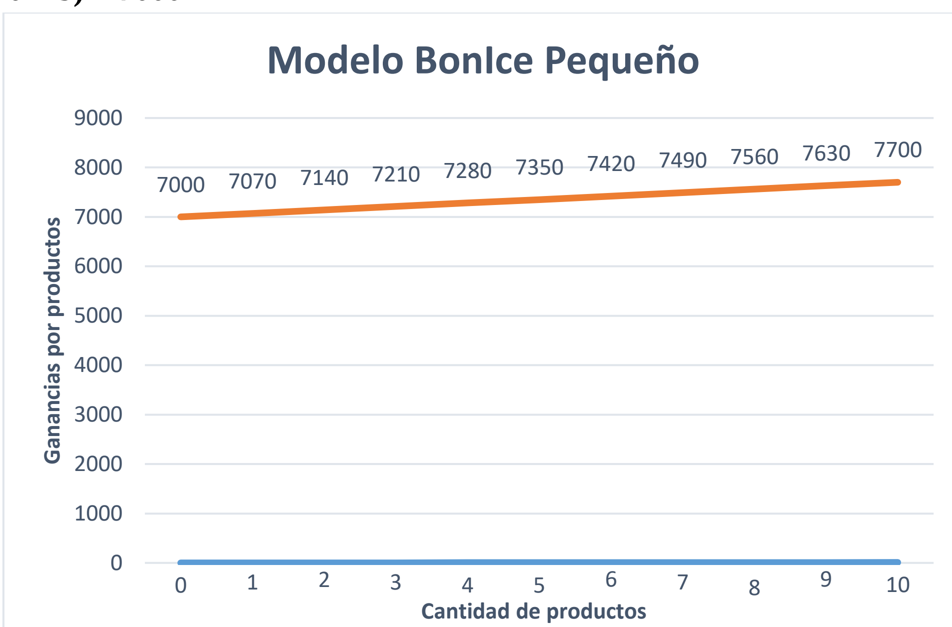
q: Cantidad de popetas pequeñas vendidas por semana.

