Competencia Digital en el Aprendizaje de los Poliedros Convexos

Lic. Laura C. Pedroza Pinilla

Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Trabajo de grado, requisito parcial para optar el título de

Magíster en Educación Matemática

Director: Dr. Publio Suárez Sotomonte

15 de noviembre de 2020

Dedicada a mis padres Ana Mercedes Pinilla y Gabino Javier Pedroza, quienes me han guiado y apoyado para cumplir mis sueños.

Agradezco:

A Dios por permitirme tomar el camino como educadora y ampliar mi formación.

A Luis Fernando Ávila por su amor y apoyo incondicional.

A mi tío el ingeniero Jaime Pedroza Soler por estar siempre pendiente de mi formación profesional.

Al doctor Publio Suárez Sotomonte por su permanente guía, colaboración y dedicación en el proceso investigativo, su apoyo conformó un pilar del mismo.

Al doctor Francisco Javier Vargas Mancera y al doctor Alfonso Jiménez Espinosa por el acompañamiento y sugerencias en el desarrollo de la investigación.

A los estudiantes de Electiva de Profundización I, por permitirme hacer parte de su formación como futuros Licenciados en Matemáticas.

Tabla de Contenido

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Índice de Anexos

Resumen

El reconocer la importancia de la formación inicial de Licenciados en Matemáticas en cuanto al componente geométrico, pensamiento espacial, sus sistemas y estructuras, y al mismo tiempo reconocer la necesidad del desarrollo de competencias digitales de los maestros en formación en Colombia, impulsó la presente investigación a realizar una caracterización del desarrollo de la *faceta epistémica* en cuanto al objeto poliedro convexo y de la *faceta mediacional*, en cuanto a competencias digitales de profesores, esto con el sustento teórico desde el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Debido al interés por interpretar y explorar el proceso de aprendizaje del objeto en mención y el desarrollo de competencias digitales, a partir de una secuencia de situaciones problemáticas, se decidió adoptar un enfoque cualitativo de investigación sin dejar de lado datos cuantitativos, que permitan nutrir y sustentar la información recolectada, con un alcance de tipo exploratorio y descriptivo con miras a la interpretación (Hernández et al., 2014); la teoría metodológica transversal fue el Análisis Didáctico basado en el Modelo de Conocimientos Didáctico Matemáticos del Profesor (Pino-Fan y Godino, 2015).

Como unidad de análisis se consideró al grupo de estudiantes que cursaron la asignatura Electiva de Profundización I, ofrecida por el programa académico Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Los resultados permiten visualizar algunos tipos de prácticas matemáticas inherentes en el aprendizaje del objeto poliedro convexo y su generalización como politopo.

Palabras clave: Poliedro Convexo, Geometría Dinámica, Competencia Digital, formación de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas.

Abstract

Recognizing the importance of the initial training of mathematics teachers about the geometric component, spatial thinking, their systems and structures, at the same time recognizing the need for the development of digital skills of teachers in training in Colombia, prompted this research to be carried out a characterization of the development of the epistemic facet about the convex polyhedron object and of the mediational facet in terms of digital skills of teachers, with the theoretical support from the Onto-Semiotic Approach of mathematics knowledge and mathematics teaching. Due to the interest in interpret and explore the learning process of the object in mention and development of digital competences, from a sequence of problematic situations, it was decided to adopt a qualitative approach without neglecting quantitative data that allow expand and support the information collected; with an exploratory and descriptive scope with a view to interpretation (Hernández et al., 2014); The cross-sectional methodological theory was the Didactic Analysis based on the Teacher's Mathematical Didactic Knowledge Model (Pino-Fan and Godino, 2015). As unit of analysis, was consider the group of students who studied the Elective deepening I subject, offered by the academic program Degree in Mathematics of the Pedagogical and Technological University of Colombia. The results allow visualizing some types of mathematical practices inherent in the learning of the convex polyhedron object and its generalization as a polytope.

Key words: convex polyhedron, dynamic geometry, digital competence, initial training of mathematics teachers.

Introducción

Una problemática que atañe la formación inicial de profesores de matemáticas radica, en algunos casos, en la falta de exploración de nociones geométricas como lo es el objeto poliedro convexo, lo que frecuentemente se reemplaza, con el conocimiento para realizar algoritmos en la aplicación de fórmulas. En concordancia, se amplía la posibilidad de que el futuro profesor, dentro del contexto educativo escolar, proponga a sus estudiantes ambientes para el aprendizaje del objeto en mención, únicamente desde representaciones estáticas, bidimensionales o problemas para aplicar fórmulas de volumen (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

En este sentido, es necesario indagar en cuanto al conocimiento matemático y didáctico del futuro profesor respecto al objeto poliedro convexo; desde esta investigación se adopta la Geometría Dinámica bajo la hipótesis de que representa una posibilidad para fomentar el desarrollo de estos conocimientos (Laborde et al., 2019; Moreno-Armella, 2002).

Sin embargo, la utilización de recursos digitales evidencia otra problemática inherente a la formación de licenciados en matemáticas, pues en algunos casos, no se brinda una formación que fomente el desarrollo de sus competencias digitales (Niño, 2018; Téliz, 2015; Toro, 2014).

Por lo tanto, esta investigación tuvo como propósito responder a estas problemáticas por medio de una caracterización del desarrollo de las *facetas epistémica y mediacional*, descritas en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS), referentes al aprendizaje del objeto poliedro convexo y su generalización como politopo, y al desarrollo de competencias digitales de un grupo de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la UPTC.

En concordancia, la estructura que a continuación se presenta está conformada por cuatro capítulos, donde se sustenta la necesidad de responder a estas problemáticas desde documentos especializados en el tema y el nivel académico en mención; también se describen algunas experiencias realizadas en investigaciones referentes a estas problemáticas desde los ámbitos local, nacional e internacional.

Además, se presentan sustentos teóricos desde el Marco de Conocimientos Pedagógicos y Tecnológicos del Contenido (TPACK) (Mishra y Koehler, 2006), donde se determinan saberes profesionales del profesor, que se pueden trabajar al interior de la educación matemática por medio de una correspondencia con las *facetas epistémica* y *mediacional*, propuestas por el enfoque EOS (Godino, 2009); como base teórica para la coordinación entre estas dos facetas se retoman investigaciones referentes a la Geometría Dinámica, que no sólo describen sus componentes más característicos, sino que además, dan una perspectiva de posibles implicaciones de su implementación en el aula, entre otros.

Finalmente, desde la descripción de la organización metodológica que guió este proyecto, se describe la experiencia que tuvieron los estudiantes, al explorar tres situaciones problemáticas y sus respectivas páginas web de retroalimentación, estas herramientas fueron elaboradas desde las características específicas de esta investigación.

Capítulo 1. Generalidades

Problema de Investigación

De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (MEN) (1998), la geometría es un conocimiento que juega un papel importante en la formación matemática al permitir que los estudiantes, sin importar el nivel académico en que se encuentren, logren interpretar, entender, apreciar y modelar un mundo (tanto físico como abstracto) caracterizado por su perfección geométrica, además de desarrollar diversas formas de argumentación para dichos procesos.

Sin embargo, en los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 1998) se declara que la mayoría de las experiencias matemáticas proporcionadas a los estudiantes son bidimensionales y estáticas, esto a pesar de pertenecer a un mundo tridimensional y dinámico; resaltando así, una de las problemáticas de la enseñanza de la geometría en las aulas colombianas.

El componente geométrico obtiene resultados bajos en las *pruebas nacionales*, lo que se evidencia en estudios como el de Gómez (2011), pues en éste se ejemplifican dos problemas, propuestos para el componente geométrico en la prueba Saber de Quinto y Noveno grado, donde aproximadamente el 60% de los estudiantes dieron una respuesta incorrecta.

Al respecto, Gómez (2011), afirma que los ítems evaluados por el ICFES coinciden con los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*, sin embargo, tan solo un 30% del contenido de los Estándares se logra enseñar en el aula, el autor asegura además, que lo anterior sucede debido a factores como el tiempo, la didáctica o pedagogía de la clase, el currículo o una insuficiente formación del docente, en geometría.

Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA), son presentados por el MEN en las mallas de aprendizaje como un recurso para el diseño curricular (García y Jaramillo, 2019), sin embargo, Gómez et al. (2016) afirman que los ejemplos que se proponen no promueven sistemáticamente procesos como la representación, la modelación o el planteamiento y resolución de problemas, bases para el desarrollo del Pensamiento Geométrico Espacial.

Ante tales problemáticas, Toro (2014) afirma que la Geometría Dinámica representa una metodología que puede llegar a ser más efectiva que otras, ya que promueve un cambio novedoso en el método de enseñanza y una nueva forma de aprendizaje que fomenta y nutre procesos como la construcción de representaciones, la visualización, la exploración, la interpretación, la argumentación y la motivación de los estudiantes.

En el documento *Sistema Colombiano de Formación de Educadores y Lineamientos de Política* se propone a los licenciados ser capaces de promover procesos de producción y acceso al conocimiento, desde las bondades que ofrecen las tecnologías de la digitalización de la información; inclusive, se expone que éstas pueden apoyar al docente al ocuparse de su propia formación, de aprender a aprender, de formar y enseñar modos de pensamiento para la producción de saberes y conocimientos (Ministerio de Educación Nacional, 2013b). También Mishra y Koehler (2006) sustentan la importancia de estudiar los saberes pedagógicos sin dejar de lado los saberes tecnológicos del contenido que el profesor imparte en el aula.

A pesar de que las organizaciones nacionales enfocadas en la educación, son conscientes de la importancia del desarrollo de competencias digitales para profesores y han propuesto planes de acción, según Melo et al. (2018) las instituciones de educación superior en Colombia, que fueron analizadas en su investigación, evidenciaron un bajo nivel de aprovechamiento de la infraestructura tecnológica que poseen, además de tener poca motivación por innovar, explotar y explorar las tecnologías en busca de nuevas oportunidades de mejoramiento para su vida laboral o académica.

Al respecto, Jaramillo (2012) argumenta que aunque las instituciones educativas de Colombia a nivel de básica primaria y secundaria cuenten con herramientas informáticas, son muy pocas en las que se implementan ambientes virtuales de aprendizaje como elemento constitutivo del plan de servicios, siendo éste un recurso que potencia el aprendizaje de los estudiantes; explica que algunas de las razones son la resistencia al uso de herramientas tecnológicas y el rechazo al cambio del paradigma tradicional.

Con base en lo anterior, surge la necesidad de apoyar una formación vanguardista y de calidad para Licenciados en Matemáticas, específicamente en el área de Geometría Espacial y en el ámbito de tecnología digital como parte importante del ambiente educativo; en este sentido, se propone la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo evolucionan las *facetas epistémica* y *mediacional* del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, relacionadas con las competencias digitales de los estudiantes que cursan Electiva de Profundización I, en el aprendizaje de los poliedros convexos?

Esto se logrará investigando sobre las siguientes preguntas de menor alcance relativas a la unidad de trabajo de estudiantes de la asignatura Electiva de Profundización I.

Subpreguntas

1. ¿Cuáles son los significados global y personal parcial atribuidos al objeto poliedro convexo?
2. ¿Cuáles son las características relevantes de las creencias y concepciones respecto a los *conocimientos común*, *especializado* y *ampliado*, y a las competencias digitales?
3. ¿Qué situaciones problemáticas pueden apoyar el desarrollo de las *facetas epistémica* y *mediacional* relacionadas con las competencias digitales en el aprendizaje de los poliedros convexos?

4. ¿Qué características poseen los Ambientes Virtuales implementados para el aprendizaje de algunos poliedros convexos?

Objetivos

General

Caracterizar e interpretar el desarrollo de las *facetas epistémica* y *mediacional* del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, relacionadas con las competencias digitales de los estudiantes que cursan Electiva de Profundización I, en el aprendizaje de los poliedros convexos.

Específicos

1. Reconocer y analizar el significado global y personal parcial atribuido al objeto poliedro convexo.
2. Identificar los *conocimientos común, especializado* y *ampliado*, y las competencias digitales que poseen los estudiantes al iniciar el curso.
3. Analizar el desarrollo de las *facetas epistémica* y *mediacional* relacionadas con las competencias digitales al implementar estrategias para el aprendizaje de los poliedros convexos.
4. Reflexionar e interpretar acerca de la idoneidad didáctica de los Ambientes Virtuales implementados, relativos al aprendizaje de poliedros convexos.

Justificación

De acuerdo con el MEN (1998) el estudiante de una licenciatura en matemáticas debe hacer uso didáctico y pedagógico, tanto del conocimiento matemático como del conocimiento matemático escolar en diversos contextos; esto con el fin de desarrollar la capacidad de transformar el saber a enseñar en objeto de enseñanza, para su futura profesión docente.

En los procesos de educación matemática escolar, uno de los componentes básicos que se debe abarcar es el *Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos*, pues con este se "construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones y sus diversas traducciones a representaciones materiales" (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 37).

Además, la Oficina de Innovación Educativa con Uso de Nuevas Tecnologías del MEN (2013a) reconoce que entre más amplio sea el conocimiento que un profesor tiene de su disciplina, mayor será su capacidad de promover y ayudar al aprendizaje de sus estudiantes, acompañado del conocimiento pedagógico y didáctico.

Por este motivo se considera necesario investigar acerca del conocimiento que poseen los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas en el área de geometría, en este caso de cuerpos tridimensionales como lo son los poliedros convexos.

Investigaciones como las de Fredes et al. (2012), Stols (2012), Álvarez y Arias (2014), entre otras, evidencian que el uso de software de Geometría Dinámica, Ambientes Virtuales de Aprendizaje (AVA) y contenidos digitales permiten desarrollar, fomentar y afianzar procesos geométricos como el análisis, la visualización, la modelación, la interpretación, la argumentación, entre otros.

También, la UNESCO (2008) estableció los *Estándares de competencias en TIC para docentes*, donde afirmó que una de las exigencias, hoy en día, es brindar a los estudiantes oportunidades de aprendizaje basadas en las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) e inclusive resalta que para llevar a cabo este objetivo los docentes deben poseer las competencias y recursos necesarios basados en ellas.

Así mismo, en las metas de educación consagradas en el Plan Nacional Decenal de Educación 2016- 2026, algunos de los lineamientos estratégicos para el sexto desafío son:

> Garantizar la formación en uso educativo de las TIC en los programas académicos de los normalistas y en las licenciaturas. Incentivar el uso de las TIC en la práctica docente de forma pertinente en los procesos de planeación curricular y enseñanza. (Ministerio de Educación Nacional, 2017, p. 52)

En consecuencia, surge la motivación de investigar acerca de las competencias digitales que pueden desarrollar los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, con el fin de ofrecer una perspectiva de la Geometría Dinámica como posible metodología de enseñanza y aprendizaje para su futura labor docente.

Capítulo 2. Referentes Teóricos

Antecedentes

A continuación se exponen algunas investigaciones realizadas en los últimos diez (10) años acerca de la formación docente en cuanto al uso de los recursos digitales y al aprendizaje de la geometría por medio de ambientes dinámicos.

A nivel internacional, López (2017) tuvo por objetivo estudiar orientaciones, iniciativas y tecnologías con potencial para ser integradas en contextos educativos; en este sentido, el marco teórico estuvo conformado por modelos teóricos del aprendizaje como el conductismo, cognitivismo, constructivismo y la teoría sociocultural y también de las tecnologías digitales. Como metodología aplicó un estudio exploratorio y descriptivo. Se demostró que a medida en que han surgido y desarrollado las teorías del aprendizaje, estas han influenciado la evolución, estilo y métodos de las tecnologías digitales educativas.

Desde un punto de vista más específico, Salas (2018) se propuso analizar el impacto del Marco TPACK durante el diseño de la Unidad Didáctica Lógica de Predicados, en este sentido, abordó bases teóricas de competencias matemáticas e informáticas. Para la metodología se basó en el método ANOVA con una muestra de 49 alumnos de la asignatura Matemáticas Computacionales. Se dedujo que el Marco TPACK mejora el rendimiento académico en el campo de las matemáticas.

Por otro lado, Fredes et al. (2012) se propusieron como objetivo analizar el potencial y dificultades del uso de software de simulación en la sociedad digital y del uso pedagógico de los AVA, como bases teóricas estudiaron los AVA y la educación en la cibercultura; adoptaron un enfoque cualitativo de tipo exploratorio. En general se concluyó que las TIC ofrecen la oportunidad de llevar eficaz y oportunamente las tecnologías al aula y también se evidenció que el software educativo debe obedecer a las características e intereses de los estudiantes, como también a los conocimientos y competencias del profesor.

Desde otro punto de vista, Téliz (2015) analizó la didáctica basada en las TIC en la enseñanza de las matemáticas, a partir del análisis de las creencias de los docentes. Se seleccionó una muestra de cinco docentes y la investigación fue trabajada desde lo cuantitativo y cualitativo. Se identificó una contradicción entre lo que los profesores hacen y piensan acerca de las TIC, ya que poseen una visión positiva sobre su uso en las prácticas de enseñanza, sin embargo, los docentes en general no las aplican como herramienta didáctica.

Lo anterior concuerda con los resultados de la investigación de Guamán y Paredez (2016), quienes trazaron como objetivo estudiar las competencias digitales educativas de unos docentes de básica media; asumieron como base teórica la relación entre la educación y las TIC. La metodología tuvo diseño no experimental, fue de tipo bibliográfica y de campo, a un nivel descriptivo, para una muestra de 12 instituciones educativas. Se concluyó que aún existe demasiado analfabetismo digital, respecto a la población estudiada, debido a que solo el 22% posee competencias instrumentales, el 24% tienen competencias didáctico-metodológicas y el 5% posee competencias cognitivas.

Desde una perspectiva de formación inicial de profesores, Sandí y Sanz (2018) tuvieron por objetivo realizar una revisión de la literatura como base para indagar las dimensiones e indicadores de las competencias tecnológicas propuestas en diferentes países para la formación del profesor. Se desarrolló una metodología de revisión bibliográfica. Entre las dimensiones e indicadores propuestas por los gobiernos de Chile, España, Colombia, Costa Rica, Uruguay, Paraguay, entre otros países, se constató que la mayoría manifiesta que es importante que el docente tenga conocimientos tecnológicos, pedagógicos y disciplinares para integrar las TIC en los procesos formativos.

Al respecto, se encuentra la investigación elaborada por Pino y Soto (2010), quienes trazaron como objetivo analizar las competencias digitales adquiridas por los estudiantes en formación inicial teniendo en cuenta conocimientos, frecuencia de uso, nivel de dominio, motivaciones y obstáculos, con el fin de consolidar propuestas para la formación inicial. La metodología tuvo un enfoque mixto y se planteó como estudio de campo de tipo exploratorio y descriptivo; la muestra estuvo conformada por 219 estudiantes de magisterio y 10 profesores. Entre los resultados obtenidos se evidenció que los estudiantes dominan varias herramientas digitales, sin embargo, tienen dificultades para utilizarlas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, aunque las consideran importantes para su formación.

En esta misma dirección, Peña (2010) tuvo como objetivo analizar las posibilidades de las TIC en el desarrollo de actividades para apoyar y mejorar la enseñanza de la geometría. Realizó una revisión bibliográfica acerca de las TIC como recurso pedagógico y del significado y evolución de la geometría. Utilizó una metodología mixta con la aplicación de cuestionarios y también con la implementación de una página web; la muestra estuvo conformada por profesores y alumnos de primer, segundo y cuarto grado de ESO. Algunas de las conclusiones fueron que las TIC erradican la falta de dinamismo y la dificultad de construcción y visualización de la geometría; también se observó que, aunque los profesores no rechazan la utilización de las TIC, no reciben suficiente formación para su aplicación en el aula.

Existen investigaciones que implican herramientas tecnológicas digitales más específicas, como por ejemplo la de González (2014), quien trazó como objetivo contribuir a la profesión de los futuros docentes a partir de la vinculación de contenidos geométricos con software de

Geometría Dinámica. Utilizó una metodología cualitativa y entre los resultados se destacó que una de las dificultades en el uso del software es la construcción de los objetos matemáticos, se analizó que esto se debe al abundante conocimiento geométrico que conlleva realizar dichas construcciones.

De igual modo, Ruiz (2012) se propuso estudiar cómo el software GeoGebra incide en el desarrollo de competencias geométricas y didácticas de profesores en formación inicial; en este sentido, se abordaron teorías del conocimiento de contenidos matemáticos y pedagógicos del profesor. Se utilizó una metodología mixta con un método cuasi-experimental complementado con un estudio de casos; para 100 alumnos de 2º curso del Grado de Magisterio. Se constató que el uso del software aumentó el éxito de los estudiantes en la solución de una prueba de lápiz y papel, y también que la metodología didáctica influyó positivamente en las concepciones acerca de las matemáticas y su enseñanza.

Lo mismo se evidenció en los resultados de la investigación de Stols (2012), quien realizó un estudio acerca del crecimiento cognitivo geométrico de docentes en formación, en consecuencia el marco teórico estudió conceptos de los niveles de Van Hiele y entornos enriquecidos con tecnología. Se utilizó una metodología cuantitativa con diseño cuasi-experimental; se estudiaron dos grupos de referencia que trabajaban en mismo contenido temático, pero solo uno de ellos tuvo un ambiente mediado por software de Geometría Dinámica. Como resultado se obtuvo que el software mejoró la visualización geométrica, el análisis y la deducción de los profesores.

Desde el ámbito nacional, Córdoba y Quintana (2013) tuvieron por objetivo exponer las dificultades en la comprensión del lenguaje matemático presente en las demostraciones geométricas euclidianas; en consecuencia estudiaron bases teóricas del lenguaje cotidiano, lenguaje matemático, demostraciones geométricas y tipos de razonamiento. La metodología fue de tipo cualitativo y se tuvo en cuenta una muestra de dos estudiantes. Se observó que los estudiantes no realizaron una demostración completa de todas las proposiciones y tampoco expresaron simbólicamente el proceso.

De manera similar, Villamil et al. (2018) tuvieron por objetivo ayudar a estudiantes universitarios en la construcción del concepto de área; en este sentido, abordaron la estructura conceptual, historia, epistemología y fenomenología del objeto área. Como metodología abordaron la teoría del análisis didáctico con un enfoque cualitativo e interpretativo bajo un proceso de estudio de casos, para dos grupos de estudiantes de primer semestre. Se pudo evidenciar que la tarea propuesta por el docente implicó un desafío para los estudiantes al exigir el análisis del área sin tener en cuenta datos numéricos, lo cual obligó al estudiante desarrollar un nivel de abstracción más complejo que el ejercicio de aplicar un algoritmo.

Chiappe y Manjarrés (2013) estudiaron la incidencia de un AVA en el fortalecimiento de competencias matemáticas en un curso de geometría universitaria; adoptaron una teoría de AVA como apoyo a los ambientes presenciales; el diseño metodológico fue mixto con énfasis en lo cualitativo. Se demostró un aumento en el uso correcto del simbolismo matemático y también en la jerarquización correcta de las operaciones, además, aumentó significativamente la participación activa de los estudiantes, lo que expuso su claridad conceptual acerca de las ideas, métodos y soluciones.

Desde el análisis del futuro desarrollo profesional del estudiante de licenciatura, Álvarez y Arias (2014) se propusieron mejorar la práctica pedagógica mediante el diseño e implementación de un AVA para enseñar y aprender geometría analítica; como base teórica se realizó un estudio de la aplicación de las TIC en la enseñanza de las matemáticas. La metodología tuvo un enfoque cualitativo y la muestra estuvo conformada por 48 estudiantes de grado décimo y su respectivo docente. El uso del AVA en la enseñanza de la geometría analítica fomentó el desarrollo de los pensamientos espacial y variacional, y permitió a los estudiantes modelar situaciones de cambio, generando así un conocimiento lúdico y contextualizado.

Desde el punto de vista del estudiante de educación escolar, Perea (2016) tuvo como objetivo implementar una estrategia metodológica basada en TIC para el aprendizaje de los poliedros regulares de estudiantes de grado sexto. Se estudiaron conceptos de geometría activa, TIC y poliedros regulares. La metodología fue cualitativa con una técnica documental informática, para una muestra de 42 estudiantes de grado sexto. Algunos de los resultados mostraron que los estudiantes tienen dificultades en el reconocimiento de elementos de los poliedros y también demostraron dificultades para el manejo de los equipos tecnológicos, aunque manifestaban interés.

Así mismo, existen investigaciones a nivel local como la de Suárez y Ramírez (2012), quienes implementaron una estrategia para la enseñanza de sólidos platónicos y arquimedianos para grado octavo; asumieron bases teóricas acerca de los niveles de Van Hiele, representaciones semióticas y Geometría Dinámica. La metodología tuvo un enfoque cualitativo guiado por el diseño de investigación acción. Uno de los resultados comprobó que los ambientes virtuales permiten visualizar todas las perspectivas y características de los objetos geométricos.

De manera similar, Suárez et al. (2018) propusieron analizar el desarrollo del pensamiento espacial y sus sistemas en el trabajo con ambientes dinámicos para estudiantes de cuarto y quinto grado de primaria; adoptaron bases teóricas acerca del pensamiento matemático, visualización espacial y tecnología digital. Se trabajó un enfoque cualitativo con diseño descriptivo e interpretativo; se evidenció la importancia del proceso de construcción con regla y compás de los objetos geométricos y también se demostraron las bondades de un ambiente virtual de aprendizaje como espacio de exploración, representación y descubrimiento.

Por otro lado, desde la formación de profesores, Álvarez y Forero (2018) tuvieron por objetivo orientar un programa de formación docente para el uso didáctico de las TIC y comparar las competencias digitales desarrolladas por los profesores, así como el rendimiento académico de sus estudiantes; en este sentido, se abordaron los conceptos de brecha digital, brecha digital cognitiva, competencias digitales para docentes y el uso inadecuado de los recursos TIC en la labor docente. Como metodología se realizó un enfoque mixto. Concluyeron que con la alfabetización digital de los docentes se logró reducir la brecha digital cognitiva, además, el aprendizaje de sus estudiantes se vio afectado positivamente y se manifestó la necesidad de saber emplear pedagógicamente la infraestructura tecnológica.

De manera similar, Niño (2018) tuvo por objetivo analizar el nivel de competencia tecnológica y su relación con el desarrollo de habilidades de visualización matemática; en consecuencia adoptó bases teóricas como competencias TIC para docentes, visualización matemática y enseñanza de la geometría. Tuvo una metodología con enfoque mixto con diseño descriptivo para una muestra de 10 estudiantes de sexto semestre. Se demostró que el nivel de competencias TIC incide en la aplicación de las tecnologías digitales en la academia y que los ambientes virtuales favorecen la visualización matemática.

En esta misma dirección, Reyes (2017) se propuso favorecer la visualización y exploración geométrica de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Estadística; adoptó bases teóricas acerca de la visualización, exploración, ambiente virtual y Geometría Dinámica. Aplicó una metodología cualitativa con una muestra de quince estudiantes. Se afectó positivamente la formación de los estudiantes al generar un ambiente en el que se puede estudiar y redescubrir objetos y propiedades geométricas, además de crear un ambiente de confianza para debatir o defender concepciones matemáticas.

Finalmente, se describe la tesis doctoral "*Formación Inicial y Permanente de Profesores de Matemáticas con Ambientes Virtuales para la Enseñanza de las Geometrías"*, elaborada por Suárez (2018) dentro del Doctorado de Ciencias de la Educación de la UPTC-RUDECOLOMBIA; el propósito global consistió en:

> Diseñar, construir, implementar y evaluar ambientes virtuales para el aprendizaje de las geometrías, concebidos en un grupo colaborativo de docentes de pregrado y básica secundaria de matemáticas de Tunja (en servicio y en formación inicial) y diseñados en el aula de clase por estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. (p. 31)

El grupo buscó potenciar el análisis y la (auto) reflexión sobre sus tareas y prácticas al enseñar y brindar ambientes de aprendizaje las geometrías en el aula de clase. Los paradigmas teóricos adoptados para contextualizar la tesis fueron principalmente el *enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática* (EOS), algunos aspectos del enfoque *noético-cognitivo* de Duval y de la *Geometría Dinámica* como mediadora del aprendizaje escolar, especialmente referidos los sistemas semióticos de representación, contextualizados en el *Diseño de Tareas*, tendencias en actual desarrollo en educación matemática a nivel mundial. Como resultados de la investigación se identificaron elementos teóricos dentro de la matemática y la educación matemática, y prácticos como elementos de la didáctica de la geometría, los cuales sirvieron como sugerencias y pautas para la reformulación y actualización del componente de educación geométrica de los planes de estudio de la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC y de los programas de formación continua de profesores en ejercicio relativas al aprendizaje de las geometrías y la competencia digital en ambientes de geometría dinámica.

Bases Teóricas

Inicialmente se contextualiza la formación de profesores en Colombia; se adopta el Marco de Conocimientos Pedagógicos y Tecnológicos del Contenido (TPACK); y se asume como referente teórico el Modelo de Conocimientos Didáctico Matemáticos (CDM) del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS).

En este modelo se proponen seis facetas del conocimiento del profesor, entre ellas, se encuentran la *faceta mediacional* y la *faceta epistémica*; para la presente investigación la primera se encamina al desarrollo de competencias digitales de los profesores en formación como conocimiento en recursos y medios para potenciar los procesos de aprendizaje del tema en estudio; la segunda hace referencia al conocimiento (*común*, *especializado* y *ampliado*) acerca del objeto poliedro convexo que poseen los estudiantes de Licenciatura.

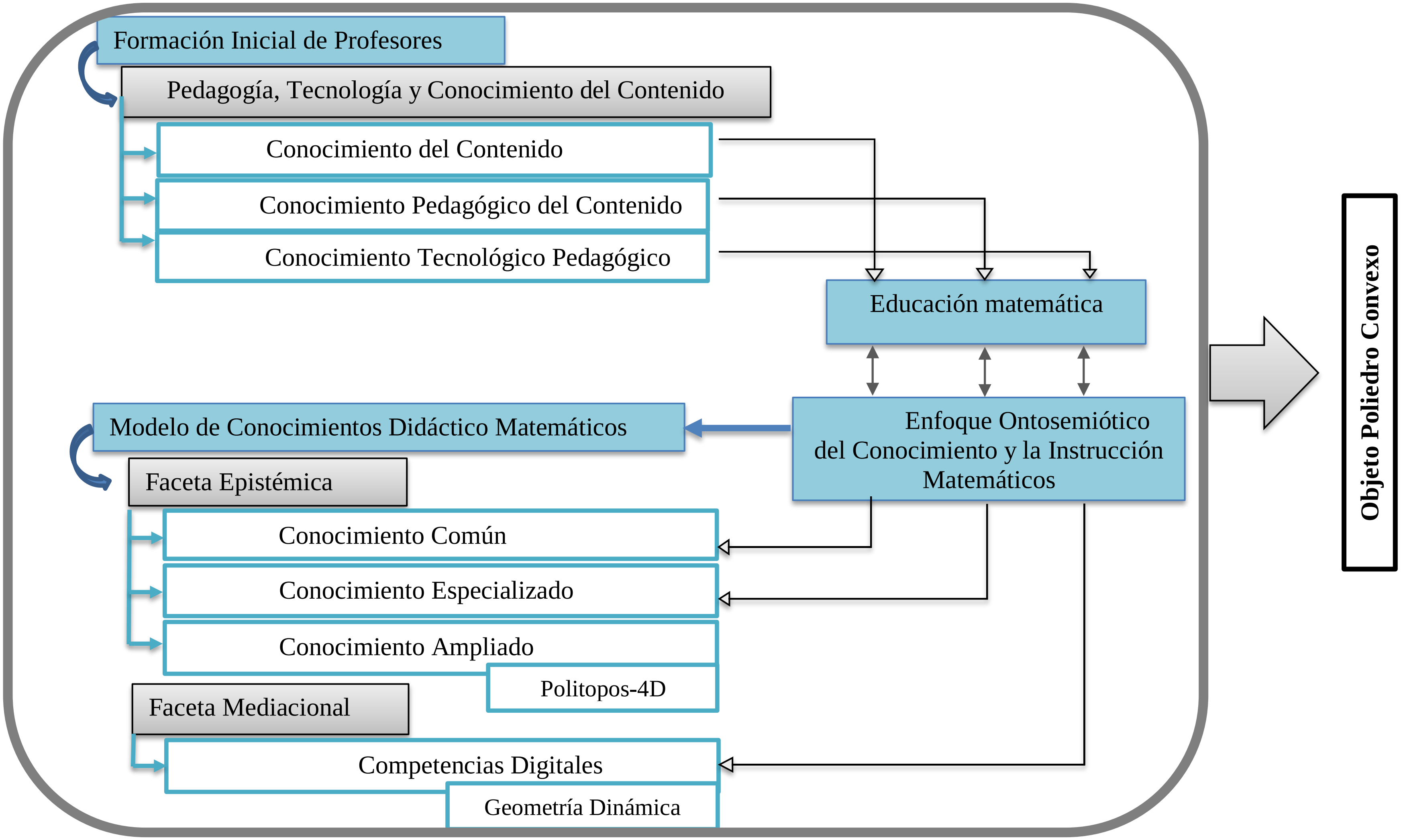
A continuación, se describe el significado de competencia digital según la Oficina de Innovación Educativa con uso de Nuevas Tecnologías del MEN (2013a), así como la descripción de éstas. Además, como referente internacional se plasman las competencias digitales que propone el Instituto Internacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado de España (INTEF, 2017) por su avance significativo y cantidad de investigaciones en el tema.

