FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS BAJO LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

LAURA XIMENA CASAS RODRÍGUEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
TUNJA
2019

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS BAJO LA TEORÍA DE REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

LAURA XIMENA CASAS RODRÍGUEZ

Trabajo de gado, requisito parcial para optar el Título de Magister en Educación Matemática

DIRECTOR: Dr. NELSY ROCÍO GONZÁLEZ GUTIÉRREZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
TUNJA
2019

Contenido

Índice de Figuras

Índice de tablas

Resumen

En las últimas décadas se ha fortalecido el interés por el estudio en Didáctica de la Matemática, apareciendo grandes teorías enfocadas a mejorar la enseñanza y el aprendizaje en el área de las matemáticas. Desde esta perspectiva, surge esta investigación cuyo propósito principal es identificar e implementar en el aula de clase diferentes representaciones semióticas presentes en la factorización de expresiones algebraicas. Se buscó realizar un análisis, empleando una metodología de tipo cualitativo para analizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes de grado octavo de la Institución Educativa Agropecuaria el Escobal cuando trabajan factorizaciones que involucran la diferencia de cuadrados perfectos y trinomios cuadrados perfectos. De igual manera, se describe el papel que juega la comunicación como mediadora en el paso de un registro de representación a otro. Con el desarrollo de la investigación se evidenció que los estudiantes muestran dificultad al realizar el proceso cognitivo de conversión, las representaciones mentales que ellos generan no cumplen en la totalidad con la transformabilidad de los registros, pero finalmente, con ayuda de su par y las indicaciones que se generan en las secuencias realizan conjeturas y representaciones equivalentes.

Palabras clave: Expresiones algebraicas, factorización, representaciones semióticas, tratamiento, conversión.

Introducción

El proceso comunicativo es de gran importancia en el aula de clase, pues siempre hay una constante interacción entre el profesor y el alumno y se lleva a cabo a diario, este proceso cobra aún más valor cuando se generan lazos de afinidad entre las partes ya que "durante mucho tiempo se ha pretendido establecer pautas que permitan tanto al estudiante como al docente un mejor desarrollo de sus roles, evidenciando así que la comunicación juega un papel principal en dichos procesos" (Jiménez, Suárez & Galindo, 2010, p.178).

Este trabajo de investigación surge como resultado del estudio de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Además, de la constante reflexión sobre la labor docente y pedagógica que desempeño, y los problemas que muestran los estudiantes de grado octavo en el momento de enfrentarse al álgebra elemental, las cogniciones, ideas, herencias y diferentes puntos de vista que se tiene de esta. Esto de acuerdo a lo propuesto por Mason, Graham, Pimm & Gower (1999) al considerar que "el álgebra no se puede considerar ni enseñarse como un paquete separado que se inicia una vez que se haya terminado una serie de contenidos que (supuestamente) corresponden al programa de aritmética o geometría" (p.3).

A lo largo del escrito se describen aspectos importantes respecto a la teoría de las representaciones semióticas propuesta por el filósofo y psicólogo Raymond Duval, quien ha centrado gran parte de sus estudios e investigaciones en la indagación interdisciplinaria de Didáctica de la Matemática y Ciencias Cognitivas. Por otro lado, se abordan temas relacionados con el álgebra elemental específicamente la factorización de expresiones algebraicas.

En la primera parte, se dan a conocer aspectos descriptivos del problema de investigación y la mediación de los objetivos por tratar de disminuir las dificultades presentes en la educación media respecto al área de matemáticas, específicamente en temáticas de grado octavo relacionadas con el álgebra elemental y la factorización de expresiones algebraicas.

En el segundo capítulo, se afrontan concepciones teóricas que se tienen en cuenta como base fundamental para el desarrollo de la investigación. Se presentan la teoría de representaciones semióticas, las concepciones y el avance que ha presentado el álgebra elemental a través de la historia y aspectos sobre la comunicación en el aula de matemáticas.

El tercer capítulo apunta hacía el diseño metodológico que adquiere la investigación y con ello todos los aspectos metodológicos que se emplean para realizar la recolección y el análisis de la información pertinentes en la investigación; además, se presenta la descripción de las etapas y categorías de análisis propuestas *apriori* con base en la Teoría de Representaciones Semióticas, los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión, la comunicación en la clase de matemáticas y los procesos básicos de cálculos que realizan los estudiantes al enfrentarse a diversas situaciones de enseñanza.

Finalmente, se presenta el análisis de resultados y las conclusiones. Los primeros se contraponen con las referencias teóricas que sustentan el trabajo de investigación, realizando un estudio detallado de lo que propone y construye un grupo de estudiantes al realizar la factorización y extensión de trinomios cuadrados perfectos y la diferencia de cuadrados perfectos, empleando diversos registros de representación semiótica.

Capítulo 1. Planteamiento del problema

A continuación, se presenta una descripción de la problemática a tratar. Desde esta perspectiva se considera que el aprendizaje de las matemáticas constituye un amplio campo de estudio para el desarrollo del pensamiento humano. El razonamiento, la resolución y el planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación, la elaboración, la comparación y la ejecución de procedimientos, como procesos, hacen de la matemática una línea de investigación en el campo educativo con recursos amplios para su estudio, y con directrices marcadas a nivel nacional desde los Lineamientos Curriculares emitidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN).

Las directrices del MEN (1998) consideran importante, tener presente los procesos generales, los conocimientos básicos y el contexto, como mediadores en el desarrollo del pensamiento matemático. Además, estos procesos están pensados como instrumentos para mejorar el currículo de matemáticas; en primer lugar, el proceso de resolución de problemas, busca ser un eje central de la enseñanza como parte integral de la actividad matemática "en la medida en que los estudiantes van resolviendo problemas van ganando confianza en el uso de las matemáticas" (p. 52). Así mismo, el razonamiento se entendido como la acción de "ordenar las ideas y lograr llegar a una conclusión" (p.54), además, de estar estrechamente ligado con el proceso comunicativo ya que "la comunicación es la esencia de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas" (p.75).

De ahí que el proceso comunicativo en el aula de clase es de importancia ya que siempre hay una constante interacción entre docente y estudiantes: este proceso se lleva a cabo a diario y cobra aún más valor cuando se generan lazos de afinidad, la afirmación se sustenta en que "La comunicación como proceso general es una necesidad que tenemos los seres humanos para trasmitir, expresar ideas hablando, comentar, construir, hacer observaciones, conjeturas y presentar argumentos" (MEN, 1998, p. 74).

Por otra parte, es importante mencionar la semiosis como "la aprehensión o la producción de una representación" (Duval, 1999, p.14), de esta manera la semiosis es la acción de designar o marcar un objeto por uno o varios signos. Según Radford (citado por D´Amore, Fandiño, Lori, 2013) la semiótica se asocia normalmente a la doctrina general que se ocupa de los signos. De igual manera D´Amore, Fandiño & Lori (2013) describen la relación que existe entre la matemática y la semiótica señalando que "nacieron y crecieron juntas, una al lado de la otra, ayudándose y sosteniéndose entre sí" (p. 21)

Con relación a lo anterior, es necesario citar las representaciones semióticas como elemento fundamental en el proceso de comunicación en el aula de clase sustentado en que "las representaciones semióticas no sólo son indispensables para los fines de la comunicación, sino que son necesarias para el desarrollo de la actividad matemática misma" (Duval 1999, p 14). Así mismo, las habilidades de comunicación pueden incluir varias competencias, se puede comunicar por medio de habilidades verbales o no verbales, con el fin de construir relaciones y realizando intercambios entre las partes. También en el MEN (1998) se afirma que:

> (…) la comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas (p. 74).

De esta manera, los sistemas de representación y de expresión juegan un papel importante en el aprendizaje de un objeto matemático por parte de los estudiantes, no solo en el proceso de la comunicación sino para el proceso mismo y desarrollo de la actividad matemática; esto se fundamenta en que en lo propuesto por Duval 1999 al mencionar que “la particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que estas actividades cognitivas requieran de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes” (p.13).

Por otra parte, en relación al álgebra elemental se evidencia que “los resultados de las investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra han demostrado que muchos de los estudiantes que comienzan a estudiar álgebra en octavo grado de la educación básica tienen dificultades” (Andrade, 1998, p.2). Los alumnos encuentran que “el álgebra es difícil”. Mason, Graham, Pimm & Gower (1999) afirman: “no es sorprendente, tal vez, para la mayoría de las personas la experiencia algebraica es aburridora, difícil, sin sentido y confusa” (p.4). Cuando las personas tienen esta percepción se pierde el sentido, el propósito y la naturaleza del álgebra.

De igual manera, es importante destacar la relación que debe existir entre las representaciones semióticas y las expresiones algebraicas, empleando como mediador la comunicación en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. De esta se hace mención a lo propuesto por Duval (1999) quien afirma que “los objetos matemáticos no son accesibles perceptivamente o instrumentalmente, lo son, a través de los sistemas de representación, donde uno de los criterios de su sección, es el poder de los tratamientos que ellos hacen posibles” (p.7). Además, Radford (citado por D´Amore, Fandiño & Lori, 2013) sustenta que las representaciones semióticas nos permiten abordar los procesos de significación en que se lanzan los estudiantes cuando tratan de comprender las formas de razonamiento matemático. Respecto a las expresiones algebraicas y la relación que debe existir con la comunicación Mason *et al* (1999) describen que el "álgebra es en primer lugar un lenguaje, una forma de decir y de comunicar algo" (p.2). De esta manera, se considera que la comunicación está inmersa en el álgebra como tal.

Desde otra perspectiva, pruebas estandarizadas, como, el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA), muestran resultados inferiores a nivel nacional respecto al área de matemáticas. Estas pruebas, tienen como objetivo evaluar procesos de formación de los estudiantes, además, están diseñadas para conocer las habilidades, las aptitudes y destrezas de los alumnos para analizar y resolver problemas, con el fin de manejar información y enfrentar situaciones que se presentan en la vida diaria.

En las pruebas Saber 9° matemáticas tienen como propósito fundamental visualizar el estado de las competencias y el aprendizaje de los estudiantes respecto al área; en la Institución Educativa Agropecuaria el Escobal del municipio de Ramiriquí, los resultados son desfavorables en cuanto a la competencia comunicativa y el componente numérico variacional, pensamiento variacional, sistemas algebraicos y analíticos; en estos, el 87% de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos, el 52% no construyen tablas a partir de expresiones algebraicas o enunciados verbales y el 47 % de los estudiantes no establece relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las expresiones algebraicas. De los anteriores argumentos surge la siguiente pregunta investigación:

¿Cómo el tratamiento y la conversión de una representación semiótica pueden contribuir a mejorar el análisis, comprensión y apropiación de la factorización de expresiones algebraicas?

Objetivos

Objetivo general

Identificar e implementar en el aula de clase diferentes tratamiento y conversiones de una representación semiótica presente en la factorización de expresiones algebraicas.

Objetivos específicos

Describir la factorización de expresiones algebraicas por medio de registros y representación semióticas.

Determinar los procesos que permiten asignación y validación de los registros semióticos referentes a la factorización de expresiones algebraicas.

Consolidar diferentes representaciones semióticas de factorización de trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados perfectos en los diversos registros de representación semiótica.

Justificación

Enseñar y aprender matemáticas tiene como objetivo la consolidación de conocimientos específicos del área, el desarrollo del pensamiento y el razonamiento desde la disciplina; con respecto a este argumento se encontró que Kant (citado por D´Amore & Radford, 2017) presenta las matemáticas "como una forma de conocimiento más evolucionado" (p.98); Además, considera que "sólo las matemáticas derivan su conocimiento no de conceptos sino de la construcción de los mismos" (p.98). Así, el estudio de esta área de conocimiento busca que el estudiante indague y forme su propio saber, lo anterior sustentado en lo que propone D´Amore & Radford (2017),

> (…) el saber adquirido puede verse como el producto de la elaboración de la experiencia con la cual entra en contacto el sujeto que aprende; y esta elaboración consiste en la interacción entre el individuo y su ambiente, y en el modo en el cual el individuo interioriza el mundo externo. (p.78).

Una de las mayores preocupaciones de cualquier docente consiste en reflexionar sobre su práctica pedagógica, indagar cómo aprenden sus estudiantes, detectar qué actividades favorecen el aprendizaje de un objeto matemático y qué procesos son acertados para que el estudiante aprenda. Sobre las dificultades en el aprendizaje de los alumnos, Duval (2004) afirma que:

> El reto de una investigación sobre la enseñanza de las matemáticas no es solo saber cuáles contenidos enseñar y de qué manera introducirlos en clase, sino también analizar las razones estructurales de los problemas de comprensión con los cuales se enfrentan la mayoría de alumnos de todos los niveles de enseñanza. (p.29).

Desde esa perspectiva, es importante reconocer la necesidad de hacer cuestionamientos sobre la enseñanza de las matemáticas, analizar posibles soluciones y buscar herramientas y estrategias necesarias para mitigar el problema.

Con respecto al estudio del álgebra, se hace necesario emplear los registros semióticos por la naturaleza intangible del objeto matemático. Según, Duval (citado por D´Amore, Fandiño, Lori, 2013) "Los objetos matemáticos no son accesibles perceptivamente o instrumentalmente. Lo son a través de los sistemas semióticos, donde uno de los criterios de su selección, es el poder de los tratamientos que ellos hacen posible" (p.7). En el desarrollo de este trabajo se busca que por medio de las representaciones semióticas de expresiones algebraicas los estudiantes logren comprender y realizar los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión. Estos procesos no son usualmente adoptados por los estudiantes de manera consiente. El proceso cognitivo de tratamiento se refiere a la transformación que produce otra representación dentro del mismo registro y la conversión se presenta cuando la transformación produce una representación de otro registro distinto al de la representación inicial (Duval, 1999). Estas caracterizaciones son fundamentales en la actividad cognitiva del estudiante, junto con la formación de dichas representaciones, además no son espontáneas y requieren una asistencia permanente por parte del docente.

El desarrollo del presente trabajo pretende brindar elementos que promuevan actividades cognitivas en los estudiantes, así al realizar los procesos de tratamiento y conversión de la factorización de expresiones algebraicas, se espera que los alumnos, con la ayuda de diversas representaciones semióticas, logren realizar la factorización y que esta sea más asequible y comprensible para los estudiantes de grado octavo, en particular, para los estudiantes de la

Institución Educativa Agropecuaria El Escobal del municipio de Ramiriquí-Boyacá. Vale la pena destacar que, en matemáticas, la adquisición conceptual de un objeto se realiza necesariamente a través del uso de una o más representaciones semióticas (D´Amore & Radford, 2017). Específicamente esta investigación busca aportar en la construcción de situaciones de enseñanza que favorezcan el aprendizaje de dos casos de factorización. diferencia de cuadrados perfectos y el trinomio cuadrado perfecto. A la vez, se destaca la importancia que tiene el uso de diferentes representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas y en particular del álgebra en educación básica y media.

Con respecto al álgebra y a pesar que existen muchos trabajos de investigación sobre la enseñanza de esta rama de la matemática y diferentes formas de afrontarla, se siguen presentando dificultades en su aprendizaje, por esta razón se justifica la realización de este trabajo de investigación, como lo destaca Malisani (1999):

> (…) se han realizado numerosas investigaciones sobre los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del álgebra; muchos trabajos tratan temas relativos a la detección y a la clasificación de errores y, en general, a las dificultades y obstáculos que encuentran los alumnos que comienzan a estudiar el álgebra (p.2).

Finalmente, se desea perfeccionar la práctica pedagógica personal soportado en la búsqueda constante del mejoramiento, tanto a nivel personal como desempeñando la docencia en el área de matemáticas, cambiar la perspectiva y contribuir a la enseñanza del álgebra elemental de una manera diferente. En concordancia con lo anterior, surge la investigación como producto del estudia al interior del programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, de igual manera de la auto reflexión crítica y la participación activa en el grupo de investigación Somos Maestr@s, especialmente en el semillero denominado “Resonantes”, que tiene como principio general, analizar los procesos de aprendizaje de los integrantes del semillero cuando investigan colaborativamente la enseñanza de las matemáticas.

Antecedentes

La investigación en Educación Matemática desde hace varios años ha generado conocimientos que aportan al constante mejoramiento del quehacer pedagógico y didáctico de las matemáticas. En este sentido, D´Amore & Radford (2017) afirman que "La investigación en torno a la enseñanza y aprendizaje de la matemática se ha visto enriquecida en los últimos años con la aparición de nuevas problemáticas y nuevos enfoques" (p.25). De esta manera, la teoría de las Representaciones Semióticas como enfoque de la Educación Matemática, no se escapa a la posibilidad de problematizar las realidades escolares derivadas de la enseñanza y el aprendizaje de diversos objetos matemáticos: bajo esta posibilidad, se plantea el desarrollo del trabajo de investigación. Inicialmente, se parte de hacer la búsqueda de referentes teóricos en la literatura a nivel internacional, nacional y regional, encontrando trabajos relacionados con las representaciones semióticas y los registros semióticos de diversos objetos matemáticos y trabajos sobre álgebra y factorización, entre otros.

En el ámbito internacional, Lara (2016) planteó en el objetivo en su estudio, analizar cómo los profesores de matemáticas movilizan la noción de parábola como lugar geométrico, cuando desarrollan una secuencia en la que utilizan diferentes registros de representaciones semióticas. En la investigación se destaca el carácter cualitativo con base en la metodología de Ingeniería Didáctica, realizando un análisis epistémico, didáctico y cognitivo. Además, realizó un estudio a priori y luego a posteriori. En el estudio se describen las diferentes representaciones que utilizan profesores de matemáticas al enseñar la parábola como lugar geométrico. La autora concluye que los sujetos investigados se apropian del concepto de parábola a partir de la noción como lugar de geométrico y resalta que logran realizar la conversión de registro figural al registro gráfico y/o algebraico.

Por otra parte, Morales (2008) desarrolló una investigación que se generó a través de la reflexión de su práctica docente y las interacciones con los colegas, acertando en la dificultad que presentan los estudiantes ante el aprendizaje de álgebra. En el estudio se planteó el objetivo de diseñar una propuesta de aprendizaje para la factorización de polinomios, basado en un modelo geométrico como una estrategia alternativa que proporciona ideas para realizar la factorización a partir de figuras geométricas. El diseño e implementación de las actividades se realizó desde una perspectiva constructivista desarrollado por Jean Piaget; en la que han puesto en manifiesto la importancia de la acción del sujeto con el objeto de conocimiento. Además, la investigación tuvo un enfoque cualitativo: las actividades se diseñaron con el fin de promover, mejorar y facilitar el aprendizaje de la factorización de expresiones algebraicas. Entre las conclusiones se pueden destacar que las propuestas didácticas actuales establecen conexiones entre diversos temas de la matemática y el aprendizaje significativo. Finalmente, se concluye que la representación geométrica de números y expresiones algebraicas, permite a los estudiantes, establecer significados geométricos familiares con los símbolos y las operaciones algebraicas.

A nivel nacional, Beltrán (2016) realizó una investigación que surge de la preocupación por los bajos niveles que presentan los estudiantes en pruebas internas y externas del área de matemáticas; su estudio tuvo como objetivo principal describir cómo una intervención pedagógica basada en la Teoría de Registros de Representación Semiótica ayuda a mejorar la comprensión del objeto matemático parábola en los estudiantes de décimo grado. El trabajo de investigación está sustentado desde la Teoría de Registros de Representación Semiótica propuesto por Duval (2004). La metodología empleada fue con enfoque cualitativo de carácter descriptivo (investigación-acción) y la recopilación de información la realiza por medio de recolección de datos a través de la observación, videos de las clases y entrevistas a los estudiantes. Entre las conclusiones se destaca que los estudiantes logran observar la representación gráfica, la propiedad de reflexión y realizar la formación de la representación del registro gráfico y lengua común; por otro lado, se afirma que la mayoría de los estudiantes no realizó correctamente la actividad cognitiva de conversión mostrando dificultad en realizar el paso del registro lenguaje natural al registro algebraico por la no congruencia entre estos registros.

Asimismo, Ospina (2012) realizó una investigación cuyo referente teórico se enmarca en la Teoría de Registros de Representación Semiótica desarrollada por Duval y apoyada por D´Amore; el propósito fundamental fue comprender las actividades cognitivas de tratamiento y conversión de las representaciones que realizan los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones propias del concepto de función lineal. Se propone una metodología cualitativa interpretativa y como instrumentos para recoger la información se utilizaron cuestionarios; además, tomó como referente los registros de representación semiótica y su relevancia en el aprendizaje de los conceptos matemáticos y específicamente en el aprendizaje del concepto de función lineal. Finalmente, se concluye que los alumnos presentan dificultad en la conversión al registro algebraico desde otros registros, además, que el contexto de la situación influye en los registros de representación y en las transformaciones que utilizan los estudiantes lo cual confirma la teoría de Duval (2004), donde se plantea que entre más representaciones semióticas se involucren en el aprendizaje de un concepto, se facilitan las condiciones de congruencia promoviendo la comprensión por parte de los estudiantes, y logrando que se establezca la diferencia entre el objeto matemático y la representación semiótica.

Por otra parte, Acevedo (2015) realizó su investigación, partiendo del supuesto que los estudiantes de grado octavo están llegando a este curso muy jóvenes y presentan dificultades en el momento de enfrentarse a temas abstractos como la factorización. Basado en la teoría cognitiva de Jean Piaget describe que los estudiantes se encuentran en la etapa de pensamiento concreto, por lo que se considera que es mucho más fácil para ellos aprender a factorizar con algún tipo material manipulable. Con la investigación, se pretendía sustentar que el material didáctico incorporado en el aula de clase aporta una ayuda significativa para la comprensión de la factorización en la asignatura de álgebra de los grado octavo y noveno. La metodología fue cualitativa de carácter descriptivo, empleando la ejecución de talleres en los que el docente interviene de manera pasiva; de igual manera, la manipulación de elementos concretos, en los que aparte de realizar el juego, se pretende principalmente que los estudiantes conceptualicen sobre lo que es la factorización. El autor concluye que la manipulación de material concreto sirve de medio facilitador para que los estudiantes pasen del pensamiento concreto al pensamiento abstracto, además, se mejora el proceso de enseñanza y aprendizaje gracias a la visualización que se percibe en la factorización de polinomios que tienen raíces enteras.

Del mismo modo, Ospina (2015) recalca que los procesos y el énfasis del aprendizaje del álgebra en la educación media son demasiado limitantes, debido quizás a que se trabajaba únicamente la memorización, sin comprender el significado y dejando a un lado la demostración geométrica. El objetivo del trabajo se centró en la elaboración de una guía didáctica para el aprendizaje de la factorización, en el marco del aprendizaje significativo. Desde esta perspectiva, reflexiona sobre el uso de la geometría con base en la teoría de Ausubel, construyendo significados a partir de las experiencias. La investigación presenta un enfoque cualitativo, teniendo en cuenta el estudio de caso; destaca que éste brinda herramientas para realizar una descripción detallada de los procesos que los estudiantes desarrollaban en las actividades propuestas. Finalmente, resalta que trabajar con material didáctico para aprender a factorizar, contribuye al avance de procesos de razonamiento que realizan los estudiantes resultando más sencillos y fáciles de entender, además, se concluye que este tipo de actividades favorecen el trabajo cooperativo de los estudiantes.

De la misma forma, Salazar, Jiménez & Mora (2013), desarrollaron una investigación con base en la relación que existe entre la geometría y el álgebra en el proceso de factorización de algunos polinomios, destacando la importancia de los materiales manipulativos como herramientas visuales para realizar las representaciones geométricas en el proceso de factorización. La investigación surge de la reflexión sobre la práctica pedagógica, con el fin de crear una propuesta alternativa para enseñar algunos casos de factorización. La metodología empleada es la realización de talleres haciendo uso de tabletas algebraicas; el proceso investigativo presenta un enfoque de acción- participación, en el cual todos los sujetos están en constante interacción con el medio. Se concluyen que la manipulación de algunos objetos concretos permite dar sentido a la factorización de ciertos polinomios, además, se consideran importante destacar la necesidad de iniciar el proceso de factorización de polinomios con herramientas innovadoras.

De la misma manera, Morán (2013), fundamenta su investigación en el hecho de que el abordaje de los temas de grado octavo trae consigo un nuevo lenguaje: expresiones en las que se encuentran variables y teorías de álgebra que crean en los estudiantes, barreras mentales y por consiguiente dificultad en la aprehensión de la factorización. Sustentan la investigación basándose en la implementación de una estrategia didáctica con el objetivo de fortalecer la enseñanza de la factorización a través de material didáctico. El fundamento teórico es el aprendizaje significativo que propone Ausubel, considerando que esta teoría brinda herramientas con las cuales se logra la apropiación del conocimiento, y de esta manera, cuando el estudiante le encuentra sentido a la información, la guarda y la asocia en su cerebro. La metodología de la investigación tuvo un enfoque mixto, teniendo en cuenta la observación participante y partiendo de pruebas denominadas pre-test. Posteriormente, se aplicaron instrumentos para la recolección de la información como diarios de campo, diálogo y cuestionarios, realizando la reflexión personal de los resultados encontrados y posteriormente una prueba llamada pos-test, que se realizó luego de la aplicación de la guía de enseñanza. El autor concluye que los estudiantes se apropian del conocimiento con más facilidad, además, que el trabajo cooperativo es un medio facilitador en el desarrollo de competencias dentro del aula de clase, asimismo, que la implementación de actividades lúdicas para la enseñanza debe ser esencial en todas las asignaturas del plan curricular.

Finalmente, a nivel regional se destaca la investigación realizada por Torres & Marín (2017), quienes integraron las áreas de matemáticas y lenguaje en el trabajo titulado "hacia una lectura crítica de información a través de representaciones estadísticas". Como objetivo principal se buscaba implementar una unidad didáctica que promoviera la lectura crítica de registros de representación estadística buscando la transversalidad; Esta investigación surge a partir del análisis a los bajos desempeños generados en pruebas estandarizadas en lo referente a lectura, análisis y comunicación que son representados en textos, gráficos y tablas de datos. La metodología que emplearon en la investigación fue de tipo cualitativo, destacan niveles de compresión de lectura crítica a partir de diversas representaciones. A partir de una unidad didáctica, los autores buscaban lograr que el estudiante interpretara y evaluara con argumentos la información o fenómenos estadísticos, así como reflexionar y el comunicar opiniones destacadas en las actividades realizadas. Finalmente, se concluyen que existe una convergencia entre las actividades planteadas y las áreas en las cuales realizan la transversalidad, logrando un avance aún más significativo en el aprendizaje de los estudiantes de la Institución Educativa.

De esta manera, se destaca que se han realizado diferentes investigaciones en el campo de la teoría de las representaciones semióticas de diversos objetos matemáticos y de factorización de algunos polinomios, empleando distintas teorías que han surgido en la investigación en Educación Matemática. Sin embargo, en los trabajos encontrados no se evidencian investigaciones en las que se destaquen conjuntamente los dos tópicos; la factorización de expresiones algebraicas y la teoría de las representaciones semióticas, por consiguiente, se resalta la importancia de esta investigación.

Capítulo 2. Marco teórico

La investigación se apoya en el estudio de los registros y representaciones semióticas presentes en la enseñanza y el aprendizaje de un objeto matemático, dado que "las representaciones semióticas incluido cualquier lenguaje, aparecen como herramientas para producir conocimiento" (Duval & Sáenz, 2016, p. 62), aquí esta teoría es fundamental. Así pues, las representaciones juegan un papel fundamental en el proceso de comunicación y en la construcción de los objetos matemáticos (Duval, 2004). Es así, como en este capítulo se abordan las representaciones semióticas en un contexto general y se describen registros semióticos de representación y, se aborda la comunicación matemática como proceso mediador entre los registros semióticos de representación.

Teoría de las representaciones semióticas

Las representaciones se han utilizado a lo largo de la historia en tres ocasiones distintas, la primera la realiza p Piaget hacia los años 1924-1926, empleando las representaciones mentales como representaciones del mundo de los niños. Luego, entre los años 1955-1960 aparece la idea de las representaciones internas, que buscan describir información y tener en cuenta un sistema de transformación: se trata de una codificación de la información, al parecer Broadbent fue uno de los promotores de esta idea. La tercera ocasión fue hacia el año 1985 donde aparecen las representaciones semióticas, en el marco de la Didáctica de la Matemática y de los problemas de aprendizaje de esta disciplina, empleando especialmente un sistema particular de signos que se pueden ver como representaciones equivalentes (Duval, 1999).

En la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos se evidencia una gama de dificultades a las que el estudiante se enfrentan en el proceso de escolarización (Mason *et al*, 1999). De esta manera, se pone de manifiesto que el proceso de aprendizaje de las matemáticas contiene cierto nivel de dificultad para algunos estudiantes. Duval (2016) afirma que:

> Los procesos de adquisición del conocimiento matemático son tan complejos que parece ser necesario tener diferentes enfoques. Los más predominantes, y a veces opuestos, son el enfoque epistemológico y el educativo. Pero ellos tienen en común el uso de la noción de representación para caracterizar el tipo de fenómenos que ocurren (p. 61).

Para Tamayo (2006) “desde la perspectiva de las ciencias cognitivas las representaciones son consideradas como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior” (p.39). En otras palabras, las representaciones pueden ser estimadas como cualquier imagen que aparezca en el cerebro y la proyección de esta plasmada en el diario vivir. Estos conjuntos de signos o símbolos pueden ser internos o externos, los diagramas, las figuras, los dibujos son representaciones externas con propósitos comunicativos y se emplean consciente o inconscientemente en la cotidianidad, estas representaciones externas son también conocidas como representaciones semióticas (Tamayo, 2006).

Ahora bien, es importante destacar que las representaciones semióticas juegan un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Estas permiten el acceso a los objetos matemáticos, esto se fundamenta en que la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación (Duval & Sáenz, 2006). De ahí, se resalta la importancia de emplear las representaciones semióticas con el objetivo de lograr un aprendizaje con mayor significado para los estudiantes.

Así mismo, en el campo del aprendizaje de las matemáticas se involucra el análisis de las actividades cognitivas. Las representaciones semióticas, son un sistema particular de signos que son necesarios para la conceptualización de los procesos cognitivos, además, estas actividades cognitivas requieren la utilización de los sistemas de representación diferentes al registro lenguaje natural, ya sean los esquemas, las figuras geométricas, los gráficos cartesianos o las tablas; considerando que estos sistemas de representación son diferentes entre sí y cada uno plantea preguntas específicas sobre el aprendizaje (Duval, 1999).