P (q) = (80 * q) + 7000



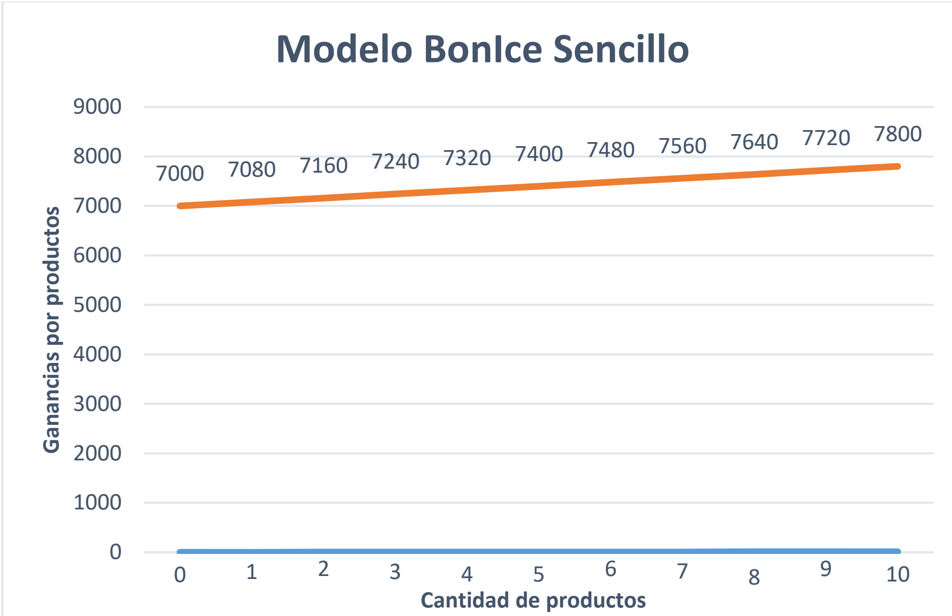
- **BonIce pequeño:**

b: Cantidad de BonIce pequeño vendidos por semana.
B (b) = (70 * b) + 7000



- **BonIce sencillo.**

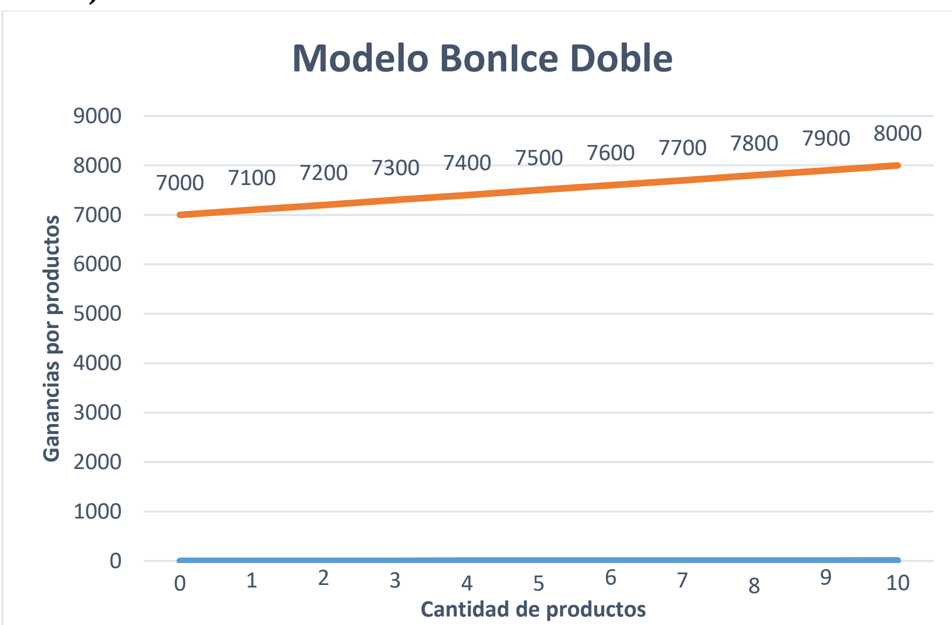
s: Cantidad de BonIce sencillo vendidos por semana.
B (s) = (80 * s) + 7000



- **BonIce doble:**

d: Cantidad de BonIce Doble vendido por semana.

B (d) = (100 * d) + 7000



Cada una de las gráficas nos demuestra que los modelos de los cinco productos son modelos lineales que varían de acuerdo a la cantidad de productos vendidos a la semana. Los valores de las variables, es decir, de la cantidad de productos, es mayor a cero.

Cantidad de productos vendidos por los vendedores de BonIce en las cuatro semanas del mes de Febrero del año en curso:

		Vendedor 1: María			
Semana	**Popetas grandes**	**Popetas pequeñas**	**BonIce Pequeño**	**BonIce sencillo**	**BonIce doble**
1	86	9	103	58	82
2	53	7	39	20	217
3	77	21	38	13	280
4	109	31	61	17	258

		Vendedor 2: Felipe			
Semana	**Popetas grandes**	**Popetas pequeñas**	**BonIce Pequeño**	**BonIce sencillo**	**BonIce doble**
1	62	26	63	6	21
2	31	17	72	14	42
3	34	10	21	4	62
4	52	17	43	11	59

El procedimiento a seguir es reemplazar la cantidad de productos vendidos en las cuatro semanas en los modelos de los cincos artículos.

- **Semana 1**
  - **María:**
    - Popetas grandes: P (86) = (160 * 86) + 7000 = 20760
    - Popetas pequeñas: P (9) = (80 * 9) + 7000 = 7720
    - Bonice pequeño: B (103) = (70 * 103) + 7000 = 14210
    - Bonice sencillo. B (58) = (80 * 58) + 7000 = 11640
    - Bonice doble: B (82) = (100 * 82) + 7000 = 15200

Total = 20760 + 7720 + 14210 + 11640 + 15200 **= 69530**

  - **Felipe**
    - Popetas grandes: P (62) = (160 * 62) + 7000 = 16920
    - Popetas pequeñas: P (26) = (80 * 26) + 7000 = 9080
    - Bonice pequeño: B (63) = (70 * 63) + 7000 = 11410
    - Bonice sencillo: B (6) = (80 * 6) + 7000 = 7480
    - Bonice doble: B (21) = (100 * 21) + 7000 = 9100

Total = 16920 + 9080 + 11410 + 7480 + 9100 **= 53990**

- **Semana 2**
  - **María**
    - Popetas grandes: P (53) = (160 * 53) + 7000 = 15480
    - Popetas pequeñas: P (7) = (80 * 7) + 7000 = 7560
    - Bonice pequeño: B (39) = (70 * 39) + 7000 = 9730
    - Bonice sencillo: B (20) = (80 * 20) + 7000 = 8600