También se consideran características de la Geometría Dinámica y se estudian las generalidades acerca de AVA, ya que es importante conocer su metodología, mecanismos y fines para entender el desarrollo de competencias de los estudiantes de Licenciatura por medio de su implementación.

Finalmente, se realiza el estudio del objeto poliedro convexo para figuras regulares, semirregulares e irregulares; además de estudiar estos cuerpos tridimensionales, también se describirán los objetos poliedros en la cuarta dimensión conocidos como Politopos-4D.

Figura 1

Esquema del Marco Teórico



Fuente: elaboración propia.

Formación Inicial de Licenciados en Matemáticas

A nivel nacional se encuentra el documento *Sistema colombiano de formación de educadores y lineamientos de política* (Ministerio de Educación Nacional, 2013b), en donde se sustenta que la formación es sinónimo del desarrollo y proyección profesional del profesor, el cual debe asumir una postura crítica ante el sistema educativo.

Hoy en día, la labor que desempeña el profesor tiene un significado diferente a la "perspectiva tradicional", esto es consecuencia del rápido y práctico acceso a la información que ofrecen los recursos digitales; el profesor ya no es la base de datos o el único sujeto que posee todo el conocimiento, el rol del profesor se ha convertido en el de mediador social (Valero y Skovsmose, 2017), orientador para la adquisición del conocimiento especializado y también un planeador y generador de ambientes de enseñanza y de aprendizaje (Ministerio de Educación Nacional, 2013a).

En consecuencia, el estudiante en formación inicial se nutre de bases pedagógicas y didácticas para desempeñarse en su futura labor docente atendiendo a condiciones históricas, culturales y de contexto ante diversas poblaciones, también es importante que tenga conocimiento en el uso de las TIC con el fin de diseñar, aplicar y evaluar herramientas educativas (Ministerio de Educación Nacional, 2013a).

Desde un punto de vista más específico, Jiménez (2019) afirma que el programa académico Licenciatura en Matemáticas ofrecido por la UPTC, no sólo se caracteriza por ser el más antiguo a nivel nacional, sino también por mantener una constante actualización en cuanto a la formación de Licenciados desde avances teóricos que emergen en diversas investigaciones.

De acuerdo con Ball et al. (2008), algunas de las problemáticas que se investigan son ¿Qué se necesita para saber enseñar? ¿Qué requiere una enseñanza eficaz? ¿Qué se debe hacer al enseñar matemática? ¿Cómo debe ser el aprendizaje? y ¿Cómo mejorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje?

Al respecto, ha tomado bastante fuerza la propuesta de Shulman (1992, citado por Jiménez et al., 2011) donde manifiesta que el conocimiento del profesor debe ir más allá del contenido matemático y contemplar además, el conocimiento curricular y el concerniente a la didáctica y la pedagogía del contenido a enseñar.

En concordancia, en el *Modelo pedagógico gradual investigativo* que coordina el programa académico en mención, se tienen tres momentos en la formación inicial de licenciados. El primer momento, de ubicación cuyo énfasis es el desarrollo personal y la contextualización del estudiante dentro de la perspectiva del *ser docente*, el segundo momento, de fundamentación con enfoque crítico donde el estudiante construye bases sólidas respecto al pensamiento matemático y también asume una perspectiva de su futuro desarrollo profesional desde bases pedagógicas y didácticas, y el tercer momento, de profundización con énfasis en la investigación desde la problematización de la práctica, del entorno educativo y de las matemáticas en sí (Jiménez et al., 2011).

Jiménez et al. (2011) manifiestan que uno de los componentes que conforman este modelo es el *contenido*, el cual se asume como un objeto que emerge de la comprensión, reflexión, generación de conjeturas y la institucionalización de saberes. En lo que respecta al contenido geométrico, éste se ha incluido en la mayoría de los currículos que se han implementado para la Licenciatura en Matemáticas a lo largo de su historia (Jiménez, 2019).

Investigaciones como las de Bolea et al. (2008) y Sgreccia et al. (2006) suscitan la necesidad de problematizar el conocimiento geométrico de licenciados, esto en vista de la evidencia de que algunos estudiantes para profesor asumen la geometría como la memorización de objetos y también por la existencia de vacíos, como por ejemplo, el reconocer un concepto de altura únicamente como una medida dejando de lado su representación gráfica. Además, de que los estudiantes reconocen los objetos geométricos desde representaciones típicas y estáticas, de tal manera que si estos cambian de alguna forma, ya no los reconocerían, y también desconocen materiales para su enseñanza, entre otras razones.

Estas dificultades que presentan algunos estudiantes de Licenciatura repercutirán en su futuro desarrollo profesional, pues son resultado de sus concepciones acerca de la naturaleza de las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de las mismas (Leguizamón et al., 2020); y por otro lado, estas concepciones también afectarán la elección de los medios educativos (Leguizamón et al., 2015).

Marco de Conocimientos Pedagógicos y Tecnológicos del Contenido (TPACK)

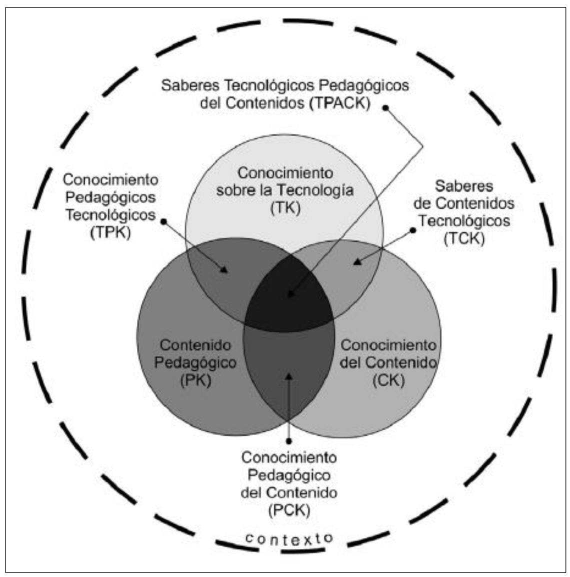
De acuerdo con Mishra y Koehler (2006), a lo largo de la historia, las investigaciones referentes al conocimiento que debe tener un docente se han basado en el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) propuesto por Shulman (2019); sin embargo, con el acceso a las tecnologías digitales en el ámbito educativo, surgió la necesidad estudiar los saberes tecnológicos y pedagógicos del contenido que se imparten en el aula.

La enseñanza se toma como la interacción entre el conocimiento del profesor y la manera en que logra aplicarlo en contextos únicos de su clase; sin embargo, la ejecución de la enseñanza con la tecnología genera dificultades para el docente, en respuesta a esta dificultad se propuso el marco TPACK, cuyo objetivo es describir cómo los saberes profesionales articulados con la tecnología son integrados en la práctica (Koehler et al., 2015).

Koehler et al. (2015) manifiestan que las tres vertientes que constituyen el conocimiento para el Marco TPACK son el *contenido* entendido como los conceptos, teorías, ideas y marcos organizativos profundos y fundamentales que ha construido el docente sobre la disciplina; la *pedagogía* que se refiere a los procesos, prácticas o métodos de enseñanza y de aprendizaje que el profesor ha logrado identificar en el ambiente educativo; y la *tecnología* que permite a la persona desarrollar gran variedad de tareas por medio del uso de las tecnologías de la información. Una característica fundamental de este marco, es que expone estos conocimientos aisladamente y también la relación que existe entre ellos (Figura 2) (Mishra y Koehler, 2006):

Figura 2

Conocimiento Pedagógico Tecnológico del Contenido



Fuente: Koehler et al. (2015).

De acuerdo con Mishra y Koehler (2006), los conocimientos descritos anteriormente se relacionan constituyendo: el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) entendiéndolo como la transformación del contenido disciplinar para su enseñanza, es necesario que el docente encuentre múltiples formas de representarlo, que adapte materiales de aprendizaje y que conozca los conocimientos previos del estudiante; el Conocimiento del Contenido Tecnológico (TCK) que es el reconocimiento de las representaciones de determinado contenido que se pueden observar con el uso de la tecnología; el Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK) que busca comprender cómo se afectan los procesos de enseñanza y de aprendizaje con la implementación de tecnologías específicas, es decir, analizar las limitaciones y posibilidades en función del contexto con el fin de mejorar la comprensión de los estudiantes; y finalmente, se conforma el Conocimiento Pedagógico Tecnológico del Contenido (TPACK), el cual requiere la identificación de las representaciones de los conceptos a partir del uso de la tecnología, y así mismo, es la reflexión acerca de qué hace que un concepto sea fácil o difícil y cómo la tecnología puede ayudar a los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Este marco permite describir la relación entre saberes profesionales y saberes tecnológicos en pro de la mejora de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, desde allí se fundamentan los conocimientos del contenido, pedagógicos del contenido y tecnológico pedagógicos, los cuales se pueden aplicar al interior de la educación matemática por medio de su correlación respectiva con el *conocimiento común*, el *conocimiento especializado* (faceta epistémica - EOS) y las competencias digitales (faceta mediacional - EOS) de los futuros profesores de matemáticas (Grisales, 2018; Koehler et al., 2015).

Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS)

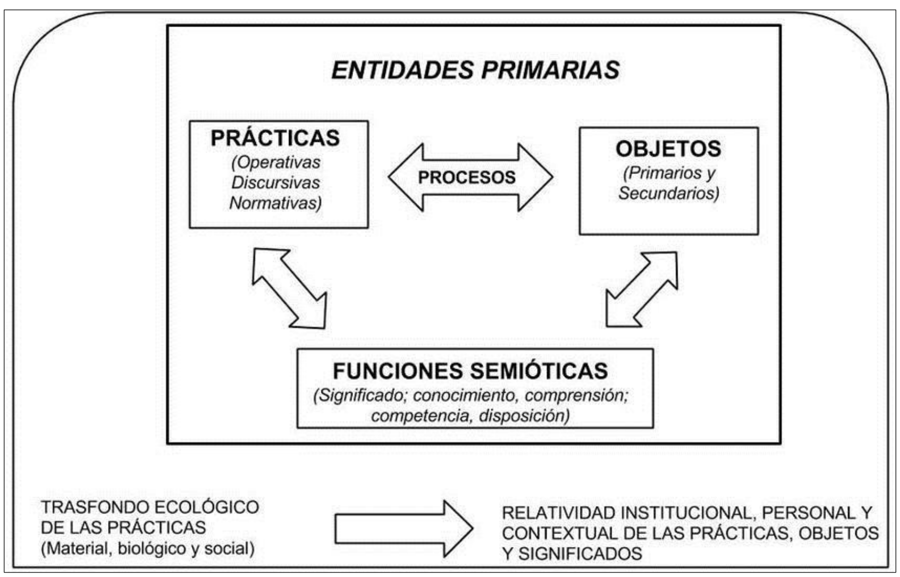
De acuerdo con Godino (2014), este enfoque armoniza algunas teorías concernientes a la educación matemática desde los modelos: epistemológico (bases antropológicas y socioculturales), de cognición humana (basado en la semiótica), instruccional (basado en el socio-constructivismo) y sistémico–ecológico, consolidando así un enfoque que surge desde la didáctica de la matemática.

Este enfoque propone una configuración de la relación que existe entre las acciones, el conocimiento y los procesos que emergen en la enseñanza y en el aprendizaje, de tal manera que describe la *práctica matemática* como la acción o expresión que una persona realiza para resolver problemas, comunicar su solución y generalizarla a otros contextos (Godino, 2018b, 2018a; Godino & Batanero, 1994).

La *práctica matemática* interactúa con los *objetos matemáticos* (conceptos, proposiciones, argumentos, procedimientos, lenguajes y situaciones problemáticas) por medio de la ejecución de *procesos*, ya sean de naturaleza matemática (comunicar, problematizar, definir, enunciar, realizar procedimientos como algoritmización, rutinización y argumentación) o de naturaleza cognitiva - epistémica (institucionalización - personalización; generalización - particularización; análisis/descomposición - síntesis/reificación; materialización/concreción - idealización/abstracción; expresión/representación - significación); de acuerdo a estos supuestos teóricos los autores de este enfoque han llegado a proponer la siguiente configuración (Figura 3) (Godino, 2018; Godino y Batanero, 1994):

Figura 3

Entidades Primarias de la Ontología y Epistemología EOS

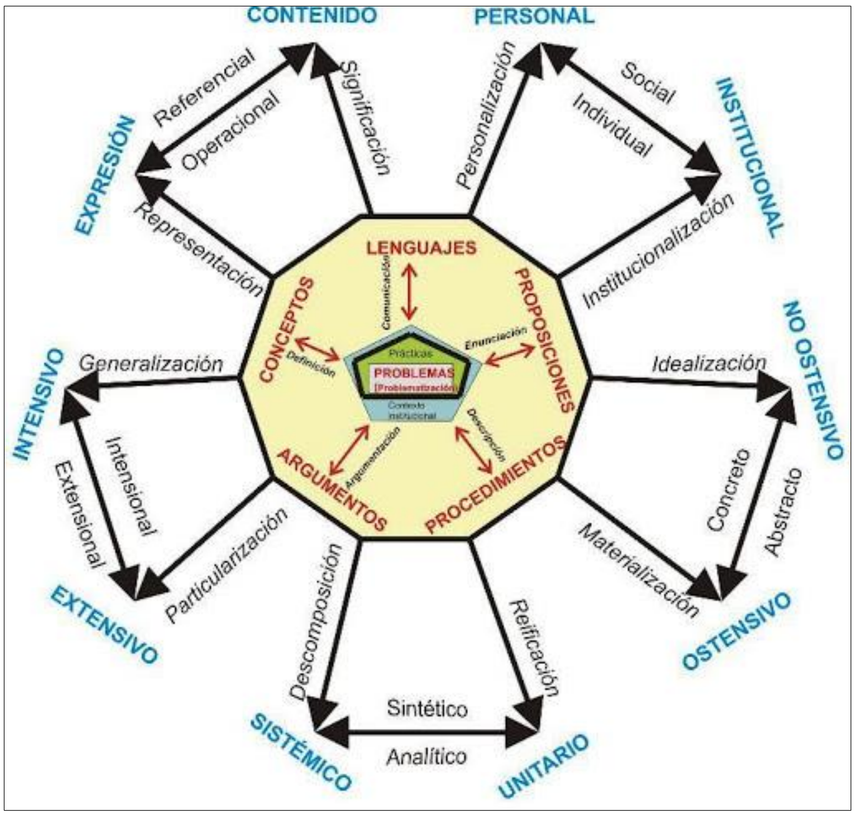


Fuente: Godino (2014).

En este sentido, la *comprensión* se aborda desde el concepto de competencia más que desde el de proceso mental; es decir, un sujeto comprende un objeto matemático cuando lo aplica eficazmente en diferentes prácticas. Con el fin de describir las prácticas matemáticas activadas en la resolución de *situaciones problemáticas* el enfoque EOS ha implementado la *configuración de objetos y procesos* activados en estas, como se muestra en la Figura 4 (Godino et al., 2012).

Figura 4

Configuración de Objetos y Procesos



Fuente: Godino (2009).

De acuerdo con Godino y Batanero (1994), desde la interacción entre *prácticas*, *procesos* y *objetos*, se consolida el conocimiento, la comprensión o la *significación*, lo cual hace referencia a la conformación de funciones semióticas, que se entienden como la relación entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) basado en un criterio específico; de esta manera, los significados institucionales son los sistemas de prácticas que se comparten en una comunidad en un momento dado (Figura 5).

Figura 5

Significados Sistémicos

Fuente: Godino (2014).

En concordancia, el sistema de acciones realizadas por los profesores y estudiantes para estudiar la resolución de situaciones problemáticas que promuevan un significado de determinado concepto, haciendo uso de recursos y del contexto fijado se conoce como una *configuración didáctica*. La secuencia de estas configuraciones didácticas, que se diseñan mediante una muestra representativa de situaciones problemáticas referentes al objeto interviniente y que buscan que el estudiante se apropie progresivamente de los significados, conforma una *trayectoria didáctica* (Godino, 2018a). Cada una de estas configuraciones está constituida por diversos momentos y elementos como se muestra en la Figura 6.

Figura 6

Dinámica de una Configuración Didáctica

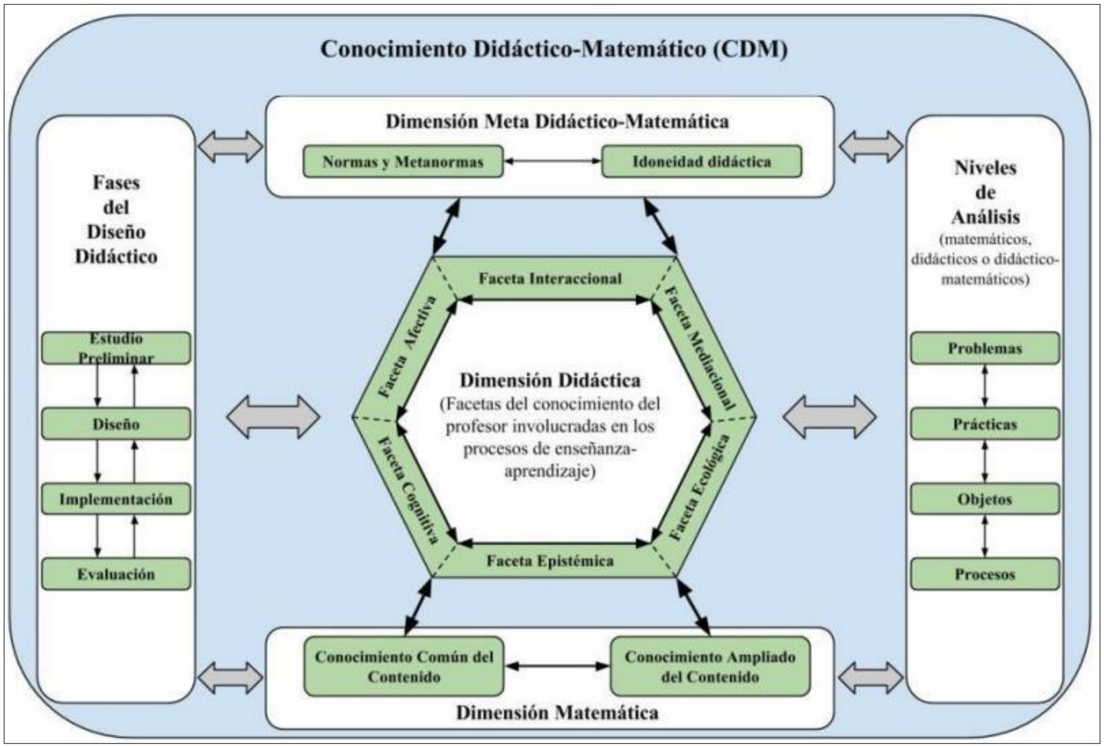
Fuente: Godino (2018a).

Modelo de Conocimiento Didáctico Matemático del Profesor (CDM)

Este modelo nace desde las bases teóricas del EOS, con el fin de sustentar una interpretación y caracterización de los conocimientos del profesor a través de las dimensiones *matemática* (conocimiento común y ampliado del contenido); *didáctica* (conocimiento especializado desde las facetas del conocimiento del profesor); y *meta-didáctico-matemática* (comprende la identificación de normas y la reflexión de la práctica por medio de la herramienta idoneidad didáctica) como se muestra en la Figura 7 (Godino et al., 2017; Pino-Fan y Godino, 2015).

Figura 7

Componentes del Modelo de Conocimientos Didáctico Matemáticos del Profesor



Fuente: Pino-Fan y Godino (2015).

De acuerdo con Godino (2009), desde el modelo CDM, el docente debe tener conocimiento matemático enfocado a su enseñanza y también debe tener la competencia de transformarlo para ser difundido y comunicado en los diferentes niveles de la educación escolar.

El conocimiento del contenido matemático y didáctico es el que permite a los profesores resolver problemas o tareas matemáticas correspondientes al nivel educativo en que imparte clase y también vincular los objetos matemáticos de dicho nivel con los que se estudiarán en niveles posteriores (Godino, 2009).

Pino-Fan y Godino (2015) describen que desde este modelo se proponen seis facetas o componentes del conocimiento pedagógico del contenido del profesor, estas son, *epistémica* que hace referencia al conocimiento profundo y amplio de las matemáticas, además, del conocimiento de los componentes del contenido, tales como problemas, representaciones, argumentos, estrategias de resolución, propiedades y significados de objetos matemáticos; *cognitiva* que es el conocimiento de los aspectos cognitivos de los estudiantes; *afectiva* que alude al conocimiento sobre aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes con respecto al proceso de estudio; *interaccional* que se refiere al conocimiento sobre las interacciones que surgen dentro del aula y de las negociaciones de significados; *mediacional* que alude al conocimiento de los medios y recursos que pueden potenciar el aprendizaje de los estudiantes y los tiempos destinados para la enseñanza; y *ecológica* que es el conocimiento sobre los aspectos curriculares, sociales, políticos, económicos que influyen en los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Teniendo en cuenta lo anterior, en el caso del presente estudio se pretende realizar un análisis con especial énfasis en la *faceta epistémica* desde la conformación de los *conocimientos común, especializado y ampliado* respecto al aprendizaje del objeto poliedro convexo, y por otro lado, en la *faceta mediacional* que va encaminada al desarrollo de competencias digitales teniendo en cuenta el contexto de los estudiantes de Licenciatura (Godino, 2009).

Faceta Epistémica en el Conocimiento del Objeto Poliedro Convexo

La *faceta epistémica* se aborda desde un punto de vista antropológico y semiótico, es decir, que el conocimiento se concibe como la “actividad humana que adquiere significado mediante la acción de las personas ante situaciones problemáticas específicas” (Godino, 2009, p. 21; Godino et al., 2017).

De acuerdo con Gonzato et al. (2011), el conocimiento del contenido conlleva al desarrollo de la *faceta epistémica* y posee tres componentes, *conocimiento común*, *conocimiento especializado* y *conocimiento ampliado*. El primero es el conocimiento aplicado en la resolución de problemas matemáticos; el segundo es la representación y explicación de ideas, reglas y procedimientos matemáticos; y el tercero es la capacidad de relacionar el contenido actual con ideas matemáticas más avanzadas.

El Conocimiento Común del Contenido. Es el conocimiento aplicado en la resolución de problemas matemáticos (Pino-Fan y Godino, 2015); en el Anexo 1 se presenta una referencia de este conocimiento, estos son los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 2006) referentes al objeto poliedro convexo que el estudiante de Licenciatura seguramente deberá enseñar en los niveles de la educación básica (primaria cinco grados y secundaria cuatro grados) y de la educación media (dos grados).

El Conocimiento Especializado del Contenido. Es la organización de secuencias con que se podrían desarrollar diferentes tareas (Godino, 2009); en este sentido, se espera que el estudiante desarrolle la competencia de crear ambientes de aprendizaje que impliquen la comprensión del objeto poliedro convexo a partir de diversos registros de representación semiótica, procedimientos, significados y la vinculación con conocimientos previos y posteriores al objeto matemático en mención.

Para fomentar el desarrollo del conocimiento especializado de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, se toman como referentes curriculares las perspectivas actualmente establecidas por el MEN consagradas en los documentos *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (1998) y los *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 2006); a partir de éstos, se busca que los estudiantes identifiquen los procesos de aprendizaje, el contexto y los tipos de pensamiento matemático, así como la manera en que se pueden aplicar o fomentar, para niveles educativos específicos (entre la educación básica: primaria, secundaria y media), referentes al objeto poliedro convexo, por medio ambientes de Geometría Dinámica.

El Conocimiento Ampliado del Contenido. Fomenta la relación del objeto matemático con ideas matemáticas más avanzadas (Gonzato et al., 2011), se propone que los estudiantes tengan conocimiento en cuanto al objeto *politopo* con el fin de que ellos realicen la generalización de los objetos geométricos de una, dos, tres y cuatro dimensiones, a conjuntos convexos que pertenecen al espacio euclidiano n-dimensional.

Faceta Mediacional en la Competencia Digital del Estudiante de Licenciatura en Matemáticas

Esta hace referencia al conocimiento de los medios y recursos que pueden potenciar el aprendizaje de los estudiantes y los tiempos destinados para la enseñanza (Godino, 2009).

Al respecto, Godino (2011) afirma que las calculadoras, software de Geometría Dinámica, aplicaciones, hojas de cálculo y dispositivos de presentación interactiva, son ingredientes fundamentales para una educación matemática de alta calidad.

Para lograr que las herramientas tecnológicas, involucradas en los procesos de enseñanza y de aprendizaje del área de matemáticas, fomenten la motivación y el aprendizaje significativo, es necesario diseñar, implementar y evaluar entornos virtuales de aprendizaje enmarcados en lo disciplinar (contenido), lo pedagógico y lo técnico (funcional) (Grisales, 2018).

Según Godino (2011) “el uso de recursos tecnológicos induce cambios positivos en el contenido de enseñanza, en los modos de interacción, motivación y en el aprendizaje de los estudiantes” (p. 13).

Competencias Digitales para profesores. Los avances tecnológicos que se han implementado en Colombia, han implicado cambios tanto sociales como culturales, por supuesto, la educación no puede ignorar estos avances.

Según Mesa (2012) la instalación de computadores comenzó para la educación superior en los años 1966 y 1967 y a medida que evolucionaba la infraestructura de los computadores, los centros educativos de este nivel tomaron el reto de introducir la tecnología en todos sus ámbitos; en consecuencia, en 2008 se publicaron los lineamientos para la formulación de planes estratégicos de incorporación de TIC en instituciones de educación superior.

De acuerdo con Mesa (2012), los años 90, se caracterizaron por el aumento de personas con acceso a computadores y por la llegada del internet. Lo cual impulsó el surgimiento de grupos de investigación para el estudio del uso de la tecnología en la educación.

Con la llegada del internet, se estableció en la ley 115 de 1994 la materia de *Tecnología e Informática* en Nivel de Básica, impulsando así la alfabetización informática desde edades tempranas (Congreso de la República de Colombia, 1994).

En este sentido, algunas de las propuestas para el sector educativo público en 2008 fueron integrar las TIC en los procesos pedagógicos de profesores y estudiantes; el uso intensivo de estas tecnologías en el proceso de aprendizaje; y contar con docentes formados en competencias para el uso pedagógico de las TIC (Consejo Nacional de Política Económica y Social, 2008).

En concordancia, se beneficiaron a más de 19.000 instituciones educativas (a nivel de básica, media y media técnica) con el suministro de 250.000 computadores durante el periodo 2002-2010, se pasó de tener un computador para 142 estudiantes a contar con un computador para 21 estudiantes. También, gracias al programa Compartel se pasó de tener 4.925 instituciones educativas (a nivel de básica, media y media técnica) con conexión de banda ancha en 2006, a 27.246 instituciones en 2010 (Consejo Nacional de Política Económica y Social, 2010).

El tener infraestructura tecnológica en las instituciones educativas también implicó el desarrollo de competencias digitales o competencias TIC por parte de los docentes. En el Plan Nacional Decenal de Educación 2006-2016 una de las propuestas fue transformar la formación de profesores y directivos para el uso apropiado de las TIC. Como plan de acción se consideró generar políticas, basadas en la noción de competencia, para obtener un nivel óptimo en los conocimientos y competencias en TIC de los profesores (Ministerio de Educación Nacional, 2007).

En consecuencia, en 2013 se consolidó el documento *Competencias TIC para el Desarrollo Profesional Docente*, allí se contemplan cinco competencias específicas TIC: tecnológica, comunicativa, pedagógica, de gestión e investigativa (Ministerio de Educación Nacional, 2013a).

Hoy en día, las metas en educación se plasman en el Plan Nacional Decenal de Educación 2016- 2026, y en ellas se traza como sexto desafío el "impulsar el uso pertinente, pedagógico y generalizado de las nuevas y diversas tecnologías para apoyar la enseñanza, la construcción de conocimiento, el aprendizaje, la investigación y la innovación, fortaleciendo el desarrollo para la vida" (Ministerio de Educación Nacional, 2017, p. 52).

De acuerdo con el MEN (2017), también se proponen lineamientos estratégicos como garantizar la formación en el uso educativo de las TIC en los programas académicos de licenciatura; motivar la práctica docente para usar las TIC en procesos de renovación curricular, de enseñanza y de aprendizaje; y crear e implementar contenidos educativos digitales con el fin de fortalecer la práctica pedagógica y el aprendizaje de los estudiantes.

En concordancia, con esta investigación se busca avanzar en una fundamentación de competencias digitales específicamente para profesores de matemáticas en formación, de tal forma que se le brinde la oportunidad al futuro profesor de aprovechar la infraestructura tecnológica cuando exista en el entorno educativo, y evitar la desmotivación por el supuesto que aún falta una implementación eficaz de este tipo de recursos en las instituciones colombianas, pues esto generaría un vacío en la formación del licenciado del siglo XXI.

Competencias Digitales para Profesores según el MEN. Desde lineamientos nacionales se define competencia como:

> […] conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores. (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 49).

De acuerdo con el MEN (2013a), se proponen cinco competencias TIC que deben desarrollar los docentes, las cuales se desarrollan en tres momentos o niveles. El primero es de exploración (N1), allí el docente se familiariza con las posibilidades de las TIC, las introduce en algunas de sus labores y reflexiona sobre las posibles implicaciones en sus necesidades y en su contexto. El segundo es de integración (N2), el docente utiliza las TIC para aprender de manera no presencial, las integra en el diseño curricular y entiende las implicaciones sociales de utilizarlas en procesos educativos. El tercero es de innovación (N3), el docente usa las TIC para crear y construir nuevos conocimientos y estrategias novedosas para configurar su práctica educativa; en el Anexo 2 se muestran estos niveles por cada competencia digital.

A continuación se describe otra forma de categorizar las competencias digitales para profesores desde un referente internacional, cuya investigación en el tema es amplia, significativa y está basado en el Marco Común Europeo.

Competencias Digitales para profesores a nivel internacional. El *Marco Común de Competencia Digital Docente* presentado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de España, tiene por objetivo posibilitar a los docentes el conocimiento, desarrollo y evaluación de la competencia digital (INTEF, 2017).

Desde este marco, se entiende por competencia digital al uso creativo, crítico y seguro de las tecnologías para el trabajo, el aprendizaje, el tiempo libre y la comunicación, basándose en habilidades TIC básicas como el uso de computadores para evaluar, producir e intercambiar información y para participar en redes de colaboración a través de internet (Council, 2006); a continuación se describen las diferentes áreas de competencia digital:

Información y alfabetización informacional, que es la organización, examen y evaluación de información digital; *comunicación y colaboración*, en la cual se comunica, comparte recursos e interactúa a través de herramientas en línea en comunidades, redes y entornos digitales; *creación de contenido digital*, donde se realizan creaciones artísticas, contenidos multimedia y programación informática, respetando el reglamento de propiedad intelectual; *seguridad,* que busca la protección de datos e identidad digital; y la *resolución de problemas* a través de medios digitales, identifica necesidades y toma decisiones para elegir la herramienta digital apropiada (INTEF, 2017).