En el desarrollo de la actividad cognitiva del estudiante, se emplean distintos registros de representación aparte del lenguaje natural y los símbolos. Las transformaciones del registro semióticos de representación que se realizan son el *tratamiento* y la *conversión*. Así pues, se hace referencia al tratamiento como "la transformación de una representación (inicial) en otra representación terminal, respecto a una cuestión, un problema o una necesidad" (Duval, 1999, p.42). Es decir, al hablar de tratamiento, la transformación produce otra representación dentro del mismo registro. Y la conversión es "la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada de un registro, es una representación del mismo objeto o de la misma información en otro registro" (Duval, 1999, p.44). En efecto, la conversión es el cambio de registro sin cambiar el objeto. Para realizar una conexión de los procesos de transformación y basado en Duval & Sáenz (2016) y Duval (1999) se presenta el siguiente esquema.

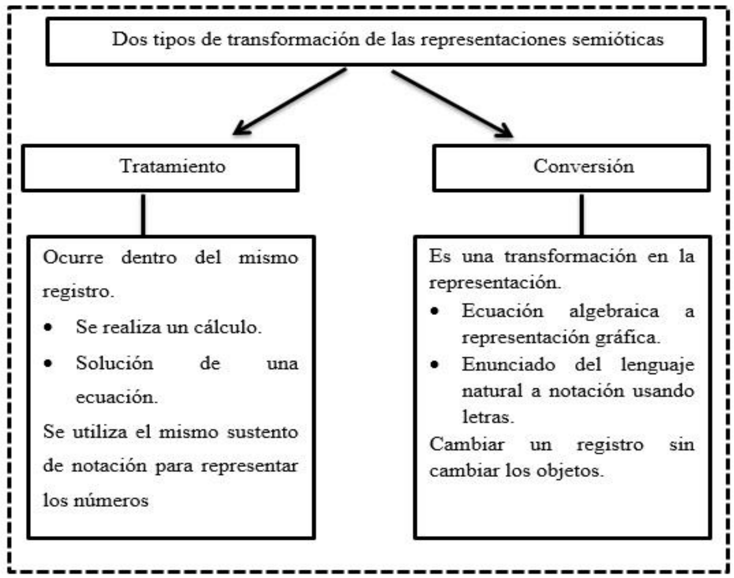


Figura 1: Transformación de las representaciones semióticas - Fuente: Elaboración propia, basado en Duval & Sáenz (2016)

En relación con lo anterior, Duval & Sáenz (2016) clasifican los registros que se pueden movilizar en los procesos matemáticos, empleado el tratamiento y la conversión para tal fin. Un aspecto importante para resaltar en el proceso de conversión es que puede ocurrir que no se evidencie de manera inmediata, ni con facilidad, esto corresponde a las características que debe deben permanecer al realizar el cambio de registro, explicarse desde la congruencia o no congruencia entre los registros. De esta manera se destaca lo mencionado por Duval & Sáenz (2016) al describir las condiciones que se cumpla la congruencia, afirmando que:

> En algunos casos, es como si hubiera una correspondencia uno a uno y la representación fuente fuera transparente para la representación de llegada. En estos casos, la conversión no parece ser más que una simple codificación, pero en otros casos no sucede así. En otras palabras, puede o no haber congruencia entre una representación fuente y su representación convertida dentro de un registro de llegada (p.84).

Así pues, la congruencia de los registros de representación según Duval (citado por Ospina, 2012) se presenta cuando:

> al segmentar cada una de las representaciones en sus unidades significantes para ponerlas en correspondencia, se cumplen tres criterios: correspondencia semántica entre las unidades significantes propias de cada registro, univocidad semántica terminal y conservación del orden de organización de las unidades significantes en las representaciones (p.24)

Aclarando que la correspondencia semántica hace referencia a que cada propiedad del registro de partida se asocia con algún atributo del registro de llegada; las unidades significantes se relacionan con los valores que pueden tomar las diferentes variables y la univocidad semántica terminal hace referencia a qué particularidades del registro de la representación de partida le corresponde un atributo en el registro de llegada (Buenaventura, 2015).

Registros de representación de expresiones algebraicas

En la factorización de expresiones algebraicas se utilizan varios registros de representación semiótica, entre los que se destacan: *el lenguaje natural, el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico o geométrico*. Estos registros de representación cumplen con tres actividades cognitivas fundamentales, la formación, el tratamiento y la conversión.

Los registros de representación son entendidos como signos o símbolos con los cuales se puede describir un objeto matemático. En el prólogo del libro: La semiótica en la didáctica de la matemática, Duval hace referencia a que los objetos matemáticos "no son accesibles perceptivamente o instrumentalmente. Lo son, a través de los sistemas semióticos de representación" (p.7). De la misma manera, se hace referencia a la definición de las representaciones descritas como un conjunto y caracteres propios de un registro específico, partiendo de un estado inicial, se transforma en una nueva representación la cual se debe encontrar en el mismo registro (Duval, 1999).

A continuación, se presenta la descripción de las tres clases de registro que serán empleados en la investigación. Según Duval (1995) las representaciones semióticas "son aquellas en las cuales la producción y la movilización de un registro de representación se puede originar mediante elaboraciones discursivas incluidas el lenguaje natural y el lenguaje formal o no discursivas que están relacionadas con las figuras, gráficos y esquemas" (citado por Guzmán, 1998, p.7).

Registro semiótico del lenguaje natural

En este registro se utilizan los signos del lenguaje, la sintaxis y la gramática propia del español, Duval (1999) afirma que "la expansión natural se caracteriza por el empleo de la lengua. Moviliza simultáneamente la red semántica de una lengua natural y los conocimientos pragmáticos propios al medio social cultural de los locutores" (p.113). De esta manera permite dar explicaciones y definiciones sobre la lectura de algún problema matemático.

Registro semiótico del lenguaje algebraico

Este registro utiliza los signos y las reglas propias de la matemática, concretamente del álgebra (reducción de términos semejantes, productos notables). Duval (1999) considera que la "expansión formal se caracteriza por la aplicación de reglas de sustitución que se basan exclusivamente en símbolos que representan variables o proposiciones independientemente de su significación" (p.112). Lo anterior, se puede evidenciar cuando los estudiantes escriben las expresiones algebraicas que representan cada problema enunciado.

Registro semiótico del lenguaje gráfico o geométrico

En este registro se utiliza el plano cartesiano, las figuras geométricas para representar y lograr una visualización de lo enunciado en el lenguaje natural y expresado en lenguaje algebraico. Duval (1999) lo describe como la expansión que "se basa en el principio de recuperación plurívoca de lo que aparece como una misma unidad lexical, sea bajo el modo fonético-acústico o gráfico-visual" (p.111). Se utilizan los elementos de la geometría como cuadrados, rectángulos y polígonos en general, así como características y propiedades de los mismos.

A continuación, se hace mención a las cuatro posibles formas que Duval (1999) considera necesarias en la expansión de una expresión. Además, se describe cada aspecto y sus respectivas características, en los que focaliza cada uno de los registros de representación semiótica.

Mecanismo de expansión	*Similitud interna* **(continuidad sin tercer enunciado)**	*Similitud externa* **(continuidad con tercer enunciado)**
Similitud semiótica *(se recuperan algunos significantes)*	Expansión **LEXICAL** (recuperación plurívoca de una misma unidad lexical, bajo un modo fonético-auditivo o gráfico-visual) ***Asociaciones verbales, ocurrencias,*** ***"lenguaje del inconsciente"***	Expansión **FORMAL** (recurso exclusivo a los símbolos: notaciones escrituras algebraicas...) ***Razonamiento deductivo*** (proposición de estructura funcional) ***Cálculo proposicional, Cálculos de predicados...***
Similitud semántica *Ley de Frege: significantes diferentes y del mismo objeto. (Invarianza referencial estricta o global)*	Expansión **NATURAL** (es suficiente con el conocimiento de la lengua corriente) ***Descripción, Narración*** ***Argumentación retórica*** ***Silogismo aristotélico*** (proposición de estructura remática predictiva) ***razonamiento por el absurdo***	Expansión **COGNITIVA** (exige el conocimiento de definiciones, reglas o leyes para un dominio de objetos) ***Explicación*** ***Razonamiento deductivo*** (proposición de estructura remática condicional) ***razonamiento por el absurdo***

Figura 2: Las cuatro formas de expansión de una expresión. Tomado de (Duval, 1999 p.112)

Por otra parte, se mencionan las representaciones semióticas y la transformación de una representación a otra, así como de un registro semiótico de representación a otro; para aclarar lo enunciado, es necesario describir los aportes realizados por D´Amore (2006) que resumen en lo actividad de transformación en el siguiente esquema.

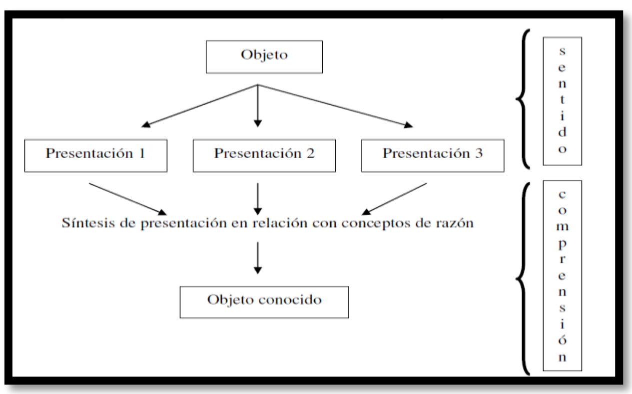


Figura 3. Representaciones de un objeto matemático. Tomado de D´Amore (2006)

De ahí, se puede resaltar que todo parte del objeto un matemático, luego este objeto tiene varias presentaciones que es entendido como diversas representaciones posibles para que finalmente que logre llegar al objeto conocido. Se necesita, dar a conocer la definición de objeto matemático entendido por D´Amore (2006) como aquello que "es todo lo que es indicado, señalado, nombrado cuando se construye, se comunica o se aprende matemáticas" (p.15), y el mismo autor considera como objetos matemáticos:

> "lenguaje" (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...); "situaciones" (problemas, aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...); "acciones" (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos, ...); "conceptos" (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...); "propiedad o atributo de los objetos" (enunciados sobre conceptos, ...); "argumentos" (por ejemplo, los que se usan para validar o explicar los enunciados, por deducción o de otro tipo, ...). (p.4).

De ahí, que cada uno de los objetos matemáticos tiene diversas formas de representación, inicialmente por medio de registros semióticos, como lo son el lenguaje natural, lenguaje algebraico y el grafico o geométrico, a partir de cada uno de estos registros los objetos matemáticos pueden adquirir diversas representaciones dentro del mismo registro semiótico, es aquí cuando se define específicamente los procesos cognitivos de tratamiento y conversión, específicamente D´Amore (2006) emplea un simbolismo para ilustrar las base de la semiótica;

> semiótica $=_{df}$ representación realizada por medio de signos
> noética $=_{df}$ adquisición conceptual de un objeto.2
> Se indica, de ahora en adelante:
> $r^m =_{df}$ registro semiótico m-ésimo
> R^m i(A) $=_{df}$ representación semiótica i-ésima de un concepto A en el registro semiótico *rm*
> (m = 1, 2, 3, …; i = 1, 2, 3, …).
> Se puede notar que, si cambia el registro semiótico, cambia necesariamente la representación semiótica, mientras que no es posible asegurar lo contrario; es decir, puede cambiar la representación semiótica manteniéndose aún el mismo registro semiótico. (p.7)

De lo anterior, se puede deducir que tratamiento se realiza dentro del mismo registro genera diversas representaciones semióticas, y la conversión se logra cuando se pasa de un registro semiótico a otro, que vuelve a generar diferentes representaciones. Además, existen criterios para determinar la congruencia o no congruencia entre los registros y representaciones semióticas. De ahí se hace referencia a lo que afirma Duval (1999) "para determinar la congruencia o no congruencia, es necesario comenzar por segmentarlas en sus respectivas unidades significantes, de manera que puedan ser puestas en correspondencia" (p.48). En conclusión, las unidades significantes son cada una de la características o propiedades de tiene las representaciones semióticas y los registros semióticos.

Para que el estudiante logre el proceso cognitivo de conversión necesario que realice representaciones mentales haciendo referencia a "aquellas que cubren el conjunto de imágenes y las concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto" (Morales, 2003, p.47). Luego de la formación de representaciones metales, se procede a realizar el proceso de conversión, pero esta tiene tres criterios de congruencia que debe cumplir, Duval (1999) describe las siguientes líneas,

> primero es la posible de una correspondencia "semántica" de los elementos significantes: a cada unidad significante simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significante elemental, y se considera como unidad significante elemental. Se conoce como unidad significante elemental toda unidad que depende del "léxico" de un registro (…). El segundo criterio es la univocidad "semántica" terminal: a cada unidad semántica elemental de la representación de salida, no le corresponde más que una única unidad significante elemental del registro de representación de salida (…) el tercer criterio es relativo a la organización de las unidades significantes. Las organizaciones respectivas de las unidades de las dos representaciones comparadas, conduce a que las unidades en correspondencia semántica sean aprehendidas en el mismo orden en las dos representaciones. (p. 51).

Lo descrito anteriormente es fundamental, pues se describe de forma explícita los criterios de congruencia que se tendrán en cuenta para el análisis de los aportes que se realizarán los sujetos de la investigación. En cuanto al tratamiento, no existen criterios de congruencia, pero, se deben tener en cuenta algunos aspectos relevantes que intervienen al realizar la conversión, pues "hay correspondencia entre las diferentes operaciones de tratamiento que pueden efectuarse en dos registros semióticos distintos, cuyas representaciones iniciales son convertibles entre sí" (Duval, 1999, p.53). Sin embargo, el paso de un registro de representación a otro genera inconvenientes para los estudiantes, no es tan fácil de realizar. En relación con lo anterior, se describe los aportes realizados por Duval (1999) al considerar que,

> (…) en la clase, la no-congruencia de las representaciones tiene efectos de otro orden: con mucha frecuencia conduce a fracasos en la actividad cognitiva de conversión y estos fracasos perduran a pesar de los aprendizajes que hayan requerido tratamiento en los diferentes registros. (p.53)

Por otra parte, al hacer mención al tratamiento, y al no encontrar criterios de congruencia, se relacionan los siguientes aspectos de la expansión informacional y el tratamiento de representaciones semióticas o la transformación de la representación al interior del registro: el cálculo, la paráfrasis y la anamórfosis. La primera hace referencia al tratamiento internos de la escritura simbólica o de letras, se logra sustituir la representación y generar una nueva realizando operaciones aritméticas o algebraicas, en relación con la segunda, esta sucede al realizar la transformación dentro del registro del discurso del lenguaje natural, y se apoya en la expansión discursiva. Y la ternera se menciona cuando se realiza la trasformación interna de la representación, en el registro figural, grafico o geométrico (Duval,1999).

Finalmente, en la enseñanza se privilegia las actividades cognitivas de formación de representaciones semióticas, tratamiento y conversión. Un aprendizaje genera varias tareas haciendo referencia a las de producción y de comprensión, igualmente estas buscan generar en los individuos crear producción discursiva. La tarea de producción, moviliza los procesos cognitivos de tratamiento y formación, y en la tarea de comprensión se moviliza los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión (Duval, 1999). Y necesario que la formación de representaciones, más que hablar de reglas de producción se prefiere expresar como reglas de conformidad al indicar que son “las que definen un sistema semiótico, y, en consecuencia, los tipos de unidades posibles de un registro” (Duval, 1999, p. 42).

La comunicación en clase de matemáticas

La clase de matemáticas desde generaciones anteriores ha sido considerada como difícil y aburridora, por tal razón el profesor tiene la tarea de cambiar ese paradigma (Mason *et al,* 1999). Por su parte Jiménez, Suárez & Galindo (2010) hacen referencia a que “convertir la clase de matemáticas en algo significativo es, sin lugar a dudas, uno de los grandes desafíos de los profesores y de los investigadores en educación matemática” (p.177). De ahí, que la interacción con los estudiantes sea parte fundamental del proceso comunicativo e investigativo que se debe generar en el aula de clase.

Es así, que la comunicación es indispensable para entablar lazos de afinidad con las personas y también se hace necesaria en la orientación de un conocimiento matemático. Ahora bien, se deben tener en cuenta las prácticas culturales, el contexto, y en sí la actividad que realiza la comunidad en general para captar lo que se quiere transmitir. Esta idea se sustenta con la afirmación que realizan

Jiménez, Suárez & Galindo (2010) "La influencia del contexto está relacionada con el ambiente de trabajo escolar y social, la organización y el funcionamiento de la escuela, los recursos existentes y las expectativas de los padres y la comunidad" (p.177).

La comunicación es considerada como un proceso de interacción social, en esta, los consensos, el diálogo o los debates siempre están presentes. Según Ponte *et al* (1997, citado por Jiménez, Suárez & Galindo, 2010), la comunicación se refiere a la interacción entre los diversos sujetos que hay en una clase, empleando un lenguaje propio, que es una mezcla del lenguaje cotidiano y del matemático.

Además, es importante tener en cuenta que cuando sucede lo contrario, la comunicación es deficiente: en general, la clase puede reducirse a la transcripción de un lenguaje simbólico que carece de sentido esto impide que los estudiantes desarrollen su pensamiento matemático, a través de los procesos de particularizar, generalizar, conjeturar y convencer (Mason et al., 1999). Teniendo en cuenta lo anterior, se hace necesario que dentro y fuera del aula de clase exista una buena interacción, ya que la comunicación tiene una importancia fundamental, pues es la negociación de significados. Desde esta perspectiva, cabe destacar lo mencionado por Parada (1999) quien considera que:

> Un buen comunicador ha de dominar los tres tipos de lenguaje (visual, auditivo y kinestésico) para poder comunicarse con personas diferentes. Por ejemplo, para mantener la atención de una platea, es necesario gesticular, variar el tono de voz, moverse por la sala, aproximarse a las personas, utilizar recursos audiovisuales, todo lo que esté al alcance de la mano para comunicarse sin dificultades con los tres tipos de persona (p.5)

De ahí, que cuando hay interacción comunicativa y existen buenos comunicadores, Jiménez, Suárez & Galindo (2010) consideran que:

> (…) la negociación de significados aparece de manera natural, la cual se refiere al modo en que los alumnos y el profesor exponen unos a otros su forma de entender los conceptos y los procesos matemáticos, los perfeccionan y los ajustan al conocimiento matemático. (p.179).

Así mismo, cuando se presenta un buen ejercicio de comunicación, ésta permite fortalecer la argumentación, esto sustentado en que "es preciso reflexionar sobre cómo contribuyen las estrategias de comunicación centradas en el trabajo en grupo y la heurística del solucionar-escucha en el desarrollo de la argumentación en clase de matemáticas" (Jiménez & Pineda, 2013, p.104).

Para concluir, es importante destacar la relación que existe entre la comunicación y los registros de representación semiótica resaltando el pensamiento de Pierce (1974) refiriéndose a que "los hombres se comunican por medio de signos lo cual lo considera muy práctico y la comunicación humana no se basa en una presencia inmediata de las cosas, sino en una referencia mediata o remota a una realidad por medio de signos (Citado por Leguizamón, 2017). De esta manera, es importante mencionar lo escrito por Piaget (1978) al evidenciar la existencia de una inteligencia práctica antes de la aparición del lenguaje, y definir la función semiótica como la habilidad de representar algo a través de un signo o un símbolo o cualquier objeto; la cual inicia cuando se logra establecer una diferencia entre significado y significante, dando la posibilidad de que un solo significante pueda tener varios significados (Citado por Leguizamón, 2017). Teniendo en cuenta lo anterior, se destaca la importancia de las representaciones en registros semióticos como signo y medio pertinente para realizar un acertado proceso de comunicación, en concordancia con el contexto y teniendo en cuenta la clase de matemáticas.

Capítulo 3. Desarrollo conceptual del álgebra

A continuación, se hace un recuento general del desarrollo conceptual del álgebra elemental y se describen registros y representación semióticas de la factorización de expresiones algebraicas: diferencia de cuadrados perfectos, y trinomio cuadrado perfecto.

Partiendo del hecho que, una de las características que se destaca en el álgebra está en que es un medio ideal a través del cual se puede ver y expresar declaraciones generales (Mason, *et al*, 1999). Desde esta perspectiva se hace o referencia a Lorente (sf) que escribió las siguientes líneas que resaltan la importancia y trascendencia que ha tenido el álgebra a través del tiempo.

> El Álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independiente de los números u objetos concretos. A lo largo de la historia de la humanidad esta ciencia ha ido evolucionando, cada civilización y cada cultura con sus características propias han dejado un legado testimonial escrito del que en la actualidad somos herederos (p.3).

La siguiente tabla sintetiza avances que presentan la matemática y el álgebra desde el milenio cuarto antes de cristo hasta nuestros días, destacando que es por medio de la historia que se recrean escenas que han ocurrido tiempo atrás.

Síntesis de la historia del álgebra

Etapa	*Representantes*	*Avances*	*Conclusión*
Egipcios (Cuarto milenio a.C)	Sin información disponible	Evolución del texto pictográfico a jeroglíficos. Solucionan lo equivalente a resolver ecuaciones lineales. Resolución de ecuaciones de segundo grado de la forma $ax^a = b$.	El álgebra de los egipcios es restringida, no se utiliza simbología, se emplean objetos concretos. Solucionan problemas con una sola incógnita con (adición y sustracción)
Civilización mesopotámico babilónica (Finales del cuarto milenio a.C)	Sin información disponible	Solución de ecuaciones lineales, cuadráticas y en algunos casos cúbicas. Problemas matemáticos de manera verbal, empleando palabras como longitud, anchura, y área como representación de incógnitas. Disponían de fórmulas para solución de ecuaciones cuadráticas, pero nunca consideraban las posibles raíces negativas. No conocían los números negativos.	El álgebra alcanzó niveles más altos que los egipcios. El álgebra babilónica alcanzó un nivel de abstracción extraordinario resolviendo ecuaciones cuadráticas.
Época Helenística (800 a.C – 800 d.C)	Pitágoras	Matemático griego, artífice de los fundamentos filosóficos e ideológicos de la matemática.	La matemática no se mantuvo uniforme en un nivel alto, sino hasta en el siglo III a.C
	Platón	Se ocupó de crear un entorno académico donde se potenciaron de forma extraordinaria lo estudios geométricos	
	Euclides	Sintetizador de los conocimientos precedentes, en la obra *Los Elementos*	
	Diofanto	Es considerado por muchos como el padre del álgebra. Mantiene los enunciados algebraicos de forma retórica, sustituyendo con abreviaturas conceptos y operaciones frecuentes.	

Antigua civilización china (2750 a.C)	Sin información disponible	Resolución de problemas basados en agrimensura, agricultura, impuestos, cálculos, solución de ecuaciones y propiedades de triángulos rectángulos. Solución de sistema de ecuaciones utilizando números positivos y negativos.	Solucionaban sistemas de ecuaciones simultáneas y de grados tan altos como en catorce.
Civilización Hindú (Siglo II a.C)	Sin información disponible	Utilización de conocimientos primitivos para la construcción de templos y pirámides. Uso de abreviaturas de palabras y símbolos para describir operaciones. Solución de ecuaciones cuadráticas con dos raíces, incluidas negativas e irracionales. Solución de ecuaciones indeterminadas surgieron en problemas de astronomía.	Falta de continuidad, las contribuciones matemáticas se han realizado en periodos separados por largos intervalos de tiempo. Implementación del álgebra en la astronomía y en la astrología.
Cultura Árabe (Siglo VI)	Sin información disponible	Asignaron el nombre del álgebra que significa restauración y simplificación. Analizaron 6 tipos de ecuaciones que resultan al considerar 3 posibles cantidades, cuadrados-raíces- números. Solución de ecuaciones cúbicas de forma algebraica y geométrica.	El mayor avance se da en la solución de ecuaciones cubicas con el uso de intersecciones de cónicas.
Europa Medieval (Siglos X-XIV)	Alexandre de Villedieu	Operaciones fundamentales con números enteros, considerando al cero como número.	Creación de centros de enseñanza en Europa. Principal centro de enseñanza, empleando números hindú-arábigos. Implementación de métodos y problemas algebraicos, empleando el ábaco. Popularización del algoritmo.
	Leonardo de Pisa	Uso de palabras en lugar de símbolos y búsqueda de métodos aritméticos del álgebra. Siguió a los árabes en usar palabras en lugar de símbolos y basar el álgebra en métodos aritméticos. Expuso la solución de ecuaciones determinadas e indeterminadas de primer y segundo grado, así como de algunas ecuaciones cúbicas.	
		Solución de problemas motivados por avances tecnológicos y científicos.	

Renacimiento (Siglos XV y XVI)	Fraile Luca Pacioli	Recopilación de estudios sobre aritmética, álgebra, geometría euclidiana y contabilidad. Uso de fracciones y decimales. Triángulo de pascal. Números negativos, raíces y potencias.	Traducciones de los escritos y textos griegos y árabes. Es el periodo moderno de la matemática, fue la base para avances posteriores para la matemática.
	Francois Viete	Establece una línea divisoria entre la aritmética y el álgebra y propone utilizar una vocal para representar una cantidad que se supone en álgebra desconocida o indeterminada, y una constante para representar una magnitud o un número que se supone conocido o dado.	
	Bombelli William Oughtret Robert Recorde	Signos + y – para denotar excesos y defectos. Introducción del signo x para la multiplicación y = algo paralelo.	
Siglo XVII	John Napier Henry Brigg Thomas Harriot William Oughred	Avance del álgebra árabe y la solución de ecuaciones cúbicas y cuadráticas empleando símbolos. Resolución de problemas geométricos mediante el álgebra. Análisis del álgebra como un poderoso método de guía para el razonamiento de cantidades desconocidas y abstractas.	Apoyo del álgebra con la geometría en busca del avance de soluciones de ecuaciones. Existían organizaciones de científicos para el estudio de la matemática.
	Descartes	Ayuda entre el álgebra y la geometría para solucionar y corregir defectos. Cualquier lugar geométrico tiene una ecuación algebraica. Aplicación del álgebra a determinados problemas geométricos	
Siglo de las luces	Isaac Newton	Reducción de cualquier problema a una expresión algebraica. Número de raíces de un polinomio. Cotas superiores y raíces positivas.	Regían la multiplicación de números negativos, aunque algunos rechazaban de forma categórica la posibilidad de multiplicar dos números negativos.

XVIII Siglo de las revoluciones	Leipzig Gottfried	Leyes del cálculo lógico. Pretendía expresara todo en un orden jerárquico, álgebra lógica.	La geometría analítica se produjo una auténtica revolución en la enseñanza. La geometría analítica, que había permanecido eclipsada por el cálculo durante más de un siglo, consiguió de pronto que se le reconociera un lugar por derecho propio en las escuelas.
	D´Alembert	Demostración defectuosa del teorema fundamental del algebra.	
	Euler	Teoría de números. Geometría analítica.	
Siglo XIX La edad de oro de las matemáticas	Cantor	La matemática del infinito. Propiedad fundamental de los conjuntos infinitos. Cardinalidad entre conjuntos infinitos. Jerarquía entre conjuntos infinitos, atendiendo a la potencia del conjunto. Demostración que el conjunto de números reales es mayor que el conjunto de números racionales. Teoría de conjuntos como una rama de la matemática.	Los progresos realizados en el ámbito matemático durante este siglo superan tanto en cantidad como en calidad, la producción reunida de todas las épocas anteriores.
	Gauss	Teorema fundamental del álgebra. (ya que los anteriores eran incorrectos) Ecuaciones polinómicas tenían por lo menos una raíz. Coeficientes reales o complejos. Consideración de la parte real e imaginaria de un número complejo y coordenadas rectangulares de un punto en el plano.	
	Galouis	Criterios para la solución en radicales de las ecuaciones polinómicas. Álgebra moderna.	
	George Peacock	Distinción entre algebra aritmética y simbólica. Operaciones con expresiones literales, con números reales y complejos.	
	Hamilton	Algebra formal de parejas de números reales.	
	Cayley	Estudio de las matrices con una forma y estructura de álgebra. Suma y multiplicación de matrices y matriz identidad.	

	Sylvester	Eliminó una incógnita entre dos ecuaciones polinómicas.	
Siglo XX El siglo de las Guerras	Russell	Pensamiento axiomático Lógica Intuicionismo	El resultado fue un nuevo tipo de álgebra al que se denominó álgebra moderna y se desarrolló a lo largo de la segunda mitad de este siglo. La transición del álgebra clásica al álgebra abstracta.
	Henry Poincaré	Topología, nueva rama de la matemática. Topología combinatoria o algebraica. Topología conjuntista. Altos nivele de abstracción. Las letras representan objetos de cualquier tipo (situaciones, figuras geométricas e incluso matrices) Transición del álgebra clásica al álgebra abstracta. Teoría de los espacios lineales.	

Tabla 1: El álgebra a través de la historia - Fuente: Elaboración propia, con base en Lorente (s.f)

Ahora bien, es necesario hacer un recuento de la historia de las matemáticas en Colombia, partiendo de la afirmación que “Colombia no ha sido un actor importante en el marco de las matemáticas en el mundo, pero sí es un país interesado en aprendizaje de esta ciencia” (Poveda, 2012, p.11). De esta manera, comenzará un relato de la matemática en Colombia a partir de la colonización y la colonia.

En esa época, los indígenas que habitaban el territorio colombiano no conocían ningún sistema de numeración actual, pues contaban con un sistema propio y fue gracias a que algunos colonizadores que eran sacerdotes fundaron escuelas y en estas se inició a hablar lo que hoy se conoce como números naturales, también las cuatro operaciones elementales, unidades de medida, ángulos, rectas y otros (Poveda, 2012). El atraso respecto a otras culturas era amplio, por ejemplo, con los mayas quienes habían llegado a construir un sistema de numeración propio e incluso llegando a crear un calendario.

La época de la Colonia coincidió con la época llamada Renacimiento, en ésta las matemáticas se fortalecieron creando bases fuertes para avances posteriores, de ahí que según Poveda (2012) “se estaban recopilando libros de geometría de Euclides, los de aritmética de Diofanto y Pitágoras y los de álgebra de los árabes” (p.15), esto con el fin de buscar la adaptación de estos a contextos de Colombia. Es así, que los aportes y aprendizajes de esta época fueron muy vagos ya que no se contaban con suficientes bases teóricas para la enseñanza de esta área, pues aún se estaban consolidando.

Asimismo, durante el siglo XIX denominado la edad de oro de las matemáticas, existieron grupos de matemáticos organizados y fue en las universidades europeas donde se inició un trabajo con textos de matemáticas. Uno de los integrantes de estos grupos fue Sylvestre quien publicó el libro “El Tratado Elemental de la Aritmética” como describe Poveda (2012): en este se tratan temas enunciados en lo que hoy día se conocen como: números naturales, operaciones básicas entre números naturales y las propiedades, números quebrados y las operaciones básicas, números decimales, factorización de un número natural, entre otros. La importancia de estos libros resalta ya que se implementaron en Colombia para la enseñanza de matemáticas en la secundaria y en universidades, esto hasta inicios del siglo XX.