        - Bonice doble: B (217) = (100 * 217) + 7000 = 28700

Total = 15480 + 7560 + 9730 + 8600 + 28700 **= 70070**

    - **Felipe**
        - Popetas grandes: P (31) = (160 * 31) + 7000 = 11960
        - Popetas pequeñas: P (17) = (80 * 17) + 7000 = 8360
        - Bonice pequeño: B (72) = (70 * 72) + 7000 = 12040
        - Bonice sencillo: B (14) = (80 * 14) + 7000 = 8120
        - Bonice doble: B (42) = (100 * 42) + 7000 = 11200

Total = 11960 + 8360 + 12040 + 8120 + 11200 **= 51680**

- **Semana 3**
    - **María**
        - Popetas grandes: P (77) = (160 * 77) + 7000 = 19320
        - Popetas pequeñas: P (21) = (80 * 21) + 7000 = 8680
        - Bonice pequeño: B (38) = (70 * 38) + 7000 = 9660
        - Bonice sencillo: B (13) = (80 * 13) + 7000 = 8040
        - Bonice doble: B (280) = (100 * 280) + 7000 = 35000

Total = 19320 + 8680 + 9960 + 8040 + 35000 **= 80700**

    - **Felipe**
        - Popetas grandes: P (34) = (160 * 34) + 7000 = 12440
        - Popetas pequeñas: P (10) = (80 * 10) + 7000 = 7800
        - Bonice pequeño: B (21) = (70 *21) + 7000 = 8740
        - Bonice sencillo: B (4) = (80 * 4) + 7000 = 7320
        - Bonice doble: B (62) = (100 * 62) + 7000 = 13200

Total = 12440 + 7800 + 8740 + 7320 + 13200 **= 49230**

- **Semana 4**
    - **María**
        - Popetas grandes: P (109) = (160 * 109) + 7000 = 24440
        - Popetas pequeñas: P (31) = (80 * 31) + 7000 = 9480
        - Bonice pequeño: B (61) = (70 * 61) + 7000 = 11270
        - Bonice sencillo: B (17) = (80 * 17) + 7000 = 8360
        - Bonice doble: B (258) = (100 * 258) + 7000 = 32800

Total = 24440 + 9480 + 11270 + 8360 + 32800 **= 86350**

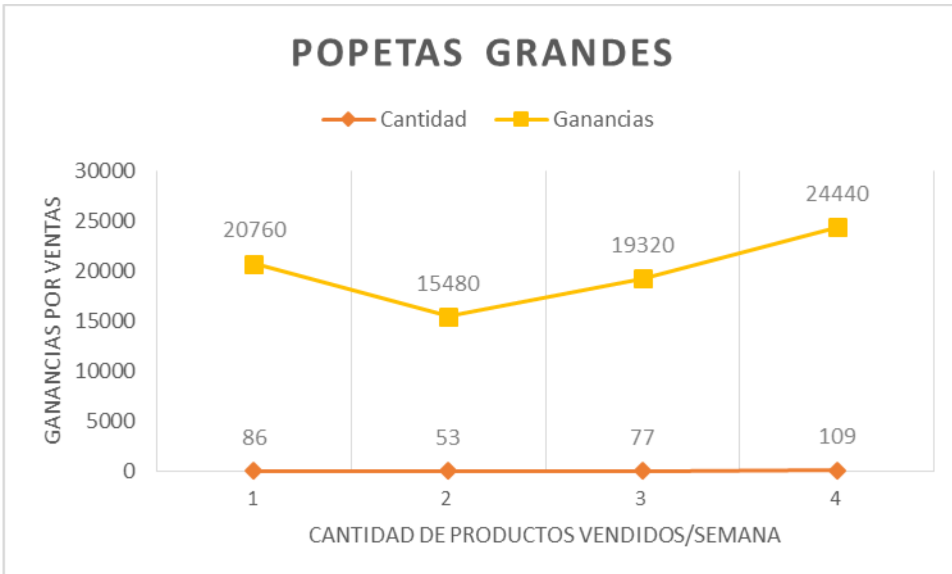
    - **Felipe**
        - Popetas grandes: P (52) = (160 * 52) + 7000 = 15320
        - Popetas pequeñas: P (17) = (80 * 17) + 7000 = 8360
        - Bonice pequeño: B (43) = (70 * 43) + 7000 = 10010
        - Bonice sencillo: B (11) = (80 *11) + 7000 = 7880
        - Bonice doble: B (59) = (100 * 59) + 7000 = 12900

Total = 15320 + 8360 + 10010 + 7880 + 12900 = **54470**
Total mes de febrero, María = $306.650.
Total mes de febrero, Felipe = $209370.