Geometría Dinámica

De acuerdo con Camargo y Acosta (2012), la geometría posee diferentes dimensiones generadas por la conexión con otras disciplinas, por ejemplo, en su dimensión biológica aborda el sentido espacial, la percepción y la visualización, en su dimensión física busca indagar y modelar propiedades de objetos físicos, en su dimensión aplicada se desarrolla como una herramienta de representación para la interpretación de fenómenos, y en su dimensión teórica presenta resultados teóricos basados en el rigor y la abstracción; si bien en la historia se ha evidenciado una separación entre lo empírico (visualización e intuición) y lo teórico (aspectos abstractos y conceptuales), hoy en día la Geometría Dinámica elimina esta separación al presentar un equilibrio entre los procesos de visualización y justificación y al introducir a los estudiantes en lo teórico, desde la percepción.

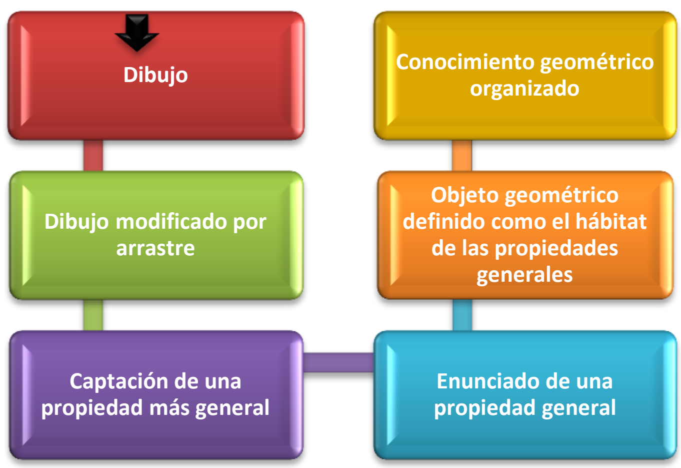
Cuando se observa un objeto físico (lapicero, planta) y se le toma una foto, ésta corresponde a una representación de dicho objeto, pero en el caso de los objetos geométricos ¿Cómo se obtiene una representación?; estos objetos no son materiales, pero sí conceptuales, que se integran y evolucionan, hasta llegar a una representación; al estudiar estas representaciones se van visualizando unas primeras propiedades que también tienen correspondencia con la intuición, pero habrán otras propiedades que no; es aquí donde la Geometría Dinámica conecta la intuición con la capacidad deductiva al hacer perceptibles las ideas más abstractas (Moreno-Armella, 2018), y también al enriquecer la representación, pues cuando se utiliza la herramienta de arrastre, la conjetura del estudiante se amplía a una familia de representaciones (Sandoval y Moreno-Armella, 2012).

Según C. Laborde y J. Laborde (1995), al aplicar la Geometría Dinámica en el aula, es prudente repensar en el significado de los objetos matemáticos, las operaciones y los comentarios que puedan surgir de la exploración; por ejemplo, la diferencia entre el concepto de dibujo y figura, donde el primero se refiere a una construcción imperfecta y estática, y el segundo alude a un subconjunto de elementos geométricos que varían en el plano (mediante el software de Geometría Dinámica), la falta de reflexión en este aspecto puede generar malentendidos entre el profesor y el alumno, siguiendo el mismo ejemplo, cuando el profesor propone una tarea éste la entiende como construcción de una figura que implica el uso de conceptos geométricos y el estudiante, en cambio, piensa que se trata de una construcción de dibujo que puede no tener en cuenta dichos conceptos y empobrecer el aprendizaje, de la misma forma cuando se le pida al estudiante demostrar alguna propiedad espacial, este se preguntará por qué no lo logra a partir del dibujo.

De acuerdo con Acosta (2005) y Moreno-Armella (2002), aunque en muchas ocasiones el estudio de la geometría se ha basado en construcciones con regla y compás, desde el trabajo con ambientes de Geometría Dinámica se aportan herramientas como el *arrastre*, que posibilita la visualización de propiedades invariantes, a las deformaciones que realizamos al objeto geométrico; también está el *rastro*, que evidencia la huella de una figura cuando se arrastra y permite analizar hechos (lugares) geométricos (propiedades generales); y la *animación*, que muestra el proceso de construcción de un hecho (lugar) geométrico, entre otras (Figura 8); en consecuencia, para su enseñanza se pueden realizar ambientes de aprendizaje basados en la exploración dinámica de conjeturas, desarrollo de conceptos basados en la exploración.

Figura 8

Ruta para la Exploración en un Ambiente de Geometría Dinámica



Fuente: adaptado de Moreno-Armella (2002).

Sin embargo, desde la perspectiva de Artigue (2011) la implementación de la Geometría Dinámica en el aula, de matemáticas, también puede generar conflictos para las formas tradicionales de usar las técnicas como el lápiz y el papel, desequilibrando el valor epistémico (naturaleza, posibilidad, alcance y fundamentos del conocimiento) y pragmático (la práctica, la ejecución o la realización de las acciones) de estas, lo cual implica que el licenciado en matemáticas vaya más allá de realizar simples adaptaciones de las tareas tradicionales, esto haciendo uso de las características anteriormente mencionadas.

Por otro lado, las herramientas digitales pueden ser utilizadas en el aula por el profesor para cumplir su tarea didáctica, y por los estudiantes para resolver las tareas asignadas. Allí cada instrumento (artefacto) utilizado va a representar un significado diferente del objeto geométrico en estudio, por ejemplo, si el estudiante dibuja una circunferencia con un compás (en medio físico o digital) o con un objeto de base redonda, el resultado puede ser el mismo. Sin embargo al realizarla con el primer instrumento, el estudiante puede interpretar nociones de centro, radio y equidistancia entre el centro y cualquier punto de la circunferencia, a diferencia de la utilización del segundo, en donde solo se centra en el movimiento circular del lápiz; así mismo, el profesor reconoce el significado del objeto geométrico que desea evidenciar y debe diseñar las situaciones problemáticas en pro de fomentarlo (Mariotti y Maffia, 2018).

En este sentido, se distinguen dos tipos de significado, el personal que surge del objetivo de lograr una tarea, y el matemático que surge de la manera en que se utilizó el artefacto (Bartolini y Mariotti, 2015).

De acuerdo con Gutiérrez (2008), vale la pena reflexionar acerca de estos cambios (entre otros) que son generados por la implementación de la Geometría Dinámica en el aula, esto debido a la gran variedad de beneficios que aporta al aprendizaje. Por ejemplo, permite visualizar, explorar, analizar, contemplar diferentes representaciones, comparar, plantear y conjeturar relaciones, propiedades, demostraciones y objetos geométricos en sí (Fiallo, 2010);

además, permiten transformar y realizar mediciones de los objetos geométricos de una manera más fácil y rápida que la que ofrecen los materiales didácticos tradicionales.

Moreno-Armella y Santos (2002), en su investigación titulada *Proceso de transformación del uso de tecnología en herramienta para solucionar problemas de matemáticas por los estudiantes*, demuestran que la aplicación del software de Geometría Dinámica permite a los estudiantes dar sentido a los conceptos o propiedades de un objeto, reflexionar sobre sus conceptos previos, formular conjeturas y argumentarlas, proponer diferentes opciones con miras a solucionar un problema y persistir en la adquisición de su conocimiento; además, demuestran el cumplimiento de una de las metas más importantes del proceso de aprendizaje de las matemáticas que es la motivación, el aprecio y la disposición por parte del estudiante frente a estas situaciones.

De lo anterior se puede apreciar que el objeto geométrico ahora posee como una nueva dimensión -el movimiento-, evidenciando una de las implicaciones de la Geometría Dinámica (Moreno-Armella y Elizondo, 2017).

Ahora, dejando abierto el camino para más reflexiones, se procede a continuar con una breve exposición de los elementos más característicos del software de Geometría Dinámica.

De acuerdo con González (2001), un primer elemento corresponde a los diagramas realizados en los sistemas de Geometría Dinámica, que parten de secuencias de objetos primitivos, con la posibilidad de ser cuasi-independientes lo que permite su transformación respecto a su construcción (allí los invariantes espaciales representan invariantes geométricos); esto lleva a una decodificación del objeto geométrico por parte del usuario (Laborde et al., 2019).

En otras palabras, estos sistemas se caracterizan por tener una pantalla digital, en la cual el usuario puede realizar construcciones geométricas a partir de la representación de objetos geométricos primitivos (puntos, rectas, segmentos, entre otros) y también a partir del registro de relaciones geométricas entre ellos (como perpendicularidad, paralelismo, entre otros); los objetos pueden ser seleccionados y arrastrados por la pantalla manteniendo las características geométricas de la construcción y permitiendo al usuario mayor visualización y argumentación de sus ideas (González, 2001).

Otro elemento es la acción de arrastre que se puede clasificar en cinco modalidades, según la finalidad de aprendizaje que se requiera, ya sea explorar, conjeturar, validar o justificar (Arzarello et al., 2002). En el *arrastre errático* se mueve un punto libre u objeto para observar regularidades de la figura; en el *arrastre obligado* se mueve un objeto que pertenece a otro, por ejemplo, un punto que pertenece a un segmento se puede mover sobre él; en el *arrastre guiado* se mueven puntos libres de una figura para darle una forma determinada, por ejemplo, se mueven los vértices de un polígono para que sea regular o irregular; en el *arrastre sobre un lugar geométrico oculto* se mueve un objeto para que cumpla determinadas propiedades, este objeto describe el lugar geométrico oculto; en *el arrastre de test* se mueven los objetos libres o semilibres para comprobar que la construcción mantenga las propiedades deseadas, es decir, que esté bien construida (Ruiz, 2012).

Según Ruiz (2012), los arrastres *erráticos*, *obligados* y *guiados* se usan en la fase de descubrimiento, el arrastre sobre lugar geométrico oculto se usa en la fase de conjetura y el arrastre de test se usa para validar la conjetura.

Finalmente, un tercer elemento es la práctica matemática que se realice; González (2001), describe cuatro actividades estándar que se pueden llevar a cabo con los sistemas de Geometría Dinámica, *objetos geométricos,* que existen cuando se propone al alumno realizar la construcción de una figura, lo cual exige la aplicación de determinadas propiedades geométricas; *propiedades* *geométricas*, cuando el profesor propone al estudiante explorar, conjeturar y comprobar las propiedades o invariantes de una construcción geométrica; en esta acción es muy apropiado usar la herramienta de arrastre; *lugares geométricos,* cuando el profesor propone a los estudiantes solucionar problemas que impliquen mover uno de los objetos de una construcción euclidiana aplicando la herramienta de huella visual, lo cual plasma el lugar geométrico del objeto; *simulación*, cuando el profesor propone a los estudiantes incluir en la construcción herramientas de animación y arrastre, estas acciones permiten simular el funcionamiento de diversos mecanismos físicos o matemáticos. Algunas aplicaciones informáticas que apoyan el trabajo con Geometría Dinámica se incluyen y clasifican en el Anexo 3.

Ambiente Virtual de Aprendizaje (AVA)

De acuerdo con Barbosa (2004), un ambiente es el conjunto de espacios, objetivos, conocimientos y seres humanos que buscan dar solución a necesidades por medio de la relación articulada entre ellos, en este sentido, un ambiente de aprendizaje es aquella organización (cuál es su papel y cómo se relacionan entre sí) de tiempo, espacio, contenidos, interacciones, evaluación y orientaciones, enfocadas en el logro del aprendizaje, en consecuencia un AVA sigue la misma concepción incluyendo la búsqueda de un cambio significativo en los procesos de aprendizaje.

El ambiente de aprendizaje debe plasmar las concepciones de las planeaciones curriculares sobre la relación con el contexto, con el área del saber y con el enfoque pedagógico, esto con el fin de materializar los propósitos del ambiente (Barbosa, 2004).

Elementos de un ambiente virtual de aprendizaje. El *contenido* hace referencia al conocimiento producido por las comunidades académicas y a las herramientas que orientan las actividades que el estudiante realizará para construir su aprendizaje; la *interacción* es el intercambio comunicativo entre los integrantes de comunidades virtuales, personas con propósitos comunes, que trabajan cooperativamente para lograrlos y participar en tareas; la *evaluación* es un proceso interactivo que plantea la necesidad de hacer explícitos los aprendizajes, sus construcciones y sus dificultades; los *criterios* están basados en los objetivos del curso y por experiencia de cada actor en el ambiente diseñado y la *orientación* que se refiere a los elementos que contribuyen al buen funcionamiento del ambiente para administradores, docentes y estudiantes, entre otros (Barbosa, 2004).

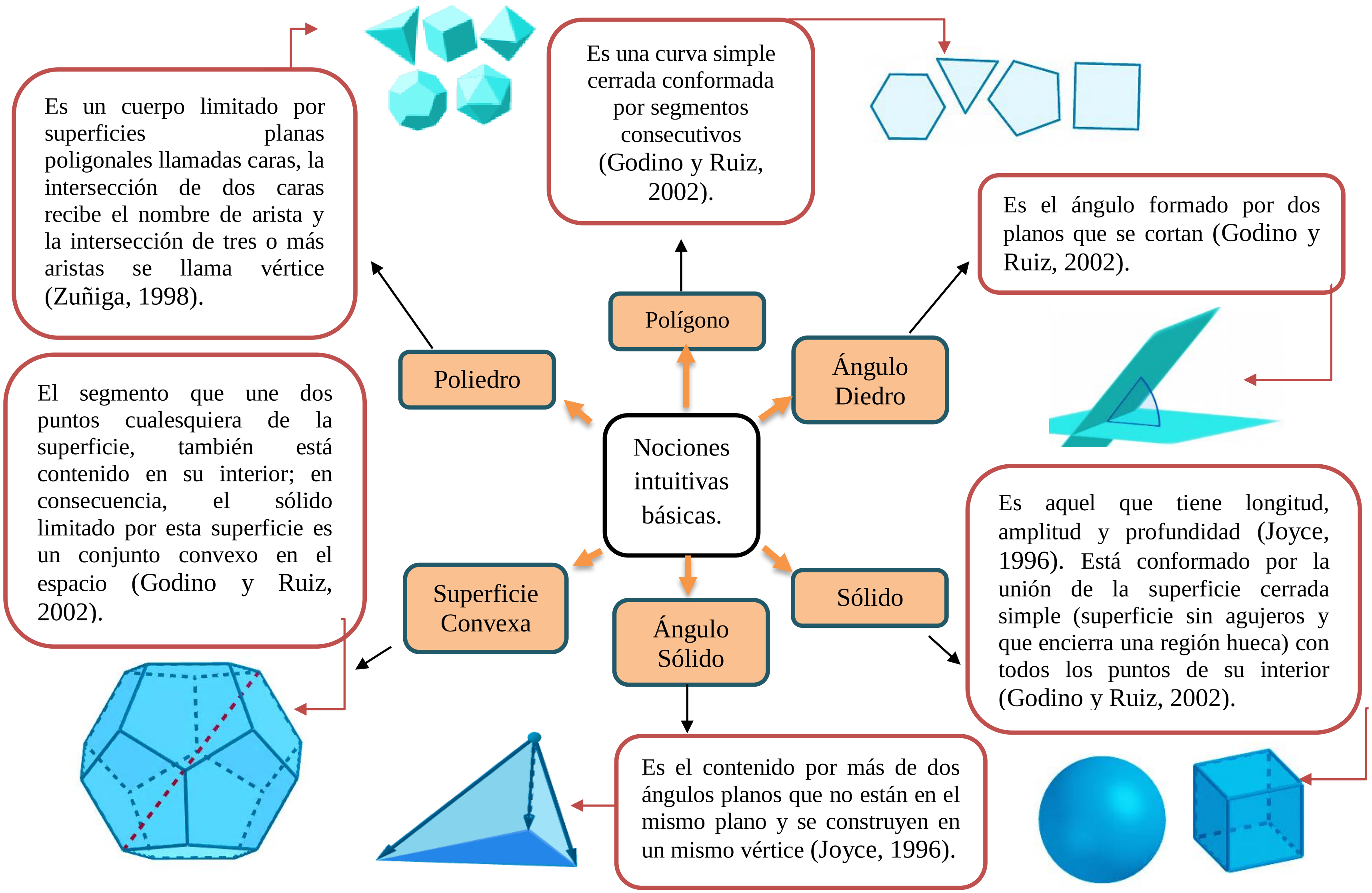
Metodología para la Elaboración de AVA. De acuerdo con Mendoza y Galvis (1999), se presentan como guía para la elaboración de AVA cuatro etapas, las cuales se deben abordar iterativamente hasta concretar un ambiente de calidad. Un *análisis* de las diferentes necesidades que implican la construcción de un AVA donde surgen preguntas como, ¿Cuáles son los objetivos?, ¿Quiénes y cómo son los aprendices?, ¿Cómo es el ambiente de trabajo de los aprendices? y ¿Cómo son los recursos tecnológicos? El *diseño* donde se toman como base los datos extraídos de la primera fase, el diseño es muy importante ya que genera beneficios como, atracción de visitantes, retención de interés del usuario y aumento de la audiencia. El *desarrollo* que es la etapa de creación del AVA en línea, requiere de mucho esfuerzo y tiempo. Y la *evaluación*, en esta etapa se debe evaluar el aprendizaje obtenido por los estudiantes y al AVA.

El Objeto Poliedro Convexo

El estudio del objeto Poliedro introduce a los estudiantes en el campo de las representaciones del espacio y fomenta la habilidad de reconocer un objeto tridimensional en una superficie bidimensional (Cañadas et al., 2003); en la Figura 9 se describen algunas de las nociones previas para el estudio de este cuerpo geométrico y en la Figura 10 se presentan características geométricas de los polígonos regulares convexos como noción previa.

Figura 9

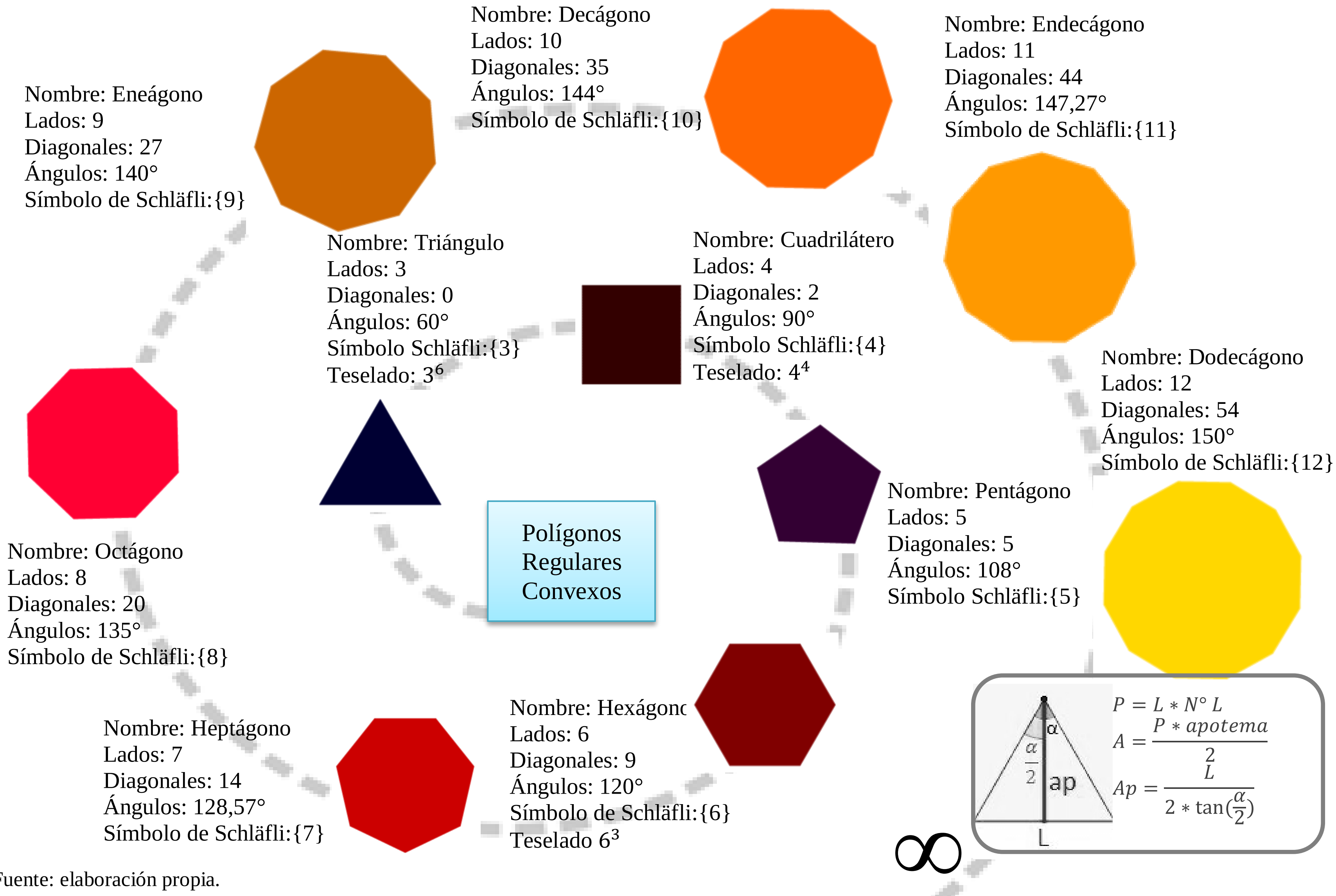
Nociones Intuitivas Básicas para el Objeto Poliedro Convexo



Fuente: elaboración propia.

Figura 10

Características de los Polígonos Regulares Convexos

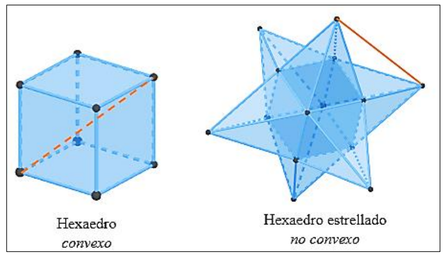


Fuente: elaboración propia.

El objeto Poliedro es un cuerpo geométrico convexo si el segmento que une dos puntos cualesquiera de su interior, queda completamente en el interior del cuerpo (Zuñiga, 1998).

Figura 11

Convexidad en Poliedros



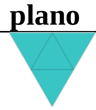
Fuente: elaboración propia.

Uno de los resultados más conocidos es el teorema de Euler-Descartes donde expresa que en cualquier Poliedro Convexo se cumple que la suma del número de vértices y el de caras es igual al número de aristas más dos (Sandoval y Lee, 2007).

Poliedro Regular. Es una superficie convexa con caras poligonales regulares congruentes, en cada uno de los vértices debe concurrir el mismo número de caras y la suma de los ángulos interiores de cada cara debe ser menor de 360°; algunas de sus características geométricas se pueden visualizar en la Tabla 1 (Godino y Ruiz, 2002).

Tabla 1

Caracterización de los Poliedros Regulares

Poliedro	**Desarrollo plano**	**V**	**C**	**A**	**Grado ángulo**	**Notación Schlȁfli**	**Área lateral**	**Volumen**
Tetraedro 		4	4	6	60°	{3,3}	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$
Hexaedro 		8	6	12	90°	{4,3}	$6a^2$	a^3
Octaedro 		6	8	12	60°	{3,4}	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$

Dodecaedro 		20	12	30	108°	{5,3}	$15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	$\frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}$
Icosaedro 		12	20	30	60°	{3,5}	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}$

Fuente: elaboración propia.

Poliedros Irregulares. Son los poliedros conformados por caras no congruentes o que no todos sus vértices son del mismo orden (Arias, 2013).

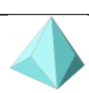
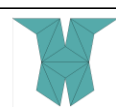
En este sentido, los poliedros conocidos como pirámides son aquellos que están conformados por una base (triangular, cuadrada, pentagonal, hexagonal, entre otras) y sus caras corresponden a triángulos con un vértice común conocido como cúspide; si la base es un polígono irregular, entonces la pirámide se clasificará como poliedro irregular (Martín, 2017).

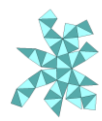
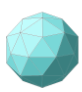
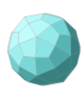
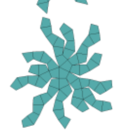
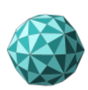
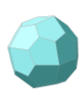
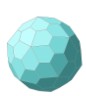
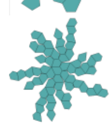
Del mismo modo, los prismas están conformados por bases poligonales congruentes y paralelas y por caras laterales que corresponden a paralelogramos; si las bases son polígonos irregulares, entonces se dice que el prisma es un poliedro irregular (Arias, 2013).

También existen los poliedros conocidos como los Sólidos de Catalan (Tabla 2), su nombre se debe al matemático Eugène Charles Catalan quien se dedicó a su estudio a mediados del siglo XIX; estos poliedros se caracterizan por ser convexos y por generarse a partir del dual de los sólidos Arquimedianos (Martín, 2017).

Tabla 2

Caracterización de los Sólidos de Catalan

Nombre	Cara poligonal	Poliedro	Desarrollo	C	A	V	Configuración de vértices	Dual
	Triángulo isósceles	Tetraedro Triakis		12	18	8	4 de orden 3; 4 de orden 6.	Tetraedro truncado
	Rombo	Dodecaedro Rómbico		12	24	14	6 de orden 4; 8 de orden 3.	Cuboctaedro

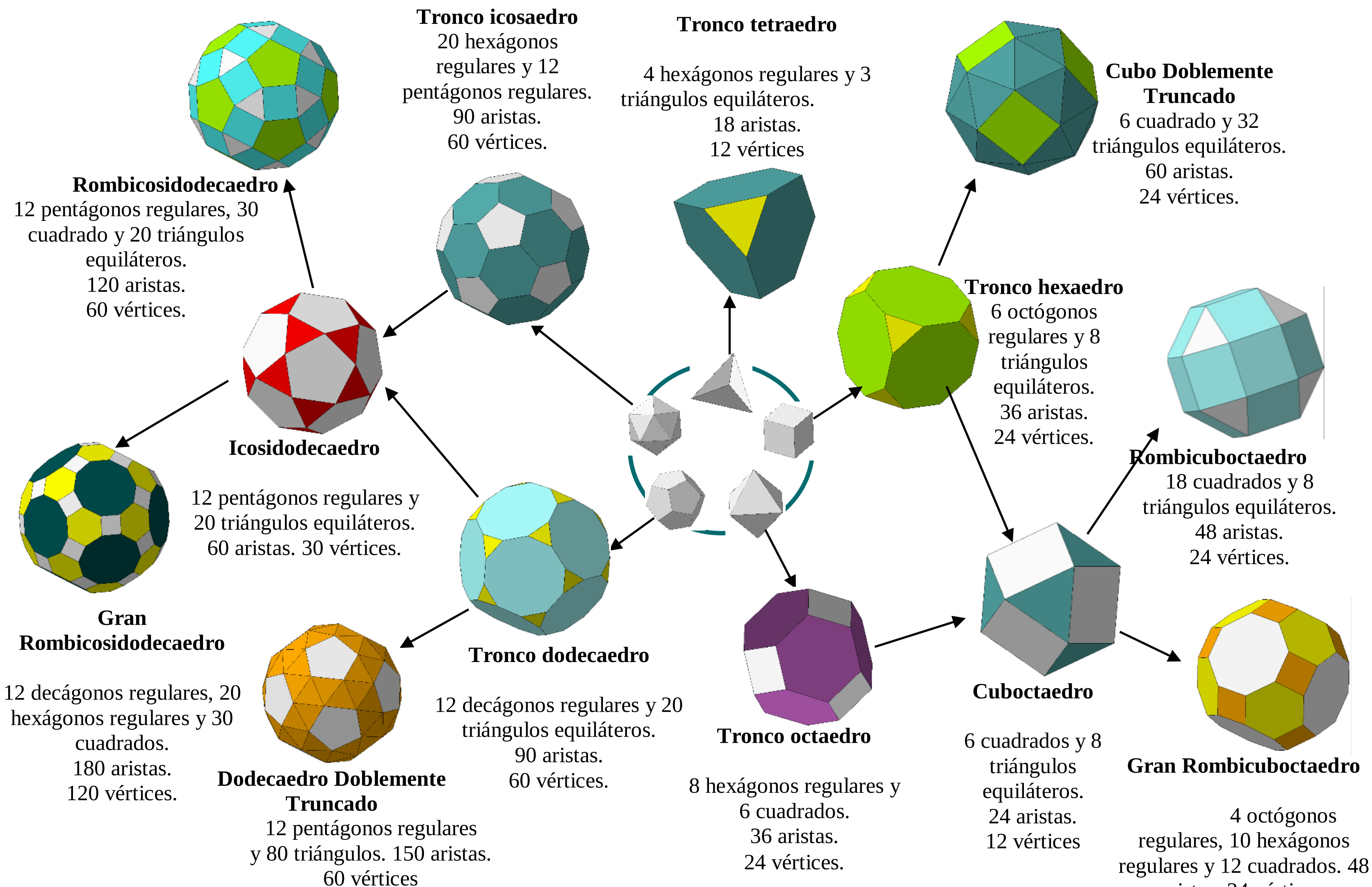
	Triángulo isósceles	Octaedro Triakis		24	36	14	6 de orden 8; 8 de orden 3.	Cubo truncado
	Triángulo isósceles	Hexaedro Tetrakis		24	36	14	8 de orden 6; 6 de orden 4.	Octaedro truncado
	Deltoides	Icositetraedro deltoidal		24	48	26	8 de orden 3; 6 de orden 4; 6 de orden 4'.	Rombi-cuboctaedro
	Triángulo escaleno	Octaedro hexakis		48	72	26	12 de orden 4; 8 de orden 6; 6 de orden 8.	Cuboctaedro truncado
	Rombo	Triacontaedro rómbico		30	60	32	20 de orden 3; 12 de orden 5.	Icosidodecaedro
	Triángulo isósceles	Icosaedro triakis		60	90	32	20 de orden 3; 12 de orden 10	Dodecaedro truncado
	Triángulo isósceles	Dodecaedro pentakis		60	90	32	20 de orden 5; 12 de orden 6	Icosaedro truncado
	Deltoides	Hexecontaedro deltoidal		60	120	62	12 de orden 5; 20 de orden 3; 30 de orden 4	Rombicosi-dodecaedro
	Triángulo escaleno	Icosaedro hexakis		120	180	62	30 de orden 6; 20 de orden 4; 12 de orden 10	Icosidodecaedro truncado
	Pentágono irregular	Icositetraedro pentagonal		24	60	38	6 de orden 4; 8 de orden 3; 24 de orden 3	Cubo romo
	Pentágono irregular	Hexecontaedro pentagonal		60	150	92	20 de orden 3; 60 de orden 3; 12 de orden 5	Icosidodecaedro romo

Fuente: elaboración propia.

Poliedro Semirregular. Son poliedros con caras poligonales regulares con aristas y ángulos sólidos congruentes, sin embargo, no poseen la igualdad entre sus caras, estas pueden ser de dos o tres formas diferentes (Zuñiga, 1998). Una forma de construirlos es por medio del truncamiento de los sólidos regulares o de otros sólidos semirregulares ya construidos (Figura 12) (Godino y Ruiz, 2002).

Figura 12

Poliedros Semirregulares

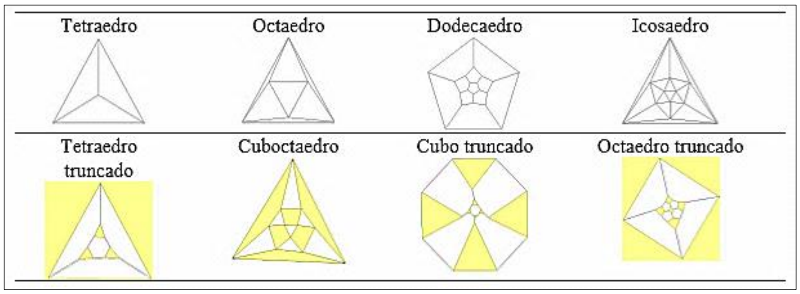


Fuente: elaboración propia.

Proyección de Schlegel. Es una proyección de un poliedro sobre un plano; el proceso de esta construcción se puede realizar eligiendo una cara y proyectando los lados del poliedro desde un punto O por encima del centro de esta cara (Figura 13) (Valdivieso y Carrera, 2006).