Otro aporte de estas organizaciones descrito por Poveda (2012) y de interés para esta investigación es el libro titulado “Curso Completo Elemental de las Matemáticas Puras. Álgebra”, donde se describe la aritmética y el álgebra, operaciones entre expresiones algebraicas y se enuncia el álgebra como “polinomios algebraicos; factorización; algoritmos algebraicos; función lineal; ecuaciones algebraicas…” (Poveda, 2012, p.35). Desde esta perspectiva, la factorización de expresiones algebraicas se introduce en la escuela desde hace bastante tiempo, pero no da el verdadero significado y relevancia que merece, al realizar los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

En la segunda mitad del siglo XIX se fundaron las primeras universidades en Colombia, como es el caso de la Universidad Nacional en Bogotá y la Escuela de Minas en Medellín. En estas instituciones los profesores fueron hombres y debían ser ingenieros, pues la educación se fundamentaba en esa rama, que era llamada "la reina de las ciencias" (Poveda, 2012). De lo anterior, vale la pena resaltar que la matemática desde sus inicios en nuestro país, fue considerada como una ciencia con cierto grado de complejidad, que solo podía ser orientada por personas preparadas. Para inicios del siglo XX la matemática en Colombia tiene mayor relevancia y es aplicada en problemas de la vida diaria, además consolida bases aún más sólidas que en los siglos anteriores y se da inicio a la implementación del álgebra elemental en el aula de clase:

> La escuela apropia y desarrolla lo referido a la aritmética para completar la triada "leer, escribir y contar". De acuerdo con esto, conocer la aritmética consiste en dominar los algoritmos de las cuatro operaciones y saber aplicarlos para resolver problemas cotidianos de la vida social (Ríos, 2015, p.14).

El hecho de introducir el desarrollo de las matemáticas en la escuela primaria hace que aparte que los estudiantes realicen las cuatro operaciones básicas de la aritmética realicen un acercamiento al razonamiento y apropiación de conocimientos propios del área. En concordancia con lo anterior es importante mencionar los aportes que Ríos (2015) considera pues "se hace visible la configuración de un saber escolar que dista mucho de los intereses de la disciplina de referencia, a saber, la matemática" (p.14). De este modo, la enseñanza de la aritmética termina por convertirse en una herramienta para configurar o reafirmar los diversos modos de constituirse como sujeto en la sociedad, naturalizada por medio del manual.

A finales del siglo XX los programas de renovación del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) emite una serie de lineamientos en los que se indican que la educación matemática en Colombia ha buscado la transformación de la educación, cuyo principal objetivo busca:

> Responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos (p.46).

Estos lineamientos son una herramienta que busca el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes. En el documento se plantean cinco procesos generales que son: modelación, comunicación, formulación, resolución y razonamiento de problemas. Además, se resaltan cinco tipos de pensamiento matemático: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional, cada uno de estos se encarga de una rama de la matemática (MEN, 1998).

> Se puede ver una clara relación con los cinco tipos de pensamiento matemático enunciados en los Lineamientos Curriculares: en la aritmética, el pensamiento numérico; en la geometría, el pensamiento espacial y el métrico; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el variacional, y en la probabilidad y estadística, el pensamiento aleatorio. (p.56).

En la presente investigación se va a ser énfasis en los pensamientos variacional y métrico, ya que el estudio está encaminado a la factorización de expresiones algebraicas, empleando la representación en registros semióticos. Esto está inmerso en dicha corriente matemática y se justifica con este tipo de pensamiento ya que:

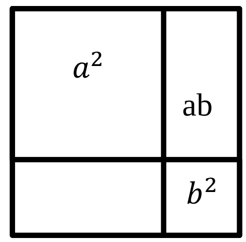
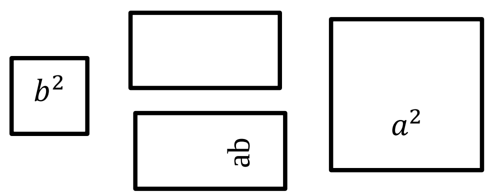
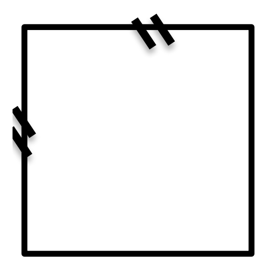
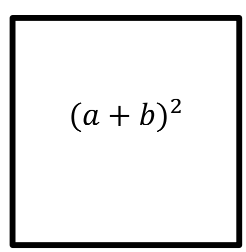
> (…) tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (p. 66).

De la misma manera, el MEN a inicios del siglo XXI dio a conocer una estrategia planteada como un apoyo y un complemento para la construcción y actualización de propuestas curriculares, guardando coherencia con los Estándares Básicos de Competencias y los denominados Derechos Básico de Aprendizaje (DBA). El objetivo de las mallas de aprendizaje permite orientar a los docentes sobre qué deben aprender en cada grado los estudiantes y cómo pueden desarrollar actividades para este fin. Es así, como para el grado octavo teniendo en cuenta los DBA “los estudiantes deben proponer, comparar y usar procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos” (p.63), además, de realizar “toma decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados” (p.64).

Finalmente, es importante destacar que el álgebra no puede considerarse como un proceso aparte o separado de los conocimientos presentes en la aritmética o la geometría, sino que ésta involucra los pensamientos numérico y métrico respectivamente, concluyendo en una formación conjunta. Mason *et al* (1999) destacan que la parte formal del álgebra, es indiscutible que la construcción del pensamiento algebraico tiene lugar a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro de un trabajo de actividades aritméticas y geométricas. De lo anterior se destaca que los procesos de la aritmética y la geometría van estrechamente ligados y entrelazados desde el inicio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela.

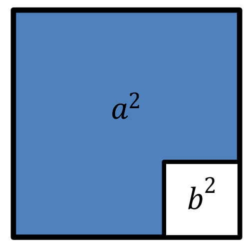
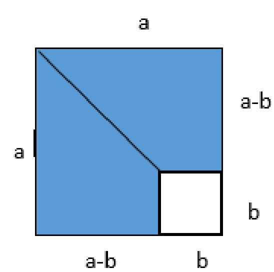
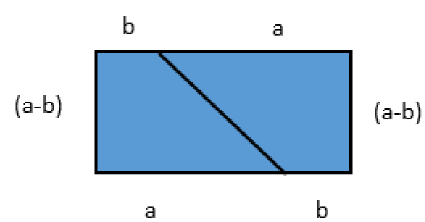
En importante destacar los registros semíticos de representación que se emplean para realizar la factorización de un trinomio cuadrado perfecto y de una diferencia de cuadrados perfectos, las posibles representaciones y los tratamientos internos que se pueden producir de estas.

Trinomio cuadrado perfecto

Registro semiótico	r^1	**Registro Algebraico**
Representación semiótica	R_1^1	$a^2 + 2ab + b^2$
Representación semiótica	R_2^1	$a^2 + ab + ab + b^2$
Representación semiótica	R_3^1	$(a + b)(a + b)$
Representación semiótica	R_4^1	$(a + b)^2$
Registro semiótico	r^2	**Registro gráfico**
Representación semiótica	R_1^2	
Representación semiótica	R_2^2	
Representación semiótica	R_3^2	$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ 
Representación semiótica	R_4^2	

$\boldsymbol{Registro\ semi\acute{o}tico}$	$\boldsymbol{r^3}$	***Registro lenguaje natural***
Representación semiótica	R_1^3	Un cuadrado está dividido en cuatro partes, dos rectángulos congruentes y dos cuadros de diferente medida.
Representación semiótica	R_2^3	Cuatro figuras geométricas, la suma del área de las dos congruentes equivalen al área del cuadrado más grande y la mitad de una de las congruentes es equivalente al área del cuadrado más pequeño.
Representación semiótica	R_3^3	Los lados de un cuadrado están determinados por la expresión $(a+b)$
Representación semiótica	R_4^3	El área de un cuadrado está determinada por la expresión algebraica $(a+b)^2$

Tabla 2. Registros y representaciones semióticas de un trinomio cuadrado perfecto. Fuente: Elaboración propia.

Diferencia de cuadrados perfectos		
Registro semiótico	$\boldsymbol{r^1}$	***Registro Algebraico***
Representación semiótica	R_1^1	$a^2 - b^2$
Representación semiótica	R_2^1	$a^2 + ab - ab - b^2$
Representación semiótica	R_3^1	$(a - b)(a + b)$
Registro semiótico	$\boldsymbol{r^2}$	***Registro gráfico***
Representación semiótica	R_1^2	
Representación semiótica	R_2^2	
Representación semiótica	R_3^2	
Registro semiótico	$\boldsymbol{r^3}$	***Registro lenguaje natural***
Representación semiótica	R_1^3	El área de una figura que representa un cuadrado de lado *a*, excepto un cuadrado interno de

		lado b, es igual a la diferencia de sus los cuadrados.
Representación semiótica	R_2^3	Las medidas de los lados de un cuadrado están dadas por la suma y diferencia de las mismas variables y se emplean para determinar el área de la figura.
Representación semiótica	R_3^3	El producto de la suma de dos términos, por la diferencia de los mismos términos.

Tabla 3: Registros y representaciones semióticas de una diferencia de cuadrados. Fuente: Elaboración propia.

Capítulo 4. Diseño metodológico

El propósito de este capítulo es describir los aspectos metodológicos presentes en esta investigación, destacando: tipo de estudio, metodología, diseño de la investigación, procedimiento, unidad de análisis, unidad de trabajo, técnicas para la recolección de la información y plan de análisis de la información.

Tipo de estudio

El desarrollo de este estudio se centró en el paradigma de la investigación de corte cualitativo, de tipo interpretativo y específicamente en la investigación en el aula. Se parten del hecho que ésta es una acción efectuada por los profesores, que incluyen dentro de su trabajo diario una indagación acompañada de una auto reflexión crítica sobre su actividad dentro del aula de clase, con la finalidad de mejorar la enseñanza y generar en los estudiantes interacción con el aprendizaje.

> El propósito de esta investigación es doble: la retroalimentación o información de retorno que el docente da al estudiante sobre su progreso en el aprendizaje, y las acciones de transformación de la metodología de la materia o área de conocimiento, para llegar con mayor efectividad a los estudiantes. (Restrepo, 2009, p.108)

De esta manera, al realizar un proceso de reflexión sobre sí mismo, teniendo en cuenta las actuaciones dentro del aula de clase y el analizar lo que se observa, sirve como instrumento para la toma de decisiones de realimentación y búsqueda del mejoramiento continuo en la labor pedagógica que se desempeña.

Metodología

Teniendo en cuenta que la información suministrada en esta investigación se inició a indagar sobre los procesos cognitivos que realiza el estudiante en el ambiente escolar, específicamente el tratamiento y la conversión de registros de representación semiótica, que realizan un grupo de escolares al enfrentarse a situaciones que involucran la factorización de expresiones algebraicas, específicamente la del trinomio cuadrado perfecto y la diferencia de cuadrados perfectos; se hace inevitable emplear o proveer un enfoque cualitativo de carácter interpretativo, el cual se hace visible a partir del constante diálogo de la teoría y lo que el estudiante quiere dar a conocer.

El objetivo de este estudio es identificar e implementar en el aula de clase, diferentes representaciones semióticas presentes en la factorización de expresiones algebraicas, partiendo de la descripción por medio de registros de representación, determinando procesos que permitan la asignación y validación de los registros semióticos para finalmente llegar a consolidar diferentes representaciones semióticas de la factorización de trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados perfectos, analizando la congruencia que existe entre las representaciones de los conceptos y los aportes generados por los estudiantes. Se destaca lo que propone Tood (citado por Hernández, Fernández y Baptista, 2010) quien manifiesta que el "investigador hace cuestiones abiertas, recaba datos expresados a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal, así como visual, los cuales describe y analiza y los convierte en temas que vincula, y reconoce sus tendencias personales" (p.9).

Para Hernández, Fernández & Baptista (2010), en la investigación científica se habla de un método cualitativo cuando el proceso de indagación es flexible y se mueve entre las respuestas y el desarrollo de la teoría. Así mismo, postulan que la realidad se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades, empleando el desarrollo natural de los sucesos sin ninguna modificación; consolidando el propósito de reconstruir la realidad, tal como la observan los actores de la investigación. En particular, este método pretende describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes.

> El enfoque se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados ni completamente predeterminados. No se efectúa una medición numérica, por lo cual el análisis no es estadístico. La recolección de los datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos subjetivos). También resultan de interés las interacciones entre individuos, grupos y colectividades. (Hernández, Fernández & Baptista, 2010, p.9)

Desde esta perspectiva, la investigación se enmarca en el paradigma interpretativo ya que en este se destaca la comprensión y la búsqueda de significados. La realidad social en la que se desarrolla la investigación no puede ser únicamente observada, sino debe generar una interpretación. Así mismo, el investigador está en constante interacción con el objeto investigado y el conocimiento se puede alcanzar a través de la comprensión (Corbetta, 2007). El objeto de análisis es difuso, es cambiante, es difícil de aprender, entonces la relación que se debe entablar sujeto objeto no debe ser distante, debe estar interrelacionado con el propósito continúo de buscar la manera de llegar al objeto.

Vale la pena mencionar las consideraciones expuestas por Hernández, Fernández & Baptista (2010) quienes afirman que las "técnicas para recolectar datos, como la observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, discusión en grupo, evaluación de experiencias personales, registro de historias de vida, e interacción e introspección con grupos o comunidades" (p.10), son elementos destacados para la recolección de la información en la investigación de tipo cualitativo. Facilitan la comprensión de los datos, la perspectiva, puntos de vista y en el caso específico de este trabajo las representaciones semióticas descritas por los participantes (individuos o grupos pequeños de personas a los que se investigará).

Diseño de la investigación

En esta investigación se elaboró un diseño que incluye la Teoría de Representación Semiótica, en especial los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que los estudiantes construyen o deducen al realizar la factorización de expresiones algebraicas, así como la relación que existe entre las bases teóricas y lo que el estudiante quiere dar a conocer.

En la figura 3, se describe el diseño empleado en la investigación; inicialmente se parte de la temática que se desarrolla, que corresponde a la factorización de expresiones algebraicas relacionada con la Teoría de Representaciones Semióticas. A partir de esta relación se realiza la secuencia didáctica y esta a su vez está conformada por cuatro situaciones didácticas. A partir de la implementación de las situaciones didácticas se pretende realizar la concepción, experimentación, formulación y validación e institucionalización del conocimiento y finalmente se buscaba evaluar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes.

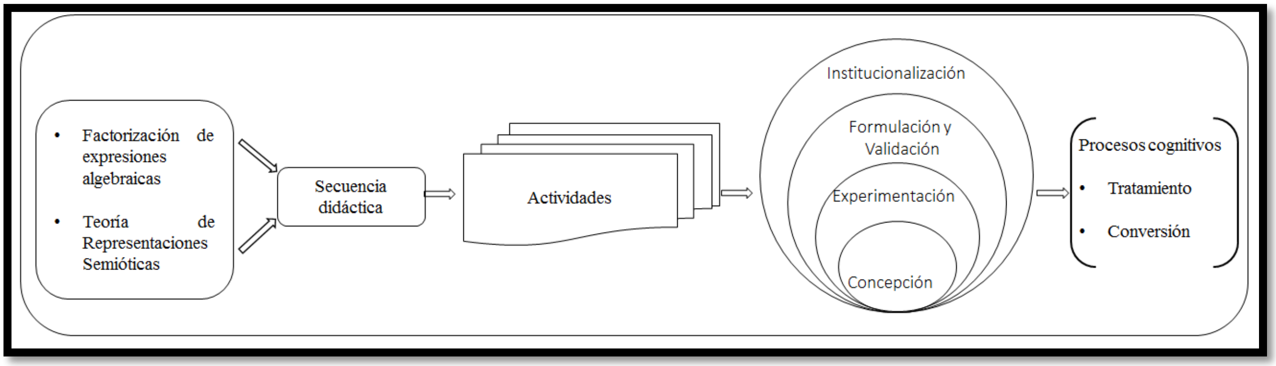


Figura 4: Diseño Metodológico. Fuente elaboración propia

Fases de la investigación

El desarrollo de esta investigación se dividió en tres etapas. En primer lugar, se realizó la revisión literaria sobre la factorización de expresiones algebraicas en el marco de la Teoría de las Representaciones Semióticas propuesta por Duval (1999). Posteriormente, se hizo una exploración sobre los procesos de tratamiento y conversión que empleaba un grupo de estudiante al desarrollar actividades propuestas en secuencias didácticas contextualizadas, diseñadas para realizar la factorización de la diferencia de cuadrados perfectos y del trinomio cuadrado perfecto. Por último, se caracterizaron las actividades cognitivas que usaron los estudiantes al pasar de un registro de representación a otro.

Unidad de análisis

En esta investigación se analizaron los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que realizaron un grupo de estudiantes de grado octavo al enfrentarse a situaciones didácticas contextualizadas en las que se involucró la factorización de expresiones algebraicas, específicamente la factorización de la diferencia de cuadrados perfectos y la del trinomio cuadrado perfecto, lo anterior enmarcado en la Teoría de Representaciones Semióticas (1999).

Unidad de trabajo

Para el desarrollo de este estudio se hizo necesario contar con un grupo de estudiantes de grado octavo, con edades entre los 12 y 15 años, matriculados en la sede principal de la Institución Educativa Agropecuaria El Escobal del municipio de Ramiriquí en el Departamento de Boyacá.

La Institución Educativa está ubicada en la zona rural, exactamente en la vereda el Escobal a ocho kilómetros del casco urbano del municipio. La población de este lugar, en este caso los padres de familia de los estudiantes, se dedican exclusivamente a labores de ganadería y agricultura, con condiciones socioeconómicas insatisfechas, además de contar con un bajo nivel de escolaridad.

En la mayoría de los casos, los estudiantes deben caminar largos trayectos para poder llegar al colegio, debido a que viven en diferentes veredas del municipio e incluso en otros municipios como Jenesano, Tibaná y Chinavita. Finalmente, que destaca que la investigación se generó a partir de la reflexión de la práctica docente y se implementó en este lugar debido a que la docente investigadora se encontraba vinculada a la Institución y se contaba con los espacios para el desarrollo de las actividades.

Instrumentos y técnicas para la recolección de la información

Para el desarrollo de este proyecto de investigación y con el fin de recolectar la información pertinente para el análisis se implementaron instrumentos como: observación directa, entrevista semi- estructurada y secuencia didáctica contextualizada. Inicialmente se dio a conocer el proyecto a directivos de la Institución, además se realizó esta actividad con los padres familia y representantes legales de los estudiantes del grado octavo. Se formalizaron las respectivas consideraciones éticas de la investigación y se procedió a la revisión y firma del consentimiento informado y de la autorización por parte de padres de familia o tutores legales.

Observación

Se realiza una observación directa de manera asistemática la cual consiste en realizar un escrito de estilo sencillo en el que describen las situaciones y conductas que más relevancia tienen en el contexto donde se desarrolla la clase (Martínez 2012). En este caso se realizó por parte de un observador externo: la rectora de la Institución Educativa, quien a partir de un escrito analiza y describe cada uno de los aspectos significativos de la clase.

Entrevista

Se realiza una entrevista de tipo semi-estructurado a los estudiantes. Con el fin de conocer el contexto en el cual se desenvuelven de los estudiantes para analizar las percepciones que ellos tienen sobre las matemáticas, la clase de matemáticas y el álgebra. La entrevista "se define como una reunión para conversar e intercambiar información entre una persona (el entrevistador) y otra (el entrevistado)" (Hernández, Fernández & Baptista, 2010, p.410).

Secuencia didáctica

La secuencia didáctica se realizó pensando en orientar la factorización de expresiones algebraicas bajo la Teoría de Representaciones Semióticas, esto dado que existe la necesidad de emplearlas para que el estudiante pueda realizar algunas funciones cognitivas (Duval, 1999). De otro lado, el álgebra elemental se ha concebido como la construcción de una aritmética generalizada y puede darse por medio de una ruta difícil o por sí sola "pues está conformada de abstracciones de ideas que por sí son abstractas. A pesar de ello, esta es la ruta más privilegiada en los textos escolares" (Mason *et al*, 1999, p.91). Desde esta perspectiva, se destaca que la creación e implementación de secuencias didácticas "pueden llevar a los alumnos a desarrollar actividades ricas y productivas. Desde el punto de vista matemático constituye uno de los problemas fundamentales a los que se enfrenta el profesor durante su práctica profesional" (Ponte, 2004, p.1). De ahí, la necesidad propia de implementar en el aula de clase las secuencias de enseñanza y aprendizaje en las que se mantiene un diálogo directo entre la Teoría de Representaciones Semióticas y la factorización de expresiones algebraicas.

A continuación, se enuncian las categorías que se tuvieron en cuenta para realizar el análisis de la información de los datos recopilados y los aportes de los estudiantes con los cuales se desarrolló la investigación.

Categorías y subcategorías de análisis

Categoría	Subcategoría	Indicadores
Procesos cognitivos en los registros de representaciones semióticas en la factorización de expresiones algebraicas.	Factorización de expresiones algebraicas.	Dificultad en la enseñanza de la factorización.
		Dificultad en el aprendizaje de la factorización.
	Registros de representación empleados en la factorización de trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados perfectos.	Correspondencia Semántica.
		Univocidad semántica.
		Igual orden posible de Aprehensión.
	La comunicación como proceso mediador en el aula de clase.	Papel que desempeña la comunicación en el proceso de conversión.
		Papel que desempeña la comunicación en el proceso de tratamiento.

Tabla 4: Categorías de análisis: Elaboración propia.

Plan de análisis de datos

Partiendo de los instrumentos empleados para la recolección de la información; el análisis de los datos se planteó de la siguiente manera:

Instrumento 1

La entrevista semi- estructura permitió conocer la percepción que los estudiantes tienen de la matemática y del álgebra como tal. Además, se logró determinar y caracterizar el contexto en el que ellos viven, así como identificar rasgos y distintivos de los padres de familia de estos estudiantes, modo de vida, ocupaciones y grado de escolaridad que presentan.

Instrumento 2

La observación se realizó por un tercero, en este caso fue realizada por la rectora de la Institución Educativa Agropecuaria El Escobal, lugar donde se ejecutó la investigación y la investigadora se desempeñaba como docente del área de matemáticas. En esta se logró evidenciar la metodología de clase, las actitudes y comportamientos de los estudiantes, así como la participación y ejecución de la clase como tal.

Instrumento 3

Las secuencias didácticas que se realizaron con la finalidad de orientar la factorización y expansión algebraica del trinomio cuadrado perfecto y la diferencia de cuadrados perfectos en estudiantes de grado octavo. Utilizando diferentes formas de representación, se realizó la secuencia didáctica que se denominó **“Dando pasos”** que a su vez se dividió en cuatro situaciones de enseñanza designadas así: Situación 1 “En pie haciendo solitos”, Situación 2 “Vamos de la mano”, Situación 3 “Preparando el camino” y Situación 4 “A caminar”. Cada situación cambia dependiendo la factorización que se desea trabajar.

Secuencia de enseñanza para orientar la factorización del trinomio cuadrado perfecto.

La realización de la secuencia, tuvo como propósito conocer el nivel de percepción que tiene el estudiante ante un problema contextualizado y la manera de describir el paso entre representaciones de un objeto matemático.

Los DBA y los estándares básicos en competencia que se tienen en cuenta en esta secuencia de enseñanza son los siguientes: Aplica la propiedad distributiva en expresiones simples como (Ax + B)(Cx + D); Utiliza identidades como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; conoce las fórmulas para calcular áreas de superficie; resuelve problemas y simplifica cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos; conjetura y verifica propiedades de congruencias y semejanzas entre fi guras bidimensionales para la solución de un problema; usa representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas; construye expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada y usa procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

Situación 1 "En pie haciendo solitos"

En esta parte de la secuencia se buscaba que el estudiante realizara las actividades de manera individual. Se divide en cuatro etapas con las que se pretende la constante búsqueda de representaciones y el paso a otra representación, esto teniendo en cuenta procesos cognitivos de tratamiento y conversión.

Primer ítem

Una finca, cuya forma semeja una figura geométrica que tiene todos sus lados congruentes, se ha parcelado en cuatro partes, con el objetivo de sembrar tres productos agrícolas distintos. La parcela más grande y la más pequeña se pueden representar por medio de cuadrados, y las otras dos parcelas se representan por medio de rectángulos congruentes. Dibuje y describa las figuras geométricas que considere cumplen las condiciones y representen adecuadamente la figura de la finca.

Unidades significante

Se busca que los estudiantes, exploren las diferentes figuras que cumplan las condiciones que se especifican, que logren la conversión del lenguaje natural al lenguaje gráfico o geométrico.

Segundo ítem

La siembra de los productos se distribuye en las cuatro parcelas de la siguiente manera:
El área que ocupa el cultivo de tomate, está divida en dos partes iguales, estas son equivalente al área que ocupa el cultivo de papa que corresponde a la parcela más grande. Un cuarto del área de la parcela del cultivo de papa o la mitad de una parcela del cultivo de tomate, es equivalente al área de la parcela del cultivo de lulo, que es la parcela más pequeña y se representa por medio de una figura geométrica que tiene todos lados congruentes. Realice la representación gráfica teniendo en cuenta las características anteriores. Use todas las opciones que considere posibles. Además, escriba la descripción de la representación que ha realizado de cada una de las parcelas.

Unidades significantes

En esta segunda parte se espera que los estudiantes realicen la respectiva distribución de los productos que se van a sembrar respecto a la representación geométrica que han realizado. Además, que escriban con sus propias palabras las conclusiones luego de realizar la actividad

Tercer ítem

Reúnase con un compañero, comparen las representaciones gráficas que cada uno realizó y argumenten por qué las consideran adecuadas, recuerde que todo debe quedar escrito. Luego, consoliden una sola representación, en la que describan las características de cada parcela.

Unidades significantes

En ese momento se pretende que los estudiantes puedan realizar conclusiones. Además, discutir y formular la coherencia de lo realizado en los dos ítem anteriores. Se espera que consoliden una figura que cumpla correctamente las condiciones dadas.

Cuarto ítem

Tenga en cuenta las siguientes afirmaciones para luego solucionar las preguntas.

- La medida de un lado de la parcela del cultivo de papa es (p) unidades. Además, la parcela está representada por un cuadrado.
- Un lado del cuadrado donde está sembrado el lulo mide, (l) unidad.

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la parcela del cultivo de papa?

¿Cuál es la expresión que representa la medida del lado de la finca? ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la finca?

Unidades significantes

Finalmente, la actividad planeada busca que el estudiante logre una generalización y halle la expansión de un trinomio cuadrado perfecto, y pase por las representaciones posibles de este, que logre los procesos cognitivos de tratamiento y conversión.

Situación 2 "Vamos de la mano"

En esta situación se buscaba realizar acompañamiento a los estudiantes, así como realizar las explicaciones y aclaraciones pertinentes respecto a la factorización y expansión de un trinomio cuadrado perfecto. Además, la aclaración respecto a las diferentes representaciones presentes.

Si tenemos la expresión $(x + 1)^2$, su expansión algebraica es $x^2 + x + x + 1$ y la simplificación es $x^2 + 2x + 1$. Ahora, visualicemos en forma geométrica la solución de este trinomio cuadrado perfecto:

Representemos x^2 como el área de un cuadrado cuyo lado mide x .

Representemos a x como el área de un rectángulo cuyos lados miden x y 1 (unidades) respectivamente.

La unidad como el área de un cuadrado de lado 1.

Nótese que para la expresión $x^2 + 2x + 1$ se organizan estas figuras para obtener el siguiente cuadrado:

La anterior gráfica es una interpretación geométrica de la expresión $x^2 + 2x + 1$, que tiene como medida de los lados (x +1) y como expresión que representa el área $(x + 1)^2$.

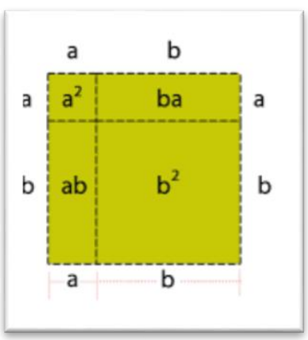
El área de este cuadrado es, (x +1) (x +1) = $(x + 1)^2$, luego, $x^2 + 2x + 1$=$(x + 1)^2$.

A esta expresión algebraica se le denomina Trinomio Cuadrado Perfecto.

Situación 3 “Preparando el camino”

Este es un espacio para que los estudiantes repasen lo orientado en las actividades anteriores, refuercen sus conocimientos y se preparen para la parte final de la secuencia, afianzando el paso de un registro de a otro y realicen procesos de tratamiento interno de estos.

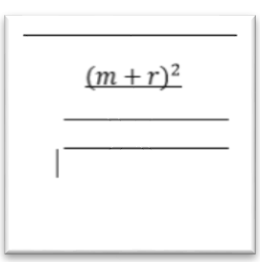
Registro geométrico



Unidades significantes

A partir del registro geométrico los estudiantes de deben realizar el proceso cognitivo de conversión, generando cambio de registro. Y tratamiento al pasar a las diferentes representaciones.

Registro algebraico



Unidades significantes

En este registro de representación se pretender que los estudiantes realicen el proceso de tratamiento al realizar la expansión de binomio elevado al cuadrado y que realicen las operaciones necesarias con el fin de llegar el trinomio cuadrado perfecto. Además de pasar de una representación a otra realizando el proceso cognitivo de conversión y tratamiento.

Registro algebraico

$(m+4)(m+4)$

____

____

Unidades significantes

Partiendo del registro algebraico se pretender que los estudiantes realicen el proceso de tratamiento del producto de dos binomios y que realicen las operaciones necesarias con el fin de llegar a la expansión algebraica y al trinomio cuadrado perfecto. Además, de realizar la conversión a los demás registros semióticos.

Registro de lenguaje natural

Existe un cuadrado de lado t y otro de lado 1, los cuales están inscritos en uno de mayor área. Por lo que se determina que la medida del lado es (t + 1)

Unidades significantes

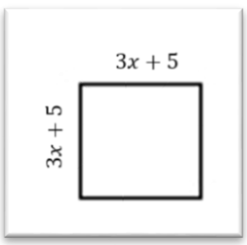
Partiendo de del registro de lenguaje natural, los estudiantes deben realizar el proceso de tratamiento al interior de cada registro realizando diversas representaciones. Luego formalizar la conversión en los diferentes de registros semióticos.

Situación 4 "A caminar"

Este es momento final de la secuencia de enseñanza, aquí el estudiante debe estar en capacidad de realizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión, pasar de un registro de representación a otro y solucionar la factorización y expansión del trinomio cuadrado perfecto y la expansión del binomio elevado al cuadrado, empleando diversas representaciones semióticas.

Primer ítem

Se le solicita al estudiante determinar las expresiones algebraicas que expresan el área de la figura.