Representaciones semanales de las ventas y ganancias de los cinco productos en el mes de febrero durante las cuatro semanas.

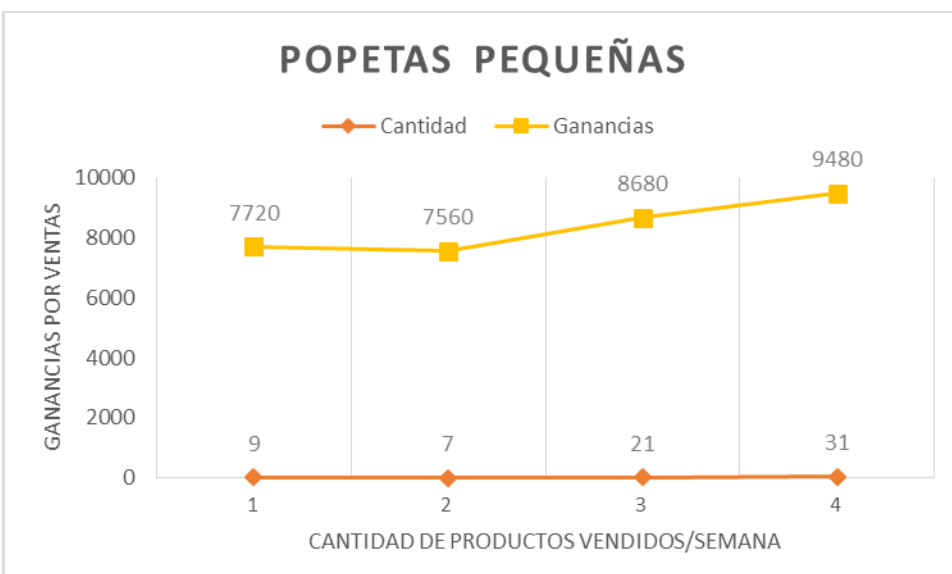
María

- **Popetas grandes:**



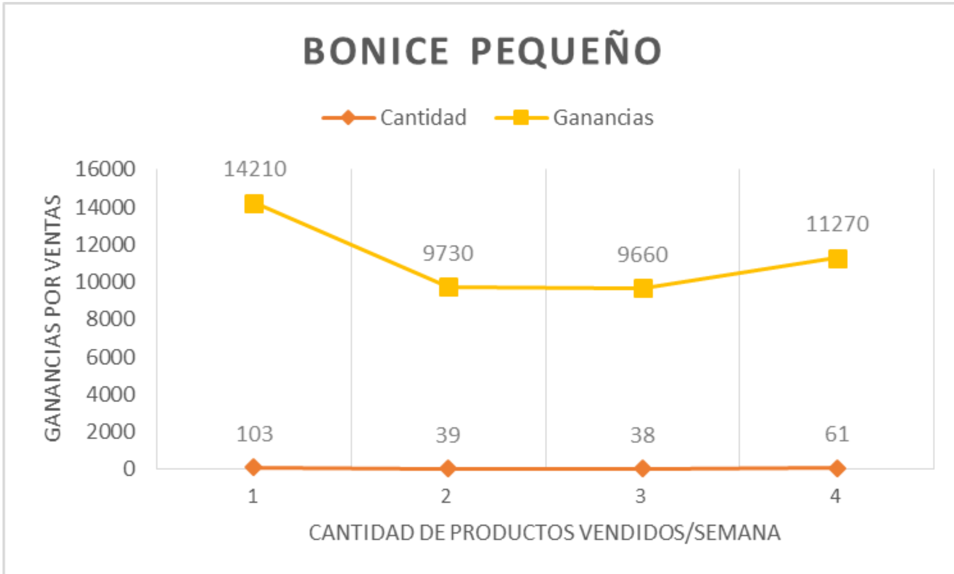
Dominio: [86,109]
Rango: [15480,24440]