Figura 13

Diagrama de Schlegel de Algunos Poliedros Convexos

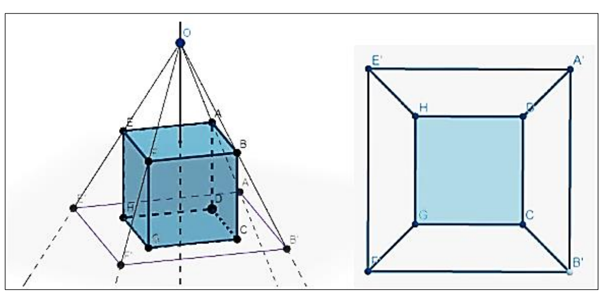


Fuente: adaptado de Valdivieso y Carrera (2006).

Por ejemplo, para realizar el diagrama de Schlegel del hexaedro se debe elegir una cara ABCD, trazar una perpendicular a esta cara que pase por su punto medio, ubicar un punto O a una altura h sobre la cara seleccionada, proyectar semirrectas con origen en O que pasen por los vértices A, B, C, D e intersequen con el plano en el cual se ubica la cara HDCG, opuesta a la cara ABCD, estas intersecciones serán A’, B’, C’, D’, se proyectarán las caras laterales de tal forma que la cara FBCG corresponderá en el plano con el polígono CB’F’G y así sucesivamente, con el resto de las caras (Valdivieso y Carrera, 2006) (Figura 14).

Figura 14

Diagrama de Schlegel del Hexaedro



Fuente: adaptado de Valdivieso y Carrera (2006).

El Objeto Politopo

El término politopo fue estudiado inicialmente por Alicia Boole Scott (1860-1940), quien desarrolló una capacidad de visualizar el espacio en 4-dimensiones desde el espacio tridimensional y sus representaciones bidimensionales; también construyó modelos de seis politopos regulares en la cuarta dimensión (Santos, 2000).

Espacio Euclidiano. Sea E^d el espacio euclidiano, si $x \in E^d$, entonces $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$, con $x_i \in R$; E^d está dotado de una operación denominada producto interno "•" (Sierra, 2019), el cual se define por:

$$\cdot : E^d \times E^d \rightarrow R$$
$$(x, y) \rightarrow x \cdot \mathrm{y} = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} x_i y_i$$

Politopo Convexo. Un politopo convexo P se define como la envoltura convexa de cualquier conjunto finito de puntos. Un politopo convexo P de dimensión d, será conocido como D-Politopo; por ejemplo, el 2-politopo se llama polígono convexo, el 3-politopo es el poliedro convexo y, en general, los D-politopos que pertenecen a E^d se denotan por P_d (Grünbaum y Shephard, 2007).

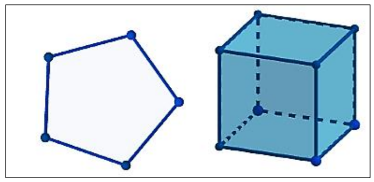
Envolvente Convexa. La envolvente convexa de *k Conv (k)* con $k \subset E^d$, es el conjunto convexo más pequeño que lo contiene (Sierra, 2019); para un conjunto finito de puntos $\{v_1 \dots, v_k\} \subset E^d$ (Rincón y Soto, 2019) está descrita por:

$$conv\{v_1 \dots, v_k\} = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \,/ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \; y \; \lambda_1 \geq 0, para\ todo\ i\}$$

Por ejemplo, se puede observar en la parte izquierda de la Figura 15, que el politopo de dos dimensiones, conocido como pentágono, está conformado por la envolvente convexa de cinco puntos en E^2; y así mismo, en la parte derecha se observa el politopo tridimensional, conocido como hexaedro, conformado por una envolvente convexa de ocho puntos en E^3 (Rincón y Soto, 2019).

Figura 15

Representación de la Envolvente Convexa del Pentágono y del Hexaedro



Fuente: elaboración propia.

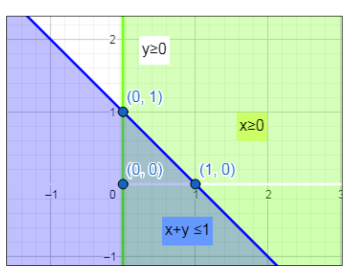
V-Politopo y H-Politopo. Un politopo es un conjunto de puntos P $\subset E^d$ que es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en E^d, el cual puede ser representado como un V-politopo o como un H-politopo; el primero es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos en un espacio E^d y el segundo, es la intersección acotada de finitos semiespacios cerrados del espacio E^d (Sierra, 2019).

Por ejemplo, en la Figura 16 se muestra un politopo de segunda dimensión conocido como triángulo, el cual se puede representar como V-politopo: P=conv {(0,0), (1,0), (0,1)} en E^2; y también se puede representar como H-politopo, es decir, como intersección de semiplanos (Rincón y Soto, 2019):

$$P = \{(x, y) \,\epsilon\, E^2 / \, x \geq 0, y \geq 0, x + y \ \leq 1\}$$

Figura 16

Representación de V-Politopo y H-Politopo



Fuente: adaptado de Rincón y Soto (2019).

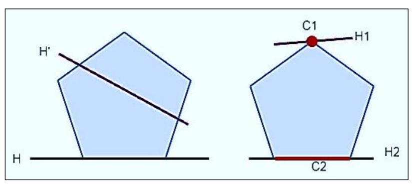
Semiespacio. Es un conjunto de la forma $H_+ = \{ x \in E^d / a \cdot x \leq b\}$ con $0 \neq a \in E^d$ y $b \in R$ (Sierra, 2019).

Hiperplano de Soporte. Para un politopo P, un hiperplano de soporte o afín será $H = \{ x \in E^d / a \cdot x = b\}$, tal que $P \cap H \neq \emptyset$ y también $P \subset H_+ = \{ x \in E^d / a \cdot x \leq b\}$ donde $a \in E^d$ y $b \in R$ (Sierra, 2019); en la Figura 17 (izquierda), H es un hiperplano de soporte para el pentágono, mientras que H' no lo es.

Cara. La cara de P será el politopo obtenido como la intersección de P con un hiperplano de soporte (Rincón y Soto, 2019); en la Figura 17 (derecha) se muestran dos hiperplanos de soporte con sus respectivas caras del pentágono.

Figura 17

Hiperplanos para un Politopo

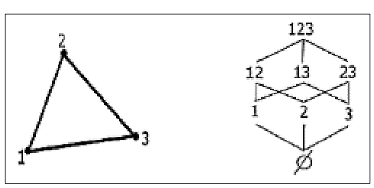


Fuente: adaptado de Rincón y Soto (2019).

F-Vector. De un politopo P el f-vector será $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_{\dim(p)})$, en donde f_n es el número de caras de las diferentes dimensiones n que conformen. Además, se tiene que el orden de caras $\mathcal{L}(P)$ de un politopo P está conformado por un poset (conjunto parcialmente ordenado) de dichas caras ordenadas por inclusión (Rincón y Soto, 2019), como se muestra en la Figura 18.

Figura 18

Orden de Caras $\mathcal{L}(P)$ de un Politopo en E^2



Fuente: Rincón y Soto (2019).

Tabla 3

Características de Politopos con Órdenes Específicos

Dimensión	Politopo	Elemento	Facetas mínimas
0	Punto	Vértice	1
1	Segmento	Arista	2
2	Polígono	Cara	3
3	Poliedro	Celda	4
4	Polícoro	Hipercelda	5
…			
i	i-Politopo	i-cara	i+1
…			
n-3	n-3-politopo	Pico	n-2
n-2	n-2-politopo	Cresta	n-1
n-1	n-1-politopo	Cara	n
N	n-Politopo	Cuerpo	n+1

Fuente: adaptado de Fernández (2015).

Politopo Hipercubo. El hipercubo C_n es un subconjunto de E^d constituido por la envolvente convexa de las diferentes coordenadas que contienen a ± 1 en sus entradas, esto es conv $\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)\} \subset E^d$ (Figura 19); en este sentido, el cuadrado es el politopo $C_2 :=$ conv $\{(1,1), (-1,1), (1,-1), (-1,-1)\}$; el cubo es el politopo:

$C_3 :=$ conv $\{(1,1,1), (-1,1,1), (-1,-1,1), (1,-1,1), (1,1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,-1), (1,-1,-1)\}$

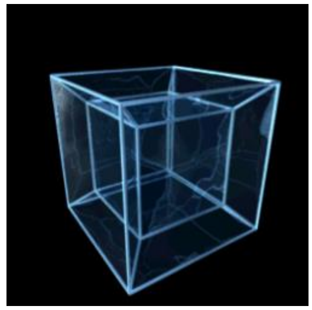
y así sucesivamente (Sierra, 2019); en la Figura 20 se representa una construcción análoga realizando una construcción desde el origen de los planos.

Para calcular los vértices (V), segmentos (S), caras planas (Ca) y cubos (Cu) con dimensión n, de los objetos pertenecientes a la familia de los hipercubos, se presentan las siguientes fórmulas (Valdivieso y Carrera, 2006):

$$V = 2^n \qquad S = n * 2^{n-1} \qquad Ca = \frac{n\,(n-1)}{2} 2^{n-2} \qquad Cu = \frac{n\,(n-1)(n-2)}{6} 2^{n-3}$$

Figura 19

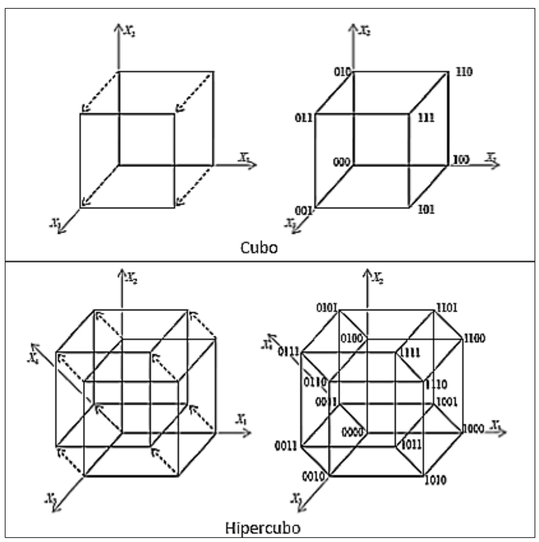
Representación Tridimensional del Politopo Hipercubo



Fuente: Hise (2019).

Figura 20

Construcción del Politopo Hipercubo



Fuente: adaptado de Cruz (2007).

Tabla 4

Caracterización del Politopo Hipercubo

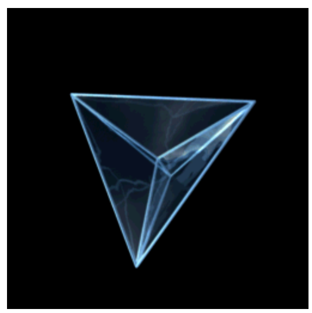
Representación	Dimensión	Lados 0D Vértices	Lados 1D Segmentos	Lados 2D caras	Lados 3D Celdas	Lados 4D
Punto	0	1	0	0	0	0
Segmento	1	2	1	0	0	0
Cuadrado	2	4	4	1	0	0
Cubo	3	8	12	6 cuadrados	1	0
Hipercubo C_4	4	16	32	24 cuadrados	8 cubos	1

Fuente: adaptado de Valdivieso y Carrera (2006).

Politopo Símplice. Un símplice Δ_n es una envolvente convexa como se puede ver en la Figura 21, que también se puede representar como $\Delta_n \coloneqq conv\{0, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ donde $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ son las coordenadas cartesianas correspondientes al objeto en E^d; por ejemplo, para un simplex 2D (triángulo) no regular, será $\Delta_2 \coloneqq conv\{(0,0), (0,1), (1,0)\}$; el simplex 3D (tetraedro) no regular será: $\Delta_3 \coloneqq conv\{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$; de manera análoga será en las siguientes dimensiones (Sierra, 2019) (Figura 22).

Figura 21

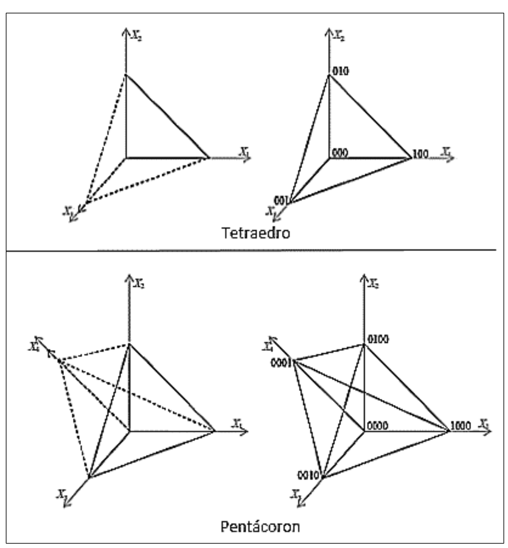
Representación Tridimensional del Politopo Simplice



Fuente: Hise (2019).

Figura 22

Construcción del Politopo Simplice



Fuente: adaptado de Cruz (2007).

Tabla 5

Caracterización del Politopo Simplice

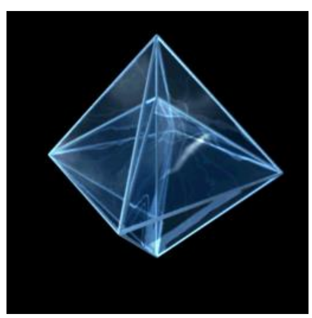
Representación	Dimensión	Lados 0D Vértices	Lados 1D Segmentos	Lados 2D caras	Lados 3D Celdas	Lados 4D
Punto	0	1	0	0	0	0
Segmento	1	2	1	0	0	0
Triángulo	2	3	3	1	0	0
Tetraedro	3	4	6	4 triángulos	1	0
Pentácoron	4	5	10	10 triángulos	5 tetraedros	1

Fuente: adaptado de Draco (2009).

Politopo Cruz u Ortoplex. El politopo cruz de dimensión n, representado en la Figura 23, que también se puede representar como $\mathrm{D}_n \coloneqq conv\{j_1, j_2, \dots, j_n\} \subset E^d$, donde $\{j_1, j_2, \dots, j_n\}$ son las coordenadas cartesianas correspondientes al objeto en E^d (Sierra, 2019); por ejemplo, un politopo cruz 2D regular será: $\mathrm{D}_2 \coloneqq conv\{(-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1)\}$; un politopo cruz 3D (octaedro) regular será: $\mathrm{D}_3 \coloneqq conv\{(-1,0,0), (1,0,0), (0,-1,0), (0,1,0), (0,0,-1), (0,0,1)\}$ y así sucesivamente (Rincón y Soto, 2019) (Figura 24).

Figura 23

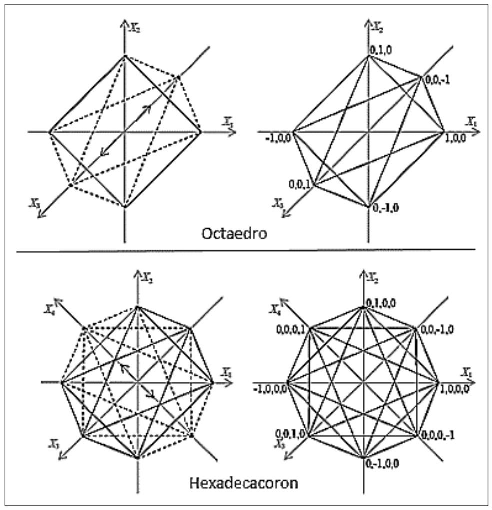
Representación Tridimensional del Politopo Ortoplex



Fuente: Hise (2019).

Figura 24

Construcción del Politopo Ortoplex



Fuente: adaptado de Cruz (2007).

Tabla 6

Caracterización del Politopo Ortoplex

Representación	D	Lados 0D Vértices	Lados 1D Segmentos	Lados 2D caras	Lados 3D Celdas	Lados 4D
Punto	0	1	0	0	0	0
Segmento	1	2	1	0	0	0
Rombo	2	4	4	1	0	0
Octaedro	3	6	12	8 triángulos	1	0
Hexadecacoron	4	8	24	32 triángulos	16 tetraedros	1

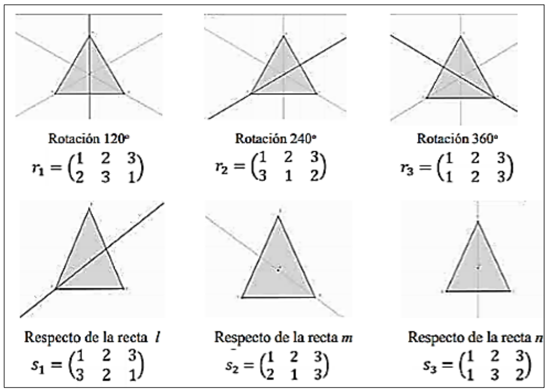
Fuente: adaptado de Draco (2009).

Grupos de Simetría de Politopos. Sea G un conjunto no vacío con una operación definida. G posee una estructura de grupo si: $\forall\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{G} / (\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}) * \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} * (\boldsymbol{b} * \boldsymbol{c})$; $\exists!\, \boldsymbol{e} \in \boldsymbol{G}\ \boldsymbol{tal\ que}\ \forall\, \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G} / \boldsymbol{a} * \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$; y $\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{G}, \exists!\ \boldsymbol{a}^{-1} / \boldsymbol{a} * \boldsymbol{a}^{-1} = \boldsymbol{a}^{-1} * \boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}$ (Quintero, 2015).

La simetría es una propiedad geométrica para politopos regulares (Tabla 7), por ejemplo, pueden existir reflexiones respecto a ejes de simetría, y rotaciones respecto a centros de giro respectivos a un politopo regular determinado. Además, existe un grupo finito cíclico el cual es generado por rotaciones de $\frac{2\pi}{n}$ y también un grupo finito diédrico generado por dos reflexiones en ejes o espejos con ángulo $\frac{\pi}{n}$, donde n representa cantidad de lados del politopo (Pando, 2009); por ejemplo, el grupo de simetrías del triángulo está conformado por (Figura 25):

Figura 25

Rotaciones r_n y Reflexiones s_n para el Triángulo Regular



Fuente: adaptado de Quintero (2015).

Tabla 7

Grupos de Simetría para Politopos Regulares

Politopo Regular	Orden	Grupo de simetría	Ejes de simetría	Planos de simetría
Triángulo	2	S_3	3	0
Cuadrado	2	D_4	4	0
Pentágono	2	D_5, orden 2*5	5	0
Hexágono	2	D_6, orden 2*6	6	0
Octágono	2	D_8, orden 2*8	8	0
…	2	…	n	0
Tetraedro	3	Tetraédrico T_d	7	6
Hexaedro	3	Octaédrico O_h	13	9
Octaedro	3	Octaédrico O_h	13	9
Dodecaedro	3	Icosaédrico I_h	21	15
Icosaedro	3	Icosaédrico I_h	31	15

Fuente: adaptado de Albert (2016).

Capítulo 3. Metodología

Unidad de Análisis

De conformidad con los aspectos éticos de una investigación, se pidió un permiso al Programa Académico y a cada uno de los estudiantes para llevar a cabo esta investigación (Anexos 4 y 5). Se realizó una exposición a la Unidad de análisis donde la investigadora sustentó los objetivos de aprendizaje esperados con el desarrollo del trabajo de campo de la investigación en mención, así como aspectos metodológicos referentes al trabajo virtual sincrónico y asincrónico.

Como unidad de análisis se tuvo en cuenta un grupo de diez (10) estudiantes que cursaron la asignatura Electiva de Profundización I ofrecida por el programa académico Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, sede central.

Sus edades oscilan entre los veinte y veintiocho años, siete son de género biológico femenino y cinco masculino, sus lugares de nacimiento se distribuyen entre los departamentos Boyacá, Meta, Cundinamarca y Casanare de Colombia y una estudiante de Lambayeque - Perú; la cantidad de semestres que han cursado hasta el momento son seis (seis est.), siete (un est.), ocho (dos est.), y nueve (un est.); manifestaron que las materias con mayor agrado son Cálculo (seis est.), Trigonometría (un est.) y Álgebra (tres est.).

Nueve estudiantes manifestaron contar con recursos tecnológicos como computador y/o teléfono inteligente, la mayoría calificó la calidad de su conexión a internet como aceptable, la frecuencia que habían tenido en el uso de estos recursos en su aprendizaje fue *Siempre* (dos est.), *Casi siempre* (cuatro est.) y *Rara vez* (cuatro est.); respecto a las materias que habían cursado, el porcentaje de asignaturas en las que se habían implementado recursos digitales como herramientas (o mediadores) para el proceso de enseñanza fue, en su mayoría, menor a un 20%.

Diseño Metodológico

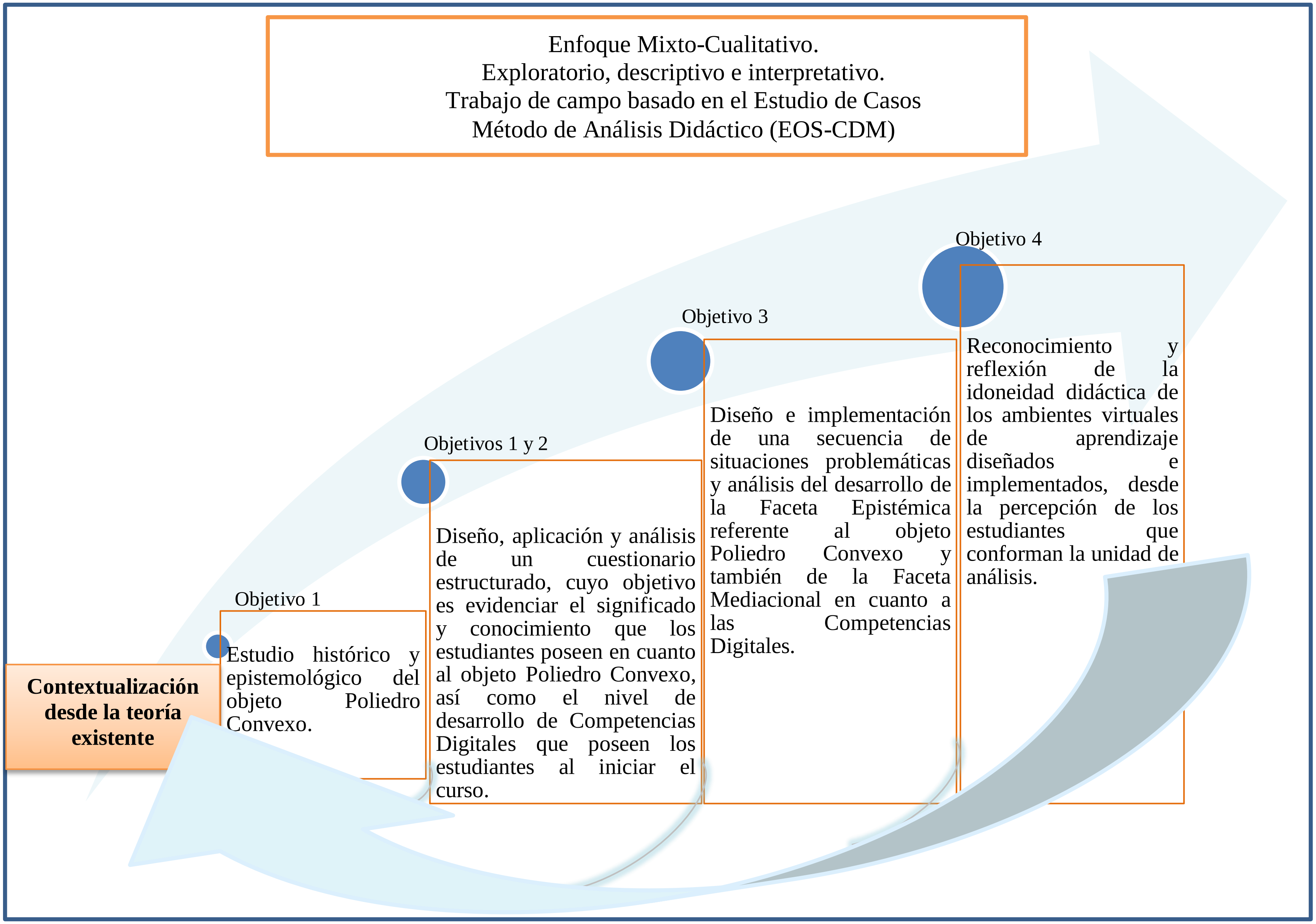
Los problemas de la educación matemática se encuentran enmarcados dentro de las problemáticas sociales, las cuales necesitan ser comprendidas (Sandoval, 2002), interpretadas y exploradas desde su particular realidad (Corbetta, 2007); es por esto que se decidió adoptar un enfoque cualitativo sin dejar de lado herramientas cuantitativas (McMillan y Schumacher, 2005), que permitieran nutrir y sustentar la información; lo cual estableció para el presente proyecto un paradigma de investigación mixto con énfasis en lo cualitativo (Hernández et al., 2014).

En este sentido, el alcance fue de tipo exploratorio, descriptivo con tendencia al análisis interpretativo (Hernández et al., 2014) debido a que se buscó detallar la epistemología referente al objeto poliedro convexo (significado pragmático global), el cual formó una base teórica como punto de referencia para el significado pragmático personal de los estudiantes, desde el cual, se pretendió interpretar los procesos subyacentes en el desarrollo de la competencia digital (*faceta mediacional*) en el aprendizaje del objeto poliedro convexo (*faceta epistémica*).

El trabajo de campo se basó en la metodología *estudio de caso* (Martínez, 1988), debido a que se pretendió observar, interpretar y describir el proceso de aprendizaje para un grupo en particular de Licenciatura en Matemáticas, este grupo se caracterizó por haber cursado más del 50% del programa académico, momento en que se espera adoptar una postura crítica acerca de la profesión docente de acuerdo con el *Modelo Pedagógico Gradual Investigativo* que se lleva a cabo en la Licenciatura en Matemáticas.

A continuación, se describen las fases que guían este proceso investigativo y se presentan con una estructura cíclica con el fin de tener la posibilidad de reflexionar acerca de la teoría y/o resultados encontrados desde el avance y desarrollo de cada una de éstas.

Fases de la Investigación



Técnicas e Instrumentos de Recolección de la Información

Para el logro del primer objetivo se utilizaron fuentes teóricas como libros, tesis y artículos que permitieron dar un sustento histórico y teórico al significado global del objeto.

En cuanto al segundo objetivo se utilizó un cuestionario online (link de acceso: https://forms.gle/n1V2MMxgzgBwufzg6) configurado mediante cinco secciones, la primera de caracterización con catorce preguntas -cuatro abiertas y las demás de selección múltiple-; la segunda fue específica del conocimiento común con ocho preguntas -dos abiertas y las demás de selección múltiple-; la tercera se basó en el conocimiento especializado con tres preguntas -una abierta y las demás de selección múltiple-; la cuarta se enfocó en el conocimiento ampliado con tres preguntas de selección múltiple y la quinta fue en cuanto al nivel de desarrollo de competencias digitales con cinco preguntas de selección múltiple y una abierta.

Para el tercer y cuarto objetivo se elaboraron y aplicaron tres situaciones problemáticas caracterizadas desde los conocimientos común, especializado y ampliado. Estas se modelaron en las aplicaciones informáticas Cabri 3D y GeoGebra Clásico 6, que cuentan con una sección de saberes previos, interfaz de exploración del objeto y una sección de preguntas que guían dicha exploración (anexos 6-9). Además, se diseñaron, crearon e implementaron cuatro páginas web para la gestión y retroalimentación de cada una de las cuatro situaciones problemáticas (https://n9.cl/quhkm; https://n9.cl/ielf6; https://n9.cl/ojegw; https://n9.cl/xp8l) (si el lector lo desea, puede visualizar la experiencia que tuvieron los estudiantes al navegar en éstas, con la contraseña TesisCDAPC).

Los instrumentos que se utilizaron a lo largo del trabajo de campo fueron grabaciones de clase, documentos de los estudiantes, páginas web diseñadas, WhatsApp, correo electrónico y cuestionarios de validación también elaborados por la autora (https://n9.cl/z1dw, https://n9.cl/pka6, https://n9.cl/r5on). Para la organización de datos cuantitativos se utilizó el software SPSS y en el caso del análisis didáctico de datos cualitativos se procesó en Atlas.ti.

Niveles de Análisis Didáctico del Modelo CDM

El modelo metodológico que se entreteje a lo largo del análisis de los resultados en esta investigación es el *análisis didáctico* basado en el Modelo de Conocimientos Didáctico Matemáticos del Profesor (Pino-Fan y Godino, 2015); este modelo propone cuatro niveles, los cuales hacen parte de las herramientas del EOS para una didáctica descriptiva y explicativa que dan vía a la respuesta de la pregunta ¿Qué ocurrió aquí y por qué? (Font et al., 2010).

De acuerdo con Godino (2009), los cuatro niveles que, en concordancia con las *facetas*, conforman una categorización del conocimiento del profesor son:

Prácticas Matemáticas y Didácticas. Es la descripción de la actividad matemática que se presenta en el aula, de las acciones tanto del docente como del estudiante y también se analizan las tareas matemáticas propuestas con el fin de contextualizar los contenidos.

Configuraciones de Objetos y Procesos. Es la descripción de los objetos y procesos matemáticos, así como de los significados activados en las prácticas matemáticas y didácticas.

Normas y Metanormas. Es identificar el papel del profesor, estudiantes y recursos en torno a una tarea o contenido matemático.

Idoneidad. Es el grado en que los procesos de enseñanza y aprendizaje, configurados por determinadas circunstancias y recursos, fusionan las características que permiten considerarlo como idóneo para lograr la adaptación entre los significados personales asumidos por los estudiantes y los significados declarados. A continuación se describen las seis idoneidades específicas y sus respectivos indicadores, los cuales fueron utilizados en el análisis de la reflexión contemplada en el proceso que corresponde al cuarto resultado de esta investigación:

La *Idoneidad Epistémica* es el grado en que se presentan diversas situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación; exposición de definiciones, explicaciones, procedimientos y demostraciones adecuadas al nivel educativo; y se permite la confrontación de conocimientos. La *Idoneidad Cognitiva,* como el grado en que se tienen en cuenta los saberes previos del estudiante y permite su modificación, ampliación o refuerzo. La *Idoneidad Afectiva.* Es el grado en que se motiva al proceso de aprendizaje; y permite valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional. La *Idoneidad Interaccional*, considerada como el grado en que se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes; posibilita la aclaración de dudas y fomenta la autonomía y responsabilidad. La *Idoneidad Mediacional,* referida al grado en que se promueve la utilización de recursos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, visualizaciones, procedimientos y argumentaciones; y presenta el tiempo suficiente para el trabajo pretendido. *La idoneidad ecológica,* que consiste en el grado en que se impulsa a la investigación, la práctica reflexiva, el pensamiento crítico y la integración de las nuevas tecnologías en la proyección educativa.

Categorías de Análisis

De acuerdo con McMillan y Schumacher (2005) “El análisis cualitativo es un proceso relativamente sistemático de selección, categorización, comparación, síntesis e interpretación, que nos proporciona explicaciones sobre el único fenómeno de interés” (p. 479).

En este sentido, la Tabla 8 contiene la organización de las categorías de análisis constituidas previamente con ayuda del marco teórico que rige esta investigación, y validadas con el desarrollo del trabajo de campo, éstas se basaron en las investigaciones de Font y Ramos (2005), Godino et al. (2017), INTEF (2017), Jiménez et al. (2011), Ministerio de Educación Nacional (2013a) y Suárez (2018).

Tabla 8

Categorías de Análisis

Origen de la información	Faceta	Categorías de análisis	Subcategorías
Estudio histórico y epistemológico del objeto poliedro convexo.	Faceta epistémica	**C1.** Configuración epistémica.	**C1.1** Lenguajes. **C1.2** Situaciones problemáticas. **C1.3** Conceptos-definiciones. **C1.4** Proposiciones. **C1.5** Procedimientos. **C1.6** Argumentos.
Cuestionario de conocimientos previos.	Faceta epistémica	**C2.1** Conocimiento del contenido previo.	**C2.1.1** Conocimiento común. **C2.1.2** Conocimiento especializado. **C2.1.3** Conocimiento ampliado.
	Faceta mediacional	**C2.2** Competencias digitales previas.	**C2.2.1**Uso de redes digitales con fines académicos. **C2.2.2** Uso de herramientas digitales para la organización de la información. **C2.2.3**Uso de herramientas digitales como apoyo para la enseñanza. **C2.2.4** Organización de secuencias de aprendizaje con el uso de recursos digitales. **C2.2.5** Elaboración de contenidos digitales como apoyo para la enseñanza.
Situaciones problemáticas 1, 2 y 3	Faceta epistémica	**C3.1** Conocimiento común, especializado y ampliado desarrollado.	**C3.1.1** Prácticas matemáticas y didácticas. **C3.1.2** Configuración de objetos y procesos. **C3.1.3** Normas
	Faceta mediacional	**C5** Competencias digitales desarrolladas	**C5.1** Generales **C5.2** Específicas de la geometría dinámica
Cuestionarios de valoración de las situaciones problemáticas 1, 2 y 3.		**C6.** Idoneidad didáctica	**C6.1** Idoneidad Epistémica **C6.2** Idoneidad Cognitiva **C6.3** Idoneidad Interaccional **C6.4** Idoneidad Mediacional **C6.5** Idoneidad Afectiva **C6.6** Idoneidad Ecológica
		C7. Procesos emergentes	**C7.1** Razonamiento **C7.2** Resolución y planteamiento de problemas **C7.3** Comunicación **C7.4** Modelación **C7.5** Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos
		C8. Tipos de pensamiento matemático	**C8.1** Pensamiento numérico **C8.2** Pensamiento espacial **C8.3** Pensamiento métrico **C8.4** Pensamiento variacional

Fuente: elaboración propia.