Unidades significantes

El estudiante, a partir del registro geométrico o gráfica, debe pasar de un registro a otro, realizando los procesos conversión. Además, dentro de la misma representación realizar una transformación empleando operaciones necesarias para realizar el proceso cognitivo de tratamiento ejecutando la factorización del trinomio cuadrado perfecto y la expansión del binomio elevado al cuadrado o el producto de los dos binomios.

Segundo ítem

Se plantean las siguientes tareas para que el estudiante logre solucionar.

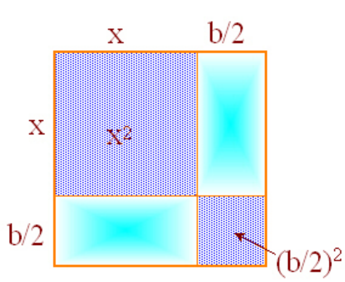
- Expandir la expresión algebraica $(3m+2)^2$ (las formas posibles).
- Bosqueje la figura geométrica que mejor represente la expresión anterior.
- Determine la expresión algebraica que representa el área de la figura.

Unidades significantes

El estudiante debe realizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión, logrando la institucionalización de la factorización y expansión del trinomio cuadrado perfecto.

Tercer ítem

Se solicita al estudiante escribir la expresión algebraica que represente el área de la siguiente figura



Unidades significantes

Los estudiantes realizan los procesos cognitivos de tratamiento y conversión manteniendo la univocidad semántica entre los registros de salida y los de llegada.

Secuencia de enseñanza para orientar la factorización de diferencia de cuadrados perfectos.

El propósito de esta secuencia de enseñanza es que los estudiantes logren realizar la factorización de la diferencia de cuadrados perfectos, esto sustentado y soportado en los diferentes registros de representaciones semióticas.

Los DBA y lo estándares básicos en competencia que se desarrollan con esta secuencia de enseñanza son los siguientes: Aplica la propiedad distributiva en expresiones simples como $(Ax + B)(Cx + D)$; Utiliza identidades como $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; Conoce las fórmulas para calcular áreas de superficie; resuelve problemas y simplifica cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos; conjetura y verifica propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales para la solución de un problema; usa representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas; construye expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada y usa procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.

Situación 1 "En pie haciendo solitos"

Se pretende que por medio de la visualización el estudiante pueda determinar y asignar las expresiones algebraicas que representan cada parte de la figura y consolidar una sola expresión.

Primer ítem

En la Figura 1 se puede observar el plano de una finca destinada al cultivo de hortalizas. En la misma finca se ha asignado un sector para la construcción de una vivienda.

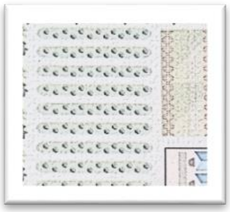


Fig. 1

El sector destinado para la construcción de la casa tiene un área representado por la expresión $\boldsymbol{y^2}$, y la medida de los lados se muestra en la Figura 2.

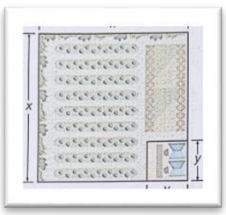


Fig. 2

Segundo ítem

De acuerdo con la anterior información responda los siguientes cuestionamientos.

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la primera figura?

¿Cómo se puede expresar el área de la finca destinada al cultivo?

Unidades significantes

Se busca que los estudiantes, a partir de la representación geométrica exploren e identifiquen las características que se proporcionan. Además, ubicar en la figura las diferentes expresiones algebraicas que se especifican y lograr la conversión de un registro a otro.

Unidades significantes

En esta segunda parte se espera que los estudiantes realicen las respectivas operaciones teniendo en cuenta la información suministrada. Es decir, que realice el proceso cognitivo de tratamiento interno al registro de partida.

Situación 2 “Vamos de la mano”

En esta parte de la secuencia de enseñanza se busca que el estudiante realice el proceso cognitivo de conversión del registro de lenguaje natural a partir del registro gráfico o geométrico.

Primer ítem

Reconstruya con sus propias palabras la siguiente secuencia de figuras: hágalo de manera general.

Fig. 1

Fig.2

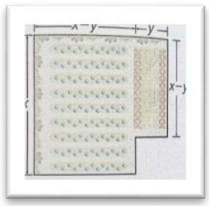
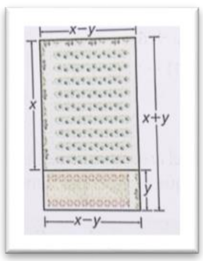


Fig. 3



Unidades significantes

Se busca que los estudiantes, partiendo de la representación geométrica o gráfica, exploren las diferentes figuras que se especifican y que logren la conversión del registro al lenguaje natural.

Segundo ítem

Realice la descripción de las modificaciones o transformaciones de la representación gráfica de acuerdo con los siguientes cuestionamientos.

- ¿Qué observa en la Figura 1?
- ¿Qué logra observar según la medida de las figuras 2 y 3? ¿Qué expresiones algebraicas representan el representan la medida de los lados de la finca?
- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la parte de la finca asignada para el cultivo?

Unidades significantes

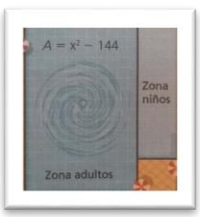
En esta segunda parte se espera que los estudiantes realicen la respectiva descripción de las transformaciones que se producen en las representaciones geométricas, es decir, que el estudiante realice el proceso cognitivo de conversión y se mantenga la univocidad semántica, del registro de partida y el de llegada.

Situación 3 "Preparando el camino"

Se pretende que el estudiante luego de analizar un problema, empleando el registro de lenguaje natural y registro el geométrico logre el proceso de conversión al registro lenguaje algebraico.

Primer ítem

Un centro vacacional diseñó un modelo de piscina que tiene dos secciones. Si el área de la zona de adultos se puede expresar mediante la expresión $x^2 - 144$, ¿Cuáles son las expresiones algebraicas para las dimensiones de esta zona?



Unidades significantes

Se busca que los estudiantes, exploren la figuras que cumplan las condiciones que se especifica, que logren el pasar de un registro a otro, además de realizar operaciones dentro del mismo registro.

Segundo ítem

Se pide al estudiante que realice la representación gráfica de las siguientes expresiones algebraicas y describa los procedimientos. Debe incluir la medida de cada uno de los lados de la representación.

- (m+6) (m-6)
- (8m-4) (8m+4)

Unidades significantes

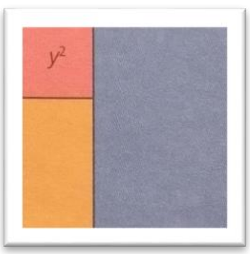
En esta segunda parte los estudiantes deben representar las diferentes formas de registro gráfico o geométrico, además, que describan cada figura mediante los registros algebraico y del lenguaje natural.

Situación 4 "A caminar"

En esta última parte de la secuencia de enseñanza se espera que los estudiantes logren realizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión al realizar la factorización de la diferencia de cuadrados perfectos.

Primer ítem

Se pide al estudiante que cree un problema el que involucre la representación gráfica que se suministra.



Unidades significantes

Se busca que los estudiantes plasmen su creatividad, empleando el lenguaje natural involucrando la figura suministrada. En otras palabras, que realicen el proceso de conversión de registros de representación.

Segundo ítem

Luego de dar sentido a la imagen, se requiere que el estudiante realice la expansión y factorización de las expresiones algebraicas involucradas.

Unidades significantes

En esta segunda parte de la situación y última de la secuencia se espera que los estudiantes realicen la diferentes conversiones y tratamientos necesarios para factorizar y expandir las expresiones algebraicas, en este caso la diferencia de cuadrados perfecto.

Capítulo 5. Análisis de resultados

Hallazgos del primer instrumento

La entrevista se realizó a cinco estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa en la cual se desarrolló la investigación. Al realizar un análisis de estas grabaciones se logró evidenciar el contexto en el que los estudiantes viven y la percepción que tienen tanto de las matemáticas como del álgebra.

Respecto al contexto, se encontró que los estudiantes viven en la zona rural de los municipios de Ramiriquí y Jenesano. En ocasiones en que no se presta el servicio de ruta escolar, ellos deben caminar largos trayectos para llegar al colegio a recibir las clases, manifestando que “me demoro media hora en ruta y como dos horas a pie” (estudiante, E12). En relación con las familias, los padres y madres de estos estudiantes cuentan con un bajo nivel de escolaridad, no superando el grado quinto de primaria: el estudiante E12 afirmó que “mi papá estudió hasta como tercero y mi mamá como hasta segundo”. El estudiante, E21 “mi mamá estudio hasta quinto” y el estudiante, “mi papá estudió hasta quinto y mi mamá estudió hasta cuarto”.

En cuanto al trabajo desempeñado por los padres, las labores diarias giran en torno a actividades del campo, ya sea en sus propios cultivos o laborando en otros “mi papá se la pasa jornaliando donde salga” (estudiante, E12) y el estudiante, E13 manifiesta que “mi mamá trabaja cogiendo uchuva”. Además, están dedicados a las labores propias del hogar, esto principalmente las madres de familia como lo señala el estudiante E11 “mi papá trabaja en el campo, es agricultor y mi mamá es ama de casa.”.

Los estudiantes manifestaron que luego de llegar del colegio y en compañía de los hermanos deben ayudar con los quehaceres de la casa, ya sea en la agricultura o en el pastoreo de semovientes, por lo que no les queda mucho tiempo para el desarrollo de las tareas asignadas en las clases.

Por otra parte, respecto a la percepción que existe de las matemáticas, se evidenció que los estudiantes las consideran como un área fundamental, el estudiante E13 señala que "al emplear las matemáticas las cosas se hacen más prácticas y siempre las tenemos que utilizar", y el estudiante E11 que la matemática "es una forma de aprendizaje, para poder desarrollar la mente" aunque a veces las clases se tornen aburridas y difíciles de comprender; desde esta perspectiva, se resalta lo que el estudiante E20 puso de manifiesto "a veces uno no entiende, lo que enseñan en matemáticas y se vuelven aburridas". Con respecto a lo anterior, se preguntó a los estudiantes sobre cómo le gustaría que fueran la clase de matemáticas, a lo que ellos respondieron "explicándonos de diferentes maneras" (estudiante, E20), además, "que sean más dinámicas" (estudiante, E11); de la misma manera, en estudiante E13 señaló que "hacer lo que hagamos en clase, pero no dejar tarea", por su parte el estudiante E21 dijo que "así como las hacen ahorita. Nos explican bien y todo" y finalmente, el estudiante E12 afirmó que le gustaba como se orientaban "así, normal".

Además, al indagar sobre la posibilidad de la existencia de matemáticas sin números, ninguno de los estudiantes la conciben de esa manera, argumentando que "las matemáticas se tratan de números" (estudiante, E11); de igual forma, el estudiante E21 indicó que "la matemática es parte de los números" y por su parte, el estudiante E12 considera que "la matemática sin números no sería matemática" por otra parte, el estudiante E20 señala que "no se podrían hacer operaciones" y finalmente, el estudiante E13 dice que "todo tiene un valor".

Por otra parte, con referencia al álgebra no se presentó diversidad de respuestas, pues la mayoría de los estudiantes coincidieron en que no tenían información sobre esta rama de las matemáticas. Sólo dos estudiantes dieron respuesta a la pregunta ¿Qué ha escuchado del álgebra? asegurando que "que es muy difícil" y que se emplean "como de letras, como relación con el abecedario" esto responde el estudiante E13 y el estudiante E21 responde de una manera muy propia asegurado "es un libro".

Finalmente, los estudiantes E11 y E12 manifestaron agrado y valor al asistir al colegio destacando la importancia del estudio para "ser profesional y salir adelante" así como "ser alguien de bien en la vida" y, además, E 11 "lograr lo que nuestros padres no pudieron hacer". De esta manera, se puede concluir con lo enunciado por Duval (1999) mencionando que los estudios cognitivos juegan un papel de acuerdo con las variables intrínsecas, que son relativas al entorno y son de gran interés para la realización de trabajos didácticos y de las ciencias de la educación, además, la existencia de variables relativas en las que se indaga a partir de condiciones sociales y culturales de los alumnos, permitiendo contextualizar las actividades que se orientan en el aula de clase sin dejar de un lado los contenidos.

Hallazgos del segundo instrumento

La caracterización de la clase se hizo por parte de un tercero, la Rectora de la Institución Educativa donde se realizó la investigación. En el informe de observación destacó dos momentos en los que dividió la sesión, y recibieron el calificativo de ambiente de aula y didáctica de clase. En relación al ambiente de aula, hace referencia a todo lo relacionado con actitudes que se presentan en el salón de clase, tanto por parte de los estudiantes como por la docente: se destaca la importancia del saludo y la retroalimentación de conceptos previos a la clase, así como el trato equitativo a los estudiantes y la comunicación directa con los estudiantes dirigiéndose a ellos por el nombre, además, resalta la participación activa por parte de todos los estudiantes "está pendiente de involucrar a los estudiantes que no están participando" y finalmente el trato respetuoso de ambas partes.

Respecto a la didáctica de la clase, el observador externo realizó una caracterización global de los aspectos que consideró importantes en el desarrollo de la sesión. Resalta la importancia como tal de la pregunta, "hace preguntas para que los estudiantes reflexionen y afiancen sus conocimientos" además de "hace preguntas en diferentes contextos a los estudiantes para verificar lo orientado". Así mismo, menciona que "las actividades planteadas para la clase son pertinentes" y que "efectúa retroalimentación inmediata sobre las respuestas dadas por los estudiantes", de igual manera, "revisa el trabajo que está desarrollando cada uno de los estudiantes" y finalmente se "establecen tiempos pertinentes para el desarrollo de las actividades".

Hallazgos del tercer instrumento

Para hacer análisis de la información obtenida y generada por parte de los estudiantes, al enfrentarse a una secuencia didáctica acerca de la factorización del trinomio cuadrado perfecto y la diferencia de cuadrados perfectos, es necesario tener en cuenta las categorías de análisis previamente establecidas como lo son la correspondencia semántica, univocidad semántica terminal e igual orden de aprehensión, esto para determinar la congruencia o no congruencia de una representación y verificar que el proceso cognitivo de conversión sea el adecuado. De igual manera, analizar las reglas de tratamiento, los procedimientos que se realizan al interior de cada registro de representación y el papel de la comunicación en cada proceso cognitivo, las tareas de producción y las tareas de comprensión.

Análisis de resultados: factorización y expansión trinomio cuadrado perfecto

Situación 1 "En pie haciendo solitos"

Se buscó que los estudiantes, exploraran las diferentes figuras que cumplían las condiciones que se especificaban, que lograsen la conversión del lenguaje natural al lenguaje gráfico o geométrico.

Registro de partida lenguaje natural - registro de llegada representación geométrica.

Ítem 1. Una finca, cuya forma semeja una figura geométrica que tiene todos los lados congruentes, se ha parcelado en cuatro partes, con el objetivo de sembrar tres productos agrícolas distintos. La parcela más grande y la más pequeña se pueden representar por medio cuadrados, y las otras dos parcelas se representan por medio de rectángulos congruentes. Dibuje y describa las figuras geométricas que considere cumplen las condiciones y representen adecuadamente la figura de la finca.

Los estudiantes lograron generar representaciones mentales realizando el proceso de formación.

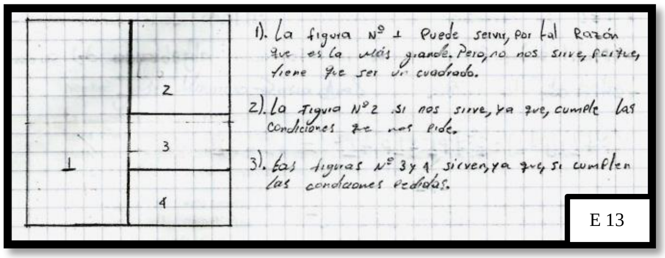


Figura 5. Construcción geométrica y descripción E13, ítem 1.

El estudiante E13, realiza la representación indicando que la figura que denominó 1, no cumplen la condición, pero las figuras 2,3 y 4 sí. Por tanto, la representación producida tiene aceptabilidad respecto al registro inicial. El registro es no congruente al no cumplir la correspondencia semántica, pues la representación de la parcela más grande no es cuadrada.

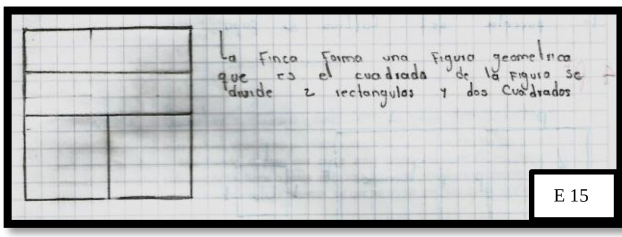


Figura 6. Construcción geométrica y descripción E15, ítem 1.

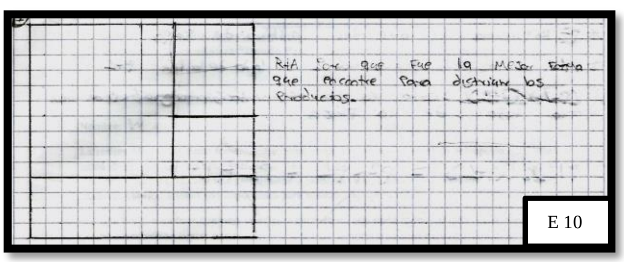


Figura 7. Construcción geométrica y descripción E10, ítem 1.

Respecto a los estudiantes E15 y E10, presentan representaciones que no cumplen ninguna de las condiciones, pues en las gráficas existe no-congruencia del registro de salida, lenguaje natural.
Con relación a la descripción que realizan de las figuras, tampoco se evidencian las tareas de producción y comprensión de texto.

Las representaciones anteriores no cumplen el criterio de transformabilidad, que consiste en mantener las características de lo que se quiere representar. Los estudiantes no tienen claridad al realizar la representación gráfica, hay ausencia de nociones básicas de geometría. Por otro lado, algunos estudiantes logran concretar los procesos cognitivos de formación, conversión y tratamiento, enunciados a continuación.

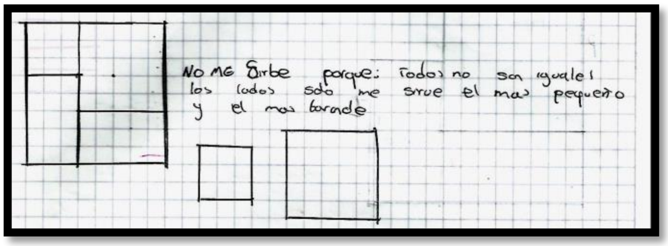


Figura 8. Construcción geométrica y descripción E18, ítem 1.

La representación que realiza el estudiante E18, es correcta de acuerdo al registro de salida; existe transformabilidad conservando el contenido. Pero al hacer la interpretación textual, considera que no corresponde con la gráfica. Hace la conversión adecuada del registro del lenguaje natural al registro gráfico.

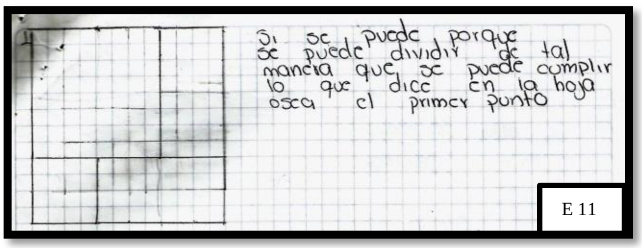


Figura 9. Construcción geométrica y descripción E11, ítem 1.

El estudiante E11 realiza el proceso de conversión, existe congruencia con el registro de salida. Al hacer el tratamiento, la interpretación textual de lo propuesto y del gráfico, la paráfrasis que realiza corresponde con el registro de llegada.

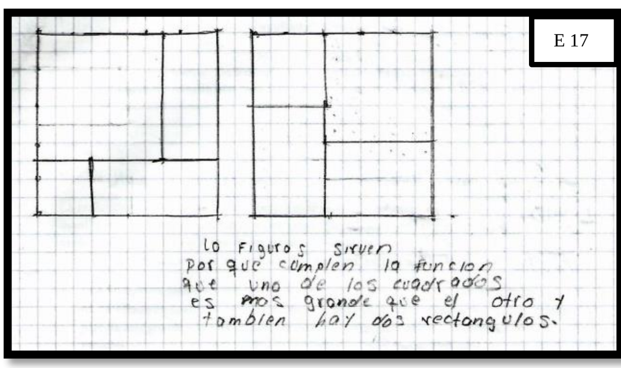


Figura 10. Construcción geométrica y descripción E17, ítem 1.

El estudiante E17, realiza dos representaciones congruentes a lo indicado en el registro de lenguaje natural. Además, la descripción textual coincide con la representación elaborada, realiza paráfrasis del registro inicial movilizando el registro. Por lo tanto, se concluye que logra realizar las actividades cognitivas.

Las representaciones son adecuadas, los estudiantes logran realizar la conversión de los enunciados del lenguaje natural a representación geométrica. De lo anterior, se puede afirmar que los estudiantes realizan transformaciones intencionales pues "toman al menos el tiempo de un control consiente y que se dirigen exclusivamente a los datos previamente observados" (Duval, 1999, p. 39). Además, los estudiantes forman representaciones semióticas a partir de los registros, al recurrir a signos de representación para distinguir, incorporar y construir los registros finales.

Ítem 2. La siembra de los productos se distribuye en las cuatro parcelas de la siguiente manera:

El área que ocupa el cultivo de tomate, está divida en dos partes iguales, estas son equivalente al área que ocupa el cultivo de papa que corresponde a la parcela más grande. Un cuarto del área de la parcela del cultivo de papa o la mitad de una parcela del cultivo de tomate, es equivalente al área de la parcela del cultivo de lulo, que es la parcela más pequeña y se representa por medio de una figura geométrica que tiene todos lados congruentes.

Realice la representación gráfica teniendo en cuenta las características anteriores. Use todas las opciones que considere posibles. Además, realice la descripción de la representación que ha realizado de cada una de las parcelas.

Al realizar la descripción de cada una de las parcelas el estudiante muestra más claridad para elaborar la representación, tienen criterios para aceptar o rechazar el cambio de registro. Algunas gráficas construidas por los estudiantes son las siguientes:

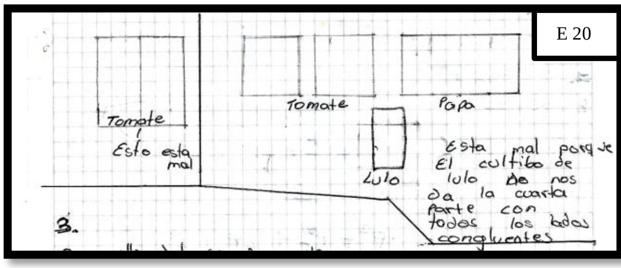


Figura 11. Representación geométrica y justificación E20, ítem 2.

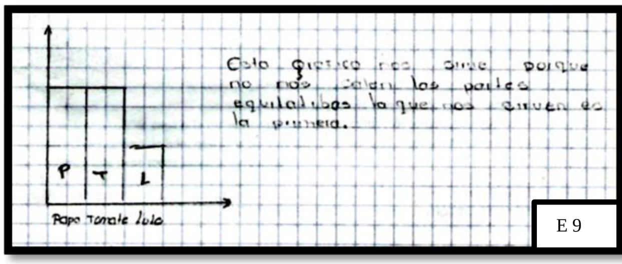


Figura 12. Representación geométrica y justificación E9, ítem 2.

Los estudiantes E20 y E9 realizan unas representaciones como guía para hacer la conversión del registro de salida. Pero ellos mismos detectan que no cumple con las características, por lo tanto, se incumple con la regla de conformidad, las gráficas no son congruentes en el cambio de sistema semiótico de representación, los registros semióticos son no-congruentes.

En la formación de la representación que realiza el estudiante E9, evoca un objeto que quiere representar, analiza la gráfica y concluye que no coincide con las condiciones que se dan inicialmente. Por lo tanto, ninguno logra la conversión del registro adecuadamente. En estos casos, se evidencia la claridad que tienen los estudiantes respecto al registro de salida, se destaca que detectaron el error.

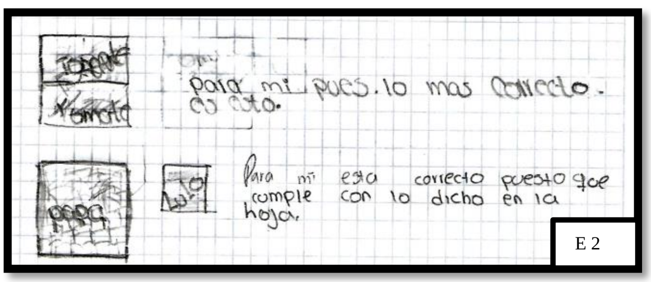


Figura 13. Representación geométrica y justificación E2, ítem 2.

El estudiante E2 realiza el proceso cognitivo de conversión, pues las condiciones del registro inicial se mantienen en el registro final, existe congruencia entre los registros de representación. El tratamiento interno al lenguaje natural, es decir, la paráfrasis es correcta, realiza comprensión y análisis del registro geométrico.

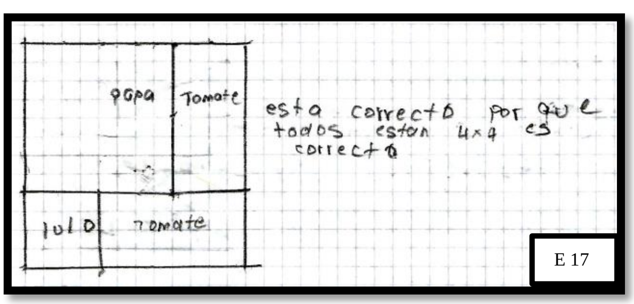


Figura 14. Representación geométrica y justificación E17, ítem 2.

El estudiante E17 realiza el proceso la conversión, y el paso de registros es correcto. Además, la transformabilidad en la representación se conserva, realizando una descripción análoga empleando valores numéricos, el tratamiento interno corresponde a lo que visualiza en la representación geométrica.

Los procesos cognitivos de tratamiento y conversión son evidentes, los estudiantes logran el paso de registros de representación. Respecto a la formación, ellos recurren a signos para revelar la visón o imagen mental que tiene del objeto, realizan la producción de lo percibido y relacionan las condiciones dadas. El tratamiento se evidencia al sustituir el registro de escritura de partida denominado paráfrasis al hacer la trasformación interna del lenguaje natural y la anamórfosis al formar nuevas representaciones gráficas a partir del registro figural. Finalmente, se resalta que los estudiantes realizan las tareas de producción y comprensión, pues movilizan la formación de representaciones semióticas su tratamiento y conversión.

Ítem 3. Reúnase con un compañero, comparen los registros de representaciones gráficas que cada uno realizó y argumenten por qué las consideran adecuadas, recuerde que todo debe quedar escrito. Luego, consoliden una sola representación, en la que describan las características de cada parcela.

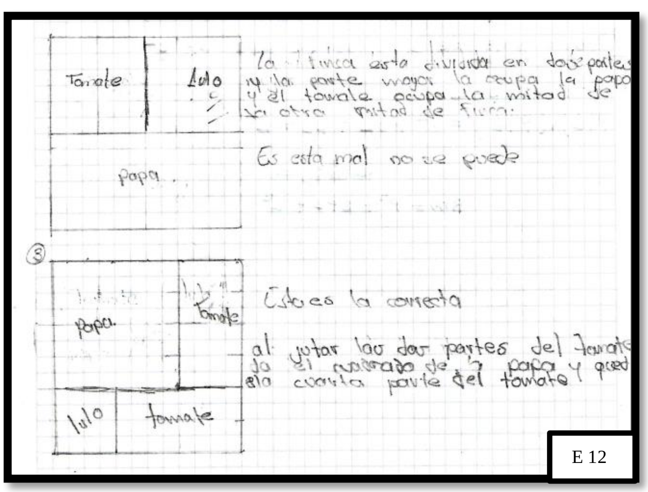


Figura 15. Consolidado registro gráfico y lenguaje natural E12, ítem 3.

El estudiante E12, luego de reunirse con su compañero detecta errores que presentó en la representación del punto anterior, describe la nueva representación y rechaza la anterior diciendo “no se puede”. Se evidencia que el estudiante supera el obstáculo que se presenta en la conversión y hay una producción discursiva de texto por parte del alumno. En este caso articular, el alumno realiza de manera acertada los procesos cognitivos de tratamiento y conversión luego de evidenciar los errores cometidos, replanteando la idea y construyendo los registros correctos, finalmente logra la movilización de los sistemas semióticos de representación.

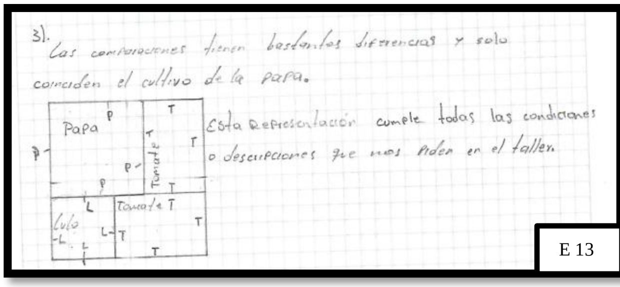


Figura 16. Consolidado registro gráfico y lenguaje natural E13, ítem 3.

En las representaciones que diseñan los estudiantes E13 y E17 se evidencia el paso de registro, la conversión es congruente con el registro de salida, las unidades significantes están presentes en la representación. Además, realizan la tarea de producción y comprensión movilizando registros, permitiendo transformabilidad sin realizar modificaciones en el objeto principal, el tratamiento que realizan es correcto movilizan los registros de representación de forma coherente respecto a lo estipulado en el registro de salida.

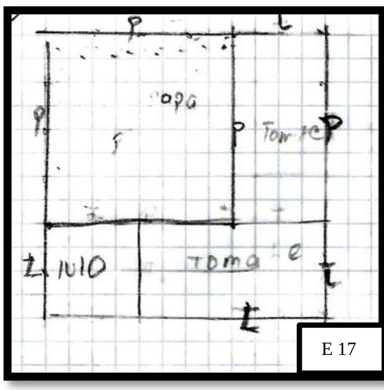


Figura 17. Consolidado registro gráfico y lenguaje natural E17, ítem 3.

El paso de un registro de representación a otro es sin duda “la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir los por alumnos” (Duval, 1999, p. 46). Se requiere de atención para que el cambio de registro no genere obstáculos ya que las tareas de construcción de figuras solicitan coherencia entre el registro discursivo, las características del registro, las representaciones mentales y el objeto. Se evidencia que los estudiantes al interactuar con su par logran generar la conversión al registro gráfico, aclaran las dudas, realizan conjeturas y finalmente realizan el registro gráfico incluyendo algunas descripciones y justificaciones de lo escrito realizando el proceso cognitivo de tratamiento.