- **Popetas pequeñas:**



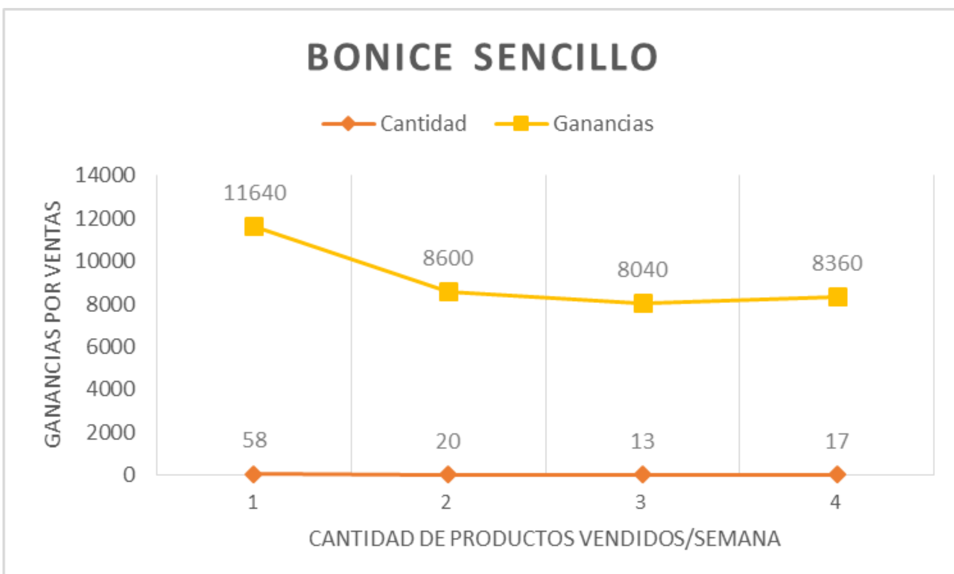
Dominio: [9, 31]
Rango: [7560, 9480]

- **BonIce pequeño:**



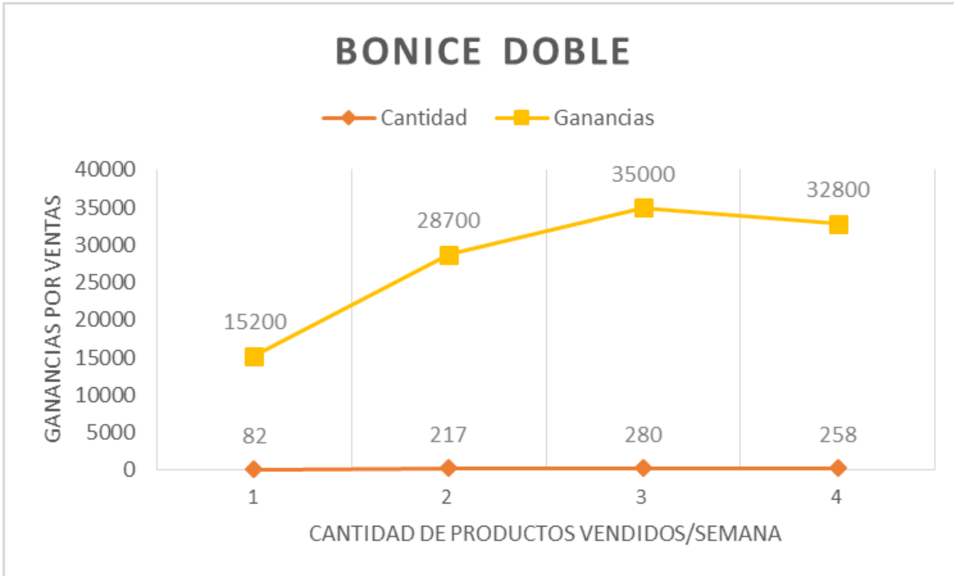
Dominio: [103, 61]
Rango: [9660, 14210]

- **BonIce sencillo:**



Dominio: [58, 17]
Rango: [8040, 11640]