Capítulo 4. Análisis y Discusión de Resultados

Primer Resultado: Estudio Histórico y Epistemológico del Objeto Poliedro Convexo

A continuación se describe un estudio histórico y epistemológico de tipo documental (Gordillo y Pino-Fan, 2016) acerca del origen y evolución del objeto poliedro convexo, el objetivo es determinar un significado pragmático global u holístico que conforme una referencia para el significado pragmático personal pretendido en el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido, se caracterizan los sistemas de prácticas mediante la identificación de objetos matemáticos primarios (lenguaje, situaciones problemáticas, concepto-definición, proposiciones, argumentos, procedimientos) (Godino y Font, 1994) desarrollados en situaciones problemáticas contextualizadas en diferentes épocas de la historia, lo que conforma configuraciones epistémicas que describen los conocimientos matemáticos referentes al objeto en mención.

> El fin no es que los estudiantes recapitulen, en su aprendizaje, un proceso histórico-cultural del desarrollo de un concepto. El fin es encontrar un equilibrio entre una aproximación 'histórica' que haría al niño repetir muchas de las concepciones olvidadas del pasado, y una enseñanza directa del concepto tal y como aparece en la estructura actual, sin intentar construir el concepto sobre las concepciones de hoy del estudio ya que evolucionan dentro del marco de una cultura y una escolaridad. (Godino, 2018a, p. 14)

De acuerdo con Godino y Ruiz (2002), el significado etimológico de la palabra *geometría* viene del griego *γεωμετρία* donde *γεω* (geo) se relaciona con la raíz indoeuropea *ge* que significa *tierra*, la palabra *μέτρον* (metron) que significa *medida*, y el sufijo *ία* que se refiere a *cualidad*, esto conlleva a significar la palabra *geometría* como “medida de la tierra”, lo cual alude a su origen en las prácticas del establecimiento de parcelas de terreno que debían realizar los egipcios después de las inundaciones del Nilo.

Hay innumerables ejemplos de formas geométricas en la naturaleza y es posible que el ser humano se haya basado en el mundo físico para deducir las primeras nociones de geometría. Con el paso de los siglos, el hombre desarrolló habilidades para detectar características, clasificar formas, describirlas a partir de definiciones y nombrarlas (Clemens et al., 1998). Se han evidenciado diferentes aplicaciones de la geometría, como por ejemplo, el estudio de problemas métricos referentes al cálculo de superficies y volumen de cuerpos sólidos (Fernández, 2018). La palabra *poliedro* viene del griego *polyedros*, donde *polys* se refiere a *muchos* y *hedra* alude a *lado o plano* (Padrón, 2017).

Prehistoria (– 3.000 a.C.)

Según Padrón (2017), en civilizaciones como Egipto y Mesopotamia se utilizaban fórmulas para el cálculo de áreas de figuras rectangulares y triangulares, para el cálculo del volumen del tronco de una pirámide, entre otros (Fernández, 2018; Pinasco et al., 2009); existen hallazgos de que conocían algunas figuras poliédricas, como por ejemplo, las famosas pirámides de Egipto.

Gracias a las investigaciones de Keith Critchlow, en el libro Time Stand Still (Critchlow, 1982), se ha demostrado que los poliedros eran conocidos por los pueblos neolíticos de Escocia (5.000 a.C - 3.000 a.C.); se encontraron piedras con forma de los sólidos regulares que actualmente se encuentran consagradas en el Museo Ashmolean de Oxford (Figura 26) (Mommensohn y Petrella, 2006; Padrón, 2017). Si se circunscribe un sólido regular en una esfera, y se proyecta un rayo de luz desde su centro, se observará la proyección de sus aristas en forma de arcos que se asemejan a estas piedras (Padrón, 2017).

Figura 26

Poliedros Encontrados en los Pueblos Neolíticos de Escocia

Sólidos regulares neolíticos de Escocia (Ashmolean Museum de Oxford).

Fuente: González (2009).

También se han encontrado diversos sólidos platónicos (Figura 27) cuyo origen puede ser religioso, estético o por observación de la naturaleza (cristales de pirita, esqueleto del animal marino radiolaria, entre otros) (González, 2009). De acuerdo con Keith Critchlow éstos representan un tipo de conocimiento matemático de los pueblos neolíticos (Ponce de León y Fregoso, 2009).

Figura 27

Sólidos Platónicos en la Cultura Neolítica

1. Esfera tetraédrica neolítica (Keith Critchlow: *Time Stands Still*).
2. Dodecaedro etrusco (500 a.C. Landes-Museum. Mainz, Alemania).
3. Icosaedro romano (Rheinisches Landes-Museum. Bonn)

Fuente: González (2009).

Edad antigua (3.000 a.C. – 476 d.C)

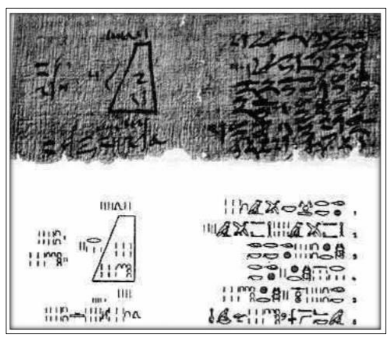
Según Ortiz (1936), en la geometría babilónica (1792 a.C.–1595 a.C.) se establecieron reglas para el cálculo del área de un rectángulo, de triángulos rectángulos e isósceles, el volumen de un paralelepípedo rectangular y el volumen de un prisma recto con base trapezoidal. De acuerdo con Kline (1972) esta geometría se redujo a una colección de reglas sencillas, como por ejemplo, para el cálculo de áreas de polígonos regulares y volúmenes de cuerpos sólidos, y no se logró verla como una rama independiente de las matemáticas. Actualmente, el legado de la matemática babilónica reposa en las tablillas de Yale, Plimpton 322, Susa y Tell Dhibayi (González, 2009).

Por otro lado, Ahmes fue un antiguo escriba egipcio, quien escribió el famoso Papiro de Rhind aproximadamente en el año 1650 a.C, el cual se redactó a partir de escritos de doscientos años de antigüedad e incluye el nombre del historiador que lo descubrió en 1858, en las ruinas de un antiguo edificio de Tebas, Henry Rhind; este Papiro contiene 85 problemas (Kline, 1972; Vargas, 2013).

Problema 1: Papiro de Rhind, problema 14.

Figura 28

Fragmento del Papiro de Rhind, problema 14



Fuente: Vargas (2013).

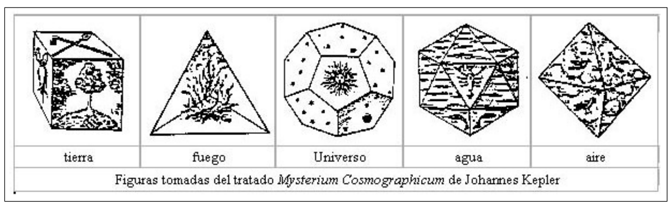
Según Vargas (2013), el problema 14 muestra el tronco de una pirámide, la cual tiene 6 (ells) de alto, 2 en el lado superior y 4 en el lado inferior. El escriba, primero calcula el cuadrado de 4, esto da 16. Dobla el 4, esto da 8. Calcula el cuadrado de 2, esto da 4. Junta el 16 con el 8 y el 4, esto da 28. Calcula 1/3 de 6, esto da 2. Calcula 28 dos veces, esto da 56. Este proceso corresponde a la fórmula que sirve para el cálculo del volumen del tronco de una pirámide.

Son muchos los historiadores que afirman que en Egipto (30 a.C.–641 d.C.) y Babilonia (1660 a.C.-1150 a.C.) se conocían el cubo, tetraedro y octaedro, conocimientos que Tales (624 a.C-546 a.C.) y Pitágoras de Samos (570 a.C- 469 a.C) transmitían en sus viajes a Grecia (González, 2009; Padrón, 2017).

De acuerdo con González (2009), hay indicios de que el cubo, el tetraedro y el dodecaedro eran estudiados por los pitagóricos y el octaedro e icosaedro emergieron de los estudios de Teeteto (417 a.C.-369 a.C) (González, 2009; Padrón, 2017). Por otro lado, Proclo (347 d.C – 420 d.C) expuso, en sus *Comentarios al Libro I, Elementos de Euclides,* que Pitágoras de Samos había asociado al tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro con los elementos primarios fuego, tierra, aire y agua (Figura 29).

Figura 29

Representación de los Sólidos Regulares.



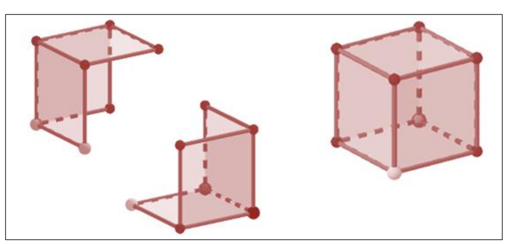
Fuente: Velázquez (2010).

Los pitagóricos sentían gran fascinación por los sólidos regulares y tenían en secreto la construcción del dodecaedro, pues al unir las diagonales de una de sus caras pentagonales se formaba su símbolo, el pentagrama místico (González, 2009).

Problema 2: el cubo se puede formar uniendo cuadrados de tres en tres.

Figura 30

Construcción del Hexaedro a Partir de la Unión de Tres Cuadrados en un Ángulo



Fuente: elaboración propia.

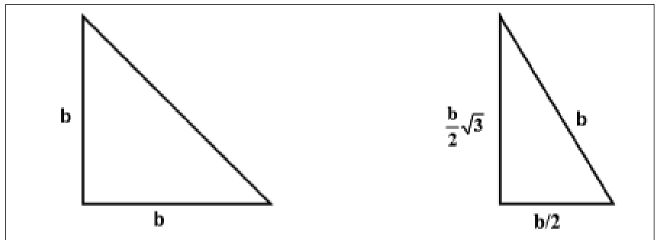
Según Toledo (1992), los pitagóricos intentaban construir figuras empíricamente juntando ángulos en torno a un punto. El cubo se podría formar uniendo cuadrados de tres en tres (Figura 30). El tetraedro con triángulos equiláteros de tres en tres. El octaedro con triángulos equiláteros de cuatro en cuatro. El icosaedro con triángulos equiláteros de cinco en cinco. Y el dodecaedro pudo ser con cinco triángulos equiláteros alrededor de un vértice, pues sus bases forman un pentágono regular.

Por otro lado, en el famoso diálogo, *El Timeo* (360 a.C), Platón (428 a.C-347 a.C.) expuso la asociación de los cinco elementos naturales con los cinco sólidos realizada supuestamente por Pitágoras (Platón, 1872). Además, construyó una definición general y una clasificación completa de los objetos que la satisfacen, “[Un sólido es regular si] tiene la propiedad de dividir en partes iguales y semejantes la superficie de la esfera en que está inscrito” (Alsina, 2010; González, 2009, p. 152).

Platón también realizó una descomposición de las caras de los cuatro sólidos a partir de cuatro triángulos rectángulos isósceles, para el caso de la cara del cubo, cada uno de ellos es la cuarta parte de un cuadrado, mientras que para el tetraedro, octaedro e icosaedro, se consideran sus caras compuestas por seis triángulos rectángulos escalenos, con la hipotenusa doble que el cateto menor (Figura 31), obtenidos al bisecar los ángulos de triángulos equiláteros y combinando seis mitades para formar un nuevo triángulo equilátero (Alsina, 2010; Platón, 1872).

Figura 31

Triángulo Rectángulo Isósceles y Escaleno Referidos por Platón.



«Los triángulos más bellos», según el *Timeo* de Platón (54b).

Fuente: González (2009).

Problema 3: construcción de sólidos regulares.

A continuación, se plasma un fragmento del Timeo de Platón, en el cual explica la construcción del tetraedro regular (1), octaedro regular (2), icosaedro regular (3), triángulo escaleno (4), el cubo (5) y el dodecaedro regular (6), respectivamente.

Figura 32

Conformación de Sólidos Regulares Propuesta por Platón

Para seguir nuestro discurso, debemos explicar ahora cómo se forma cada género, y con el concurso de qué números. Comencemos por el primero, cuya composicion es la más simple. Tiene por elemento el triángulo, cuya hipotenusa es doble del lado menor. Unid dos de estos triángulos, siguiendo la diagonal; haced tres veces esta operacion, de manera que todas las diagonales y todos los lados menores concurran en un mismo punto, que les sirva de centro comun, y tendreis un triángulo equilátero, compuesto de seis triángulos particulares. Cuatro de estos triángulos equiláteros, mediante la reunion de tres ángulos planos, forman un ángulo sólido, cuya magnitud supera á la del ángulo plano más obtuso; y cuatro de estos nuevos ángulos componen juntos la primera especie de sólido, que divide en partes iguales y semejantes la esfera en que está inscrito (1). El segundo sólido se compone de los mismos triángulos reunidos en ocho triángulos equiláteros y formando un ángulo sólido de cuatro ángulos planos; y seis de estos ángulos constituyen este segundo cuerpo (2). El tercer sólido se forma de ciento veinte triángulos elementales de doce ángulos sólidos, rodeados cada uno de cinco triángulos equiláteros, con veinte triángulos equiláteros por bases (3). Este elemento (4) no debe producir otros sólidos. En cuanto al triángulo isósceles, á él corresponde engendrar la cuarta especie de cuerpos. Reunidos cuatro triángulos isósceles, poniendo en el centro los cuatro ángulos rectos, de manera que compusieran un tetrágono equilátero, seis tetrágonos dieron ocho ángulos sólidos, estando formado cada ángulo sólido de tres ángulos planos, y de esta amalgama resultó el cubo, que tiene por base seis tetrágonos regulares (5). Restaba una quinta combinacion, y Dios se sirvió de ella para trazar el plan del universo (6).

Fuente: adaptado de Platón (1872).

Sin embargo, de acuerdo con González (2009), el dodecaedro no puede construirse a partir de estos triángulos, por eso Platón lo asocia como un todo y le concede una importancia muy superior, de tal forma que para este filósofo la materia no se constituye únicamente por cuatro elementos, sino que por su estructura matemática geométrica se remonta a dos elementos geométricos básicos -el semitriángulo equilátero y el rectángulo isósceles-.

Por otro lado, hace aproximadamente 300 años a. C, en la biblioteca de Alejandría, Euclides (325 a.C-265 a.C.) estructuró los descubrimientos de los griegos clásicos en el tratado *Elementos* el cual se divide en trece partes y en la última describe la construcción de los cinco poliedros regulares convexos (Kline, 1972; Várilly, 1995). Se dice que retomó propiedades métricas de los poliedros estudiadas por Teeteo (Alsina, 2010). Euclides introduce, en el libro XI, una definición de ángulo sólido y de cuatro sólidos:

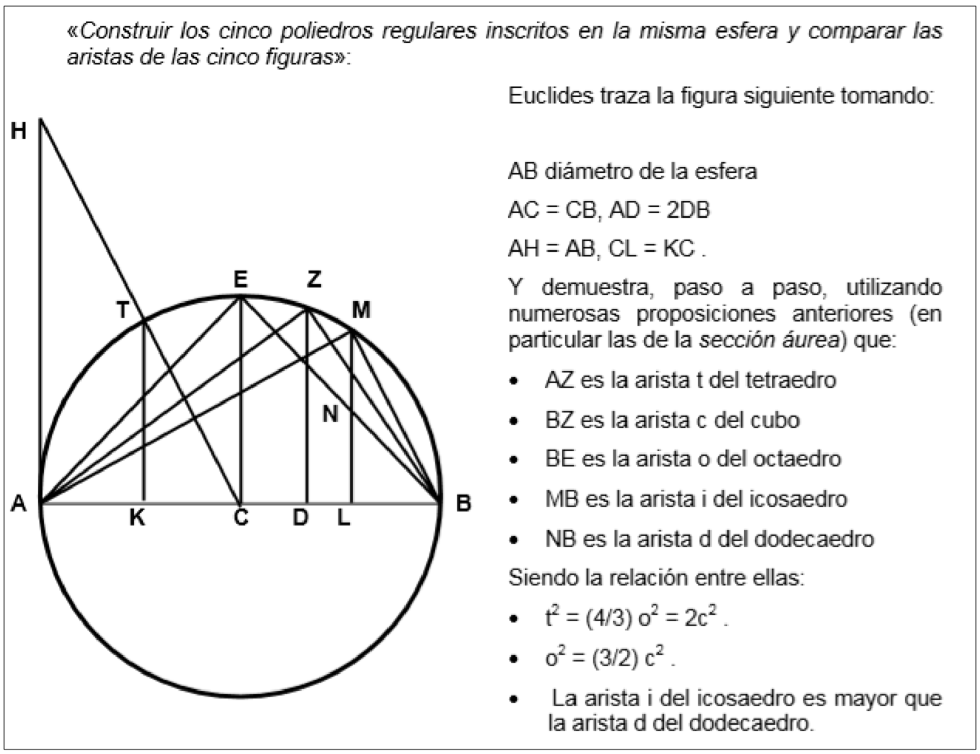
> Definición I, un sólido es aquello que tiene longitud, anchura y profundidad. Definición II, una cara de un sólido es una superficie. Definición IX, un ángulo sólido es la inclinación constituida por más de dos líneas que se encuentran entre sí y no están en la misma superficie, hacia todas las líneas, es decir, un ángulo sólido es el que está contenido por más de dos ángulos planos que no están en el mismo plano y están construidos en un punto. Definición XII, una pirámide es una figura sólida contenida por planos que se construye de un plano a un punto. Definición XXV, un cubo es una figura sólida contenida por seis cuadrados iguales. Definición XXVI, un octaedro es una figura sólida contenida por ocho triángulos iguales, y equiláteros. Definición XXVII, un icosaedro es una figura sólida contenida por veinte triángulos iguales y equiláteros. Definición XXVIII, un dodecaedro es una figura sólida contenida por doce pentágonos iguales, equiláteros y equiangulares. (Joyce, 1996, libro XI)

De acuerdo con González (2009) el objetivo de los teoremas del Libro XIII es el de inscribir cada uno de los poliedros regulares en una esfera; al realizar dichas construcciones deduce la razón de la arista del sólido al diámetro de la esfera circunscrita y redacta las proposiciones. Un ejemplo de esto se constata en las proposiciones XIII-XVII (Joyce, 1996).

Problema 4: proposición 18 del libro XIII de Los Elementos de Euclides.

Figura 33

Exponer los Lados de las Cinco Figuras y Compararlos Entre sí.



Fuente: González (2009).

El análisis completo que Euclides describió para esta construcción (Joyce, 1996) se puede estudiar en el Anexo 10.

Problema 5: demostración del teorema clasificación de los poliedros.

En el libro XIII de los *Elementos* de Euclides, se plasma una observación a la proposición XVIII: “Ninguna otra figura, además de las mencionadas cinco figuras, puede ser construida por figuras equiláteras y equiangulares iguales entre sí” (Joyce, 1996).

Figura 34

Demostración de la Existencia Única de Cinco Sólidos Regulares por Euclides

Digo a continuación que no se puede construir ninguna otra figura, además de dichas cinco figuras, que esté contenida por figuras equiláteras y equiangulares iguales entre sí.

Porque un ángulo sólido no se puede construir con dos triángulos, o incluso con planos.

Con tres triángulos se construye el ángulo de la pirámide, con cuatro el ángulo del octaedro y con cinco el ángulo del icosaedro, pero un ángulo sólido no se puede formar con seis triángulos equiláteros y equiangulares colocados juntos en un punto, pues, el Si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un ángulo recto, el seis sería igual a cuatro ángulos rectos, lo cual es imposible, ya que cualquier ángulo sólido está contenido por ángulos menores que cuatro ángulos rectos. XI.21

Por la misma razón, tampoco se puede construir un ángulo sólido con más de seis ángulos planos.

Por tres cuadrados el ángulo del cubo está contenido, pero por cuatro es imposible contener un ángulo sólido, porque nuevamente serían cuatro ángulos rectos.

Por tres pentágonos equiláteros y equiangulares el ángulo del dodecaedro está contenido, pero por cuatro de ellos es imposible contener un ángulo sólido, porque, siendo el ángulo del pentágono equilátero un ángulo recto y un quinto, los cuatro ángulos serían mayor de cuatro ángulos rectos, lo cual es imposible.

Tampoco volverá a estar contenido un ángulo sólido por otras figuras poligonales en razón del mismo absurdo.

QED

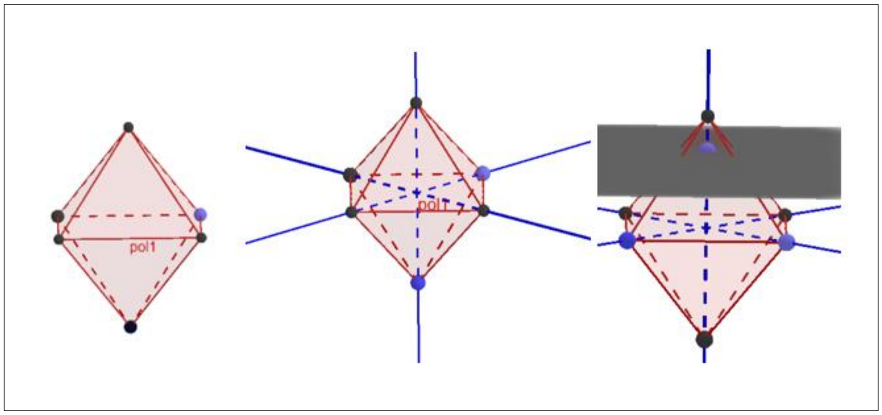
Fuente: adaptado de Joyce (1996).

Uno de los estudios más prevalecientes a lo largo de la historia ha sido el volumen de los sólidos, de acuerdo con Arquímedes de Siracusa (287 a.C-212 a.C), Demócrito (460 a.C-370 a.C) propuso que el volumen de una pirámide equivale a un tercio del volumen del prisma con la misma base y altura, y también afirmó que su demostración fue realizada por Eudoxo (408 a.C-355 a.C.), los trabajos realizados por Arquímedes incluyeron estudios sobre el área y volumen de sólidos por el método de aproximaciones sucesivas y el cálculo del centro de gravedad de estos (Kline, 1972).

Según González (2009), los sólidos arquimedianos se construyen al cortar los vértices de los sólidos regulares, este corte se puede realizar mediante planos perpendiculares al eje de rotación del poliedro que pasa por los vértices. De esta forma cada sección del poliedro de origen se convierte en un mismo polígono regular para todos los cortes. Estos también se llaman poliedros semirregulares ya que mantienen la regularidad de caras y vértices, aunque no la igualdad de la forma de las caras (Cardona, 2006).

Figura 35

Pasos para la Construcción del Sólido Arquimediano Octaedro Truncado



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con Alsina (2010), los sólidos arquimedianos tienen trece poliedros duales, los cuales fueron estudiados por Eugène Charles Catalan, a diferencia de los duales de los poliedros regulares, éstos sí generaron nuevos poliedros, otro tipo de sólidos convexos fueron los estudiados por Norman W. Johnson (1930 d.C-2017 d.C) quien realizó en 1966 una clasificación de 92 poliedros convexos cuyas caras son regulares pero no todas del mismo tipo, y la demostración de este resultado fue realizada por Victor Zalgaller en 1969.

Edad media (476 d.C–1453 d.C)

La proyección de sólidos regulares sobre un lienzo es una característica de las obras de varios artistas de la época, resaltando así la belleza de la geometría y también evidenciando diferentes perspectivas de estos objetos (González, 2009).

Según Alsina (2010), González (2009) y Kline (1972), Piero della Francesca (1416 d.C-1492 d.C) es considerado como un gran maestro de los problemas acerca de cuerpos regulares y tuvo la habilidad de mezclar el arte de la pintura con la belleza de las matemáticas. Su obra, *De Prospectiva Pingendi* es el primer tratado de perspectiva en la pintura, allí se introducen las bases fundamentales para dibujar en un plano figuras geométricas tridimensionales (Gizzi, 2016).

Figura 36

Cuboctaedro Dibujado por Piero della Francesca

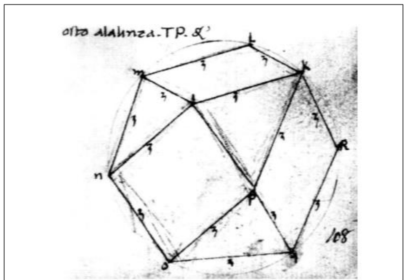


Ilustración del poliedro arquimediano CubiOctaedro de la obra *Trattato d'Abaco* de Piero della Francesca. Biblioteca Medicea-Laurenziana de Florencia, Codice Ashburnhamiano 280.

Fuente: González (2009).

De acuerdo con González (2009), Piero della Francesca también escribió el estudio ilustrado sobre poliedros más completo de todo el Renacimiento en la obra *Libellus De Quinque Corporibus Regularibus*; en la primera parte estudió, a través de 55 problemas, numerosas propiedades de los polígonos; en la segunda parte estudia, a través de 37 problemas, los conceptos euclídeos sobre cada uno de los poliedros regulares, algunos problemas típicos son:

> Dado el cuerpo de ocho bases triangulares cuya cuadratura es igual a 400, hallar el diámetro de la esfera que lo contiene; dado el cuerpo de doce bases pentagonales cuyo lado es igual a 4, hallar su cuadratura; dado el cuerpo de veinte bases triangulares equilátero cuya superficie es igual a 200, hallar el diámetro de la esfera que lo contiene (González, 2009, p. 188). Dado un cuerpo con 14 caras, 6 cuadradas y 8 hexagonales, con el lado de cada cara 2, encontrar su área superficial, su volumen, y el diámetro de la esfera que encierra el cuerpo. (Cardona, 2006, p. 251)

Piero della Francesca también estudió la dualidad de los poliedros y concluyó que "El sólido cuyos vértices son los centros de las caras de uno platónico también es platónico" y "el sólido determinado por los planos tangentes en los vértices a la esfera circunscrita a un sólido platónico también es platónico" (González, 2009, p. 188).

Problema 6: propiedades de un octaedro truncado según Piero della Francesca.

"Dado un cuerpo con 14 caras, 6 cuadradas y 8 hexagonales, con el lado de cada cara 2, encontrar su área superficial, su volumen, y el diámetro de la esfera que encierra el cuerpo" (Field, 2005, p. 347, tomado de Cardona, 2006, p.253).

Figura 37

Análisis de un Octaedros Truncado Propuesta por Piero della Francesca

Este cuerpo está formado a partir del cuerpo con 8 caras triangulares [el octaedro regular] al recortar sus 6 ángulos sólidos, y dividir cada uno de sus lados [aristas] en tres partes iguales. Debido a que queremos que cada uno de sus lados sea 2, cada lado del cuerpo con 8 caras debe ser 6. Así, si cada uno de los lados de las caras triangulares de la figura de 8 lados es 6, su altura debe ser P_x 72,[70] que multiplicada por 36 y traducida en la forma de un radical se transforma en 93312. Al dividir entre 9 resulta la raíz de 10368. Entonces la raíz de 10368 es el volumen del cuerpo de las 8 caras triangulares [octaedro], [71] cuyos 6 vértices se recortarán, ellos [los vértices que se recortan] han de ser 6 pirámides cuadradas, todas con cada uno de sus lados [de longitud] 2, y el área de la base será 4, y el eje [altura] de cada una la raíz de 2. Ahora tome $\frac{1}{3}$ de la superficie [área] de cada una de las 6 bases, la cual es 8. Multiplíquela por sí misma, lo que da 64, que al multiplicarse por 2 da 128, y esto usted lo substrae de la raíz de 10368, de allí resulta 8192, y P_x 8192. Este es el volumen del cuerpo de 16 caras que fue propuesto. Ahora para la superficie. Usted tiene que 6 caras son cuadradas, y el lado de cada una es 2, y el cuadrado es 4. Entonces 6 es multiplicado 4 veces, lo que da 24; que es la superficie [área] de las 6 caras cuadradas. Y cada una de las 8 caras hexagonales es dividida en 6 triángulos equiláteros, cada uno de cuyos lados es 2, y la altura es raíz de 3. Tome la mitad de las ocho caras, entre las cuales hay 48 triángulos; la mitad es 24 caras, y cada una es 2, lo cual es 48: multiplíquelo por sí mismo, lo que da 2304: multiplique esto por la altura que es 3, lo que da 6912, y la raíz de 6912 es [el área de] las caras hexagonales, que una vez reunidas con las 6 caras cuadradas, que son 24, la superficie [área] del cuerpo será 24 más la raíz de 6912. Resta únicamente encontrar el diámetro de la esfera que contiene el cuerpo mencionado. Usted tiene que [la distancia] desde el centro de dicho cuerpo hasta el punto medio del lado del cuerpo de 8 caras es 3, el cual introducido en un radical se transforma en 9, unido con la potencia de la mitad del lado del hexágono, que es 1, se transforma en 10, y P_x 10 es el semidiámetro de tal cuerpo. El diámetro completo es P_x 40, y la superficie [área] es 24 sumado a la raíz de 6912. Y el volumen es la raíz de 8192.

Fuente: adaptado de Field (2005, pp. 347-349, tomado de Cardona, 2006, p.253).

Edad moderna (1453 d.C – 1789 d.C)

Luca Pacioli (1445 d.C-1514 d.C) es considerado como uno de los mejores artistas y matemáticos de la época renacentista. Escribió la obra *Summa de arithmetica, geometría, proportioni e proportionalitá* (publicada en 1494), donde describe propiedades y cálculos del volumen de poliedros regulares y arquimedianos. Otra de sus obras fue *De Divine Proportione*, en la cual se evidencian influencias platónicas, euclídeas y pitagóricas, allí sustenta el estudio de la sección áurea y de la construcción de los poliedros también estudia la inclusión de los cinco sólidos regulares entre ellos mismos, con lo cual logra doce relaciones; estudia a los sólidos arquimedianos y los sólidos estrellados, cómo se pueden colocar cuerpos sólidos en una esfera, los cuerpos oblongos, entre otros (González, 2009; Gutiérrez, 2009).

Problema 7: inclusión del octaedro en el cubo propuesta por Luca Pacioli

> Si queremos formar en el hexaedro el cuerpo de ocho bases, es decir, el octaedro, antes tenemos que construir en el cubo la pirámide triangular equilátera, cuyos lados, según dijimos, son los seis diámetros de las bases del cubo. Por tanto, si dividimos cada uno de dichos diámetros en partes iguales, uniendo sus puntos medios entre sí con líneas rectas, sin duda habremos formado exactamente en el cubo propuesto el octaedro, y todos sus ángulos sólidos se afirmarán exactamente en las bases de dicho cubo, por la tercera del decimoquinto. (Pacioli, 1509, p. 129)

Problema 8: arista de un tetraedro inscrito en un dodecaedro - por Luca Pacioli.