Ítem 4. Tenga en cuenta las siguientes afirmaciones para luego solucionar las preguntas.

•La medida de un lado de la parcela del cultivo de papa es (p) unidades. Además, la parcela está representada por un cuadrado.

•Un lado del cuadrado donde está sembrado el lulo mide (l) unidad.

1. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la parcela del cultivo de papa?
2. ¿Cuál es la expresión que representa el valor del lado de la finca?
3. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la finca?

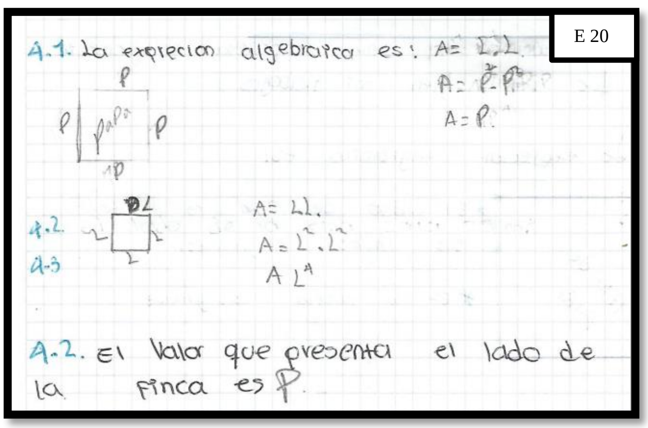


Figura 18. Conversión al registro algebraico E20, ítem 4.

El estudiante E20 realiza la representación gráfica que cumple las características dadas en el registro del lenguaje natural, es decir las representaciones son congruentes en la conversión al registro gráfico. En el registro algebraico presenta dificultad, pues no hay congruencia entre los registros, además de realizar cálculos no apropiados. El proceso de conversión que el estudiante realiza no es apropiado y en consecuencia tratamiento tampoco lo es.

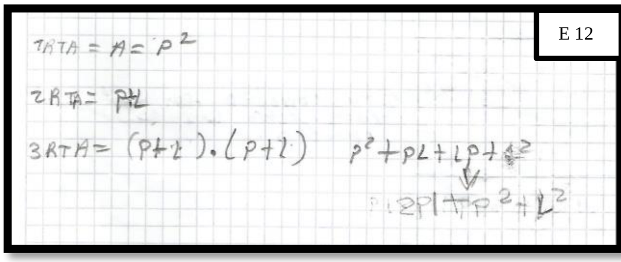


Figura 19. Conversión al registro algebraico E12, ítem 4.

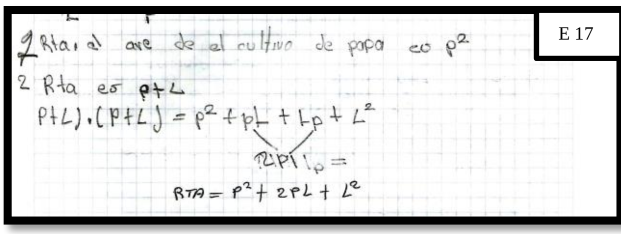


Figura 20. Conversión al registro algebraico E17, ítem 4.

Los estudiantes E12 y E17 pasan del registro del lenguaje natural al leguaje algebraico, realizan el proceso de conversión en el que se mantiene la univocidad semántica. Adicionalmente, se evidencia el tratamiento respecto a las operaciones algebraicas y cálculos que se pueden desarrollar, encuentran el valor que determina el área de cada figura en cuestión y de la parcela como tal, coincide con el trinomio cuadrado perfecto.

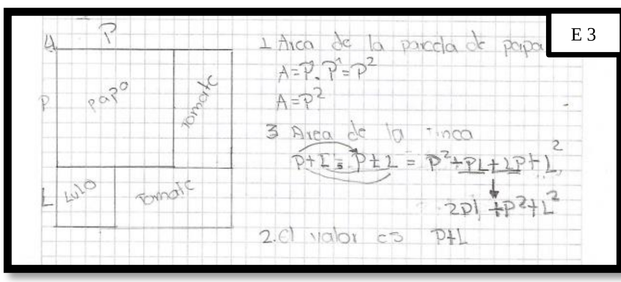


Figura 21. Conversión al registro algebraico E3, ítem 4.

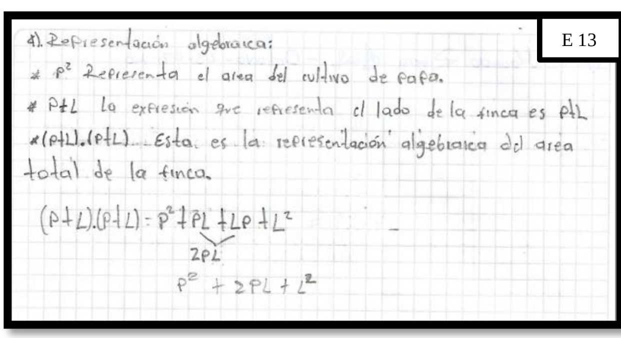


Figura 22. Conversión al registro algebraico E13, ítem 4.

En estas últimas representaciones, los estudiantes E3 y E13 en conjunto realizan las tres actividades cognitivas posibles. Pasan del registro del lenguaje natural al geométrico y luego al algebraico. Realizan el tratamiento al interior del registro algebraico para lograr concluir el área total representada por el trinomio cuadrado perfecto, partiendo de nociones básicas de geometría. Finalmente, la formación es la primera que debe surgir en la mente del estudiante para realizar los diferentes registros de representación semiótica, logrando con ello la movilización de los registros.

Los estudiantes logran realizar y concretar los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión. Al inicio se presenta cierto grado de dificultad, los estudiantes generan representaciones carentes de las características iniciales, no interiorizan la información para hacer el transformabilidad de registros, al hacer la comparación y visualización con el compañero, el estudiante debe dar a conocer las razones por las cuales realizó la representación, justificar cada característica y respaldar con argumentos su idea, en ese momento ellos logran evidenciar los errores que han cometido, pero es a partir de ahí que generan nuevas ideas mentales que se representan por medio del registro gráfico y que son congruentes con el registro de salida, logrando acercarse a lo que se quiere que aprendan la factorización de trinomio cuadrado perfecto teniendo en cuenta el contexto, saberes previos y análisis e interpretación de situaciones. A partir de aplicar esta situación de enseñanza, se evidencia la movilización de registros de representación y la transformabilidad de los sistemas semióticos.

Situación 2 "Vamos de la mano"

Se buscaba realizar acompañamiento por parte del docente a los estudiantes. Realizar las explicaciones y aclaraciones pertinentes respecto a la factorización y expansión del trinomio cuadrado perfecto, así, como las aclaraciones respecto a las diferentes representaciones presentes.

El registro de partida algebraico, registro de llegada gráfico.

En este caso se realiza el proceso cognitivo de conversión, pero de manera inversa con relación a las anteriores, iniciando ahora por la expresión algebraica: tenemos la expresión $(x\ +1)^2$, su expansión algebraica es $x^2+x+x+1$ y la simplificación es x^2+2x+1. En este caso se ha realizado el proceso cognitivo de tratamiento realizando cálculos internos dentro del registro.

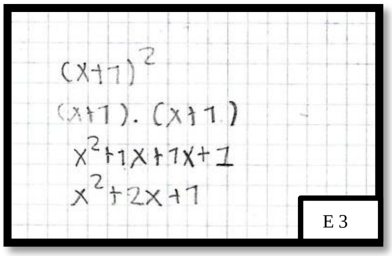


Figura 23. Tratamiento en el registro algebraico E3.

El tratamiento dentro del registro que realiza el estudiante E3 es adecuado. Realiza operaciones entre binomios aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma. Además, realiza la adición de polinomios agrupando términos semejantes.

Luego de realizar el tratamiento dentro del registro, se procede a la asignación de valores que resultaron al realizar la expansión del binomio elevado al cuadrado las figuras geométricas representando la expresión correspondiente al área que ocupa cada una.

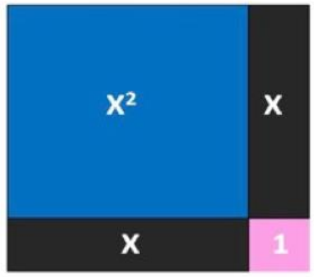
Ahora, visualicemos en forma geométrica la solución de este trinomio cuadrado perfecto:

Representemos x^2 como el área de un cuadrado cuyo lado mide *x*.

Representemos a *x* como el área un rectángulo cuyos lados miden *x* y 1 respectivamente.

La unidad como el área de un cuadrado de lado 1.

Nótese, que para la expresión $x^2 + 2x + 1$ se organizan estas figuras para obtener el siguiente cuadrado:



La anterior gráfica es una interpretación geométrica de la expresión $x^2 + 2x + 1$, que tiene como medida de los lados (x +1) y $(x + 1)^2$ como expresión que representa el área.

El área de este cuadrado es, (x +1) (x +1) = $(x + 1)^2$, luego, $x^2 + 2x + 1$=$(x + 1)^2$

A esta expresión algebraica se le denomina Trinomio Cuadrado Perfecto.

Luego de realizar esta práctica y analizar cada uno de los elementos que interviene tanto en la expansión como en la factorización del trinomio cuadrado perfecto, los estudiantes realizan cada uno de estos procesos cognitivos de tratamiento y conversión aclarando posibles dudas. Es de gran importancia resaltar que gracias a la ayuda de material manipulativo que se dispuso (recortes en papel iris), los estudiantes realizan la representación gráfica mediados por la visualización, realizan ejemplos para familiarizarse con el trinomio cuadrado perfecto, el tratamiento y conversión.

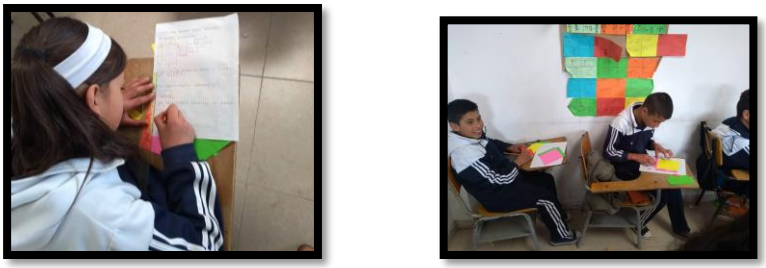


Figura 24. Proceso de visualización por medio de material concreto. Estudiantes I.E.A El Escobal-Ramiriquí

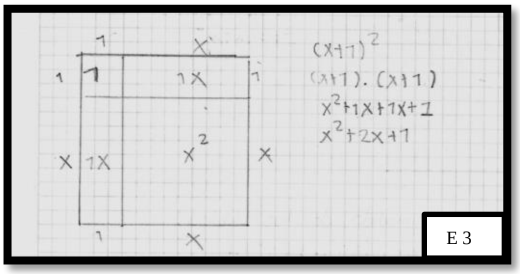
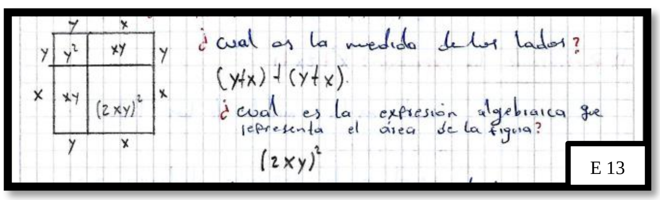


Figura 25. Reconstrucción de la situación de enseñanza, E3



.
Figura 26. Reconstrucción de la situación de enseñanza, E13

Los estudiantes realizan diferentes representaciones y movilizan registros semióticos, al pasar de uno a otro. Existe una congruencia semántica en las representaciones, así como la univocidad semántica terminal e igual orden de aprehesión, por lo que se puede concluir que las representaciones que realizan los estudiantes E3 y E13 son congruentes, además el tratamiento interno en cada registro muesta paráfrasis, anamórfosis y cálculos correctos.

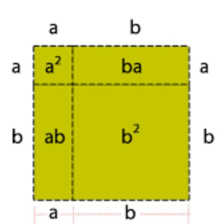
Por medio de esta actividad se logró detectar que las orientaciones que se realizan por parte del docente a los estudiante son fundamentales, aclarar dudas, guiar e implementar diversos recursos en el aula hace que el estudiante indague, analice y cuestione su propio proceso formativo, especificamente para este caso, que evidencie los errores que ha cometido en el desarrollo de las actividades, y que a apartir de estos inconvenietes se construyan nuevas ideas, denominadas imágenes mentales y logren plasmarlas en los diferentes registros de representación semióticos posibles.

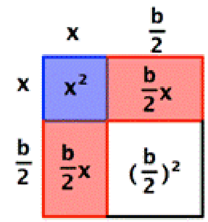
Situación 3 "Preparando el camino"

Este es un espacio diseñado para que los estudiantes ponga en conocimiento lo orientado en las actividades anteriores, refuerce los aprendizajes y se prepare para la parte final de la secuencia la "evaluación", realice el paso de un registro de representación a otro y consoliden los procesos de tratamientos.

Ítem 1. Complete la siguiente tabla teniendo en cuenta la información suministrada en las anteriores actividades; se debe realizar de manera geométrica, algebraica y escrita con palabras, complete lo faltante en cada caso. El estudiante debe realizar las transformaciones posibles ya sea el cambio de registro o dentro del mismo.

En la primera y quinta parte de la actividad se solicita a los estudiantes que, a partir de la representación gráfica, movilicen el cambio de registro, y si es el caso realicen el tratamiento interno del registro.

Registro geométrico	**Registro algebraico**	**Registro de lenguaje natural**
	________________ ________________ ________________	



____

____

____

A continuación, se muestran algunas soluciones que los estudiantes lograron construir.

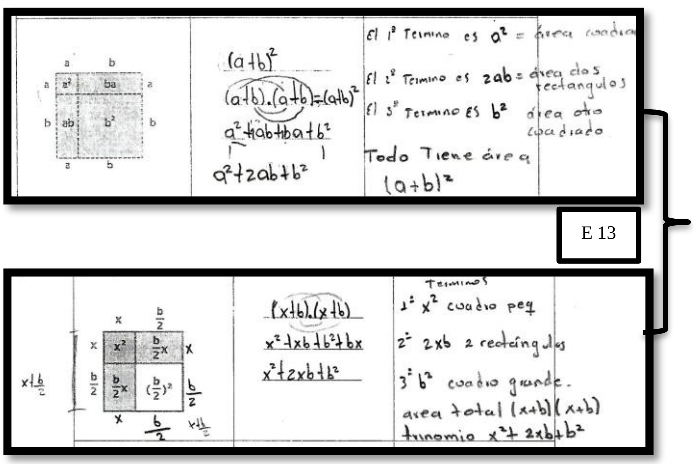


Figura 27. Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizado por E13

Se evidencia un buen control de los procesos cognitivos, en el primer caso la conversión a la representación algebraica es congruente, de igual manera que el tratamiento interno, los cálculos que realiza al interior del registro son acertados. Al pasar al registro de lenguaje natural existe univocidad semántica terminal, igual que correspondencia semántica y las unidades significantes presentan igual orden de aprehensión.
En el segundo caso el estudiante no logra la conversión a las representaciones algebraicas y lenguaje natural, pues no hay congruencia de unidades significantes.

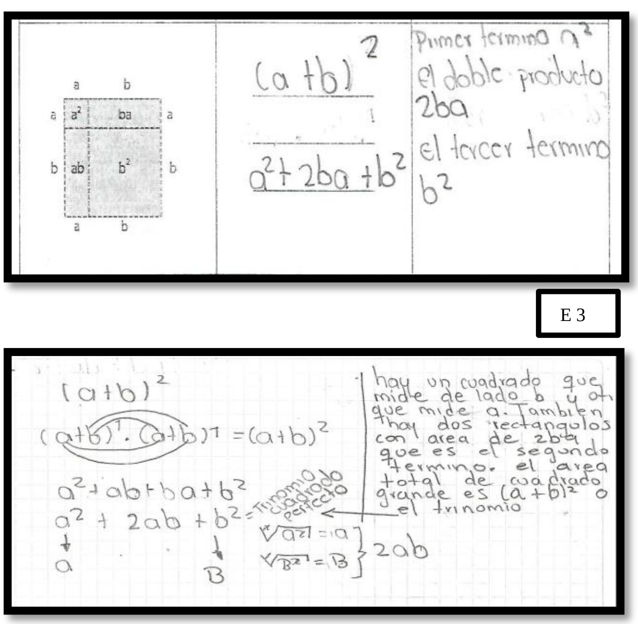


Figura 28. Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizado por E3

El estudiante E3 realiza el proceso de movilización de registros de representación, efectúa la conversión partiendo del registro gráfico y llegando al algebraico de manera acertada, se mantienen las unidades semánticas del registro de partida; existe congruencia entre las unidades significantes de ambos registros. Respecto al tratamiento que realiza al interior del registro algebraicos es adecuada, los cálculos son pertinentes, realizando el producto de dos binomios, empleado la propiedad distributiva y finalmente realizando la adición de expresiones algebraicas semejantes. Al pasar al registro de lenguaje natural el estudiante realiza la tarea de producción y comprensión, describe puntual y correctamente las características del registro logrando la congruencia entre los registros de salida y de llegada, generando consigo una adecuada conversión.

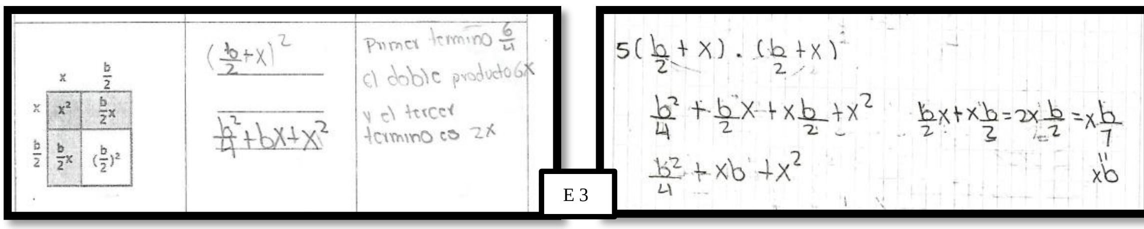


Figura 29: Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizado por E3

En el segundo caso el estudiante E3 realiza la movilización al registro algebraico, expresa el binomio elevado al cuadrado y luego describe el producto de los binomios y efectúa operaciones algebraicas acertadas, al formalizar el tratamiento en busca de la expansión algebraica el estudiante realiza cálculo adecuados, inicialmente la adición de términos semejantes, justifica la respuesta realizando la adición que incluye números racionales, logra concluir con el trinomio cuadrado perfecto como representación de área de la figura.
Respecto a la conversión al lenguaje natural, el estudiante realiza la descripción de los tres términos del trinomio, no describe todas las unidades significantes, por lo tanto, existe una no congruencia en el registro de salida y el de llegada. Hace falta la descripción de todas las unidades que hacen parte del registro geométrico, por lo tanto, no logra consolidar las tareas de producción ni comprensión, además, emplea el discurso sobre la expansión lexical realizando asociaciones verbales.

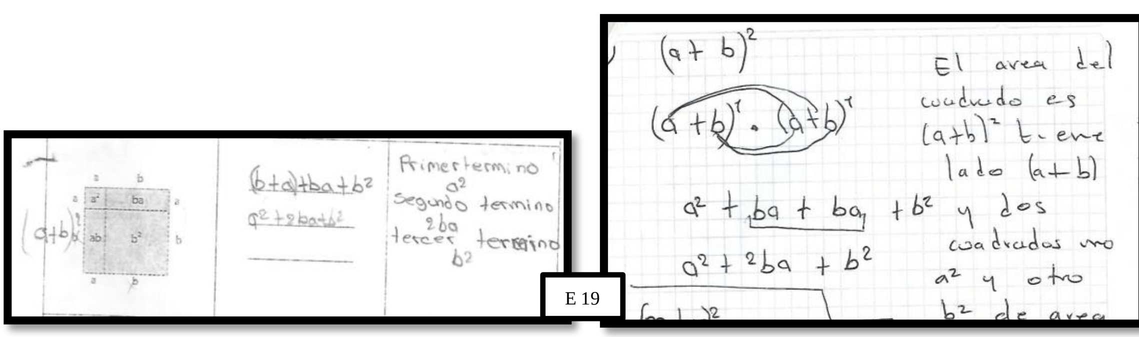
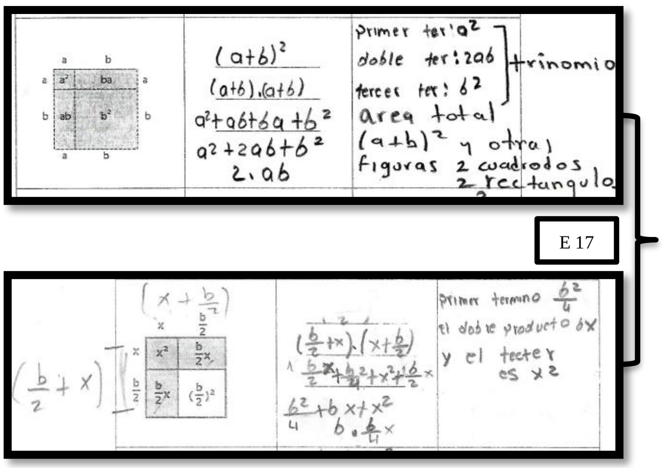


Figura 30. Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizado por E19

La representación que realiza el estudiante E19 permite identificar la consistencia de todos los procesos cognitivos. Respecto a la conversión al registro de expresión algebraica muestra una no congruencia en la primera intervención que hace, pero, al analizar la segunda parte (de la derecha) efectuar la aclaración correspondiente, muestra proceso de asignación correcto con relación al registro algebraico y el tratamiento interno es adecuado, los cálculos que realiza cumplen con las propiedades necesarias. Con relación a la representación lenguaje natural describe todas las unidades significantes realizando la expansión informacional en el registro de llegada que coinciden con las de salida. El estudiante logra las tareas de comprensión y producción.



En los dos casos el estudiante E17 realiza el proceso de conversión mantiene las unidades significantes en todos los registros, existe congruencia en los registros de representación construidos.
El tratamiento dentro del registro algebraico, se desarrolla de forma coherente con las unidades significantes, mantienen aceptabilidad en la representación final producida.

Figura 31. Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizado por E17

Algunos estudiantes presentan dificultad al realizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión. En relación al primer ejercicio, la mayoría de los alumnos logran realizar la conversión y el tratamiento, las representaciones de salida son congruentes con las de llegada, permanecen las unidades significantes, la univocidad semántica e igual orden de aprehensión. De igual manera, paráfrasis, anamórfosis y cálculos al realizar las transformaciones internas dentro de los registros del lenguaje natural, geométrico y algebraico respectivamente.

Para el caso específico en la segunda parte, en la que se incluyen números racionales, ellos no logran movilizar los registros de representación, incluso presentan dificultades al realizar el tratamiento en el cálculo de operaciones básicas, no hay congruencia en la conversión y ni en el tratamiento.

En la segunda parte, la información que se ofrece al estudiante es la representación algebraica, deben movilizar el registro de representación, además de realizar el tratamiento en el registro suministrado.

Registro geométrico	**Registro algebraico**	**Registro del lenguaje natural**
	$\underline{(m+r)^2}$ ________________ ________________	

A continuación, se presentan algunas representaciones obtenidas.

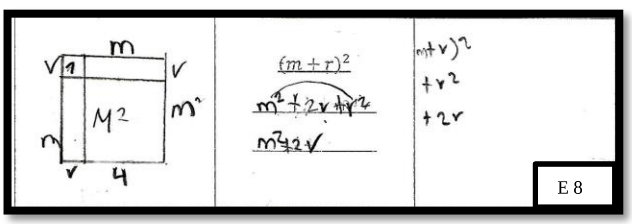


Figura 32. Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizada por E3

El estudiante E8 no logra realizar la conversión del registro del lenguaje natural y gráfico. Las representaciones son no congruentes, pues no mantiene correspondencia semántica entre las unidades del registro de salida.
El tratamiento no es correcto, la trasformación de la escritura simbólica no es coherente, las operaciones realizadas son erróneas.

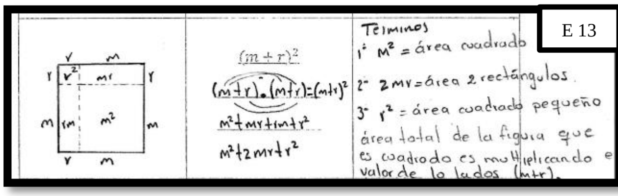


Figura 33. Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizada por E13

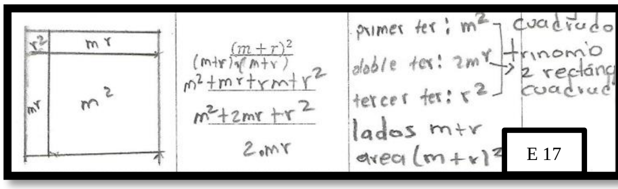


Figura 34. Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizada por E17

En el caso de los estudiantes E13 y E20, concretan de manera adecuada los procesos cognitivos de tratamiento y conversión. Las unidades significantes del registro de partida se mantienen luego de movilizar lo registros a las otras posibles representaciones. Respecto al tratamiento, ellos realizan la expansión del binomio elevado al cuadrado realizando los cálculos y operaciones apropiadas concluyendo el trinomio cuadrado perfecto.

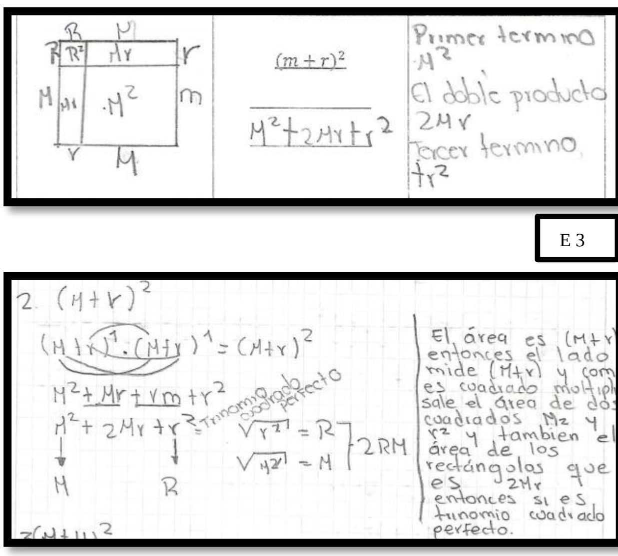


Figura 35. Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizado por E3.

Los procesos cognitivos que realiza el estudiante E3 son correctos existe congruencia entre los registros de representación. La expansión informativa que realiza la representación del lenguaje natural, mantiene las reglas de la coherencia de la temática y asociación con la parte simbólica. Analiza, describe e interpreta los registros de manera adecuada.

En conclusión, tras la implementación de esta actividad los estudiantes logran movilizar los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión, algunos estudiantes muestran dificultad al realizar la movilización de los registros de representación, esto muestra congruencia con lo citado por Duval (1999) afirmando que “las trasformaciones toman al menos el tiempo de un control consiente de la representación” (p.36). De igual manera, el estudiante debe estar consciente, analizar y conjeturar la información suministrada con el propósito de generar las representaciones pertinentes considerando que toda actividad humana de basa en la búsqueda de la complementariedad con los tipos de transformación; tratamiento y conversión.

La tercera y cuarta parte son muy similares a la segunda, se pretende que el estudiante realice el tratamiento dentro del registro algebraico y luego realice la conversión a los registros geométricas y del lenguaje natural.

Registro geométrico	Registro algebraico	Registro del lenguaje natural
	$(m+4)(m+4)$	
	________________	
	________________	
	x^2+4x+4	
	________________	
	________________	

A continuación, se evidencian los procesos cognitivos que realiza algunos estudiantes respecto a la tercera y cuarta parte.

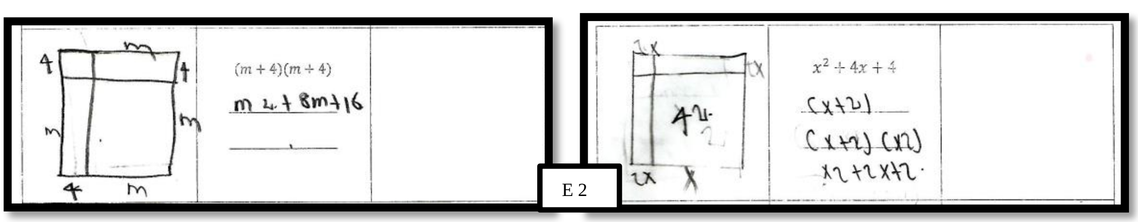


Figura 36. Tratamiento y conversión realizada por E2

No se evidencia la realización coherente de los procesos cognitivos, existe no congruencia entre los registros de representación elaborados, el estudiante E2 no ha logrado establecer criterios para la asignación de registros de representación de llegada. Se detecta que no hay coherencia entre las representaciones que construye, el estudiante no es consciente de los procesos cognitivos que realiza.

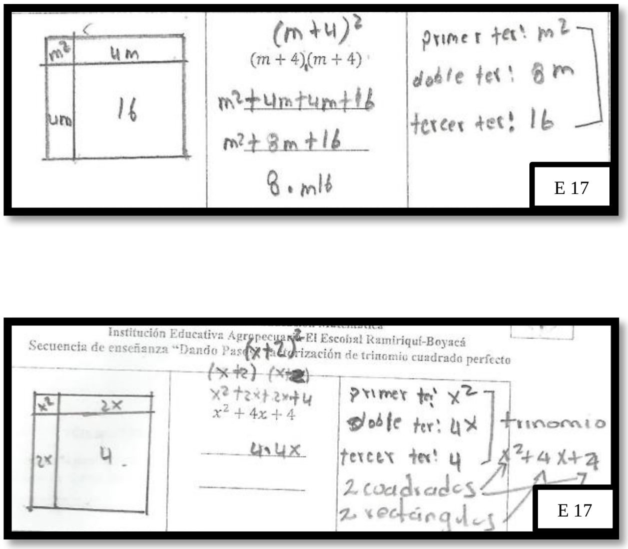


Figura 37. Tratamiento y conversión realizada por E17

El estudiante E17 realiza de manera adecuada los procesos de tratamiento, los cálculos son pertinente y correctos. Al realizar el registro geométrico cumple los criterios de congruencia, todas las unidades significantes del registro de salida se encuentran el registro de llegada, de esta manera se garantiza que la conversión es válida. De esta manera, el estudiante realiza las tareas de producción y comprensión; la expansión informativa es pertinente y congruente con los registros de representación y las representaciones semióticas.