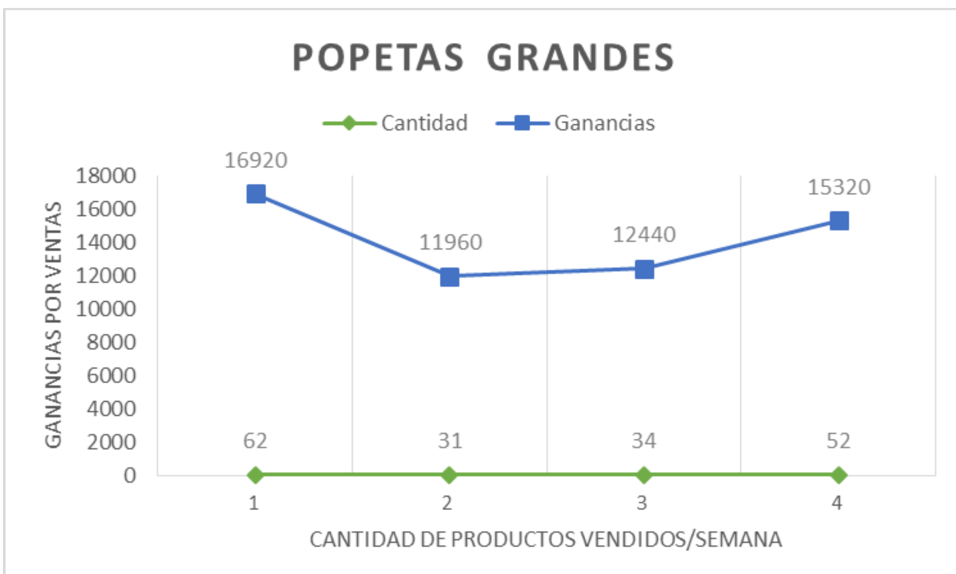
- **BonIce doble:**



Dominio: [82, 258]
Rango: [15000, 35000]

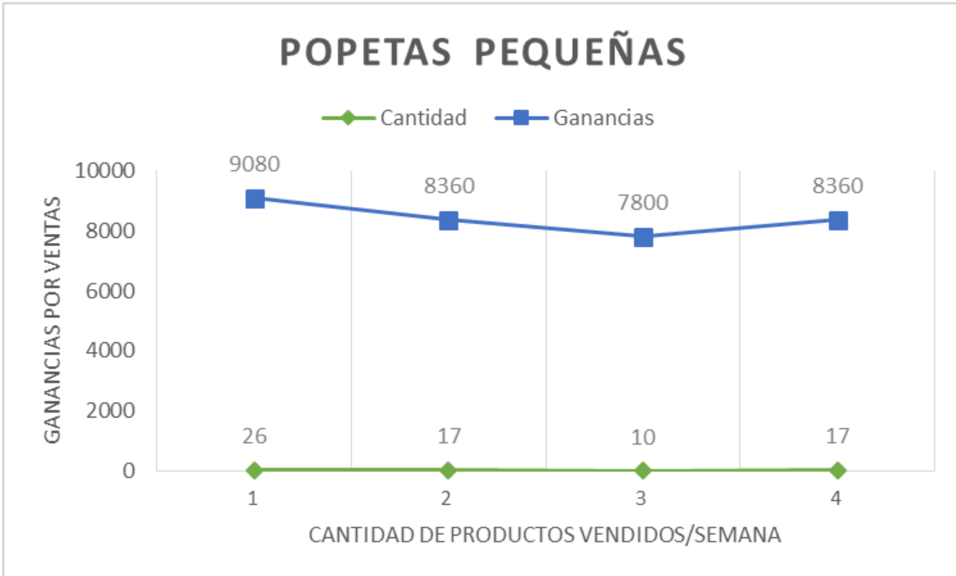
Felipe

- **Popetas grandes:**



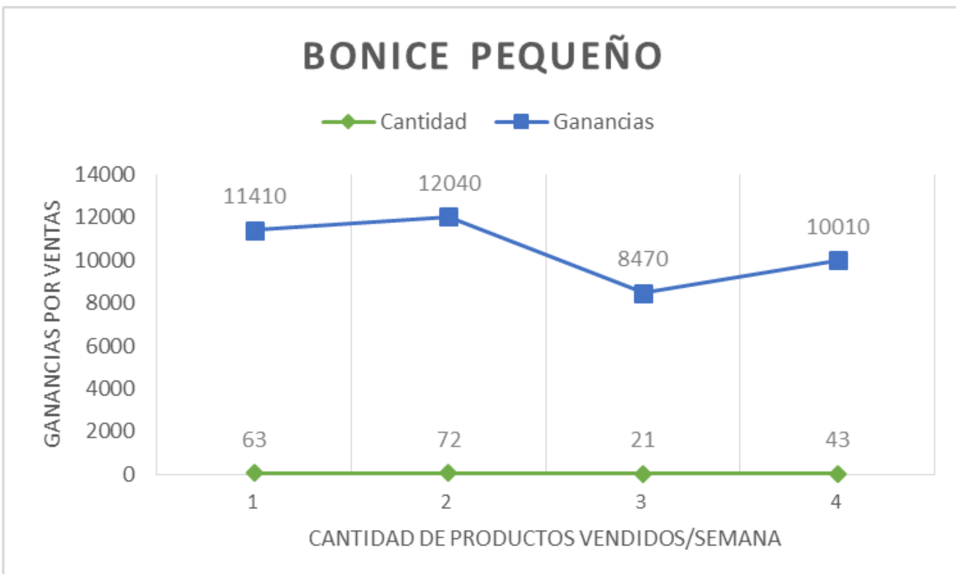
Dominio: [62, 52]
Rango: [11960, 16920]