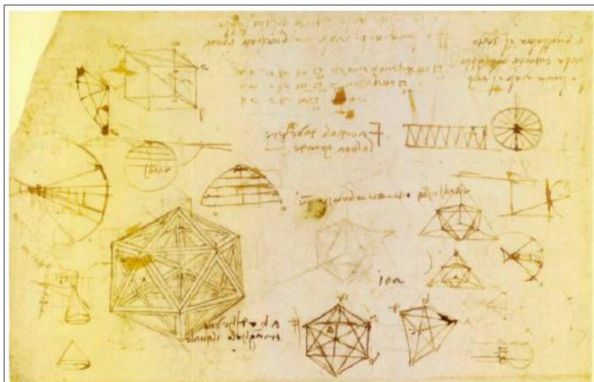
> Dado un cuerpo de doce bases pentagonales en que el lado de la base es igual a 4 y que contiene un cuerpo de cuatro bases triangulares, se quiere hallar el lado. Tú tienes por la décima del decimoquinto libro de EUCLIDES que el lado del cubo duplicado es igual a la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases inscrito en el mismo cuerpo de doce bases junto con el cubo; y por la precedente tienes que el lado del cubo construido en dicho cuerpo es raíz de 20 más 2. Multiplica entonces raíz de 20 más 2 por raíz de 20 más 2 y da 24 más raíz de 320. Esto duplícalo y da 48 más raíz de 1280. Tal es la potencia del lado del cuerpo de cuatro bases triangulares construido en el de doce bases pentagonales

en que cada lado de la base es igual a 4. Por lo tanto, el lado del cuerpo de cuatro bases es raíz de la suma que da raíz de 1280 más 48. (Pacioli, 1509, p. 300)

Por otro lado, Leonardo da Vinci (1452 d.C-1519 d.C) fue un artista, geómetra, científico e ingeniero, algunos de sus aportes al estudio de los poliedros fueron sesenta ilustraciones poliédricas plasmadas en la obra *De Divine Proportione* (Alsina, 2010; Gutiérrez, 2009; Padrón, 2017). Según con Kline (1972) Leonardo consideraba que la perspectiva matemática le permitiría plasmar la realidad de la vida en sus obras de arte.

Figura 38

Manuscritos de Leonardo da Vinci.



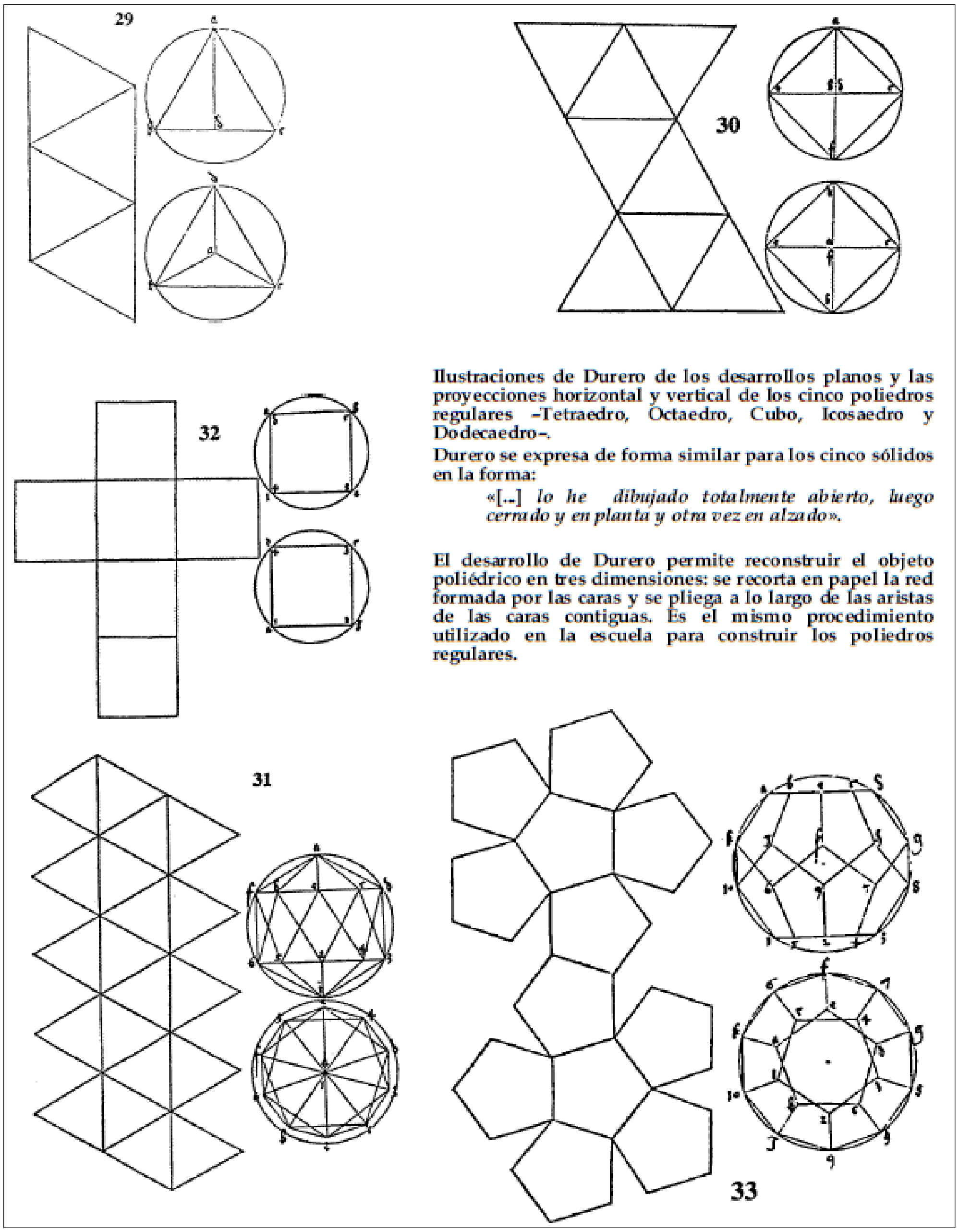
Estudios de Leonardo da Vinci (1513) sobre la Geometría de los poliedros con especial énfasis en el Cubo y el Icosaedro. Códice Atlántico (f. 518r).

Fuente: González (2009).

De acuerdo con Alsina (2010), Alberto Durero (1471 d.C -1528 d.C) fue un matemático importante de la época del Renacimiento, tuvo gran habilidad en aplicar la matemática en su arte, lo cual se evidencia en su obra *De la Medida*, esta es una enciclopedia de geometría para pintores, aunque es un admirador de los trabajos de Euclides, sus problemas geométricos se basan más en la construcción que en la demostración (Cardona, 2006). En la obra *De la Medida*, Durero describió el número de caras, aristas y vértices de cada poliedro regular y de ocho poliedros irregulares, y además expuso ilustraciones en forma de desarrollo, proyecciones ortogonales sobre los planos horizontal y vertical (Figura 39) (Durero, 2000).

Figura 39

Desarrollos y Proyecciones de los Sólidos Platónicos de Alberto Durero



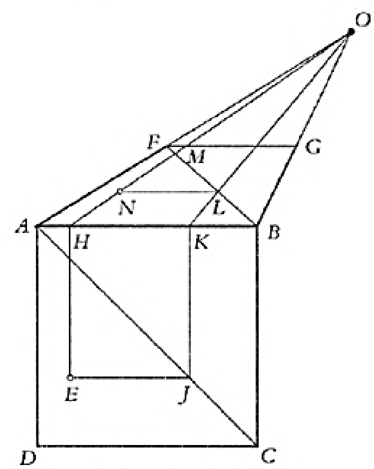
Fuente: González (2009).

Problema 9: una base para la construcción en perspectiva de Alberto Durero

Figura 40

Instrucciones para el Método de la Diagonal de Alberto Durero

«Cuando quieres representar, en un plano visto en perspectiva, un punto dado en un cuadrado, procederás como sigue: traza un cuadrado *ABCD* de modo que *AB* sea el lado horizontal superior. Dibuja el cuadrado en perspectiva *ABGF* sobre éste. Sea *O* el ojo correspondiente a tu dibujo. Elige un punto cualquiera *E* en el cuadrado. Traza a continuación, en ese cuadrado, la diagonal *AC*. Dibuja también la misma diagonal *BF* en el cuadrado en perspectiva. Tira después, desde el punto *E*, una paralela al lado del cuadrado y prolóngala hasta la horizontal *AB*. Marca ese punto como *H*. Tira desde ese punto *H* una línea recta al ojo *O* que atraviese el cuadrado en perspectiva hasta la horizontal *FG*. Marca ese punto como *M*. Después traza en el cuadrado una recta paralela a *AB* por *E* hasta la diagonal *AC*. Marca ese punto como *J*. Traza ahora por *J* una paralela al lado del cuadrado hasta *AB* y marca ese punto como *K*. En el cuadrado en perspectiva traza por *K* una recta hacia el ojo *O* que cortará a la diagonal *FB* en *L*. Por fin tira desde *L* una horizontal paralela a *AB* hasta la línea *HM*. Marca ese punto como *N*. Ése es el punto buscado en el cuadrado visto en perspectiva, como se ve en la figura que he dibujado más abajo».



Método de la diagonal empleado para representar un punto en perspectiva, según Durero (fuente: FMC).

Fuente: adaptado de Durero (2000, tomado de Casalderrey, 2010, p.28).

Por otro lado, Johannes Kepler (1571 d.C -1630 d.C) es un reconocido matemático de la época, en cuanto al estudio de los poliedros tuvo un enfoque más matemático que los artistas geómetras, buscó definir clases de poliedros, descubrir particularidades y demostrar que ellos forman un conjunto completo, estos son los poliedros arquimedianos (Luchiari, 2018).

Según Alsina (2010) y Luchiari (2018), Kepler relacionó los seis planetas descubiertos hasta la época -Mercurio, Venus, la Tierra, Marte, Júpiter y Saturno-, con los cinco poliedros regulares; dando paso a una teoría de la organización del universo, pues sustentaba que estos sólidos estaban inscritos unos dentro de otros, relacionó los radios de las esferas concéntricas circunscritas implicadas con las órbitas de los planetas.

Otro personaje importante en la historia de la matemática fue René Descartes (1596 d.C - 1650 d.C), su contribución a la teoría de los poliedros fue la famosa Fórmula de Leonhard Euler (1707-1783), la cual prueba que, en todo poliedro convexo, el número de vértices menos el número de aristas más el número de caras es igual a dos; su demostración se debe a Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) en 1809. Con esta fórmula se puede demostrar el teorema de Euclides basado en que solamente existen cinco sólidos platónicos (González, 2009).

Figura 41

Relación de las Propiedades de Poliedros Realizada por Euler.

Ordem	Nome	Vértices	Arestas	Faces	Relação de Euler V-A+F=2
1	Tetraedro	4	6	4	4 – 6 + 4 = 2
2	Hexaedro	8	12	6	8 – 12 + 6 = 2
3	Octaedro	6	12	8	6 – 12 + 8 = 2
4	Dodecaedro	20	30	12	20 – 30 + 12 = 2
5	Icosaedro	12	30	20	12 – 30 + 20 = 2
6	Pequeno Dodecaedro estrelado	32	90	60	32 – 90 + 60 = 2
7	Icosaedro estrelado	32	90	60	32 – 90 + 60 = 2

Fuente: Luchiari (2018).

De acuerdo con Hayek (2008) y Zenil (2011), la demostración que propuso Euler a esta relación consistió en ir quitando vértices a los sólidos e ir analizando si se mantenía o no la relación entre aristas y caras del nuevo poliedro generado, según este matemático, siguiendo este proceso se llegaría a un límite dictado por las reglas de la misma relación establecida entre caras, vértices y aristas, también se utilizó el método de *exclusión de monstruos* que generó a su vez la mejora del teorema al incluir el concepto de convexidad.

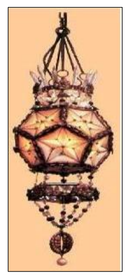
Este resultado fue estudiado en la famosa obra *Proofs and refutations: the logic of mathematical discovery* escrita por Irme Lakatos (1922-1974), quien revolucionó los procesos de demostraciones formales de la época al evidenciar el potencial de incluir en ellas, aspectos históricos, conjeturas, pruebas o demostraciones, análisis de la prueba o refutaciones, contraejemplos (locales o globales) que a su vez permiten nuevos rumbos de indagación, entre muchos otros aspectos (Hayek, 2008; Lakatos, 1963).

Edad contemporánea (1789 d.C –)

Antoni Gaudí (1852 d.C -1926 d.C) fue un artista del siglo XX, quien utilizó las formas geométricas como componente estructural teniendo en cuenta la gravedad en las cargas; también utilizó luces en forma de dodecaedro con el fin de adornar la cripta de la Sagrada Familia y otras estructuras en forma de poliedros (Alsina, 2010; González, 2009).

Figura 42

Lámpara de Forma Dodecaédrica Elaborada por Antoni Gaudí



Fuente: González (2009).

Otro artista fue Maurits Cornelis Escher (1898 d.C -1972 d.C), quien incorporó principios de la geometría en sus obras, tuvo su inspiración al observar las figuras regulares de los minerales con los que trabajaba su hermano geólogo; construyó con hilo y alambre un modelo de los cinco cuerpos platónicos inscritos, también construyó sólidos donde resaltó la belleza de la simetría de la geometría (Figura 43) (González, 2009).

Figura 43

Diseños Poliédricos Platónicos y Estrellados de Escher con Diversos Grabados.

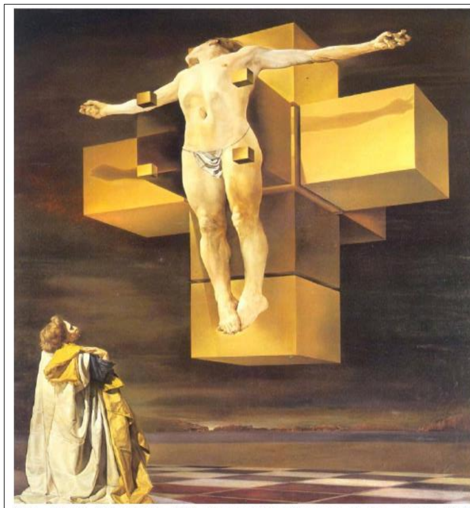
Fuente: González (2009).

Salvador Dalí (1904 d.C-1989 d.C) fue un artista inspirado en la geometría como fundamento de las reflexiones teóricas previas a la obra de arte, utilizó la mitología referente al dodecaedro para asumir una fuerte carga simbólica en algunas de sus creaciones artísticas, por ejemplo, su obra *El sacramento de la última cena* de 1955 (González, 2009).

De acuerdo con Corrales (2004), este artista no sólo utilizó aspectos matemáticos desde los poliedros, sino que además, incluyó conceptos geométricos pertenecientes a la cuarta dimensión, los politopos; un ejemplo de esto es su obra *Crucifixión, cuerpo hipercúbico* (1954) (Sarriugarte, 2014). En esta obra Dalí representó el hipercubo como analogía de su desarrollo tridimensional, para esto adoptó bases matemáticas dadas por Raimundo Lull descritas en *El discurso sobre la figura cúbica* realizada por Juan de Herrera.

Figura 44

Corpus Hypercubus Realizado por Dalí



Dalí. *Corpus hypercubus*. 1954. Metropolitan Museum of Art, Nueva York. Representación de la Crucifixión de Cristo en una cruz que geométricamente es una yustaposición de ocho cubos, desarrollo tridimensional de un hipercubo tetradimensional (de forma análoga al desarrollo de un cubo de tres dimensiones en una figura plana en forma de cruz).

Según algunas interpretaciones, al pintar la cruz de esta forma Dalí simboliza la creencia cristiana ortodoxa de que la muerte de Cristo fue un acontecimiento metahistórico, que tuvo lugar en la región del más allá, que trasciende a nuestro tiempo y espacio tridimensional.

Fuente: González (2009).

En cuanto al estudio de la geometría en la cuarta dimensión se encuentran documentos que brindaron una perspectiva referente a una posible analogía del paso de objetos desde lo unidimensional a lo bidimensional y a lo tridimensional, por ejemplo, Platón en *La República (libro VII)* donde escribió el mito de *La Caverna*, brindando una primera impresión de que así como los prisioneros sólo podían percibir la proyección de objetos tridimensionales como sombras, nosotros tal vez sólo estemos percibiendo la proyección tridimensional de figuras de cuatro o más dimensiones (Warburton, 2002). De manera similar se presenta una analogía entre dimensiones desde los estudios de Edwin Abbot quien a mediados de 1880 redactó la novela *Planilandia* (Sarriugarte, 2014).

También existen otros documentos que sustentan el estudio del objeto politopo, por ejemplo, las investigaciones de Ludwig Schläfli (1814-1895) quien analizó posibles representaciones de los sólidos en la cuarta dimensión desde varios métodos, como el método de las sombras, de las secciones, de la proyección estereográfica, entre otros (Alsina, 2010; Sarriugarte, 2014).

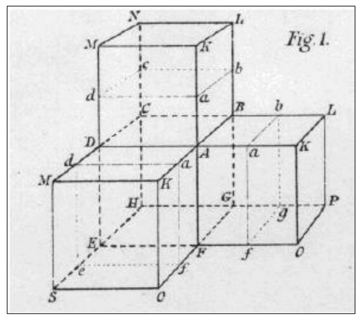
Howard Hinton (1853-1907) fue otro matemático que estudió los objetos geométricos desde el espacio tetradimensional, en 1880 escribió el artículo *What is the Fourth Dimension?* Donde propuso ver una línea perteneciente a la cuarta dimensión como secciones consecutivas conformadas por puntos en el espacio tridimensional, más adelante retomó estos estudios con su libro *La cuarta dimensión* (Sarriugarte, 2014).

Una última matemática, pero no menos importante, es Alicia Boole Stott (1860 d.C-1940 d.C), quien tuvo desde su infancia una relación con el espacio tetradimensional, se dice que fue gracias a las visitas de Howard Hinton a su familia, donde este matemático juntaba cubos de madera con el fin de que Boole y sus hermanas lograran visualizar el *hipercubo-4D*, de esta manera ella desarrolló una fuerte capacidad para interpretar los objetos en la cuarta dimensión, uno de los trabajos más representativos que realizó Boole fue el cálculo de las secciones tridimensionales de los 6 politopos-4D regulares (Polo-blanco, 2010).

Problema 10: hipercubo-4D propuesto por Alicia Boole

Figura 45

Parte del Desarrollo Tridimensional del Hipercubo-4D



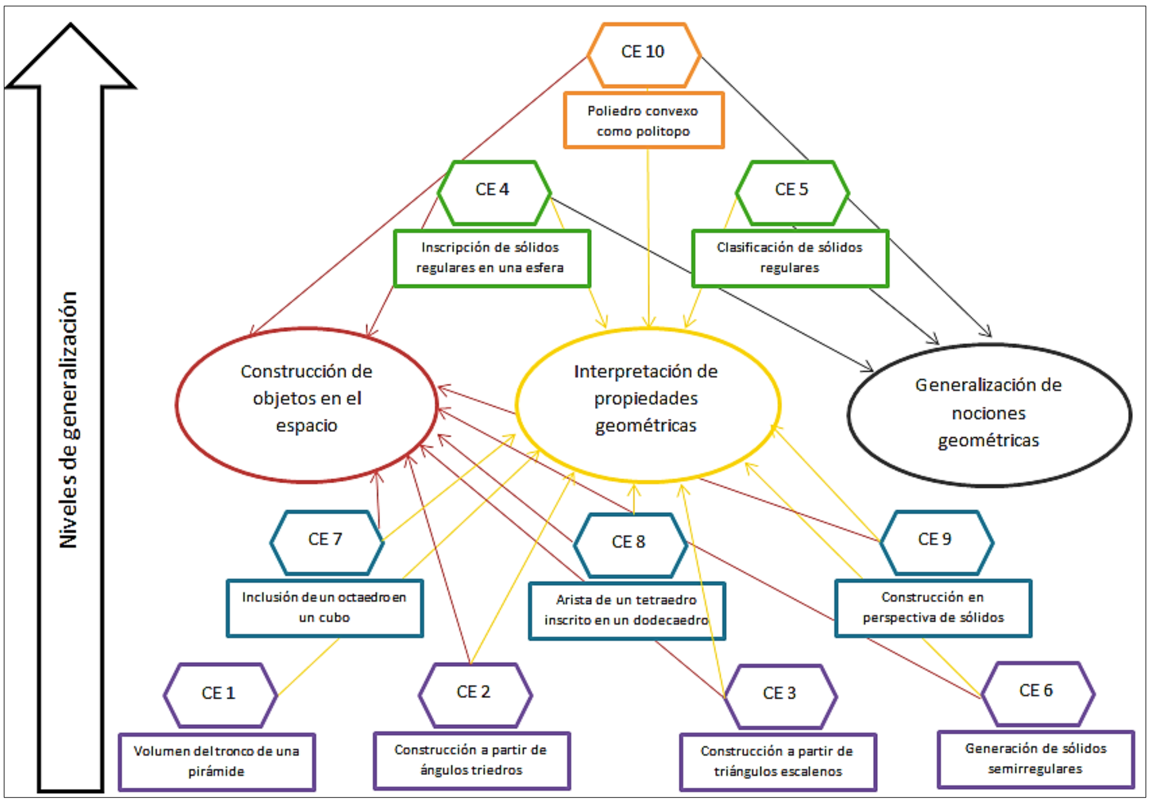
Fuente: Polo-blanco (2008).

> La primera sección tridimensional es el resultado de intersecar el politopo P con un espacio tridimensional H_1 que contenga al cubo ABCDEFGH. Para obtener la segunda sección, el espacio H_1 se traslada en dirección al centro del politopo hasta que pasa por el punto a. Si se nombra a dicho espacio H_2, la siguiente sección será $H_2 \cap P$. Notar que las caras de la nueva sección deben ser paralelas a las caras del cubo ABCDEFGH. En particular, la sección $H_2 \cap P$ contiene los cuadrados *abcd*, *abfg* y *adef*. Tras las identificaciones necesarias de los vértices correspondientes, y utilizando la simetría del politopo, se concluye que la segunda sección $H_2 \cap P$ es de nuevo un cubo isomorfo al cubo ABCDEFGH. De manera análoga, la tercera sección será de nuevo un cubo. (Polo-blanco, 2008, p. 36)

Finalmente, se considera importante aclarar que el anterior estudio histórico y epistemológico resume brevemente algunas de las situaciones que han hecho parte de la conformación del estudio del objeto poliedro convexo, sin pretender realizar un estudio exhaustivo y dejando el camino abierto para otras investigaciones que amplíen este tipo de estudios tan importantes en la educación matemática.

Figura 46

Significado Epistémico Pragmático Global del Objeto Poliedro Convexo



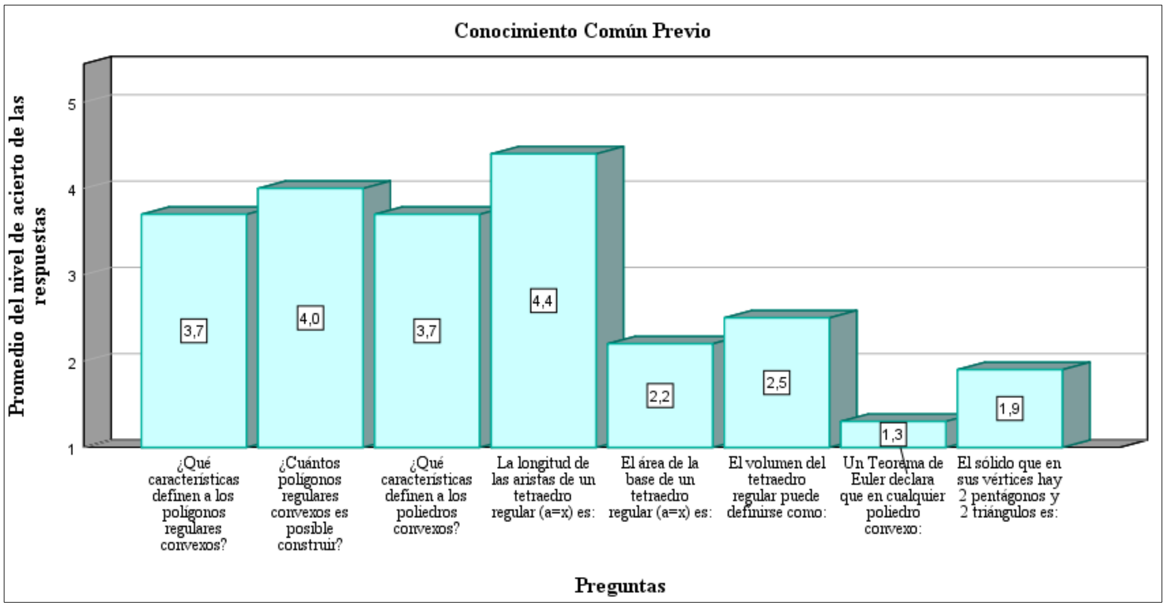
Fuente: elaboración propia.

Segundo Resultado: Identificación de Competencias Digitales y Conocimientos Previos

A continuación se presentan los principales resultados de las respuestas de los estudiantes al cuestionario de saberes previos, basados en las categorías establecidas en la Tabla 8.

Figura 47

Promedio del Nivel de Acierto de las Respuestas - Conocimiento Común Previo



Fuente: elaboración propia.

A pesar de que los contenidos temáticos de las preguntas se basaron en los conocimientos establecidos para la educación básica y media (lo que el futuro profesor deberá enseñar), las respuestas de la unidad de análisis evidenciaron una falta de afianzamiento de éstos, que de acuerdo con Bolea et al. (2008) y Sgreccia et al. (2006) puede representar una de las problemáticas que atañen a algunos profesores de matemáticas: significar la geometría como un conjunto de fórmulas y por ende fomentar la existencia de vacíos conceptuales.

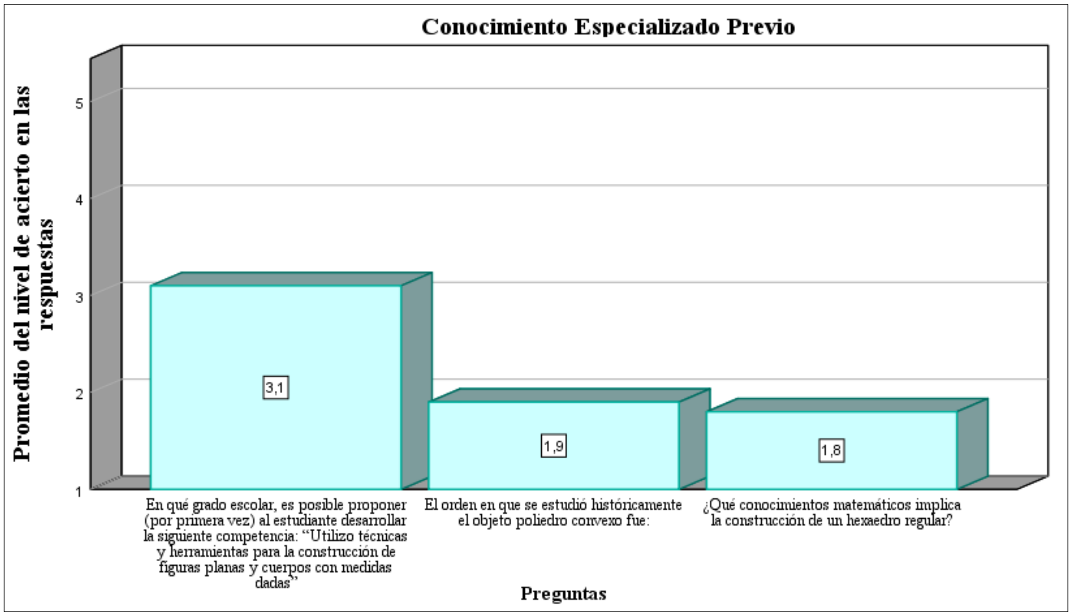
Otra problemática que se observó fue la escasez de nociones matemáticas atribuidas a los objetos polígono y poliedro convexos, pues se reduce a una muy breve descripción de la configuración que debe tener alguno de sus elementos (lados, ángulos o caras), por ejemplo, la respuesta del estudiante E7: “Los polígonos regulares convexos son figuras geométricas, las cuales cumplen la condición de que al unir dos vértices no adyacentes con una línea llamada diagonal, la diagonal queda totalmente contenida en la figura”, o la del estudiante E5: los poliedros “son cuerpos tridimensionales que ocupan un espacio finito en el espacio”. De acuerdo con Godino y Batanero (1994) esto podría llegar a sesgar las situaciones problemáticas (y por ende prácticas matemáticas) que el estudiante para profesor proponga en sus futuras clases de geometría.

Por otro lado, es posible que la falta de variedad en las representaciones interiorizadas previamente por los estudiantes, referentes al tetraedro regular, haya dificultado la identificación de sus características geométricas que dieran base para el análisis del área y el volumen de este cuerpo, probablemente este resultado se deba a la fuerte tendencia de estudiar objetos tridimensionales únicamente a partir de representaciones bidimensionales y estáticas. De acuerdo a referentes teóricos mencionados anteriormente, se infiere que es posible mitigar esta problemática con la implementación de ambientes basados en geometría dinámica.

Otra dificultad se presentó a la hora de interpretar el teorema de Euler-Descartes pues aunque en las opciones de respuesta se mostraron posibles relaciones algebraicas, la mayoría de los estudiantes no realizaron algún proceso para probar la igualdad de dichas relaciones, por ejemplo, las opciones seleccionadas fueron, en cualquier poliedro convexo “la suma del número de aristas y el de caras es igual al número de vértices más 2” ó “La suma del número de vértices y el de caras es igual al número de aristas menos 2”. Lo que suscita la necesidad de fortalecer procesos como razonamiento, modelación, resolución de problemas, entre otros.

Figura 48

Promedio del Nivel de Acierto de las Respuestas - Conocimiento Especializado Previo



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con Koehler et al. (2015), desde la sabiduría del profesor, se debe mantener una estrecha relación entre el *conocimiento pedagógico* y el *conocimiento del contenido disciplinar*, entre otros; sin embargo, el hecho de que la mayoría de los estudiantes no lograran identificar el grado escolar en que se desarrolla la competencia descrita (pregunta 1) expuso un desconocimiento de la organización por grados educativos de los saberes esperados a nivel Nacional para la educación escolar. Además, en este resultado también pudo haber influido la falta de recursos conceptuales para significar el objeto matemático en mención.

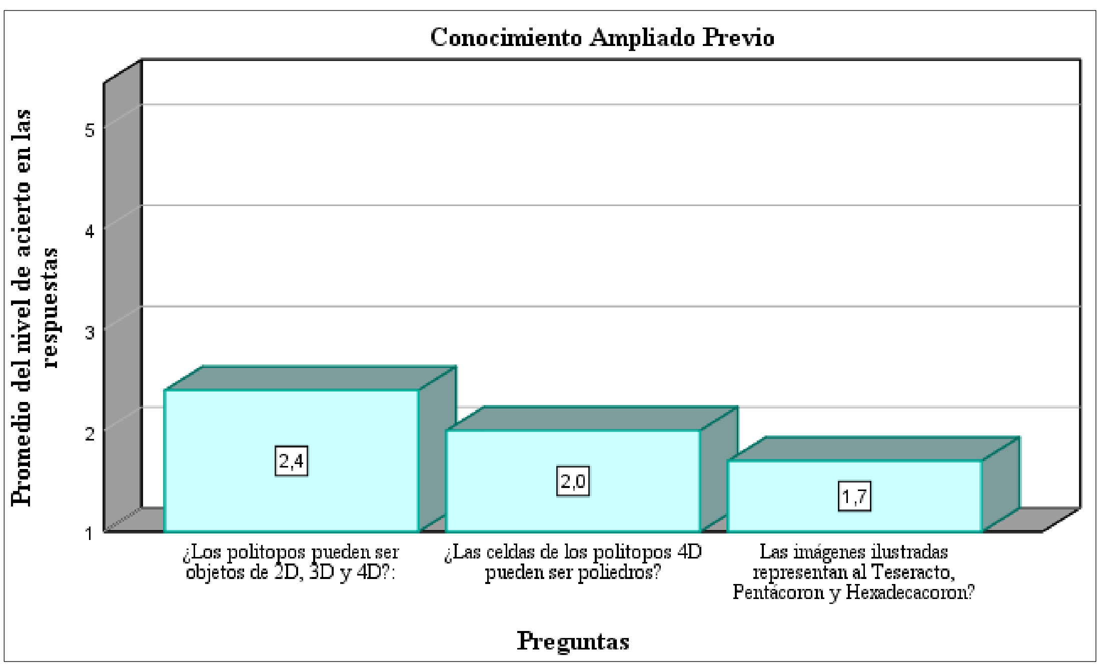
Lo anterior concuerda con la descripción corta que hicieron los estudiantes para describir los conocimientos implicados en la construcción de un hexaedro regular, por ejemplo, el estudiante E7 respondió: “identificación del cuadrado, distinción del ángulo recto”; existe una fuerte tendencia de que entre menos recursos conceptuales utilice el estudiante para describir características geométricas de una figura plana convexa, menos serán los utilizados para describir cuerpos convexos.