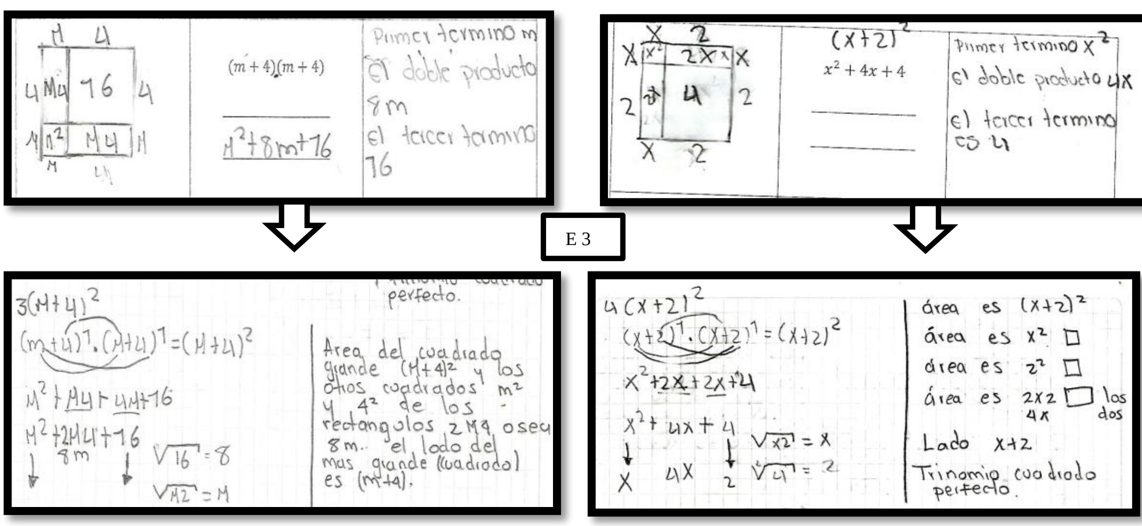


Figura 38. Tratamiento y conversión realizada por E3

Los procesos cognitivos que realiza el estudiante E3 son correctos. Se destaca todo el proceso que realiza el estudiante para esta actividad, la paráfrasis, anamórfosis y los cálculos son pertinentes y correctos. La conversión que efectúa en los diferentes registros de representación mantiene los criterios de congruencia, la univocidad semántica e igual orden de aprehensión son pertinentes conservando la coherencia temática.

Al realizar el tratamiento, algunos estudiantes presentan dificultades, no realizan los cálculos internos adecuados, no cumplen la regla de conformidad de los registros. Al realizar la conversión, se evidencia falencias en la representación de lenguaje natural, no realizan producción textual y en general las ideas son muy vagas. Se destaca que los estudiantes en su mayoría realizan las actividades cognitivas de manera acertada, son conscientes de las diferentes representaciones que se pueden encontrar al realizar la factorización o expansión del trinomio cuadrado perfecto.

En la última parte, la representación de salida es la del lenguaje natural, para que los estudiantes movilicen los demás registros de representación.

Registro geométrico	**Registro algebraico**	**Registro del lenguaje natural**
	________________ ________________ ________________	Existen dos cuadrados, uno cuyo lado mide t y el otro con área de $1u^2$. El área total de la figura es $(t+1)^2\ u^2$, y el lado corresponde a $t+1$. Primer término es t^2, y el tercer término es 1.

Finalmente, se muestra el registro de lenguaje natural como lenguaje de salida, los estudiantes realizan representaciones geométricas y algebraicas, realizando los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión, algunas construcciones se evidencian a continuación.

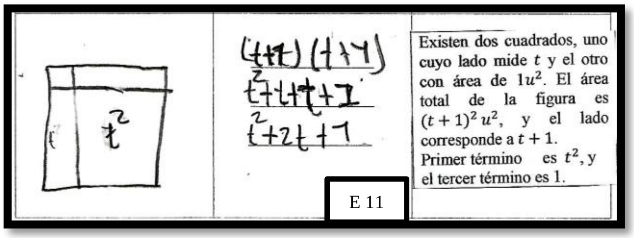


Figura 39. Tratamiento y conversión a partir del registro del lenguaje natural E11

El estudiante E11 ejecuta la conversión al lenguaje algebraico realizando el tratamiento interno de manera correcta. El paso al registro geométrico, no es congruente, se pierden las unidades significantes del registro de salida.

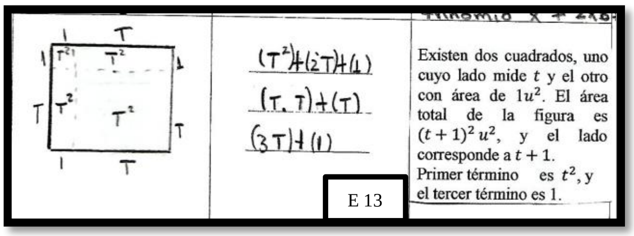
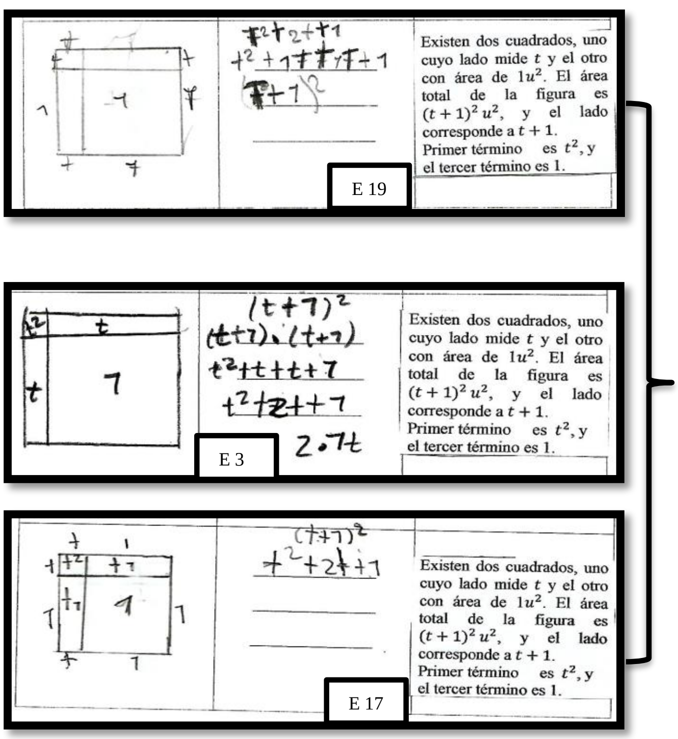


Figura 40. Tratamiento y conversión a partir del registro del lenguaje natural E13

En este caso el estudiante E13 realiza la registro geométrico de manera adecuada, están presentes todas las unidades significantes, pero al realizar el registro algebraico no existe congruencia con el registro de salida.



Los estudiantes E9, E3 y E17 realizan de manera acertada los procesos cognitivos, en la movilización de los registros se mantiene la coherencia de temática, la correspondencia semántica y la transformabilidad de registro.

La conversión se mantiene congruente y el tratamiento en cada caso es aceptable.

Los estudiantes realizan las tareas de producción y comprensión pues realizan la movilización de los registros de representación, tanto en la formación como en la conversión y en el tratamiento.

Figura 41. Tratamiento y conversión a partir del registro del lenguaje natural, E19, E3 y E17

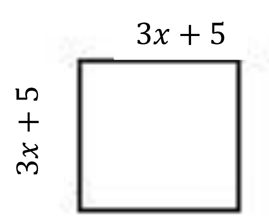
De acuerdo con las actividades anteriores, se puede concluir que se presentan falencias en el tratamiento interno en el registro algebraico, pues algunos estudiantes no realizan cálculos con expresiones algebraicas y se presenta más dificultad cuando se incluyen los números racionales.

La conversión sigue siendo un proceso cognitivo difícil, no hay comprensión de textos, signos, figuras o expresiones; se confirma que "la conversión constituye la actividad cognitiva menos espontanea" (Duval, 1999. P. 46). A pesar de las dificultades, los estudiantes logran consolidar representaciones al realizar la factorización del trinomio cuadrado perfecto, movilizando los registros de manera correcta, realizando formación, tratamiento y conversión a partir de los registros de representación de salida.

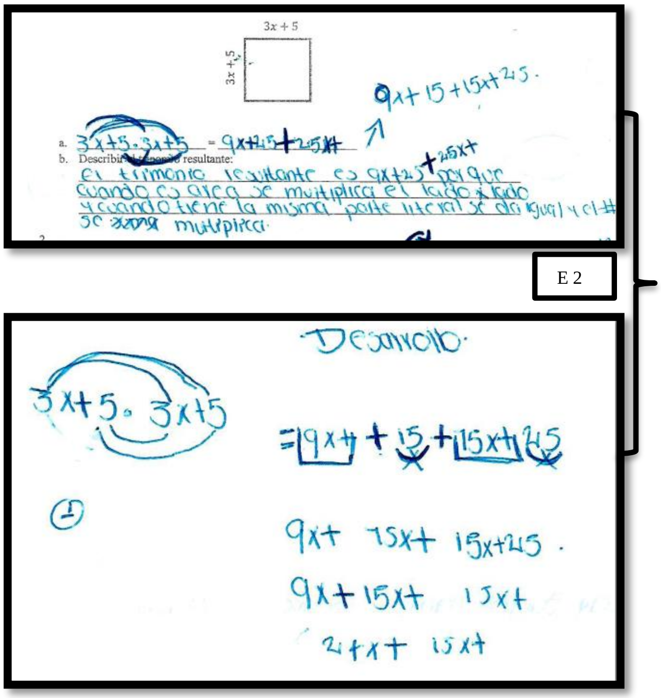
Situación 4 "A caminar"

Esta es la última etapa de la secuencia de enseñanza. Con esta se busca que el estudiante realice los procesos cognitivos de manera individual con base en las actividades que se desarrollaron anteriormente. En el primer punto, se parte de un registro geométrico y se pide a los estudiantes que realizan la movilización de los registros y concreten registros algebraicos y del lenguaje natural.

Ítem 1. Hallar el área que ilustra figura

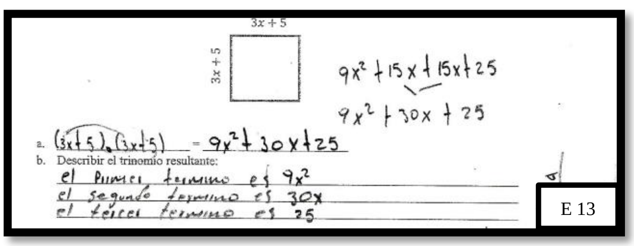


a. ______________________ = ________________________
b. Describir el trinomio resultante:
____



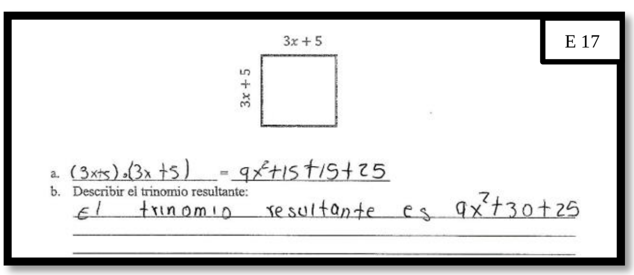
Al realizar el producto de los binomios el estudiante E2, no realiza el proceso cognitivo de tratamiento adecuado, no coloca en un término la variable *x*, pero al remitirnos al segundo procedimiento construido se evidencia que realiza la asociación de términos semejantes asumiendo que existe la variable. Finalmente, no logra realizar el tratamiento, los cálculos que realiza no son correctos. Respecto a la conversión, la descripción del lenguaje natural no es congruente, no existe correspondencia semántica entre el registro de partida y el de llegada.

*Figura 42.*Tratamiento y conversión que realiza E2 a partir del registro gráfico.



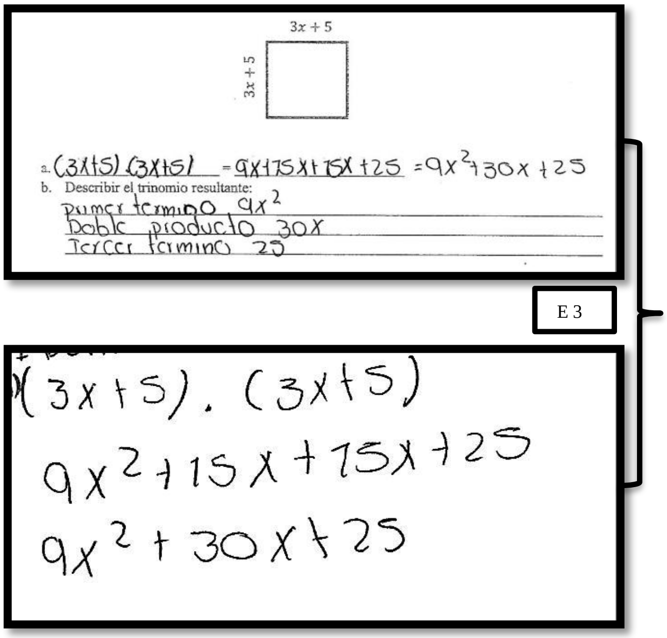
La conversión que realiza es estudiante E13 del registro algebraico es adecuada, el registro algebraico es congruente respecto al registro de salida, en el caso de la descripción, solo nombra los términos del trinomio y no existe congruencia en el registro de llegada.

Figura 43. Tratamiento y conversión que realiza E13 a partir del registro gráfico.



La conversión del registro geométrico al registro algebraico guarda coherencia con la temática y el tratamiento que realiza en éste es adecuado. Respecto a la descripción el estudiante E17 no alcanza a realizar la conversión, solo describe el resultado de la operación que hizo entre los binomios.

Figura 44. Tratamiento y conversión que realiza E17 a partir del registro gráfico.



La conversión del registro de partida a la representación algebraica es coherente con la temática, las unidades significantes están presentes en la representación de llegada. La expansión discursiva que realiza carece de univocidad semántica por lo que se considera una no congruencia. En cuanto al tratamiento de la expresión algebraica los cálculos realizados son correctos y concluye con el trinomio cuadrado perfecto.

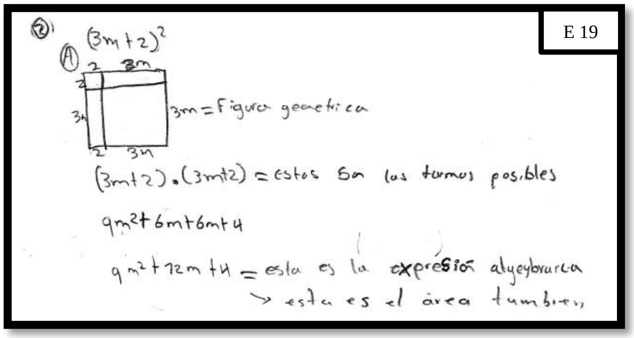
Figura 45. Tratamiento y conversión que realiza E3 a partir del registro gráfico.

Al realizar esta actividad se evidencia que algunos estudiantes presentan dificultades al realizar la conversión al lenguaje natural y no mantienen las unidades significantes, acorde a la representación inicial. Se evidencia que la conversión al registro algebraico es coherente, mantiene las unidades significantes por lo que existe una congruencia de las representaciones. El tratamiento que realizan al interior del registro algebraico es adecuado, los cálculos son correctos en la mayor parte de las representaciones. De igual manera, se detectan que existen estudiantes que efectúan los procesos cognitivos, crean las imágenes mentales, realizan la representación geométrica y movilizan los registros al pasar al registro algebraico y del lenguaje natural, cumpliendo las tareas de producción y comprensión.

En la segunda parte a partir de la expresión algebraica se pretende que los estudiantes logren construir las registros geométricos y lenguaje natural. Además del tratamiento de las representaciones de salida.

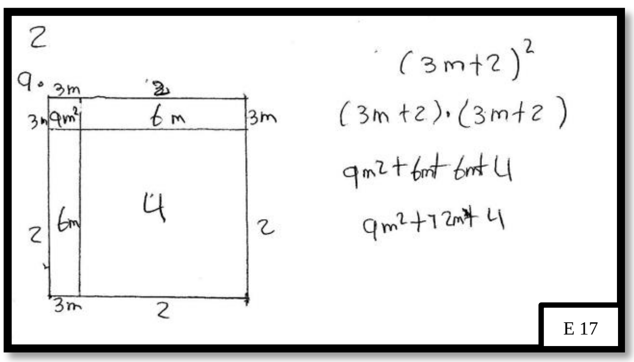
Ítem 2.

a. Expandir la expresión algebraica $(3m + 2)^2$ (las formas posibles).
b. Realice la figura geométrica que represente la expresión anterior.
c. La expresión algebraica que representa el área de la figura es:



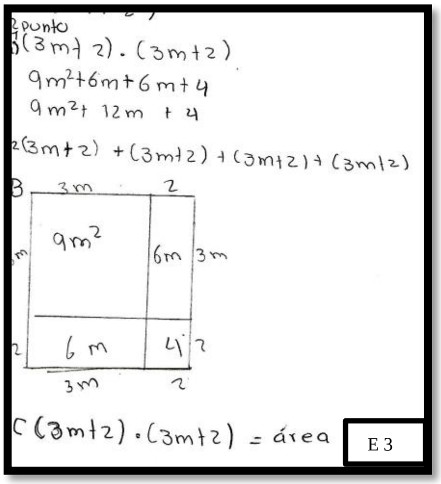
El estudiante realiza los procesos cognitivos de manera adecuada, realiza la representación gráfica, desarrolla la conversión al registro algebraico mantiene las unidades significantes y los tratamientos son válidos.

Figura 46: Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizados por E19



La representación algebraica es coherente y mantiene congruencia con la representación de salida. El tratamiento interno es correcto y concluye con el trinomio cuadrado perfecto.

Figura 47: Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizados por E17



El estudiante E3 da a conocer que acepta los procesos cognitivos y además los realiza de manera correcta. La representación mantiene las unidades significantes que resultan de realizar el tratamiento del registro de salida. La conversión es congruente.

Figura 48. Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizados por E3

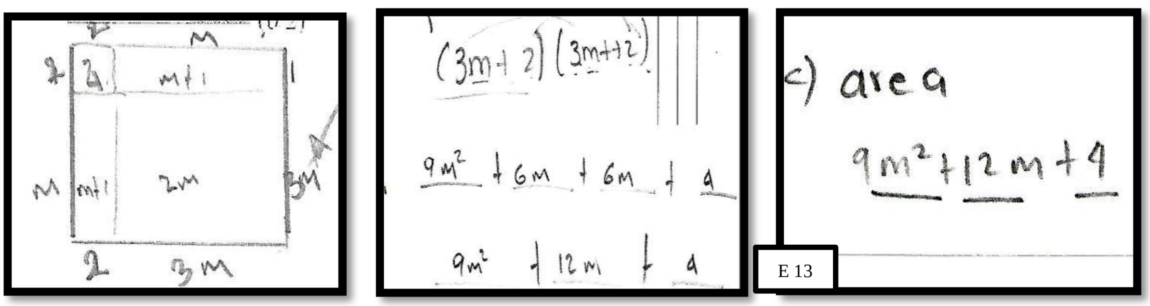


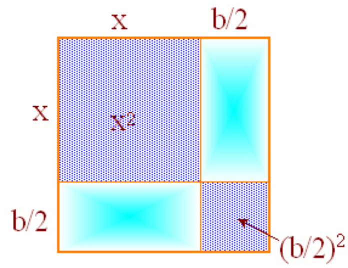
Figura 49. Procesos cognitivos de tratamiento y conversión realizados por E3

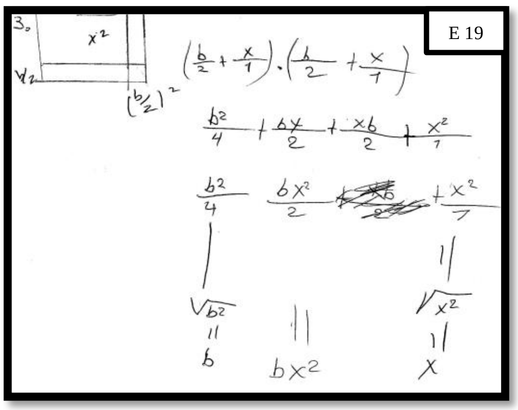
El estudiante E13 realiza las actividades cognitivas de formación, conversión y tratamiento por lo que se puede concluir que realiza las tareas de producción y comprensión.

A nivel general, esta actividad fue gratificante, los estudiantes realizan el tratamiento de la expresión que se da, luego consolidan las posibles particiones de la figura que representan y finalmente, logran concretar la expresión que representa en área de la figura, ya sea recurriendo a la inicial o generando una nueva luego de realizar el tratamiento.

En la última etapa de la situación de enseñanza, se buscaba que el estudiante a partir del registro gráfico concluya con la expresión algebraica, realizando el proceso cognitivo de conversión. A continuación, se evidencia algunas construcciones.

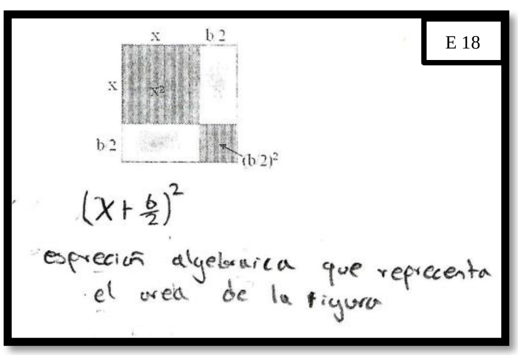
Ítem 3. Escribir la expresión algebraica que represente el área de la siguiente figura.





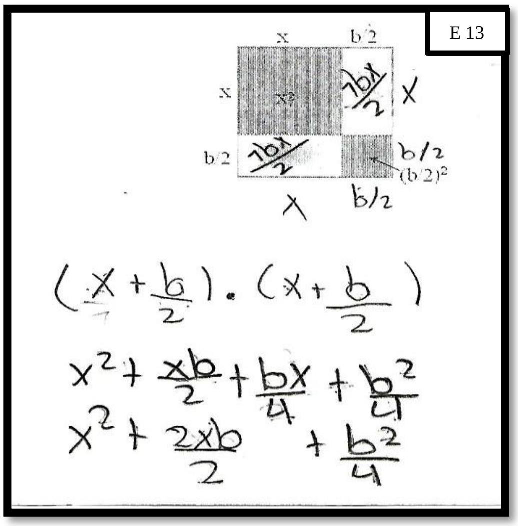
El estudiante E19, no hace una conclusión al cuestionamiento, se limita a realizar el tratamiento interno del registro de llegada luego de hacer el proceso cognitivo de conversión. El tratamiento respecto a la representación algebraica no es correcto, los cálculos que realiza no son acertados.

Figura 50. Conversión a partir del registro gráfico a registro algebraicos y tratamiento interno en éste realizado por E19



El estudiante realiza la conversión del registro gráfico al registro algebraico de manera correcta de acuerdo a la pregunta plantea. No ve la necesidad de realizar el proceso de tratamiento, pues la formación de imágenes metales ayudan a concretar la respuesta.

Figura 51. Conversión a partir del registro gráfico a registro algebraicos y tratamiento interno en éste realizado por E18



El estudiante E13, realiza con ayuda de la representación gráfica la actividad de conversión que es congruente con la representación de salida. Concluye el ejercicio con la representación algebraica del trinomio cuadrado perfecto.

Figura 52. Conversión a partir del registro gráfico a registro algebraicos y tratamiento interno en éste realizado por E13

Finalmente, al realizar la implementación de la secuencia “Dando pasos” elaborada para realizar la factorización y expansión del trinomio cuadrado perfecto, se puede evidenciar la evolución que han tenido los estudiantes a lo largo del desarrollo de las actividades. Inicialmente, se presentaban dificultades al realizar el paso de un registro de representación a otro, de igual manera los tratamientos internos ya sea en los registros algebraico, gráfica o del lenguaje natural. No se puede afirmar que el 100% los estudiantes lograron realizar los procesos cognitivos, pues existen vacíos teóricos que impidieron los desarrollos correctos de las diferentes actividades, la mayoría de los estudiantes presentan aun mayor dificultad cuando se integran los números racionales como términos del trinomio.

En general, los resultados obtenidos son satisfactorios, a lo largo de este estudio se evidenció la evolución por parte de los estudiantes, el proceso siempre fue continuo y la disposición de ellos mejoraba y, en consecuencia, se logra la consolidación de diversos registros de representación elaborados por los estudiantes y el afianzamiento al realizar la expansión o factorización del trinomio cuadrado perfecto, a partir de diversas representaciones semióticas.

Análisis de resultados: factorización y expansión diferencia de cuadrados perfectos

Segunda secuencia de enseñanza **"Dando pasos"** para orientar la factorización y expansión de la diferencia de cuadrados perfectos. La secuencia se divide en cuatro situaciones que se describen a continuación, con los respectivos análisis.

Situación 1 "En pie haciendo solitos"

Se pretende que por medio de la visualización el estudiante pueda determinar y asignar las expresiones algebraicas que representan cada parte de la figura y consolidar una sola expresión.

En la siguiente figura se puede observar el plano de una finca destinada al cultivo. En ésta se ha asignado un sector para la construcción de una vivienda.

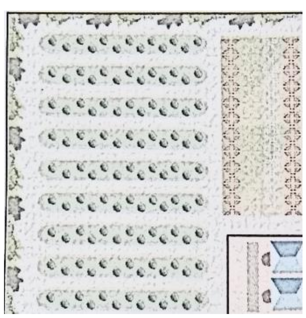


Fig. 1.

El sector destinado para la construcción de la casa, tiene un área que equivale a la expresión $\boldsymbol{y^2}$.

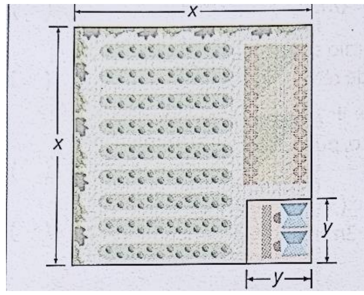


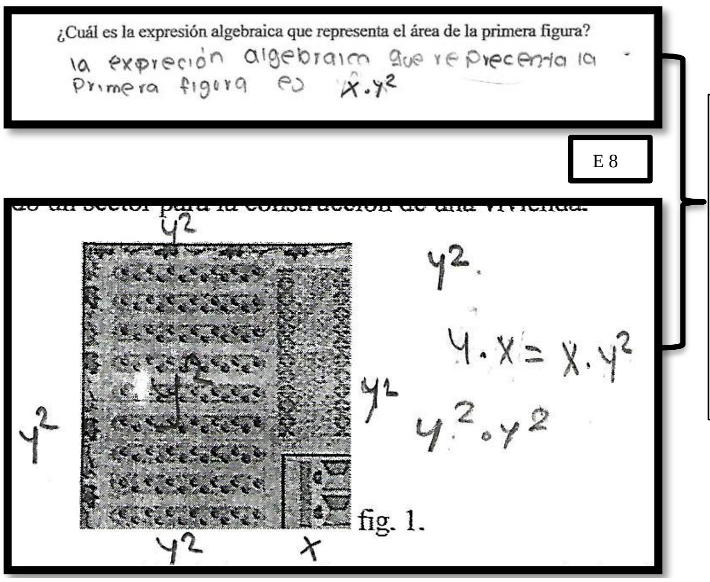
Fig. 2

De acuerdo con la anterior información responda las siguientes preguntas.

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la primera figura?

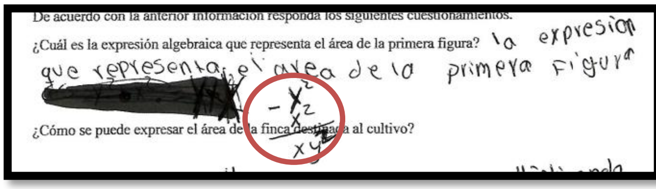
¿Cómo se puede expresar el área de la finca destinada al cultivo?

Respecto al primer cuestionamiento de pudo determinar lo siguiente:



El estudiante E8 hace el proceso de asignación de valores a la representación geométrica, pero se evidencia que en este caso no cumple con los criterios de congruencia con el registro de salida, de la misma manera, el tratamiento que realiza al interior de la representación algebraica es incorrecto, las operaciones que realiza son

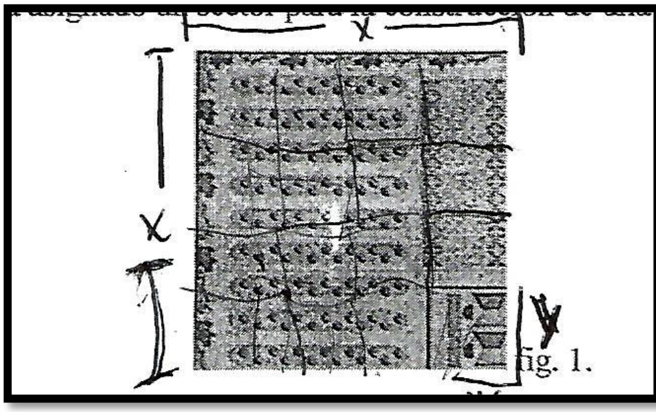
Figura 53. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E8


De acuerdo con la anterior información responda los siguientes cuestionamientos.

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la primera figura? la expresion que representa el area de la primera figura [redacted] $-y^2$ x^2 xy^2

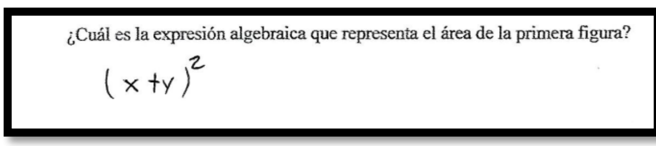
¿Cómo se puede expresar el área de la finca destinada al cultivo?

E 11



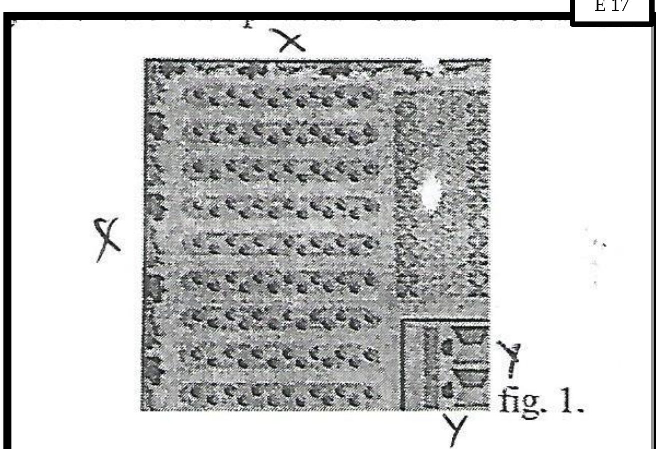
El estudiante hace una serie de divisiones respecto a la figura original, asigna valores a la representación. Al efectuar la conversión está presente la correspondencia semántica respecto al registro de salida, pero al realizar el tratamiento interno de la representación algebraica, no logra consolidar la respuesta correcta. El estudiante realiza la operación $-y^2, x^2$ *como producto y concluye* xy^2 no existe congruencia, además los cálculos no son adecuados. El estudiante logra la conversión, pero no concreta el tratamiento interno en el registro algebraico.