- **Popetas pequeñas:**



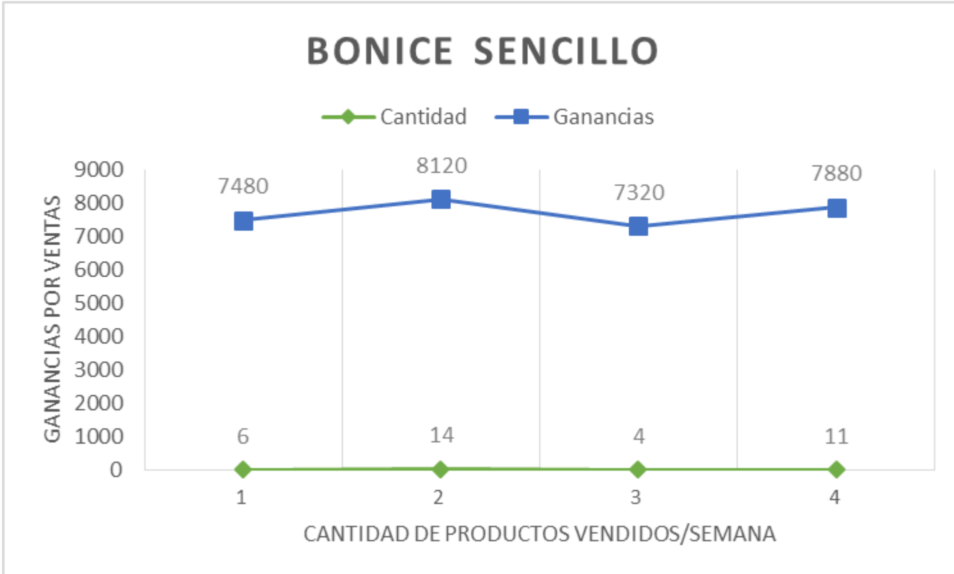
Dominio: [26, 17]
Rango: [7800, 9080]

- **BonIce pequeño:**



Dominio: [63, 43]
Rango: [8470, 12040]

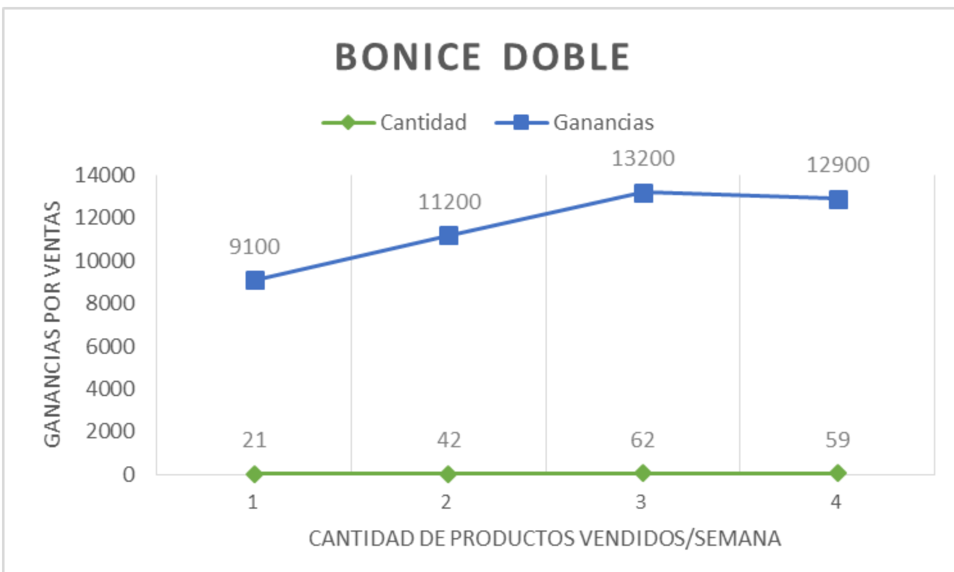
- **BonIce sencillo:**



Dominio: [6, 11]