Por otro lado, es necesario que la unidad de análisis reconozca las situaciones problemáticas, procedimientos y demás elementos históricos que dieron paso a la conformación del objeto poliedro convexo, pues de acuerdo con Gordillo y Pino-Fan (2016) esto nutre al docente con elementos como el conocimiento de dificultades en la construcción de nociones matemáticas, los procedimientos implicados y las motivaciones que las originaron.

También se observó que los estudiantes que menos conocen de la historia del objeto poliedro convexo, tienen mayor conocimiento en cuanto a procedimientos algebraicos, como por ejemplo, el cálculo de la longitud total de las aristas de un tetraedro regular, lo que suscita un posible abandono de conocimientos epistemológicos y la fuerte incidencia de operaciones algebraicas en el aprendizaje de las matemáticas.

Figura 49

Promedio del Nivel de Acierto de las Respuestas - Conocimiento Ampliado Previo



Fuente: elaboración propia.

Existe una tendencia de significar al objeto politopo desde la cuarta dimensión, lo cual expone un desconocimiento en cuanto a su noción como generalización de objetos en el espacio n-dimensional, por ejemplo, el estudiante E1 seleccionó “Los politopos pueden ser figuras geométricas de cuatro dimensiones” sin tener en cuenta las otras opciones que contemplan su existencia en otras dimensiones. Por otro lado, se evidenció que los estudiantes que logran significar este objeto como una generalización, tienden a visualizar mejor las figuras geométricas que lo componen.

A medida en que aumenta el conocimiento en cuanto a la historia del objeto poliedro convexo, existe la tendencia de aumentar el reconocimiento del objeto politopo como una generalización y a su vez identificar mejor sus características geométricas.

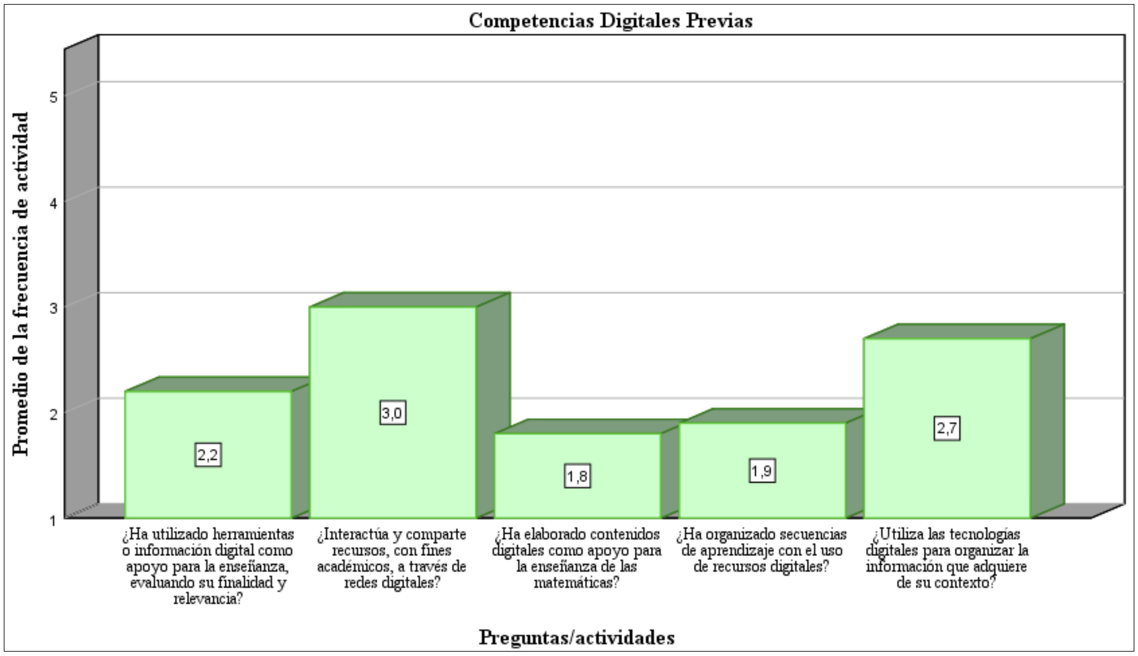
También se constató que los estudiantes tuvieron dificultades al identificar algunos objetos tetradimensionales desde el lenguaje natural y la representación gráfica, al respecto, Duval (2004, citado por Camargo, 2013), afirma que el estudiante comprende algún objeto matemático en la medida en que lo logra estudiar desde diversos registros de representación semiótica.

Es probable que los estudiantes tuvieran alguna noción de los lados tridimensionales de los politopos 4D, pero desconocieron la palabra *celda*, esto se tendrá en cuenta para la comunicación en los procesos de enseñanza y de aprendizaje guiados por esta investigación.

Las dificultades anteriormente descritas desde el análisis de los conocimientos común, especializado y ampliado previos, repercuten en el futuro desarrollo profesional de los estudiantes, pues son resultado de sus concepciones acerca de la naturaleza de las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de las mismas (Leguizamón et al., 2020).

Figura 50

Promedio de la Frecuencia de Utilización de Competencias Digitales Previas



Fuente: elaboración propia.

Los estudiantes que buscan utilizar tecnologías digitales para organizar información fueron los que habían cursado menos semestres, aunque las edades de la unidad de análisis sólo varíen en ocho años como máximo, es probable que se está intensificando la conformación de una cultura, en donde la organización de la información por medio de estos recursos sea cada vez más esencial para las nuevas generaciones. Así mismo, para estos estudiantes se intensificó el promedio de horas diarias en la utilización de estas herramientas con fines académicos.

Al respecto se ejemplifican dos casos, el estudiante E2 afirmó que nunca había utilizado estos recursos con fines organizativos y que los utilizaba con fines académicos 1 hora, mientras que el estudiante E1 dijo que los utilizaba siempre y que requería 10 horas en promedio para su utilización con fines académicos.

Los procesos de comunicación mediados por tecnologías digitales en entornos académicos se intensificaron en la medida en que los estudiantes utilizaban estos recursos para su aprendizaje, lo cual tiende a incrementarse, a su vez, con las horas empleadas y el conocimiento de software específicos de la disciplina.

Por otro lado, se constató que los estudiantes utilizan recursos digitales como apoyo para la enseñanza de las matemáticas en la medida en que aumenta su conocimiento para el manejo de software de geometría dinámica, en que aumenta la frecuencia de su utilización para el aprendizaje, y en que aumenta la interacción académica por medio de estas tecnologías.

Desde los resultados anteriormente descritos, se demuestra la necesidad de permitir a los estudiantes ampliar el Conocimiento del Contenido Tecnológico (TCK) y el Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK) (Mishra y Koehler, 2006), por medio del desarrollo de competencias digitales específicas para profesores para el aprendizaje del objeto poliedro convexo, que de acuerdo con Godino (2011) se puede considerar parte fundamental de la *faceta mediacional* del profesor dentro del contexto de la era digital.

En la Figura 51 se muestran algunos términos que los estudiantes utilizan para describir las características, que consideran, tiene un profesor que ha desarrollado competencias digitales.

Figura 51

Características de un Profesor con Competencias Digitales

Fuente: elaboración propia.

Tercer Resultado: Análisis del Desarrollo de las Facetas Epistémica y Mediacional

A continuación se presenta una descripción, con base en una categorización de las respuestas de los estudiantes guiada por la interpretación de las prácticas matemáticas realizadas, respecto al proceso de aprendizaje del objeto poliedro convexo y del desarrollo de competencias digitales de los estudiantes, que se llevaron a cabo mediante la exploración de cada una de las situaciones problemáticas implementadas y sus respectivas páginas web de retroalimentación.

Con cada una de las tres situaciones problemáticas se espera que los estudiantes desarrollen competencias digitales desde dos puntos de vista: como la utilización de recursos digitales para su aprendizaje y como herramientas para la enseñanza hipotética dentro del contexto escolar nacional del objeto poliedro convexo, donde la geometría dinámica es la base teórica para estas dos perspectivas.

Es importante aclarar que, debido a la situación generada por el virus Covid-19 se tuvo la necesidad de trabajar de una manera espontánea desde la virtualidad, lo que resaltó las dificultades que tienen algunos estudiantes para acceder a una educación virtual sin la disponibilidad de recursos tecnológicos y digitales óptimos. Este hecho implicó estrategias de flexibilidad y comunicación para llevar a cabo los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Situación Problemática 1

Esta situación problemática (Anexo 6) está mediada por el software GeoGebra Clásico 6, su exploración está guiada por dos preguntas que tienen como fin retomar saberes previos y tres preguntas que buscan una conformación del conocimiento respecto a la amplitud de un ángulo interior de cualquier polígono regular convexo, respecto a la configuración de polígonos y ángulos duales para la construcción de sólidos regulares, y finalmente, respecto a la elaboración de un AVA para un caso hipotético de su enseñanza en el ámbito escolar nacional.

La primera pregunta de saberes previos y las primeras dos preguntas de exploración hacen referencia al *conocimiento común*, mientras que la segunda pregunta de saberes previos y la última de exploración hacen referencia al *conocimiento especializado* del futuro profesor.

Identificación de Prácticas Matemáticas y Didácticas. Desde una sesión virtual mediada por la plataforma Google Meet, se inició explicando a los estudiantes la navegación en la *página web principal* para acceder al archivo de la situación problemática y para que los estudiantes pudieran descargar cada software requerido.

Debido a dificultades particulares a nivel de funcionamiento de cómputo que tuvieron algunos estudiantes, se requirió un tiempo aproximadamente de 20 minutos para que la mayoría de ellos tuvieran el archivo en sus computadores.

A continuación se explicó la metodología que se iba a llevar a cabo para la exploración de esta situación problemática (Anexo 6), por ejemplo, para la primera pregunta de la sección de saberes previos, se mencionó que “Se pueden describir características, propiedades o conceptos geométricos subyacentes a este objeto”, o para la primera pregunta de exploración se impulsó a los estudiantes para que realizaran un análisis desde la visualización del comportamiento geométrico, más que desde el análisis de los datos numéricos del ángulo interior, al decir “Se puede realizar una generalización a partir de la relación con otro(s) elemento(s) del polígono”.

Dadas las características de un ambiente mediado con software de geometría dinámica, se promovió la conformación de conjeturas por medio de las posibles construcciones que podían realizar los estudiantes para visualizar los objetos en mención, al respecto se dijo “Se puede realizar la construcción de los poliedros regulares con las herramientas del software”.

Uno de los aspectos más importantes que se resaltó fue la comunicación de ideas o procesos que los estudiantes llevarían a cabo, por ejemplo, se mencionó que “Es muy importante la argumentación de todos los procesos”.

Prácticas Matemáticas Planificadas. Con la exploración de esta situación problemática se esperaba que los estudiantes respondieran a la primera pregunta, “¿Cómo se puede conocer la amplitud de un ángulo interior de cualquier polígono regular convexo?”, partiendo desde el análisis de la amplitud de ángulos específicos como el del triángulo, cuadrado, pentágono, hexaedro, entre otros, que implicaría la utilización de herramientas del software para visualizar o construir objetos geométricos que son causales del comportamiento de dichos ángulos, y así llegar a la conformación de una generalización expresada con lenguaje algebraico o natural.

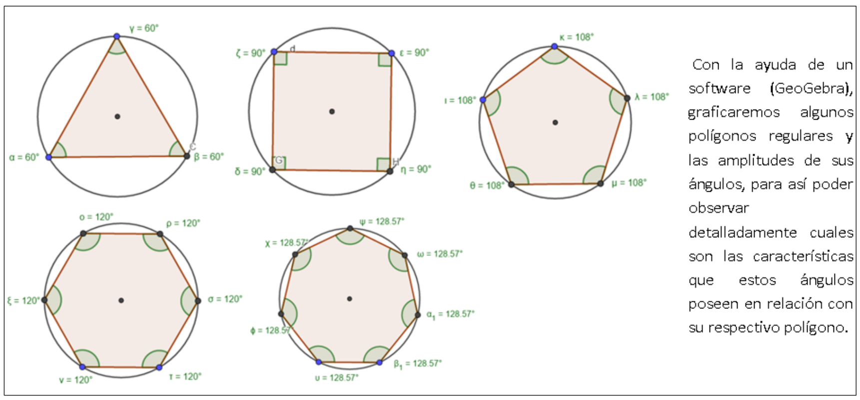
En cuanto a la respuesta para la segunda pregunta “¿Cuáles son los polígonos regulares con los que se puede construir un poliedro regular? ¿De qué manera deben estar organizados? ¿Por qué? y ¿Qué sólido conforman?” se esperaba que los estudiantes utilizaran las herramientas del software para manipular figuras poligonales y observar cuáles y en qué cantidad de estas se puede conformar un sólido regular, con lo que se llegaría no sólo a una noción de ángulo triedro, sino que además, se realizaría una demostración (no formal) de la existencia única de estos objetos tridimensionales.

Finalmente, desde la propuesta de elaborar un AVA se esperaba que los estudiantes desarrollaran estrategias para la construcción de un poliedro regular en ambientes dinámicos, y para la comunicación de situaciones problemáticas teniendo en cuenta los conocimientos básicos desde la organización por grados para la educación escolar.

Prácticas Matemáticas Realizadas. Respecto a la primera pregunta de exploración, las soluciones estuvieron divididas en tres tipos de prácticas matemáticas, un primer tipo estuvo constituido por la descripción de la amplitud de ángulos interiores de polígonos específicos, por ejemplo, el estudiante E1 con ayuda de las herramientas del software, graficó una circunferencia circunscrita para los polígonos de 3-7 lados y también marcó los ángulos interiores de estos.

Figura 52

Fragmento de Respuesta a la Primera Pregunta de Exploración (SP1) del Estudiante E1

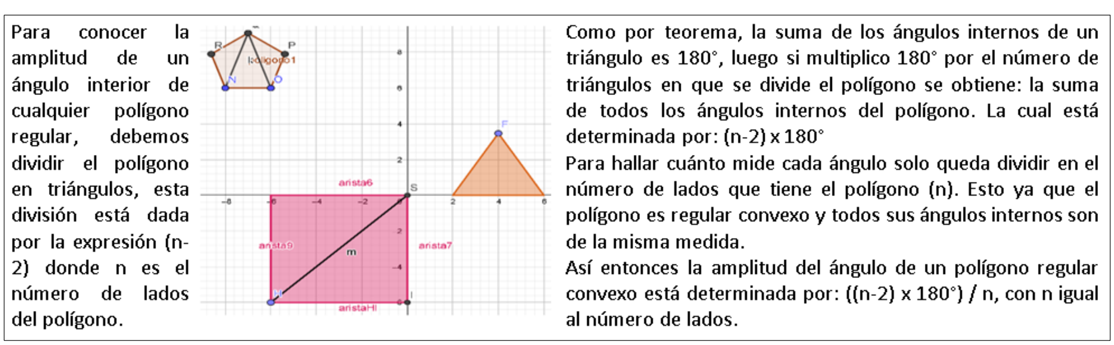


Fuente: respuesta del estudiante E1.

En el segundo tipo de prácticas matemáticas (con mayor predominio entre los estudiantes) se realizó una división de los polígonos en secciones triangulares conformadas por las diagonales cuyo origen es un mismo vértice, allí quedaron marcadas divisiones que constituían todos los ángulos interiores de los polígonos, que finalmente condujo a una generalización, un ejemplo de esto se muestra en la Figura 53:

Figura 53

Fragmento de Respuesta a la Primera Pregunta de Exploración (SP1) del Estudiante E9

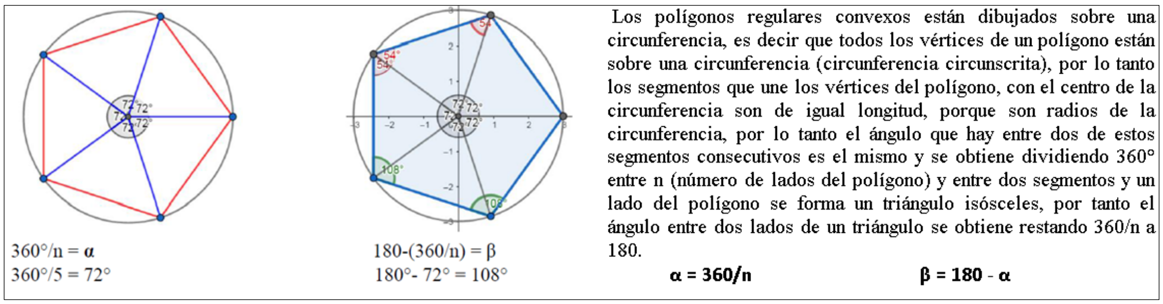


Fuente: respuesta del estudiante E9.

En el tercer tipo (con menor predominio entre los estudiantes) con ayuda de las herramientas del software, se graficó una circunferencia circunscrita y se dividió al polígono en triángulos con vértice común en el centro de éste, al dividir 360° en la cantidad de lados se conoció la amplitud de los otros ángulos de cada triángulo y se llegó a una generalización, por ejemplo, la solución del estudiante E10 fue:

Figura 54

Fragmento de Respuesta a la Primer Pregunta de Exploración (SP1) del Estudiante E10

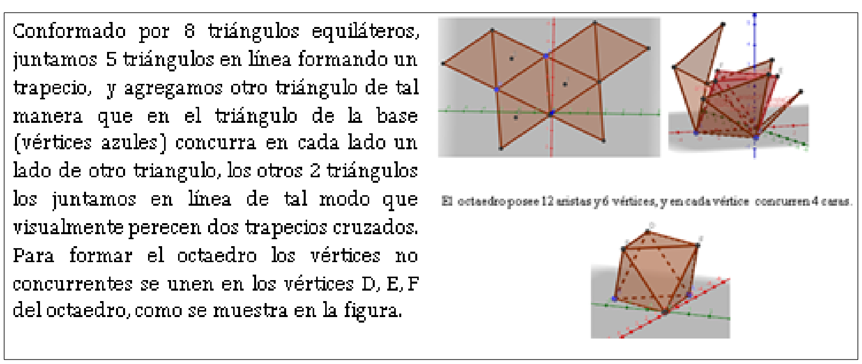


Fuente: respuesta del estudiante E10.

En cuanto a la segunda pregunta de exploración, las prácticas matemáticas se categorizaron en dos grupos, están los estudiantes que describieron la forma en que deben estar configurados los polígonos para conformar un sólido regular por medio de la visualización de construcciones dinámicas hechas en software, por ejemplo, la respuesta del estudiante E7:

Figura 55

Fragmento de Respuesta a la Segunda Pregunta de Exploración (SP1) del Estudiante E7

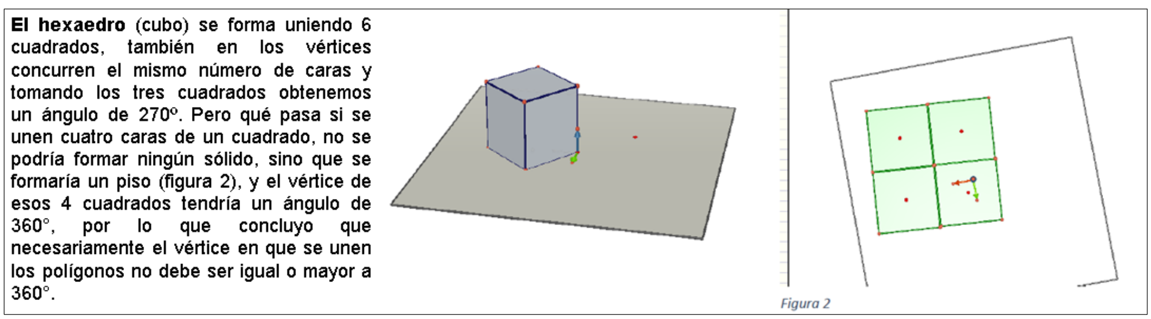


Fuente: respuesta del estudiante E7.

Otra práctica que se realizó consistió en describir la conformación de los sólidos regulares a partir del análisis de la configuración de sus ángulos duales, donde la visualización de sus representaciones en ambientes dinámicos fue esencial para los razonamientos de los estudiantes, un ejemplo de esto se muestra en la Figura 56 con la respuesta del estudiante E4, quien analizó uno por uno los cinco sólidos y finalizó concluyendo que “No se puede usar ningún otro polígono regular convexo para formar poliedros regulares; el pentágono es el último que cumple que al unirse 3 en un mismo vértice el ángulo conformado no supera los 360°”

Figura 56

Fragmento de Respuesta a la Segunda Pregunta de Exploración (SP1) del Estudiante E4



Fuente: respuesta del estudiante E4.

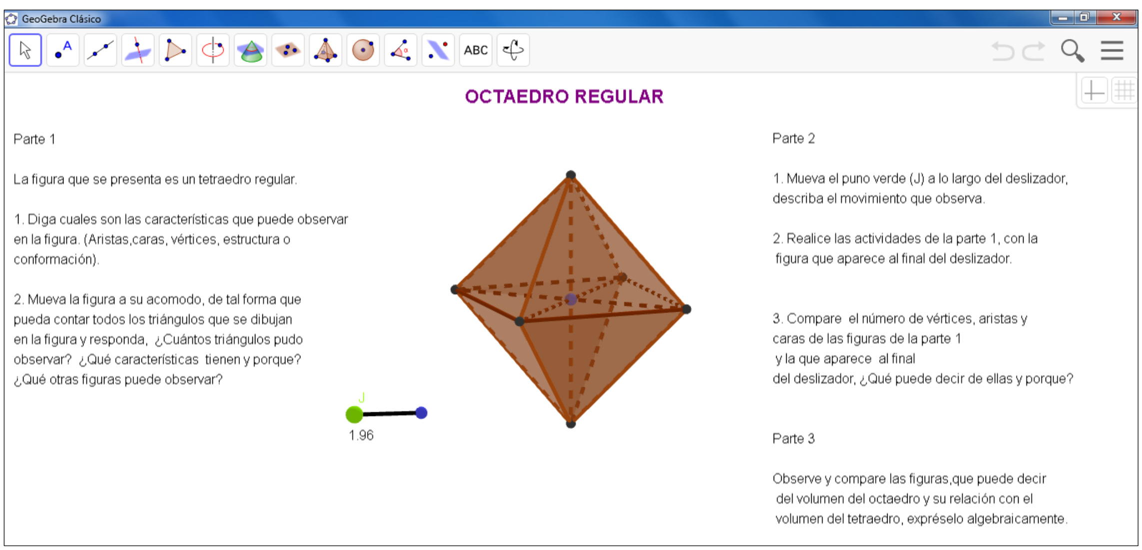
Desde las descripciones que algunos estudiantes realizaron en cuanto a la conformación de ángulo sólido, se intuye su noción como la descrita anteriormente por Joyce (1996).

Finalmente, en cuanto a la tercera pregunta de exploración, los estudiantes construyeron ambientes basados en geometría dinámica, donde representaron sólidos regulares y guiaron su exploración por medio de varias preguntas, por ejemplo, el estudiante E7 creó un ambiente (Figura 57) para la exploración del octaedro regular en una situación hipotética de su enseñanza en grado octavo y describió la manera en que se llevarían a cabo los procesos estipulados por los lineamientos nacionales de la siguiente manera:

Razonamiento: al observar las figuras y determinar el proceso y todo lo que influye en él durante la conformación de las figuras. Resolución y planteamiento de problemas: al realizar la comparación entre las figuras que se presentan, podrían surgir preguntas que se resolverán mediante la exploración, además, al resolver cada una de las preguntas formuladas. Comunicación: al expresar todas las conclusiones de la observación, respondiendo las preguntas y resolviendo las actividades. Modelación: al analizar y escribir algebraicamente la relación de los volúmenes.

Figura 57

AVA Creado por el Estudiante E7 (SP1)



Fuente: respuesta del estudiante E7.

Al respecto, González (2001) afirma que, en los ambientes de Geometría Dinámica, un primer elemento corresponde a los diagramas construidos a partir de secuencias de objetos primitivos con configuración dependiente, cuasi-independiente o independiente, esto de acuerdo a las transformaciones que se esperan ser visualizadas por el estudiante.

Por otro lado, de acuerdo con López (2017), los estudiantes pueden resolver problemas por medio de la construcción de objetos con la utilización de las herramientas de un software, en este caso, los procesos empleados por los estudiantes para resolver la primera situación problemática estuvieron permeados, en su mayoría, por el software de geometría dinámica GeoGebra.

Identificación de Objetos y Procesos Matemáticos. Esta situación problemática involucró tres tareas, primero los estudiantes debieron analizar la amplitud de un ángulo interior de cualquier polígono regular convexo, en un segundo instante, ellos tuvieron que estudiar la configuración de polígonos y ángulos duales para la construcción de sólidos regulares, finalmente construyeron ambientes dinámicos para el aprendizaje del objeto en mención.

Los elementos lingüísticos que predominaron fueron descripciones verbales (expresiones en lenguaje natural para describir procesos realizados), por ejemplo, el estudiante E4 dijo:

> Primero intenté ver cómo poder hallar el valor del ángulo interno de cada polígono viéndolo como si fuera el ángulo que se forma en un sector circular, pero inmediatamente vi que carecía de todos los datos para poder hallar el ángulo del sector circular […]

También hubieron descripciones gráficas (representaciones del objeto en mención, mediadas por software de geometría dinámica) como las presentadas en las Figuras 52-57 y descripciones simbólicas (expresiones algebraicas de las relaciones de los elementos geométricos del objeto en mención) por ejemplo, el estudiante E2 dijo "[…] la suma de los ángulos interiores de un polígono regular estaría dada por: 180°(n-2) […]".

Desde una perspectiva general, los conceptos previos fueron: diagonal, polígono, arista, vértice, circunferencia, triángulo, poliedro, entre otros, y los conceptos emergentes fueron: ángulo interior, circunferencia circunscrita, convexidad, ángulo sólido, poliedro regular, objetos dependientes o independientes de una construcción dinámica, entre otros.

Por otro lado, algunas de las propiedades que fueron utilizadas, con mayor frecuencia, por los estudiantes fueron que las amplitudes de los ángulos interiores de un triángulo suman 180°, al respecto el estudiante E6 dijo “Como sabemos que los ángulos interiores de un triángulo suman 180° […]”; por otro lado, que el ángulo sólido de un poliedro regular es menor a 360°, por ejemplo, el estudiante E9 dijo “En este caso formarían un ángulo de 240º, que al ser también menor que 360º dará lugar a otro poliedro regular, el octaedro”; finalmente, que un sólido puede descomponerse en pirámides, por ejemplo, el estudiante E4 propuso “[…] estime el volumen del octaedro teniendo en cuenta las pirámides que están en su interior”.

Un procedimiento general, que los estudiantes realizaron, en unos casos de manera completa y en otros parcial, fue la identificación de datos específicos, por medio de la visualización de familias de representaciones, que permitieran la conformación de conjeturas y de este modo llegar a una generalización, que en el caso de la primera tarea matemática fue expresada algebraicamente, en el caso de la segunda fue por medio de lenguaje natural. En cuanto a la tercera tarea los estudiantes construyeron representaciones de los sólidos regulares teniendo en cuenta la dependencia de objetos primitivos de acuerdo a la animación que se quería llevar a cabo.

La argumentación de los procesos realizados, en la primera tarea, estuvieron focalizados, en la mayoría de los casos, hacia la explicación de la conformación de ángulos interiores de acuerdo a la regularidad de los polígonos, por ejemplo, el estudiante E9 dijo “[…] esto ya que el polígono es regular convexo y todos sus ángulos internos son de la misma medida”.

En la segunda tarea matemática, no hubo una argumentación formal para decir la razón por la cual no se puede conformar un sólido regular con ángulos duales mayores o iguales a 360°, al respecto el estudiante E1 dijo “si ponemos cuatro cuadrados consecutivos donde sólo forman un vértice entre todos, el ángulo de ese vértice es igual a 360 grados sexagesimales, por tanto, sólo lograrán formar una figura bidimensional”.

En la tercera tarea, las situaciones propuestas por algunos estudiantes promovieron la argumentación para responder sus preguntas, por ejemplo, el estudiante E7 aludió a las caras poligonales de un octaedro y preguntó “¿Qué características tienen y por qué?”.

Situación Problemática 2

Esta situación problemática está mediada por el software Cabri 3D, su exploración está guiada por dos preguntas cuyo objetivo es retomar saberes previos, y cinco preguntas de exploración que buscan una conformación del conocimiento respecto a los tipos de poliedros emergentes al truncar un dodecaedro regular, asimismo, en cuanto a la historia del objeto poliedro convexo, también acerca de la relación entre las áreas laterales de un dodecaedro y su truncamiento y finalmente con relación a la elaboración de un AVA basado en problemas que fueron estudiados en la historia del objeto poliedro convexo (Anexo 7).

La primera pregunta de saberes previos y las preguntas 1, 3 y 4 de exploración hacen referencia al *conocimiento común*, mientras que la segunda pregunta de saberes previos y las preguntas 2 y 5 de exploración hacen referencia al *conocimiento especializado*.

Identificación de Prácticas Matemáticas y Didácticas. Desde una sesión virtual, se propuso a los estudiantes empezar a trabajar con la segunda situación problemática y se dio un tiempo aproximadamente de 15 minutos para que, desde la *página web principal*, los estudiantes descargaran el software y el ambiente de la situación en mención.

Algunos estudiantes manifestaron no contar en ese momento con un computador, por lo que hubo la necesidad de enviarles la situación problemática por medio de un archivo GeoGebra para que lo pudiera abrir en la aplicación para celular, y se tuvo que realizar una explicación del cómo gestionar y guardar el ambiente en los dispositivos móviles.

A continuación se explicó la metodología que se iba a llevar a cabo para la exploración de esta situación problemática (Anexo 7), por ejemplo, para la indagación en la historia del objeto poliedro convexo se mencionó a los estudiantes que buscaran "mínimo dos problemas explorados en la historia"; en cuanto a la explicación del proceso de estimación que debían hacer los estudiantes para resolver la tercera pregunta, se indicó que ésta debía ser "basada en la observación de los objetos" haciendo referencia al ambiente dinámico; y en cuanto a la explicación de la generalización que debían realizar los estudiantes en la cuarta pregunta se resaltó que debía estar basada en un valor *a* para la longitud de la arista del dodecaedro.

Teniendo en cuenta que no todos los estudiantes pudieron conectarse a la clase virtual, se realizó una herramienta digital donde se especificaron aspectos técnicos del software y del uso de la aplicación desde el celular, y también las explicaciones referentes a la metodología de trabajo de la situación problemática.

Prácticas Matemáticas Planificadas. Con esta situación problemática se esperaba que los estudiantes, al responder la primera pregunta "usando la opción de animación ¿Cuántos y cuáles tipos de poliedros observa?" identificaran características de sólidos regulares y semirregulares por medio de la observación de la familia de representaciones generada por el ambiente dinámico.

En cuanto a la respuesta de la segunda pregunta "¿Quiénes fueron los personajes, en la historia, que estudiaron los poliedros convexos? ¿Qué problemas geométricos exploraron?" se esperaba que los estudiantes indagaran, por medio de recursos digitales, algunos problemas que dieron paso a la conformación del objeto poliedro convexo, de esta manera no sólo ampliará el espectro de posibles situaciones problemáticas que ellos pudieran utilizar en su futura labor docente, sino que además, apoyará el desarrollo de sus competencias digitales en el sentido de utilizar estos recursos desde una perspectiva crítica respecto a la veracidad del contenido.

También se esperaba que los estudiantes realizaran alguna conjetura, desde la observación de la transformación que sufre el área lateral del dodecaedro regular al ser truncado hasta llegar al icosidodecaedro, esto mediante la respuesta a la tercera pregunta “Desarrollando el proceso de estimación, ¿Qué área lateral debe ser mayor, la del dodecaedro o la de su truncamiento (el icosidodecaedro)? Argumente su respuesta”, y de esta manera se introduciría el proceso de solución para la cuarta pregunta.