Figura 54. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E11


¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la primera figura?

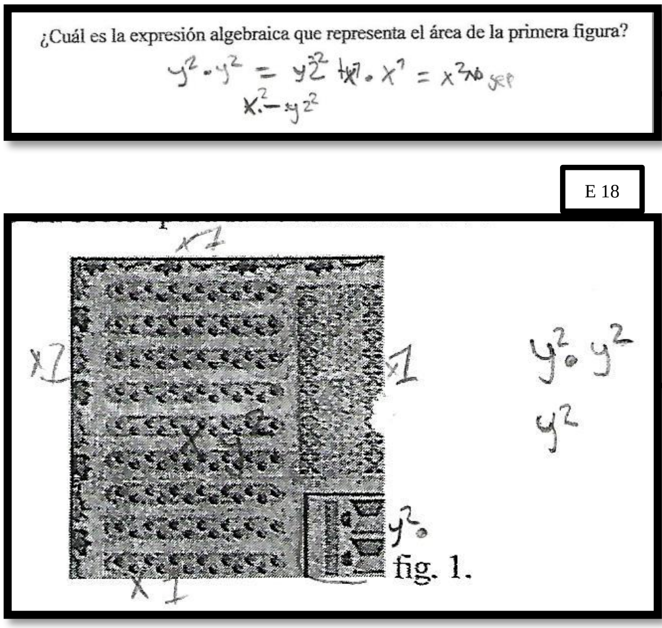
$(x+y)^2$

E 17



El estudiante E17, realiza la asignación de valores a la representación gráfica, asume que es similar a las actividades empleadas en la factorización y expansión del trinomio cuadrado perfecto. Respecto a la asignación que hace y el resultado de la expresión que representa el área del terreno, existe coherencia semántica, univocidad en el registro terminal e igual orden de aprehensión, por lo que la conversión es congruente.

Figura 55. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E17

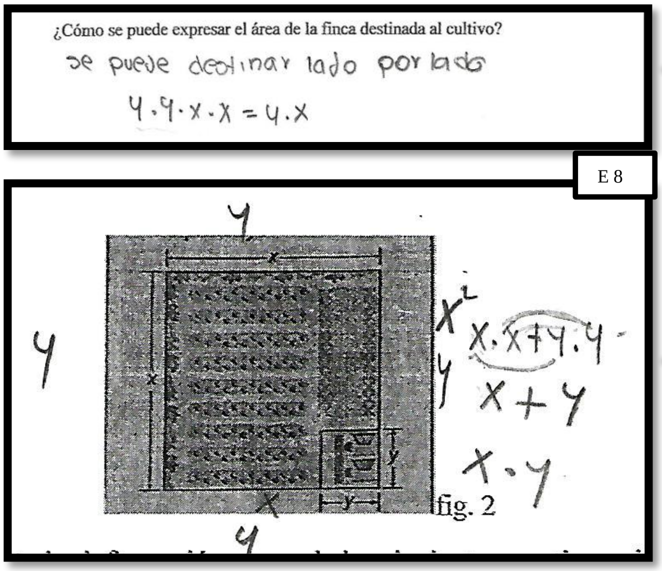


La asignación que realiza el estudiante E18 es coherente, determina el valor correspondiente a la representación del área en cada figura que compone el registro, el interior de la figura coloca la que sería la expresión algebraica que representa el área xy^2. Pero al remitirnos a la solución que realiza se evidencia que no hay claridad a la hora de realizar las operaciones al interior de la representación, por tanto, el tratamiento como la conversión son incorrectos.

Figura 56. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E18

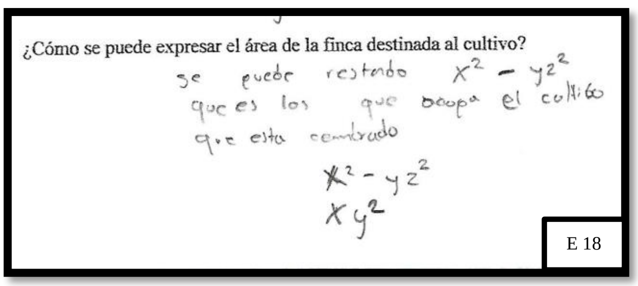
A nivel general, los estudiantes no logran consolidar una respuesta acertada. Se destaca la asignación de valores a la representación geométrica dada, pero no tienen presentes las operaciones básicas entre expresiones algebraicas y carecen de conceptos elementales de geometría. La conversión sigue siendo el proceso más difícil de realizar por parte de los estudiantes, las representaciones mentales generadas no consiguen consolidar registros de representación coherentes con el registro de partida.

Ítem 2. Las respuestas que se obtuvieron a la segunda pregunta son las siguientes:



El estudiante E8, se remite a la representación gráfica, asignando nuevos valores al registro sin fijarse siquiera en los existentes. Al realizar el tratamiento dentro del registro algebraico se encuentra con dos productos y una adición, procediendo a realizar cálculos no adecuados, existe no congruencia entre la representación de partida y la de llegada. El estudiante considera que la parte destinada al cultivo puede ser lado por lado, estableciendo errores en la paráfrasis.

Figura 57. Conversión al registro algebraico a partir del gráfico, construido por E8



Existe una aproximación de lo que realiza el estudiante E18 con el objetivo de la actividad, pero la consolidación y los procesos cognitivos que realiza no son válidos.

Figura 58: Conversión al registro algebraico a partir de la gráfica, construido por E19

La mayoría de los estudiantes no logran concretar lo representación algebraica, desde esta perspectiva, considero que existe un contrato didáctico, pues emplearon la mayor parte de relaciones, operaciones y dinámicas que se habían realizado en la secuencia para factorizar y expandir el trinomio cuadrado perfecto. La producción de nuevos registros de representación fue escasa; los estudiantes no logran efectuar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión, por lo cual las tareas de producción y comprensión tampoco se desarrollaron plenamente. Se destaca la asignación de valores a las representaciones, los estudiantes tratan de plasmar las imágenes mentales en la representación gráfica, pero un cierto grado de dificultad.

Situación 2 "vamos de la mano"

En esta parte de la secuencia de enseñanza se busca que el estudiante realice el proceso cognitivo de conversión del registro de lenguaje natural a partir del registro gráfica o geométrica**.**

A partir de las siguientes graficas responda los cuestionamientos

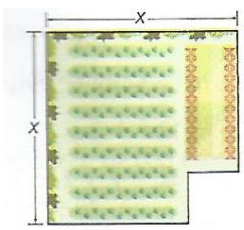


Fig. 1

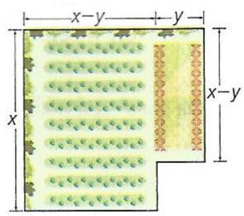


Fig. 2

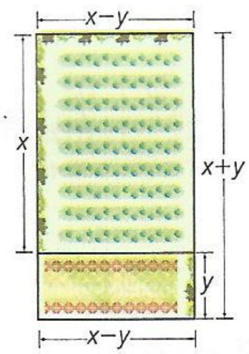
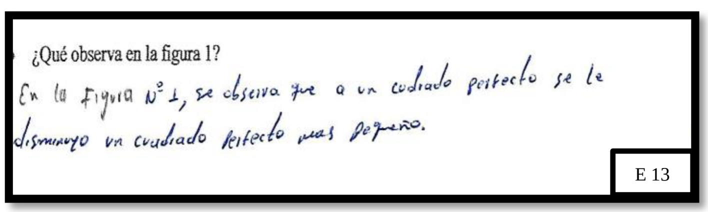


Fig.3

Imágenes tomadas de Applica 8 editorial s&m

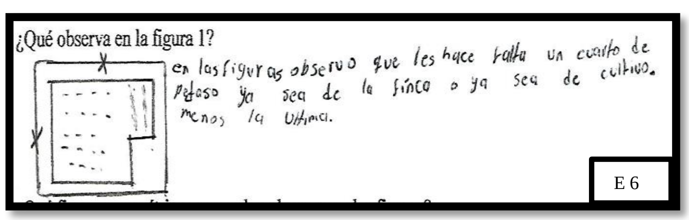
- ¿Describa lo que observa en la figura 1?



¿Qué observa en la figura 1?

En la Figura N° 1, se observa que a un cudrado perfecto se le disminuyo un cuadrado perfecto mas pequeño.

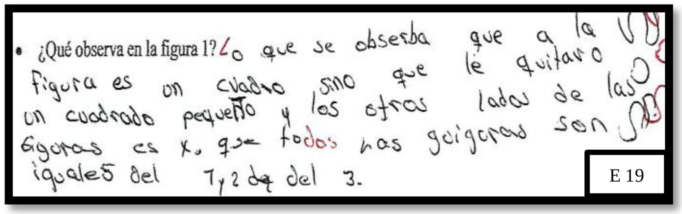
E 13



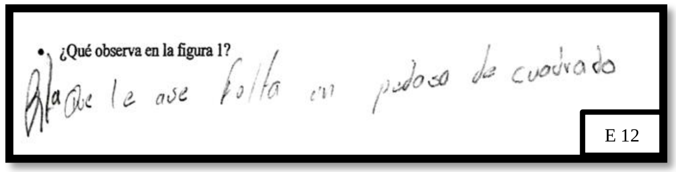
¿Qué observa en la figura 1?

en las figuras observo que les hace falta un cuarto de potoso ya sea de la finca o ya sea de cultivo. menos la ultima.

E 6


• ¿Qué observa en la figura 1? Lo que se obserba que a la figura es un cuadro sino que le quitaron un cuadrado pequeño y los otros lados de las figuras es x, que todos las figuras son iguales del 1 y 2 de del 3.

E 19

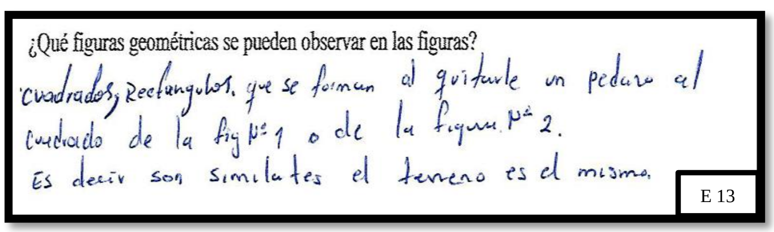

• ¿Qué observa en la figura 1? Que le ase falta un pedaso de cuadrado

E 12

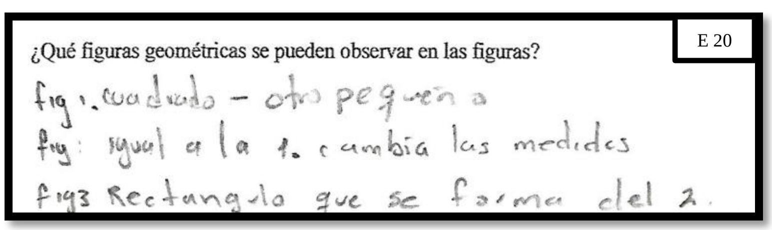
Figura 59. Conversión al registro de lenguaje natural a partir del registro gráfico realizado por E13, E6, E19 y E12

Los estudiantes coinciden en la descripción que realizan, señalan que al cuadrado grande le quitaron un cuadrado pequeño. Las unidades significantes que presenta la representación de partida no se mantienen en la movilización de registros. La correspondencia semántica al efectuar la "traducción" presenta una no congruencia, hace falta describir con más detalle las características de la figura, respecto a la univocidad semántica terminal, a las unidades significantes no les corresponde una única en el registro de llegada. En conclusión, los estudiantes realizan una expansión informacional aún sin lograr una adecuada paráfrasis, se resalta la descripción gráfica que realizan y el esfuerzo por describir la situación.

- ¿Qué figuras geométricas puede observar en las figuras?


¿Qué figuras geométricas se pueden observar en las figuras?
Cuadrados, Rectangulos. que se forman al quitarle un pedazo al cuadrado de la fig Nº 1 o de la figura Nº 2.
Es decir son similares el tercero es el mismo.

E 13


E 20

¿Qué figuras geométricas se pueden observar en las figuras?
fig 1. cuadrado – otro pequeño
fig: igual a la 1. cambia las medidas
fig3 Rectangulo que se forma del 2.

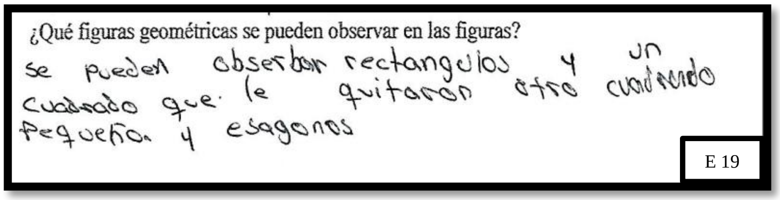


Figura 60: Conversión al registro de lenguaje natural a partir del registro gráfico realizado por E13, E19 y E20

En general no se presenta la correspondencia semántica, las unidades significantes no muestran asociación con las unidades elementales. Respecto a la univocidad semántica, no se describen imágenes puntual y explícitamente por lo que al movilizar las representaciones no se mantiene las características totales del registro de partida respecto al de llegada. Los estudiantes realizan una expansión informacional de las representaciones, pero se evidencia la no congruencia y por consiguiente no realizan correctamente el proceso conversión. Al hacer el paso del registro los estudiantes construyen la expansión lexical, esto bajo criterio ellos están realizando asociaciones verbales u ocurrencias respecto al modo gráfico-visual.

- ¿Qué expresiones algebraicas representan las medidas de los lados de la finca?

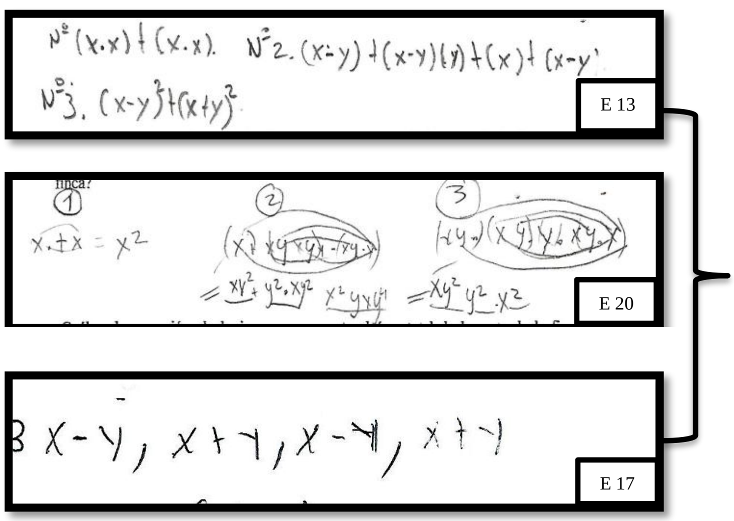
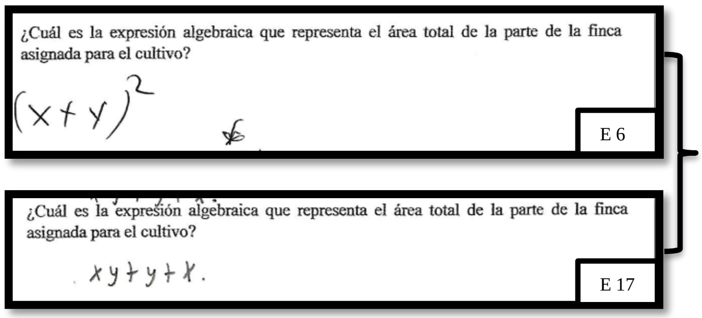


Figura 61. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E13, E20 y E17

En las representaciones formadas por los estudiantes existe una no congruencia. Las unidades significantes presentes en el registro gráfico no corresponden en su totalidad en la representación de llegada. Por lo tanto, al realizar los cálculos correspondientes no generan la representación correcta, resaltando que tampoco realizan de la visualización de forma consiente, pues lo datos son evidentes al observar la representación geométrica, finalmente, presentan confusión respecto a lo que corresponde con área y perímetro realizando operaciones al azar.

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la parte de la finca asignada para el cultivo?



Los estudiantes no logran generar la representación algebraica, es evidente que existe no congruencia entre las representaciones, asocian resultado de actividades realizadas anteriormente sin fijarse en las características de las representaciones actuales.

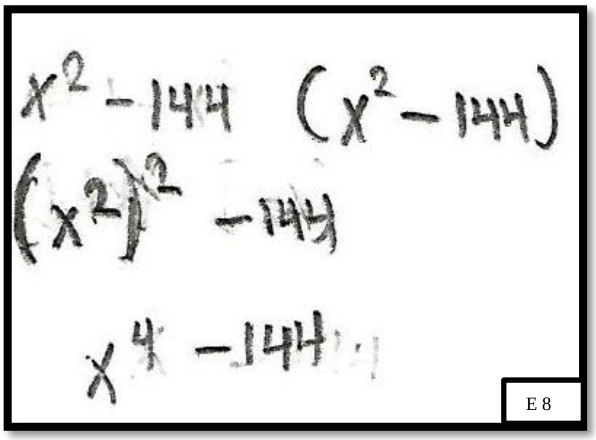
Figura 62: Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E6 y E17

En general se presentan cierto grado de dificultad al efectuar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión. Los estudiantes presentan falencia al realizar cálculos internos en la representación algebraica, esto también afectado por el conflicto generado en la conversión, pues al no consolidar una representación algebraica adecuada partiendo del registro gráfico, no logran la transformabilidad interna del registro de representación. Para este caso se detecta que existe contrato didáctico, los estudiantes no interiorizan las preguntas, se limitan a seguir con procedimientos ya realizados. El reto es la persistencia, en cambiar las ideas que se poseen y buscar la mejora continua del docente y con ello la de los estudiantes.

Situación 3 "Preparando el camino"

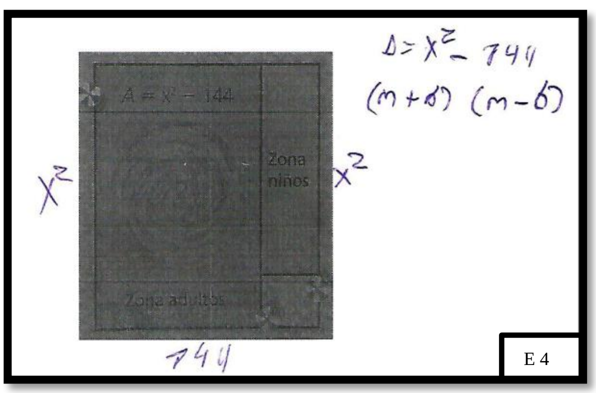
Se pretende que el estudiante luego de analizar un problema, empleando las representaciones de lenguaje natural y geométrico, logre el proceso de conversión al lenguaje algebraico.

Ítem 1. Un centro vacacional diseño un modelo de piscina que tiene dos secciones. Si el área de la zona de adultos se puede expresar mediante la expresión $x^2 - 144$, ¿Cuáles son las expresiones algebraicas para las dimensiones de esta zona?



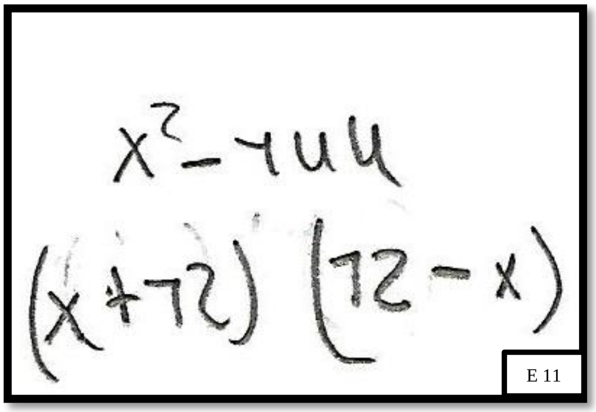
La conversión que realiza el estudiante presenta una no congruencia con la representación de salida, las unidades significantes no se conservan cuando realiza la movilización. Hay una aproximación muy superficial por parte del estudiante E8.

Figura 63. Conversión a la representación algebraica realizada por E8



En este caso el estudiante E4 presenta una contradicción; realiza asignación a la medida de los lados de la figura, pero al convertir al registro algebraico no las tiene presentes, de esta manera se evidencia no congruencia entre el registro y el de llegada.

Figura 64. Conversión a la representación algebraica realizada por E4

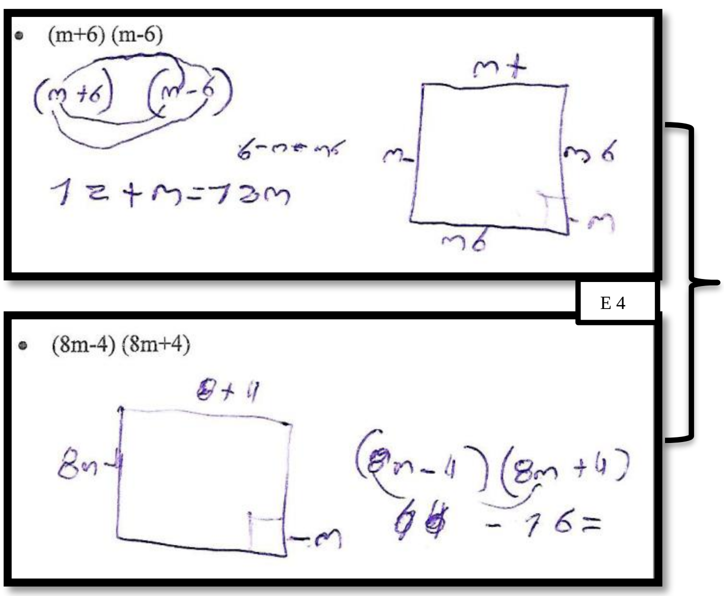


La conversión que hace el estudiante E11 no es correcta. El problema radica en el tratamiento interno que realiza, los cálculos que realiza no mantiene el orden de aprehensión, si lo desarrolla de esa manera el resultado estará invertido. La expansión conserva las unidades significantes y el significante.

Figura 65. Conversión a la representación algebraica realizada por E11

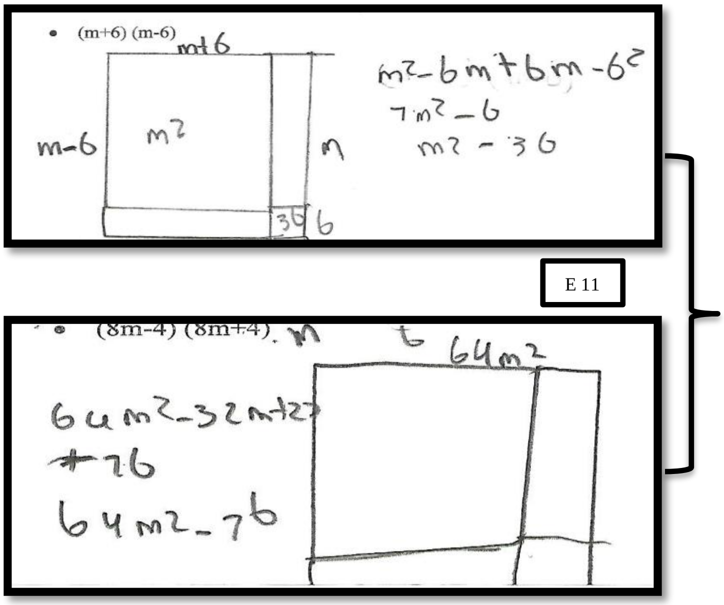
Ítem 2.

Realice la representación gráfica de las siguientes expresiones algebraicas (m+6) (m-6) y (8m-4) (8m+4) y describa los procedimientos. Debe incluir la medida de cada uno de los lados de la representación. Inicialmente, se parte del registro algebraico para consolidar los registros geométricos y del lenguaje natural.



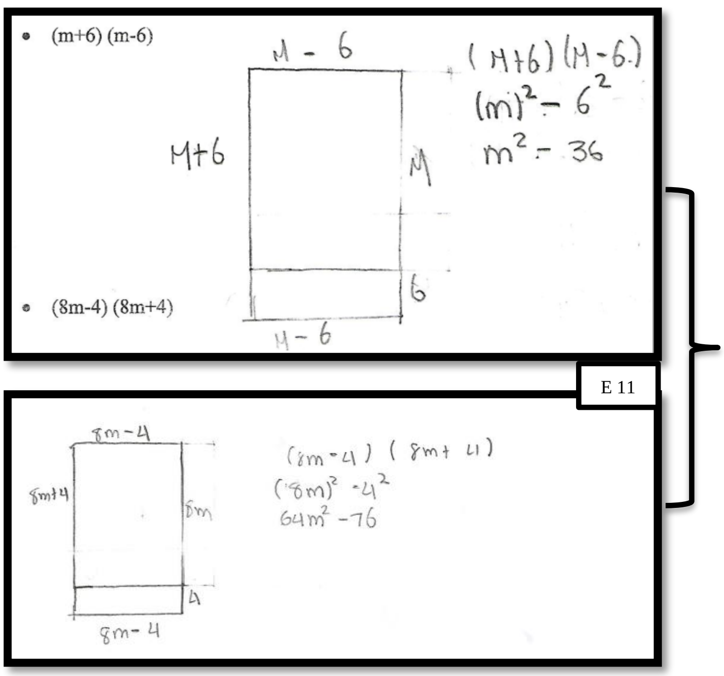
El estudiante E4 definitivamente no realiza de forma consciente los procesos cognitivos, la formación de las imágenes mentales que crea, las plasma con falta de cognición de su labor como estudiante, la conversión es notablemente no congruente, no existe relación entre la representación de salida y la de llegada, las unidades significantes están ausentes en todo el proceso que desarrolla y el tratamiento es incorrecto, no moviliza los registros de representación.

Figura 66. Conversión al registro geométrico y tratamiento interno del registro algebraico realizado por E4



La conversión al registro de representación algebraica que el estudiante E11 es casi coherente, mantiene las unidades significantes, existe univocidad semántica e igual orden de aprensión, de igual manera el tratamiento dentro de éste registro es adecuado. Pero, al hacer la conversión al registro geométrico los gráficos carecen de características enunciadas en el registro de partida, no existe correspondencia semántica ya que las unidades significantes en este caso no se mantienen.

Figura 67. Conversión al registro geométrico y tratamiento interno del registro algebraico realizado por E11



En este caso el estudiante E11 realiza los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión de manera adecuada, por lo anterior se puede concluir que el estudiante cumple con las tareas de comprensión y producción de acuerdo a la movilización por todos los registros de representación que se pretendían. El tratamiento interno es coherente y las unidades significantes siempre se mantienen. Hay ausencia de descripción textual de lo que construye de acuerdo con la coherencia de la temática.

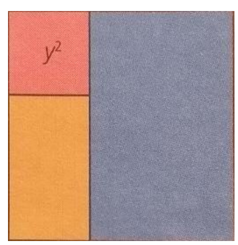
Figura 68. Conversión al registro geométrico y tratamiento interno del registro algebraico realizado por E3

Los estudiantes realizan con más facilidad la conversión al registro algebraico, de igual manera que el tratamiento al interior de este registro. El paso al lenguaje algebraico carece de coherencia con lo que se pretende, no realizan la gráfica con las unidades significantes del registro de salida. Los estudiantes no plasman el proceso de descripción del procedimiento realizado, se limitan a cumplir con operaciones y representaciones sin explicar y ni consignar las consideraciones que realiza en el proceso, les cuesta relatar lo que hacen. En esta ocasión, es importante reflexionar sobre el papel y la importancia que desempeñan las representaciones en esta secuencia de enseñanza pues, son un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás.

Situación 4 "A caminar"

En esta última parte de la secuencia de enseñanza se espera que los estudiantes logren realizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión al realizar la factorización de la diferencia de cuadrados perfectos.

Cree un problema que involucré la información de la siguiente figura.



Luego realice la expansión y factorización de las expresiones algebraicas involucradas.

Respecto a las actividades se encontraron los siguientes razonamientos.

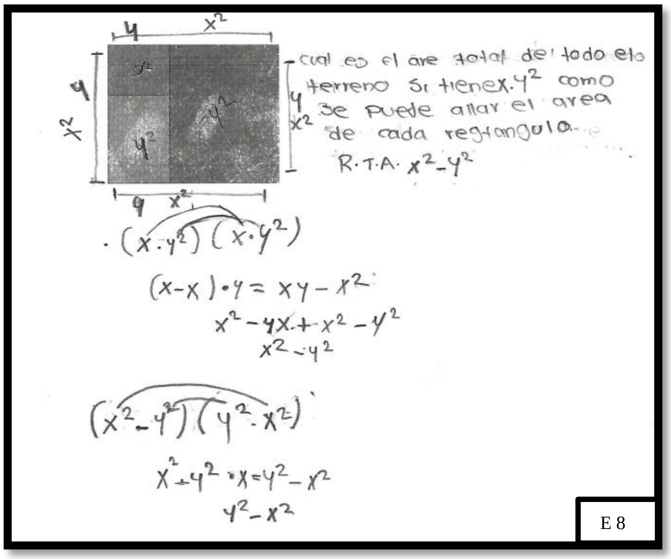


Figura 69. Procesos cognitivos que realiza E8, partiendo de la representación geométrica

La conversión que realiza al registro de lenguaje natural el estudiante el estudiante E8, es coherente con la correspondencia semántica, la asignación de unidades significantes en el registro se partida es congruente de acuerdo a las características que enuncia en el registro de llegada. En relación con el al registro algebraico, la representación de llegada no contiene las particularidades que enuncio en la representación inicial y teniendo en cuenta estas dificultades el tratamiento interno dentro de este registro no es coherente. No realiza de manera adecuada los procesos cognitivos.