Rango: [7320, 8120]

- **BonIce doble:**



Dominio: [21, 59]

Rango: [9100, 13200]

Conclusiones

- El modelo y las gráficas de los productos nos representan una función lineal que es dependiente de la cantidad de productos vendidos a la semana y la función nos sirve para obtener la ganancia por la venta de esos productos.
- A pesar de que María estuvo en una zona con mayor afluencia de personas sus ganancias no llegan a ser ni la mitad de un salario mínimo. Felipe tampoco obtuvo ganancias significativas en el mes de febrero.

- El producto que más ganancias dio a los dos vendedores fue el BonIce Doble.
- María obtuvo una ganancia de $306.650, es decir le hacen falta $519.466 en ventas para completar un SMLV, casi el doble de lo que obtuvo en el mes.
- Felipe obtuvo una ganancia de $209.370, es decir le hacen falta $616.746 en ventas para completar un SMLV, debería vender más del doble de lo que obtuvo en el mes.
- Los vendedores ambulantes de BonIce trabajan en difíciles condiciones por las largas jornadas, el clima al que se enfrentan, las pocas ventas y la poca ganancia que obtienen diariamente, se podría creer que las personas que trabajan en esto lo hacen por necesidad y que realmente es un trabajo que no les garantiza una vida digna para ellos ni para sus familias.
- Estos modelos nos brindan bastante información y datos que nos sirven para dar cuenta de las ganancias de los vendedores de BonIce, la preferencia de la gente por los productos y además, podemos analizar los movimientos semana a semana en un mes.

Anexo 4

Documento “consentimiento informado”

Documento de Intención para participar en la investigación que se adelantará durante el año 2018 en el grupo 2 de Matemática Aplicada a la Informática, perteneciente a la Licenciatura en Informática y Tecnología de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Tunja-Boyacá

Respetados estudiantes,

En mi calidad de docente de la asignatura de matemática aplicada a la informática, grupo 2, II semestre 2018, programa de Licenciatura Informática y Tecnología, de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, sede central; me permito darles a conocer la propuesta de investigación que desarrollaré dentro del aula de clase a la cual ustedes pertenecen, la investigación tiene como objetivo principal **Caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través del modelado matemático en escenarios exploratorio-investigativos del concepto de función**. Por lo anterior se considera de gran importancia solicitar su colaboración para alcanzar esta intención.

En esta investigación se tiene previsto hacer uso de las siguientes fuentes de información: entrevistas semi-estructuradas, grabaciones de audio de sesiones de clase, y notas de campo. El proceso de análisis de estas fuentes de información comprende: transcripción y edición de lo discutido y analizado, aprobación y autorización del participante involucrado para utilizar lo dicho como objeto de investigación y publicación. Lo anterior contempla la posibilidad de identificar o no al participante y para este último caso, de usar un seudónimo.

Si ustedes consideran que bajo las especificaciones señaladas se debe hacer alguna modificación o delimitación más específica, estaremos atentos a recibir las sugerencias. Si está de acuerdo y es su deseo hacer parte de esta investigación, entonces se deberá hacer constar que fue informado mediante éste documento de presentación y, además, deberá autorizar que los análisis de la información obtenida sean publicados. La participación en esta investigación es absolutamente voluntaria y el manejo de la información recolectada será totalmente confidencial.

Agradecemos de antemano su colaboración.

Lida Esperanza Riscanevo Espitia

Yuri Carolina Niño Castillo

(Investigadores)

Firma en constancia de ser enterado: ___________________________________

Nombre: ___________________________________

Lugar y fecha: _______________________________

Anexo 5

Autorización estudiantes menores de edad

AUTORIZACIÓN

Yo,________________________________ en calidad de representante legal de ___________________________________ del programa de Licenciatura en Informática y Tecnología, de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, sede central, autorizo a las investigadoras, profesoras Lida Esperanza Riscanevo Espitia y Yuri Carolina Niño Castillo, para publicar y divulgar por medios electrónicos o impresos, textos sobre actividades realizadas en el proceso de investigación, encaminada a caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través del modelado matemático en escenarios exploratorio-investigativos del concepto de función. Este proceso será objeto de investigación en el año 2018.

Tunja, ____ de ____________ de 2018

Firma del representante legal

____