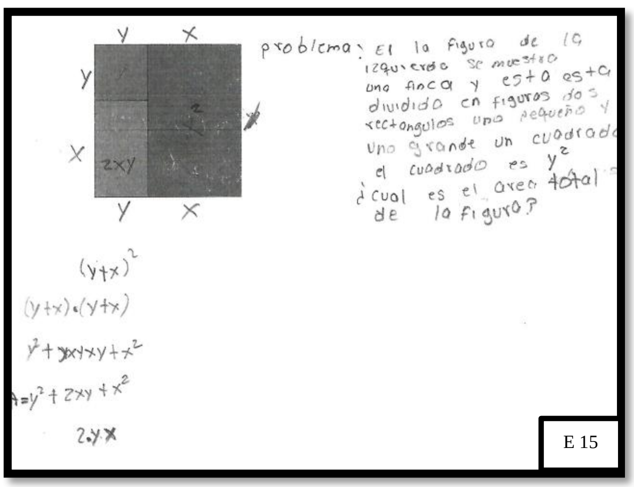
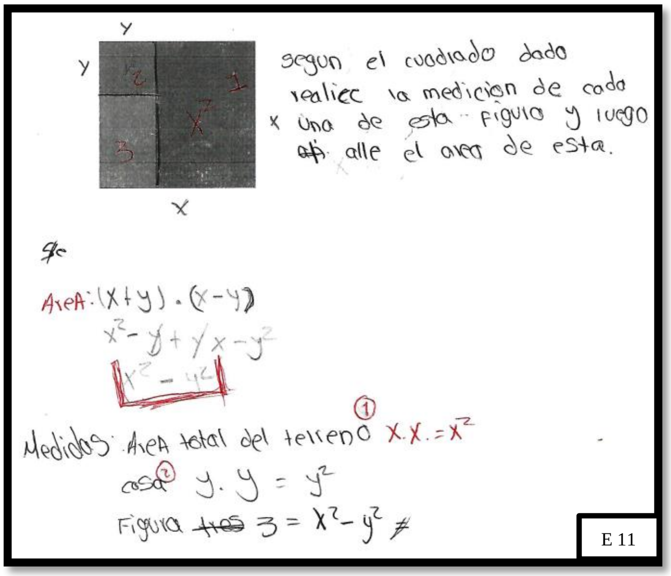


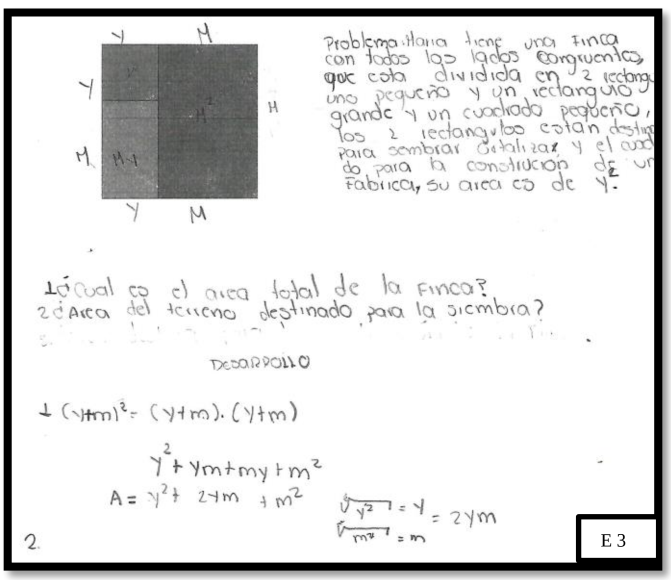
Figura 70. Procesos cognitivos que realiza E15, partiendo de la representación geométrica

La conversión construida partiendo de registro gráfico, carece de univocidad semántica de igual manera que correspondencia semántica algunas unidades significantes del registro de salida se pierden al realizar la movilización del registro, en consecuencia, se presenta no congruencia. Respecto al lenguaje algebraico las expresiones relacionadas no coinciden con lo representado y la descripción que realiza del problema. Por lo anterior, el estudiante no logra concretar las actividades cognitivas.



La conversión al registro del lenguaje natural contiene las características de la representación gráfica. Enuncia la descripción general de la figura, asigna valores numéricos a cada parte de la representación, pero los valores se tienen en cuenta al realizar el tratamiento de la expresión algebraica, el estudiante logra llegar a la diferencia de cuadrados sin tener en cuenta el procedimiento previamente realizado.

Figura 71. Procesos cognitivos que realiza E11, partiendo de la representación geométrica.



La conversión al lenguaje natural se da siguiendo un patrón, el estudiante reescribe el ejercicio que se presenta en situación 1, cambia algunas palabras, pero existe contrato didáctico en este caso. En pocas palabras el estudiante centra la actividad cognitiva en realizar paráfrasis, luego al pasar a la representación algebraica no logra organizar las expresiones conservando las características y la univocidad semántica terminal, por lo tanto, no logra a realizar la conversión de manera congruente.

Figura 72. Procesos cognitivos que realiza E3, partiendo del registro geométrico

Respecto a la secuencia "Dando pasos" creada para orientar la diferencia de cuadrados perfectos, los estudiantes movilizan los registros semióticos a través de las diferentes representaciones construidas, realizan las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión. Los avances alcanzados son significativos con relación a la primera actividad de esta secuencia, a pesar del esfuerzo que realizan los estudiantes, se presentaron algunas dificultades para realizar los procesos cognitivos. No logran realizar la movilización de los registros, les cuesta relacionar datos, resultados, símbolos y gráficos de actividades que se han realizado anteriormente, como es el caso de la factorización del trinomio cuadrado perfecto; ellos asocian constantemente lo aprendido en esta actividad y no permiten que se rompa el contrato didáctico, pues realizan los procesos semejantes a estos.

Conclusiones

A continuación, se dan a conocer las conclusiones de la investigación. Inicialmente, se hace referencia la evolución realizada por la investigadora, al analizar y reflexionar sobre todo el camino de la investigación y los aportes relevantes del proceso. Luego, se describen aspectos a nivel propio de la investigación, teniendo en cuenta lo escrito por los estudiantes en el desarrollo de las secuencias didácticas y la Teoría de las Representaciones Semióticas.

El proceso investigativo es una labor que implica un constante acercamiento con todos los sujetos y objetos de la investigación. Es una búsqueda incansable de información y variables pertinentes, es preocuparse por cambiar una forma de pensar, inicialmente la del investigador y luego de los sujetos que lo rodean, es una reflexión inquebrantable con el fin de mantener firme los nuevos ideales, es buscar la mejora continua de la labor pedagógica, social y laboral que se desempeña a diario.

El contexto jugó un papel fundamental tanto en la elaboración como en la ejecución de las secuencias didácticas. El conocer a los estudiantes fue indispensable, de esta manera, se pudo desarrollar actividades contextualizadas teniendo en cuenta características propias de la zona o región, empleando términos que ellos manejan a diario y que implícitamente se vieron reflejados en la clase de matemáticas y en las prácticas que realizaron constantemente.

Algunos estudiantes mostraron temor y apatía con la ejecución de nuevas metodologías, pues siempre la clase se había tornado similar. Al realizar las secuencias de enseñanza los estudiantes sentían duda de escribir sus propias consideraciones y temían cometer errores. Pero, luego de generar confianza en ellos se logró la familiarización y concretar ideas, consideraciones y aportes muy importantes para el proceso investigativo.

Las representaciones semióticas son un instrumento fundamental para el desarrollo de actividades matemáticas, de esta manera, se pretendía que los estudiantes por medio de diversos registros de representación consiguiesen comprender, analizar y aprender temas que para ellos son confusos, complicados y abstractos como lo es el álgebra elemental para el gado octavo, lo anterior, concordando con lo escrito por Duval (1999) "toda actividad cognitiva humana, se basa en la complementariedad de estas dos representaciones" (p. 39), al hacer referencia a las transformaciones intencionales y cuasi-instantáneas que realizan los estudiantes cuando emplean diversas representaciones.

La interacción que existe entre el estudiante y su par es de gran ayuda, pues los estudiantes realizar la justificación de cada una de las representaciones construidas. Al realizar este ejercicio se debe evidenciar una coherencia entre las representaciones y la argumentación dada, de esta manera se logró evidenciar la existencia de algunos errores cometidos, pero de igual manera la inmediata de estos, consolidando representaciones acordes con las condiciones iniciales.

Los estudiantes desarrollaron el tratamiento dentro de cada registro de representación, realizaron trasformaciones internas ya sea del registro gráfico o geométrico (anamórfosis) del lenguaje natural (paráfrasis) y del algebraico (cálculos con expresiones algebraicas).

La argumentación, la descripción y la socialización como parte del proceso comunicativo es destacable. Inicialmente los estudiantes no lograron generar ni consolidar aportes coherentes con los registros, pero finalmente, se alcanzaron aportes significativos en la consolidación de representaciones empleando el registro de lenguaje natural, destacando que en la expansión informacional que realizaron algunos de ellos revelan la "movilidad simultánea de la red semántica de un lenguaje natural y los conocimientos pragmáticos del medio sociocultural" (Duval, 1999, p. 113).

La mayoría de los estudiantes consolidaron la actividad matemática con más facilidad, al relacionar como registro de salida el geométrico, a partir de esta plasmaron la conversión al registro algebraico y tratamiento en su interior, y finalmente, realizaron la expansión informacional de las anteriores representaciones por medio del registro del lenguaje natural.

Entre los registros del leguaje natural-salida y gráfico o geométrico-llegada se evidenció la actividad matemática, específicamente el proceso cognitivo de conversión. En éste los estudiantes mostraron dificultad, no logran realizar la actividad cognitiva de manera correcta, carecen de interpretación de textos para lograr la transformabilidad del registro de representación, pues al realizar la representación mental y plasmarla con existe congruencia con lo descrito en el registro de salida.

Se presentó dificultades en relación con los contenidos previos a las actividades que los estudiantes de grado octavo deben manejar, como es el caso de conceptos básicos de geometría y operaciones aritméticas. Hay vacíos conceptuales, los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que realizaron los estudiantes carecerían de conectividad con las representaciones mentales que tienen, pues no lograron concretar correctamente lo que consideran pertinente de realizar.

Los resultados de esta investigación abren las puertas a nuevas pesquisas en temas relativos a la enseñanza y el aprendizaje de diversos objetos matemáticos, la motivación en las clases de matemáticas y la representación semióticas. En particular se plantean las preguntas: ¿Cómo enriquecer la comprensión matemática a través de los diferentes registros y representaciones de un objeto matemático? Y ¿En qué sentido, son las representaciones semióticas un instrumento para el aprendizaje y paso de la aritmética al álgebra elemental?

Finalmente, tras el paso por la Maestría en Educación Matemática, me quedan más preguntas que respuestas, reconociendo que, conociendo un poco más de las teorías de la didáctica de la matemática, todas las actuaciones dentro del aula de clase son un constante cuestionamiento, pero, la noble misión que tenemos como maestros es perfeccionar lo intangible y moldear las personas que pasan por nuestras manos (los estudiantes).

Bibliografía

Acevedo , H. (2015). La enseñanza de la factorización, con la ayuda del material didático "el álgebra es un juego". *Revista Colombiana de Educacion Matemtica, 1*(1), 518-526.

Andrade, C. (1998). Dificultades en el aprendizaje de la noción de variación. *Revista EMA, 3*(3), 241-253. Obtenido de http://funes.uniandes.edu.co/1081/1/43_Andrade1998Dificultades_RevEMA.pdf

Beltrán, C. (2016). *Representaciones semióticas de la parábola utilizadas por los estudiantes de grado décimo.* Tesis de maestría, Universidad de la Sabana , Bogotá.

Bogotá, M., Dueñas , M., Díaz , A., Roldan, D., & Solano , J. (2016). *Applica matemáticas 8.* Bogotá: sm.

Buenaventura, J. (2015). *Representaciones semióticas de sólidos que tienen los estudiantes de educación media.* Tesis, Ibague.

Corbetta, P. (2007). *Metodología y técnicas de investigación social.* España: McGRAW HILL.

D´Amore , B., & Radford , L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos.* (Primera ed.). Bogotá, Colombia : Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

D´Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática.* Reverté Ediciones.

D´Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, IX*(1), 177-197.

D´Amore, B., Fandiño, M. I., & Lori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio.

D´Amore, B., Fandiño, m., Marazzani, I., & Silvia, S. (2010). L*a didáctica y la dificultad en matemática.* Bogotá: Magisterio.

D´Amore, B., Font, V., & Godino, J. (Diciembre de 2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *PARADIGMA, XXVIII*(2), 49-77.

Duval , R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano:Resgistros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (Segunda ed.). (P. Lang, Ed., & M. Vega Restrepo, Trad.) Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Duval , R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking - The Register of Semiotic Representations.* (T. M. Campos, Ed.) Dunkerque, Francie: Proem.

Duval, R. (1999). *Semiósis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizaje intelectual.* (M. V. Restrepo, Trad.) Santiago de Cali, Colombia: Artes Gráficas Univalle.

Duval, R., & Saénz, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas : perspectivas semióticas seleccionadas.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Guzmán , I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C, I*(1), 5-21.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación.* México: McGRAW-HILL.

Jiménez , A., & Pineda, L. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y ciencia* (16), 101-116.

Jiménez, A., Suárez, N., & Galindo, S. (2010). La comunucación:Eje en la clase de matemáticas. *Praxis & Saber, I*(2), 173-202.

Lara, I. (2016). *La parábola como lugar geométrico: una formación continua de profesores de matemáticas basada en la teoría de registros de representación semiótica.* Tesis de maestía, Pontificia Universidad Católica del Perú, San Miguel.

Leguizamón, F. (2017). Patrones de interacción comunicativa del profesor universitario de matemáticas: un estudio de caso. *Praxis & Saber, VIII*(16), 57-82.

Lorente, A. (s.f.). *Historia del álgebra y de sus textos.* Obtenido de https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/38983595/Historia_del_algebra_y_de_sus_textos.pdf?AWSAccessKeyId=AKIAIWOWYYGZ2Y53UL3A&Expires=1539654684&Signature=tT5NTY7RqYhAMkFvB%2B%2FcigAxdx0%3D&response-content-disposition=inline%3B%20filename%3DHisto

Malisani, E. (1999). Los obstáculos epistemológicos en el desarrolo del pensamiento algebraico. *Revista IRICE*(13).

Martínez, Y. (2012). Recogida de datos. En E. Soriano, *Investigación en educación infantil y primaria.* Almeria: Universidad de Almeria.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1999). *Rutas y raices del y hacia el álgebra.* (L. Acebedo, Ed., & C. Agudelo Valderrama, Trad.) Tunja: UPTC.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares.* Obtenido de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional; Aprende Colombia (MEN). (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje.*

Ministerio de Educación Nacional; Lineamientos curriculares. (1998).

Morales , B. (s.f). Cognición matematica y aprendizaje, basado en semiósis y pensamiento humano. 47-55.

Morales, I. (2008). *Propuesta de enseñanza para la factorización algebraica.* Tesis de maestría, Universidad Michuacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia Muchuacán.

Morán , M. (2013). *Material didáctico para el fortalecimiento de los procesos de aprendizaje de la factorización en grado octavo del colegio San Francisco de la ciudad de Tulúa.* Tesis de pregrado, Universidad Católica de Manizales, Manizales.

Ospina , D. (2012). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje de la función lineal.* Tesis de Mestría , Universidad Autónoma de Manizales , Manizales .

Ospina , M. (2015). *Guia didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM.* Tesis de maestría , Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, Medellín.

Parada , N. (1999). *La Comunicación Eficaz.* Barcelona: Urano, Barcelona.

Ponte, J. (2004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. *La actividad matemática en el aula*, 25-34.

Poveda, G. (2012). *Historia de las matemáticas en Colombia.* Medellín, Colombia: UNAULA.

Programa Internacional Para la Evaluación de Estudiantes (PISA). (s.f.). Obtenido de http://www.oecd.org/pisa/pisaenespaol.htm

Restrepo, B. (2009). Investigación de aula:Formas y actores. *Revista educación y pedagogía, XXI* (53), 103 -112.

Rios , R. (2015). Historia de la enseñanza en Colombia: entre saberes y disciplinas escolares. *Pedagogía y Saberes*(42), 9-20.

Salazar , V., Jiménez , S., & Mora , L. (6 al 8 de Noviembre de 2103). Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización. *Tabletas algebraicas, una alternativa de enseñanza del proceso de factorización*. Santo Domingo, República Dominicana.

Sarmiento, M. (2007). *La enseñanza de las matemáticas y las Tic. Una estrategia de formación permanente.* UNIVERSITAT ROVIRA I.

Tamayo, O. (2006). Representaciones semióticas y la evolucion conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas. *Educación y pedagogía, XVIII*(45), 39-49.

Torres , L., & Marín , G. (2017). *Hacía una lectura crítica de la información a través de representaciones estadísticas.* Tesís, Universidad Pegagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja.

Anexos

Anexo 1. Carta de aceptación Institución Educativa Agropecuaria el Escobal

Ramiriquí, 04 abril de 2018

Señorita
Claudia Patricia Sánchez Pacheco
Rectora
Institución Educativa Agropecuaria El Escobal

Cordial saludo,

Por medio de la presente me permito solicitar permiso para desarrollar el proyecto de investigación titulado "**Factorización de expresiones algebraicas bajo la teoría de registros semióticos**", cuyo objetivo principal es **Identificar e implementar en el aula de clase diferentes representaciones semióticas presentes en la factorización de expresiones algebraicas**. Este proyecto estará bajo la dirección de la profesora Nelsy Rocío González Gutiérrez y se desarrollará en el grado octavo de la Institución Educativa.

Gracias por la atención prestada.

Atentamente,
LAURA XIMENA CASAS RODRÍGUEZ
Estudiante de Maestría en Educación Matemática
UPTC, Tunja

VoBo.
Dra. NELSY ROCÍO GONZÁLEZ GUTIÉRREZ.
Docente Titular
Escuela de Matemáticas y Estadística

Anexo 2. Consentimiento informado y autorización

Documento de Intención para participar en la investigación que se adelantará durante el año 2018 en el grado octavo de la Institución Educativa Agropecuaria El Escobal del municipio de Ramiriquí- Boyacá

Estimado padre de familia o representante legal,

En mi calidad de docente titular de la asignatura de matemáticas del grado octavo de la Institución Educativa Agropecuaria El Escobal del municipio de Ramiriquí- Boyacá, me permito darles a conocer la propuesta de investigación que desarrollaré dentro del aula de clase a la cual pertenece su hijo(a) o representado(a), la investigación tiene como objetivo principal Identificar e implementar en el aula de clase diferentes representaciones semióticas presentes en la factorización de expresiones algebraicas. Por lo anterior se considera de gran importancia solicitar su colaboración para alcanzar esta intención.

En esta investigación se tiene previsto hacer uso de las siguientes fuentes de información: entrevistas semi-estructuradas, narrativas de aprendizaje, grabaciones de audio de sesiones de clase, y diarios de campo narrativos de las prácticas pedagógicas matemáticas. El proceso de análisis de estas fuentes de información comprende: transcripción y edición de lo discutido y analizado, aprobación y autorización del participante involucrado para utilizar lo dicho como objeto de investigación y publicación. Lo anterior contempla la posibilidad de identificar o no al participante y, para este último caso, de usar un seudónimo.

Si ustedes consideran que bajo las especificaciones señaladas se debe hacer alguna modificación o delimitación más específica, estaremos atentos a recibir las sugerencias. Si está de acuerdo y es su deseo hacer parte de esta investigación, entonces se deberá hacer constar que fue informado mediante éste documento de presentación y, además, deberá autorizar que los análisis de la información obtenida sean publicados. La participación en esta investigación es absolutamente voluntaria y el manejo de la información recolectada será totalmente confidencial.

Agradecemos de antemano su colaboración. Cualquier duda o inquietud sugerida la podemos resolver por vía telefónica o en la Institución Educativa.

Nelsy Rocío González Gutiérrez
Cel. 3106185230
e-mail: nelsy.gonzalez@uptc.edu.co

Laura Ximena Casas Rodríguez
Cel.3143051205
e-mail: laura.casas@uptc.edu.co

(Investigadores)

Anexo formato de autorización

Ramiriquí, 05 de abril 2018

AUTORIZACIÓN

Yo,________________________________ en calidad de acudiente de ___________________________________ del grado Octavo de la Institución Educativa Agropecuaria EL Escobal autorizo a las investigadores, profesoras Nelsy Rocío González Gutiérrez y Laura Ximena Casas Rodríguez para publicar y divulgar por medios electrónicos o impresos, textos sobre actividades realizadas en el proceso de investigación, encaminada a identificar e implementar en el aula de clase diferentes representaciones semióticas presentes en la factorización de expresiones algebraicas. Este proceso será objeto de investigación en el año 2018.

Ramiriquí, ____ de ___________ de 2018

Firma del acudiente

____

Anexo 3. Protocolo de entrevista

Entrevista semi-estructurada.

La siguiente entrevista tiene como propósito realizar un primer acercamiento con los estudiantes del grado octavo, conocer su contexto y analizar las percepciones que ellos tienen acerca de las matemáticas, la clase de matemáticas y el álgebra como tal.

Buenos días, mi nombre es Laura Ximena Casas, soy la profesora de matemáticas de ésta Institución Educativa, además soy estudiante de la Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Estoy adelantando un trabajo de investigación en Educación Matemática, quisiera realizarle una entrevista con el fin de conocer aspectos del contexto donde se desarrolla y las percepciones o ideas que Usted pueda tener acerca de las matemáticas, la clase de matemáticas y el álgebra.

1. ¿Cuál es su nombre?
2. ¿Cuántos años tiene?
3. ¿Dónde vive?
4. ¿Con quién vive?
5. ¿Ocupación de los padres?
6. ¿Grado de escolaridad de los padres?
7. ¿Cuántos hermanos tiene?
8. ¿Qué lugar ocupa dentro de los miembros de su familia?
9. ¿Cuánto se demora normalmente de la casa al colegio?
10. ¿Qué medio de transporte emplea para llegar al colegio?
11. ¿Le gusta asistir al colegio? ¿Por qué?
12. ¿Le gustan las matemáticas?
13. ¿Qué piensa de las matemáticas?
14. ¿Cómo le han enseñado matemáticas en el colegio?
15. ¿Qué le ha gustado de las clases de matemáticas?
16. ¿Qué no le ha gustado de las clases de matemáticas?
17. ¿Cómo le gustaría que fueran las clases?
18. ¿Cree que las matemáticas le sirven en su vida diaria?
19. De los temas del grado octavo, ¿Qué se le facilita? ¿Qué se le dificulta?
20. ¿Cree que pueda existir matemática sin números?

21. ¿Qué ha escuchado del álgebra?
22. De acuerdo a la temática vista en el grado octavo ¿Qué piensa cuando escucha la palabra álgebra? ¿Le gusta el álgebra? ¿Qué le gusta? ¿Qué le disgusta?
23. ¿Se le facilita el álgebra? ¿Por qué?
24. ¿Será posible aplicar el álgebra en la vida cotidiana? ¿Cómo?
25. ¿Qué le gustaría estudiar al terminar el colegio?
26. ¿Cree que el álgebra le puede ayudar o conseguir sus metas? ¿por qué?

Anexo 4. Secuencia didáctica "Dando pasos" para la factorización del trinomio cuadrado perfecto.

"En pie haciendo solitos"

Nombre: ___________________________________grado: __________fecha: _________

La realización del siguiente trabajo, tiene como propósito conocer el nivel de percepción que tiene Usted como estudiante, describiendo el paso que existe entre representaciones de un objeto matemático. Resuelva cada una de los ítems o pasos en la hoja que se le suministra. Recuerde que todas sus consideraciones son importantes para nosotros, así que no olvide que todo quede escrito.

1. Una finca con todos lados congruentes está parcelada en cuatro partes, en las que se sembraron tres productos agrícolas. La parcela más grande y la más pequeña se pueden representar por medio cuadrados, y las otras dos son rectángulos congruentes. Dibuje y describa las figuras geométricas que considere cumplen las condiciones y representen la finca.

2. La siembra de los productos se distribuye en las cuatro parcelas de la siguiente manera:

El área de la parcela de tomate que está divida en dos partes iguales es equivalente al área que ocupa el cultivo de papa que es la parcela más grande. Un cuarto del área del cultivo de papa o la mitad de una parcela del cultivo de tomate es equivalente al área de la parcela del cultivo de lulo que tiene los lados congruentes.

Realice la representación gráfica de las características anteriores. Todas las opciones que considere posibles. Además, escriba la descripción de la representación que ha realizado de cada una de las parcelas.

3. Reúnase con un compañero, comparen las representaciones gráficas que cada uno realizó y argumenten porque las consideran adecuadas, recuerde que todo debe quedar escrito. Luego, consoliden una sola representación, en la que describan las características de cada parcela.
4. Tenga en cuenta las siguientes afirmaciones para luego solucionar las preguntas.

- La medida de un lado de la parcela del cultivo de papa es (p), además la parcela está representada por un cuadrado.
- Un lado del cuadrado donde está sembrado el lulo mide (l).

1. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la parcela?
2. ¿Cuál es la expresión que representa el valor del lado de la finca?
3. ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la finca?

"Vamos de la mano"

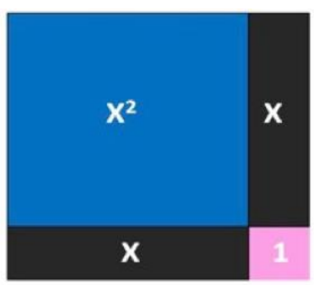
Si tenemos la expresión $(x + 1)^2$, la expansión algebraica es $x^2 + x + x + 1$ y la simplificación es $x^2 + 2x + 1$. Ahora visualicemos en forma geométrica la solución de este trinomio cuadrado perfecto:

Representemos x^2 como el área de un cuadrado cuyo lado mide x .

Representemos a x como el área de un rectángulo cuyos lados miden x y 1 (unidades), respectivamente.

La unidad como el área de un cuadrado de lado 1.

Nótese, que para la expresión $x^2 + 2x + 1$ se organizan estas figuras para obtener el siguiente cuadrado:



La anterior gráfica es una interpretación geométrica de la expresión $x^2 + 2x + 1$, que tiene como medida de los lados (x +1) y $(x + 1)^2$ como expresión que representa el área.

El área de este cuadrado es, (x +1) (x +1) = $(x + 1)^2$, luego, $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

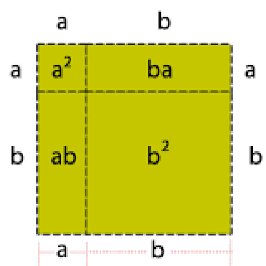
A esta expresión algebraica se le denomina Trinomio Cuadrado Perfecto.

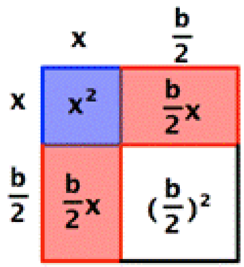
Tomado de (Ospina, 2015, p. 48-49) y adaptado por el autor.

"Preparando el camino"

Nombre: _________________________________ grado: __________fecha: _________

Complete la siguiente tabla teniendo en cuenta la información suministrada anteriormente; debe hacerse se manera geométrica, algebraica y escrita con palabras, complete lo faltante en cada caso.

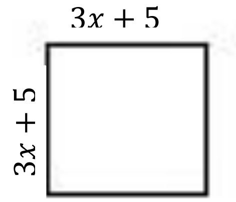
Registro geométrico	**Registro algebraico**	**Registro del lenguaje natural**
	________________ ________________ ________________	
	$\underline{(m+r)^2}$ ________________ ________________	
	$(m+4)(m+4)$ ________________ ________________	
	x^2+4x+4 ________________ ________________	

	________________ ________________ ________________	
	________________ ________________ ________________	Existe un cuadrado de lado t, y otro de lado 1, los cuales están inscritos en uno de mayor área. por lo que se determina que la medida del lado es (t + 1).

"A caminar"

Nombre: ___________________________________ Grado: __________Fecha: _______

1. Hallar el área que ilustra figura



   a. ______________________ = ________________________
   b. Describir el trinomio resultante:

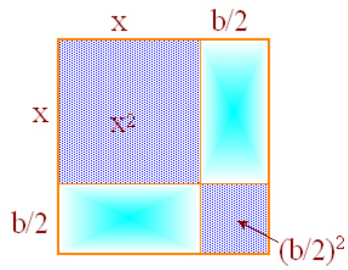
____

____

____

2.
   a. Expandir la expresión algebraica $(3m+2)^2$ (las formas posibles).
   b. Realice la figura geométrica que represente la expresión anterior.
   c. La expresión algebraica que representa el área de la figura es:

3. Escribir la expresión algebraica que represente el área de la siguiente figura.



Anexo 5. Secuencia didáctica "Dando pasos" para la factorización de la diferencia de cuadrados perfectos.

"En pie haciendo solitos"

Nombre: ____ Fecha______________

Objetivo: Realizar la factorización de diferencia de cuadrados perfectos por medio de diferentes representaciones.

Nota: Recuerde que todas sus consideraciones son importantes, no olvide que todo quede escrito.

En la siguiente figura se puede observar el plano de una finca destinada al cultivo. En la misma finca se ha asignado un sector para la construcción de una vivienda.

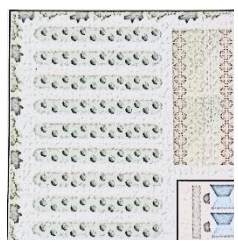


Fig. 1.

El sector destinado para la construcción de la casa, tiene un área que equivale a la expresión $\boldsymbol{y^2}$.

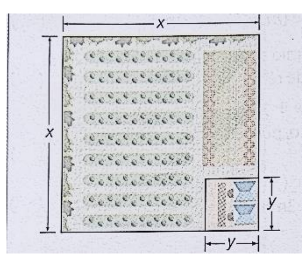


Fig. 2

De acuerdo con la anterior información responda los siguientes cuestionamientos.

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la primera figura?

¿Cómo se puede expresar el área de la finca destinada al cultivo?

“Vamos de la mano”

Nombre: ____ Fecha_____________

Reconstruya con sus propias palabras la siguiente secuencia de figuras hágalo de manera general.

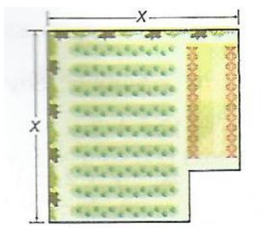


Fig. 1

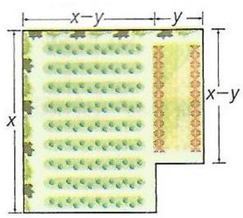


Fig. 2

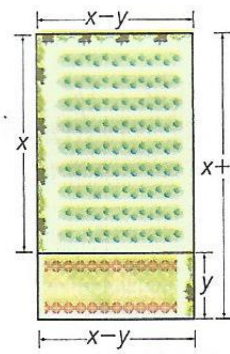


Fig.3

- Describa lo que observa en la figura 1

- ¿Según la medida que de los lados que figuras geométricas se pueden observar en las figuras 2 y 3?

- ¿Qué expresiones algebraicas representan el representan la medida de los lados de la finca?

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la parte de la finca asignada para el cultivo?

“Preparando el camino”

Nombre: ____ Fecha______________

Un centro vacacional diseño un modelo de piscina que tiene dos secciones. Si el área de la zona de adultos se puede expresar mediante la expresión $x^2 - 144$, ¿Cuáles son las expresiones algebraicas para las dimensiones de esta zona?

Teniendo en cuentas las indicaciones anteriores, realice el registro gráfico de las siguientes expresiones algebraicas y describa los procedimientos. Debe incluir la medida de cada uno de los lados del registro geométrico o gráfico

.

- (m+6) (m-6)

- (8m-4) (8m+4)

“A caminar”

Nombre: ____ fecha______________

Cree un problema que involucré la información de la figura.

Luego realice la expansión y factorización de las expresiones algebraicas involucradas.