En la cuarta pregunta “¿Qué relación existe entre el área lateral de un dodecaedro de arista = a unidades, y el área del icosidodecaedro generado por él? (deslice el punto verde para apoyar su visualización)” se esperaba que los estudiantes identificaran la transformación de los elementos geométricos y por medio de un valor incógnito para el valor de la arista del dodecaedro, encontraran el valor de la arista de su truncamiento (icosidodecaedro), de esta manera podrían describir una razón entre sus áreas.

Finalmente, desde la propuesta de elaborar un AVA se esperaba que los estudiantes desarrollaran estrategias para la construcción de alguna situación problemática, estudiada en la historia del objeto poliedro convexo, en ambientes dinámicos y también para la comunicación de ésta teniendo en cuenta los conocimientos básicos desde la organización por grados para la educación escolar.

Prácticas Matemáticas Realizadas. Las respuestas para la primera pregunta estuvieron divididas en tres grupos, están los estudiantes que identificaron características geométricas en términos de regularidad del dodecaedro, el dodecaedro truncado y el icosidodecaedro, por ejemplo, la respuesta del estudiante E6:

> Podemos observar 3 poliedros: el dodecaedro, que es un poliedro regular, y al mover el deslizador a la derecha, otros dos poliedros semirregulares: en uno de estos, sus caras están conformadas por polígonos regulares (triángulos equiláteros y decágonos), y en el otro, sus caras están conformadas por pentágonos y triángulos, además, también son convexos […]

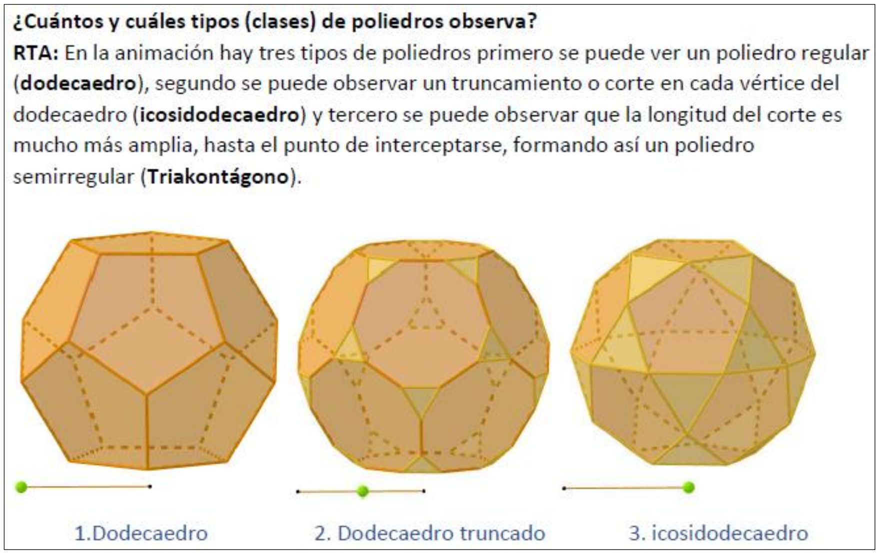
También estuvieron los estudiantes que respondieron dando una categorización basada en las características de sus componentes geométricos y el nombre de estos sólidos, por ejemplo, el estudiante E7 respondió:

> Se observan tres tipos de poliedros: el primero es el formado por 12 pentágonos regulares y es llamado dodecaedro, el segundo es el formado por 20 triángulos equiláteros y 12 pentágonos regulares, por lo que tiene 32 caras, 60 aristas y 30 vértices, y es llamado Icosidodecaedro, y el tercero es el formado por 20 triángulos equiláteros y 12 decágonos regulares, por lo que tiene 32 caras, 90 aristas y 60 vértices, y es llamado Dodecaedro Truncado.

Finalmente, están los estudiantes que identificaron características de estos sólidos a partir de la regularidad de sus componentes y además los caracterizaron de acuerdo a su nombre, en la Figura 58 se presenta la respuesta del estudiante E1.

Figura 58

Respuesta a la Primera Pregunta de Exploración (SP2) del Estudiante E1



Fuente: respuesta del estudiante E1.

Desde las descripciones que algunos estudiantes realizaron en cuanto los sólidos regulares y semirregulares, se intuye una correspondencia con las nociones descritas anteriormente por Godino y Ruiz (2002).

En cuanto a la segunda pregunta, los estudiantes indagaron personajes de la historia del objeto poliedro convexo como Arquímedes (287 a.C-212 a.C), Euclides (325 a.C-265 a.C.), Platón (427 a.C-347 a.C.), Teeteto (417 a.C.-369 a.C), Pitágoras de Samos (570 a.C- 469 a.C), Johannes Kepler (1571 d.C -1630 d.C), Leonardo da Vinci (1452 d.C-1519 d.C), Luca Pacioli (1445 d.C-1514 d.C), Leonhard Euler (1707-1783), Eugène Charles Catalan (1814-1894), entre otros. Así mismo, los problemas geométricos que retomaron estuvieron enfocados en la regularidad de los sólidos, su semirregularidad e irregularidad, su inscripción en esferas, su aplicación en el arte, la relación entre sus componentes geométricos y las dualidades entre ellos.

Respecto a la tercera pregunta, las prácticas estuvieron divididas en tres grupos, están los estudiantes que afirmaron que el área lateral del dodecaedro es menor a la de su truncamiento, el icosidodecaedro, por ejemplo, el estudiante E2 dijo:

> Considero que el área lateral del truncamiento del dodecaedro (el icosidodecaedo) es mayor a la del propio dodecaedro, debido que al hacerle un truncamiento a las caras del dodecaedro esta nueva figura va a tener una forma circular, es decir, va a parecer una esfera, por lo tanto, en comparación con la anterior considero esta va a tener un área lateral mayor.

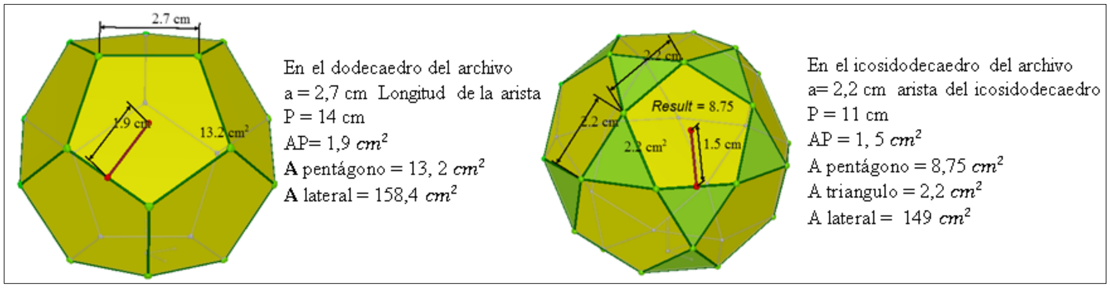
Desde otro punto de vista, estuvieron los estudiantes que afirmaron que el área lateral del dodecaedro debería ser igual a la de su truncamiento, el icosidodecaedro, por ejemplo, el estudiante E6 dijo:

> Considero que deben ser áreas iguales, pues, aunque al mover el deslizador a la derecha se convierta en un icosidodecaedro, podemos observar que los polígonos (triángulos) aumentan y los pentágonos resultantes disminuyen su tamaño, es decir, se mantiene un equilibrio en sus áreas.

También estuvieron los estudiantes que afirmaron que el área lateral del dodecaedro debería ser mayor a la de su truncamiento, el icosidodecaedro, por ejemplo, el estudiante E10 dijo "[…] del ejemplo podemos determinar que el área lateral del dodecaedro tiene mayor área lateral, aunque se pudiera pensar que el icosidodecaedro tiene mayor área lateral porque tiene más caras" (Figura 59).

Figura 59

Fragmento de Respuesta a la Tercera Pregunta de Exploración (SP2) del Estudiante E10



Fuente: respuesta del estudiante E10.

Desde la estimación de la relación entre las áreas de los objetos en mención, se realizaron conjeturas provenientes de la visualización y la intuición, que con ayuda de la cuarta pregunta, fueron comprobadas; al respecto, Camargo y Acosta (2012) afirman que la geometría dinámica permite a los estudiantes equilibrar las ideas que surgen desde lo empírico y lo teórico.

Respecto a la cuarta pregunta, de manera anticipada se explica que los cálculos realizados por los estudiantes estuvieron afectados por la cantidad de cifras decimales que toman, por defecto, los software utilizados. Retomando la descripción de las prácticas matemáticas elaboradas por los estudiantes, se constató su división en cuatro tipos, por ejemplo, está el estudiante E6 quien describió una relación entre las áreas de un dodecaedro particular y su truncamiento, el icosidodecaedro, sin embargo no realizó algún proceso para llegar a una generalización con base en un valor incógnito para las aristas de los objetos en mención.

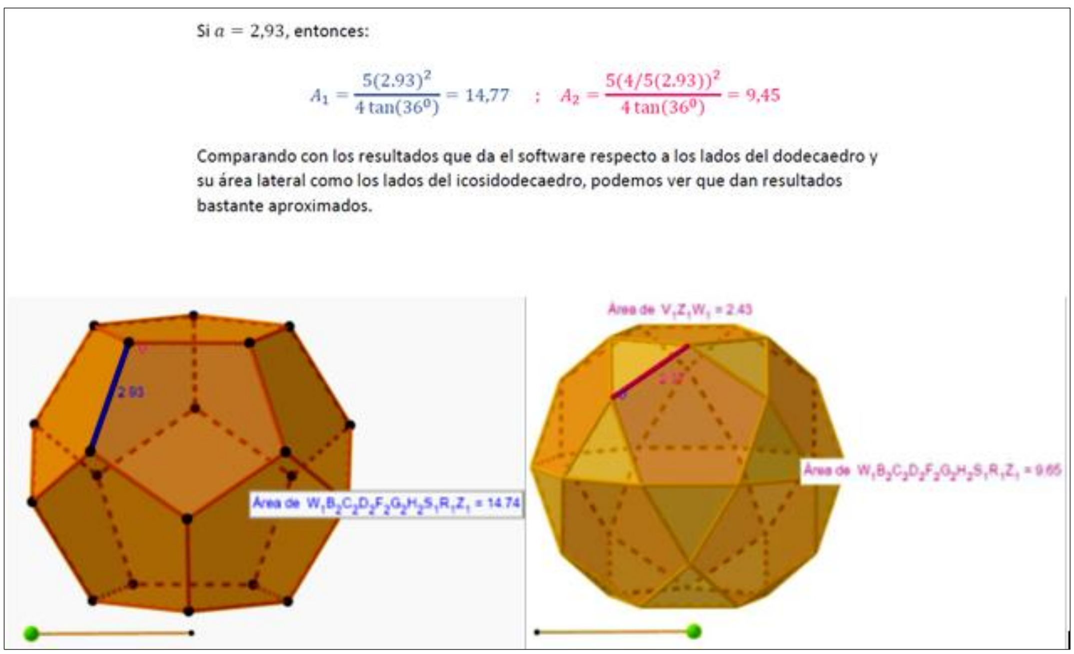
De acuerdo con Sandoval y Moreno-Armella (2012), cuando se utiliza la herramienta de arrastre, la conjetura de los estudiantes se amplía a una familia de representaciones; lo que pudo haber llevado al estudiante E6 a corroborar que el resultado al que llegó no se aplica para un valor cualquiera de la longitud de la arista.

Desde otra perspectiva, el estudiante E2 se basó en las áreas laterales de un dodecaedro con área $20.64a^2$ y su icosidodecaedro con área $29.30a^2$ y desde estos datos identificó una razón aproximada entre las áreas de los objetos en mención, que además se aplica para un valor cualquiera de la longitud de la arista del dodecaedro, pues afirmó "Por lo tanto, la relación de área lateral entre un dodecaedro y su truncamiento es 1 a 1.41"

Por otro lado, el estudiante E1 basó sus razonamientos en el cálculo de la razón entre el valor de la arista del dodecaedro y la arista del icosidodecaedro, pues afirmó "Tenemos que si L= a unidades, entonces b≈4/5 a unidades (eso se puede evidenciar en la animación)", donde L correspondía a la arista del dodecaedro y b a la de su truncamiento, enseguida probó sus conjeturas como se muestra en la Figura 60.

Figura 60

Fragmento de Respuesta a la Cuarta Pregunta de Exploración (SP2) del Estudiante E1

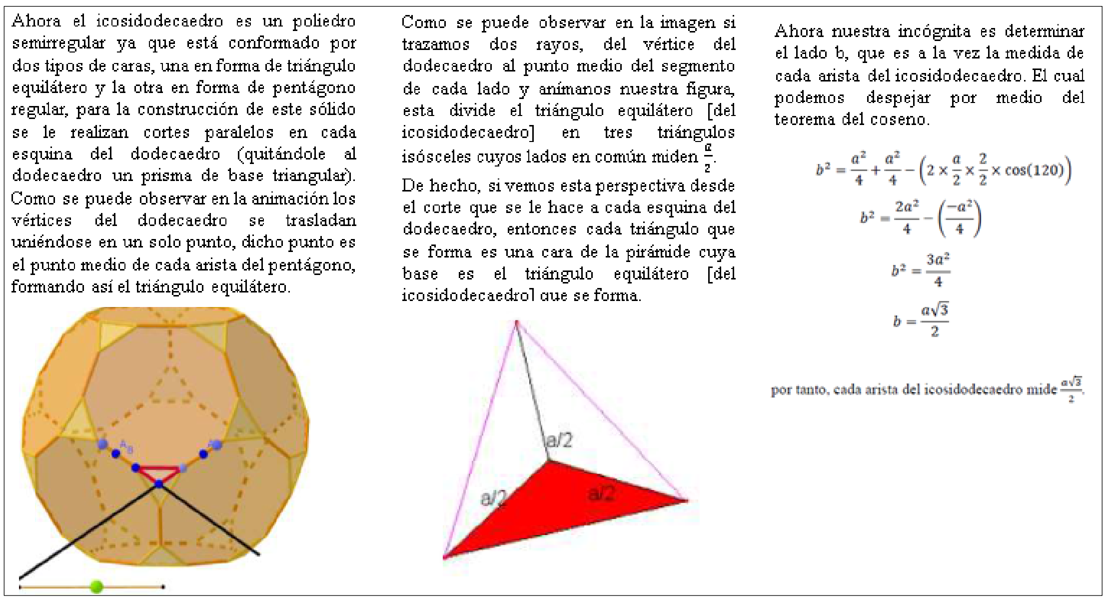


Fuente: respuesta del estudiante E1.

El cuarto tipo de práctica matemática, realizada por algunos estudiantes, se caracterizó por llegar a una generalización con base en la visualización de la ubicación de un vértice del icosidodecaedro respecto a la transformación de las aristas y vértices del dodecaedro, este proceso para encontrar el valor de la arista del icosidodecaedro, teniendo en cuenta que el valor de la arista del dodecaedro tiene longitud *a* unidades, fue el más largo y requirió mayores conceptos previos no sólo desde la geometría, sino que además, desde la trigonometría, al respecto se ejemplifica con la respuesta del estudiante E9 quien concluyó “Por tanto, la relación entre el área del dodecaedro y su truncamiento es aproximadamente 0,94” luego de dividir las ecuaciones de las áreas, de los objetos en mención, deducidas por los análisis de la Figura 61.

Figura 61

Fragmento de Respuesta a la Cuarta Pregunta de Exploración (SP2) del Estudiante E9



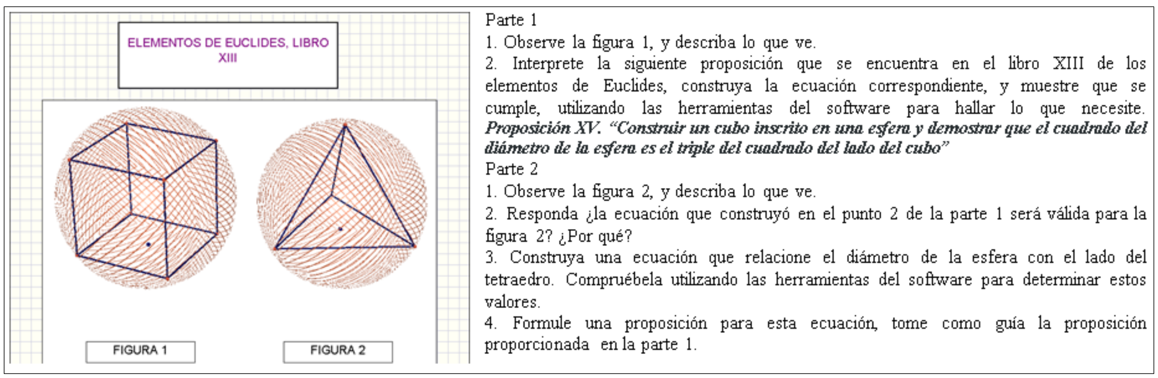
Fuente: respuesta del estudiante E9.

En cuanto a la quinta pregunta, los estudiantes elaboraron ambientes virtuales para el aprendizaje del objeto poliedro convexo con base en problemas que se estudiaron en su historia; con esta práctica, no sólo se desarrollaron competencias digitales, sino que además, se desarrolló el conocimiento especializado, en cuanto a la comunicación y proposición de situaciones problemáticas, con base en los lineamientos nacionales para un caso hipotético. Por ejemplo, el AVA creado en el software Cabri 3D por el estudiante E7, que estuvo dirigido a grado noveno (Figura 62) y uno de sus objetivos fue “[…] observar las figuras y lograr expresar lo que observa en palabras, […] interpretar lo que leen convirtiéndolo en expresiones algebraicas”.

Estos procesos realizados con el estudio de las áreas laterales, concuerdan con los evidenciados en la investigación de Villamil et al. (2018), en cuanto a la tendencia que tienen los estudiantes para realizar una conversión entre los sistemas de representación verbal, gráfico y analítico cuando se analiza este objeto.

Figura 62

AVA Creado por el Estudiante E7 (SP2)



Fuente: respuesta del estudiante E9.

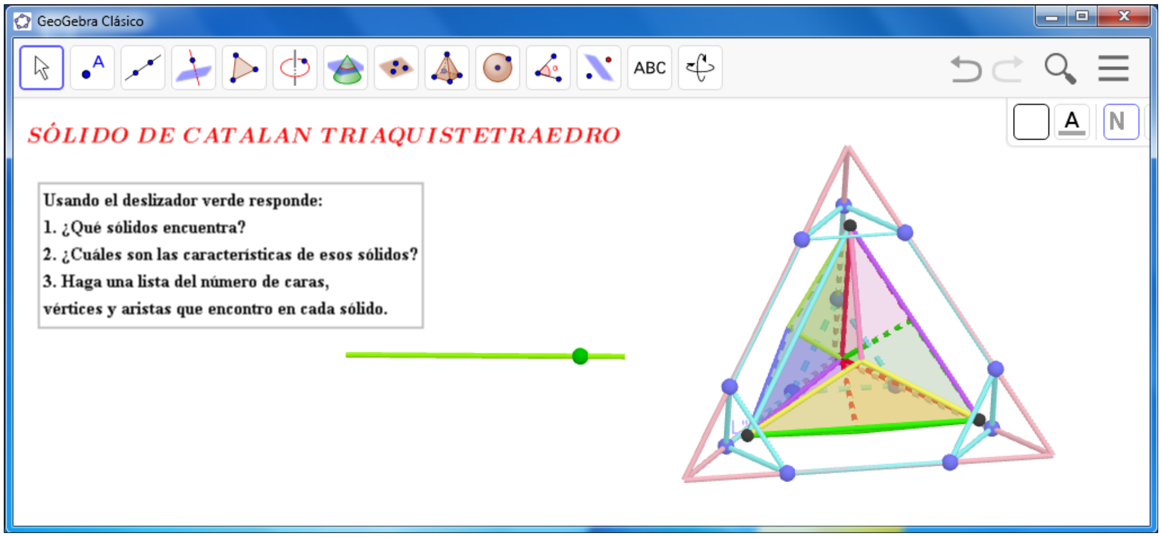
También se trabajaron problemas referentes a la categorización de poliedros convexos de acuerdo a su regularidad, por ejemplo, el creado por el estudiante E9 (Figura 63), quien dijo:

> Esta actividad va dirigida a estudiantes de séptimo grado, debido a que en esta solo se debe caracterizar los sólidos, permitiendo una introducción a conceptos como el truncamiento de un sólido. Además, esta permite que los estudiantes puedan visualizar no solamente un tipo de sólido, en ella encontrarán un poliedro regular (Tetraedro sólido de Platón), un poliedro semirregular (sólido Arquimediano) y el Triaquistetraedro poliedro denominado como sólido de catalan. Esta situación lleva a que los estudiantes conjeturen y verifiquen propiedades de congruencias y semejanzas entre objetos tridimensionales, fortaleciendo en ellos el pensamiento espacial y sistemas geométricos.

De acuerdo con González (2001), este AVA tiene diagramas construidos a partir de secuencias de objetos primitivos con configuración dependiente, como las aristas respecto a sus poliedros, e independiente como los vértices de los poliedros respecto al espacio en que están representados.

Figura 63

AVA Creado por el Estudiante E9 (SP2)



Fuente: respuesta del estudiante E9.

Respecto a este AVA, el diagrama representa un tetraedro, su truncamiento y el triaquistetraedro, que están construidos a partir de secuencias de objetos primitivos con configuración dependiente (los vértices del triaquistetraedro), cuasi-independiente (los vértices del tetraedro truncado) o independientes (vértices del tetraedro) González (2001).

Por otro lado, los procesos anteriormente descritos concuerdan con uno de los resultados de la investigación realizada por Ruiz (2012), donde se evidencia que a pesar de que el manejo de un software en ocasiones es difícil, vale la pena utilizarlo dado su potencial para permitir la construcción de representaciones, visualizarlas y comprobar conjeturas.

Identificación de Objetos y Procesos Matemáticos. Esta situación problemática involucró cinco tareas, primero los estudiantes describieron los posibles sólidos construidos con el truncamiento de un sólido regular, también indagaron problemas estudiados en la historia, después tuvieron que estimar qué área lateral debería ser mayor de los objetos en mención, que en seguida lo corroboraron con un valor *a* para la longitud de una arista, y finalmente realizaron un ambiente para el aprendizaje del objeto poliedro convexo.

Los elementos lingüísticos que predominaron fueron descripciones verbales (expresiones en lenguaje natural para describir procesos realizados), descripciones gráficas (representaciones del objeto en mención, mediadas por software de geometría dinámica) como las presentadas en las Figuras 58-63 y descripciones simbólicas (expresiones algebraicas de las relaciones de los elementos geométricos del objeto en mención) que se ejemplifican en el anterior apartado.

Desde una perspectiva general, los conceptos previos fueron: poliedro regular, polígono, arista, vértice, triángulo, teorema del coseno, ángulo, entre otros, y los conceptos emergentes fueron: poliedro semirregular, icosidodecaedro, dodecaedro truncado, punto medio, truncamiento, pirámide, sólidos inscritos, sólidos duales, esfera, objetos dependientes o independientes de una construcción dinámica, entre otros.

Por otro lado, algunas de las propiedades que fueron utilizadas, con mayor frecuencia, por los estudiantes fueron que el área lateral de un sólido es la suma del área de los polígonos que lo conforman, por ejemplo, el estudiante E2 dijo "Para calcular el área lateral de un dodecaedro, se debe sumar el área de todas sus caras"; también, que un sólido semirregular está conformado por caras regulares de diferentes tipos, por ejemplo, el estudiante E9 dijo "Ahora el icosidodecaedro es un poliedro semirregular ya que está conformado por dos tipos de caras, una en forma de triángulo equilátero y la otra en forma de pentágono regular […]", entre otras.

Un procedimiento general, que los estudiantes realizaron, en unos casos de manera completa y en otros parcial, consistió en visualizar la transformación que sufrieron los componentes geométricos del dodecaedro al ser truncado, además de identificar características del icosidodecaedro, de esta manera se utilizaron datos específicos del área de las caras o de la longitud de las aristas, lo que finalmente llevó al planteamiento de generalizaciones expresadas simbólicamente. En cuanto a la quinta tarea los estudiantes construyeron representaciones de los sólidos convexos teniendo en cuenta la dependencia de objetos primitivos de acuerdo a la animación que se quería llevar a cabo.

La argumentación de los procesos realizados, en la primera tarea, estuvieron focalizados, en la mayoría de los casos, hacia la explicación de las diferencias entre los sólidos emergentes en el truncamiento en mención, por ejemplo, el estudiante E10 explicó "En este poliedro sus caras son iguales, son pentágonos iguales […] en este poliedro semirregular todas sus caras no son iguales, sus caras son triángulos y pentágonos".

En la tercera tarea matemática, los estudiantes tuvieron que argumentar por qué se consideraba un área mayor a la otra respecto a los objetos en mención, por ejemplo, el estudiante E8 explicó que "Se puede estimar que es mayor el dodecaedro que el icosidodecaedro pues las caras son más grandes lo cual permite ser mayor".

Finalmente, en la cuarta tarea algunos estudiantes argumentaron los procesos que realizaron para encontrar una relación entre las áreas del dodecaedro y su truncamiento, el icosidodecaedro, por ejemplo, el estudiante E4 explicó, el resultado al que llegó, al decir "El 11,22 sale de las diferencias entre las áreas estimadas […]".

Uno de los resultados de la investigación realizada por Córdoba y Quintana (2013) evidenció la dificultad que presentan algunos estudiantes, al utilizar lenguaje cotidiano y no especializado para expresar ideas matemáticas, que en el caso de los resultados de esta situación problemática, se presentó parcialmente, por ejemplo al utilizar la palabra "igual" en vez de "congruentes" para comparar dos polígonos.

Situación Problemática 3

Esta situación problemática (Anexo 8) está mediada por el software Cabri 3D, está encaminada al desarrollo del *conocimiento ampliado* del futuro profesor de matemáticas, su exploración está guiada por una pregunta que busca retomar saberes previos y cuatro preguntas de exploración que buscan una conformación del conocimiento en cuanto a la historia del objeto politopo, también referente a la representación del hipercubo como analogía en las dimensiones 0-4, asimismo en cuanto a la identificación de patrones en sus componentes geométricos presentes hasta la cuarta dimensión y finalmente, referente a la elaboración de un ambiente virtual para el aprendizaje del objeto en mención.

Dada la complejidad de la interpretación del hipercubo tetradimensional desde una visualización en tres dimensiones, se elaboró un segundo ambiente mediado por el software GeoGebra Clásico 6 (Anexo 9), en donde no sólo se presentan tres representaciones del objeto, sino que además, se señala la correspondencia, entre ellas, de los componentes geométricos del objeto en mención.

Teniendo en cuenta que no todos los estudiantes pudieron conectarse a la clase virtual, también se elaboró una herramienta digital donde se describieron las explicaciones referentes a la metodología de trabajo de la situación problemática.

Identificación de Prácticas Matemáticas y Didácticas. Desde una sesión virtual, se propuso a los estudiantes empezar a trabajar con la tercera situación problemática, de manera similar con las anteriores situaciones, se dio un tiempo de 15 minutos aproximadamente para que los estudiantes descargaran, desde la *página web principal*, los dos archivos y también fue necesario elaborar el archivo principal desde el software GeoGebra para trabajar con la aplicación de celular.

Para esta situación problemática se tuvieron dos momentos, el primero fue de manera sincrónica y consistió en permitir a los estudiantes responder la pregunta de saberes previos, la segunda y la tercera pregunta de exploración de manera individual y en seguida ir reflexionando con respecto a los razonamientos de sus compañeros; el segundo momento se realizó de manera asincrónica y radicó en responder la primera y cuarta pregunta de exploración desde el trabajo grupal entre dos estudiantes.

Prácticas Matemáticas Planificadas. En esta situación problemática se esperaba que los estudiantes, al responder la primera pregunta ¿Quiénes fueron los personajes que, en la historia, estudiaron a los politopos? ¿Qué problemas geométricos exploraron? indagaran algunos problemas que dieron paso a la conformación del objeto politopo, teniendo en cuenta los estudios, realizados en anteriores épocas de la historia, que involucraron una analogía del paso de objetos geométricos entre dimensiones, de esta manera no sólo ampliará el panorama de las posibles situaciones problemáticas que ellos pudieran estudiar, sino que además, apoyará el desarrollo de sus competencias digitales en el sentido de utilizar estos recursos desde una perspectiva crítica respecto a la veracidad del contenido digital.

Con la respuesta a la segunda pregunta "Utilice los deslizadores en orden amarillo, anaranjado, azul y verde. ¿Qué conclusión puede deducir en cuanto al cambio de dimensión? ¿En qué momento se genera un politopo? Justifique su respuesta" se esperaba que los estudiantes describieran la transformación de los objetos geométricos punto, segmento, cuadrado, cubo e hipercubo-4D desde su proyección para el paso entre dimensiones, también que concluyeran que el objeto politopo es una generalización de las n dimensiones y finalmente que, en este caso, se estaban visualizando representaciones del hipercubo hasta la cuarta dimensión.

Respecto a la tercera pregunta “Devuelva al punto inicial los deslizadores verde y azul, y a continuación utilice el deslizador rojo ¿A qué politopo corresponde esta representación?” se esperaba que los estudiantes identificaran el desarrollo tridimensional del hipercubo-4D desde la analogía del desarrollo bidimensional del cubo (hipercubo-3D).

Al proponer la cuarta pregunta “¿Existen patrones que describan la cantidad de vértices (lados 0D), aristas (lados 1D), polígonos (lados 2D) y poliedros (lados 3D) que tienen: un punto, un segmento, un cuadrado, un cubo, un hipercubo-4D e hipercubo en dimensión nD? ¿Cuáles?; de ser necesario realice una tabla” se esperaba que los estudiantes generalizaran la cantidad de los componentes geométricos presentes en el hipercubo, dependiendo la dimensión en que se encuentran, con base en el análisis del comportamiento de estos en figuras particulares.

Finalmente, se esperaba que los estudiantes elaboraran un ambiente para el aprendizaje de la conformación de los patrones analizados en la cuarta pregunta.

Prácticas Matemáticas Realizadas. En la solución de la primera pregunta, los estudiantes indagaron, en la historia del objeto politopo, personajes como Ludwig Schläfli (1814-1895), Reinhold Hoppe (1816-1900), Charles Howard Hinton (1853 – 1907), Alicia Boole Stott (1860-1940), Salvador Dalí (1904-1989), Branko Grünbaum (1929-2018), entre otros; en este sentido, los estudiantes visualizaron representaciones de los objetos tetradimensionales regulares, de la esfera n-dimensional, de modelos en material tangible de algunos politopos, interpretaron el cambio entre dimensiones del hipercubo y analizaron descripciones de la visualización de sus representaciones en el espacio tridimensional.

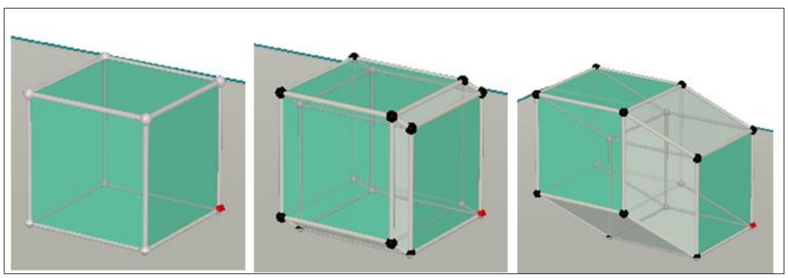
En cuanto a la segunda pregunta, la manera de comprender las transformaciones del hipercubo con el cambio entre dimensiones estuvo dividida en dos grupos, están los estudiantes que las describieron como una sombra de los objetos de la siguiente dimensión, por ejemplo, la respuesta del estudiante E9 “[…] podemos decir que la representación del objeto en una dimensión menor, es la sombra del objeto en una dimensión mayor”.

Por otro lado, estuvieron los estudiantes que describieron dichas transformaciones como una proyección de los objetos de la dimensión anterior, por ejemplo, el estudiante E10 dijo:

> Observando la representación en GeoGebra, el hipercubo 4D, se construye proyectando los elementos en una dimensión mayor, es decir, el punto se convierte segmento, el segmento en cuadrado, el cuadrado en cubo y el cubo en hipercubo 4D, es decir, como si se estiraran los puntos convirtiéndose en líneas y las líneas formaran caras, y las caras en cubos. Como si se proyectara el punto y se dibujara el rastro que deja.

Figura 64

Fragmento de Respuesta a la Segunda Pregunta de Exploración (SP3) - Estudiante E10



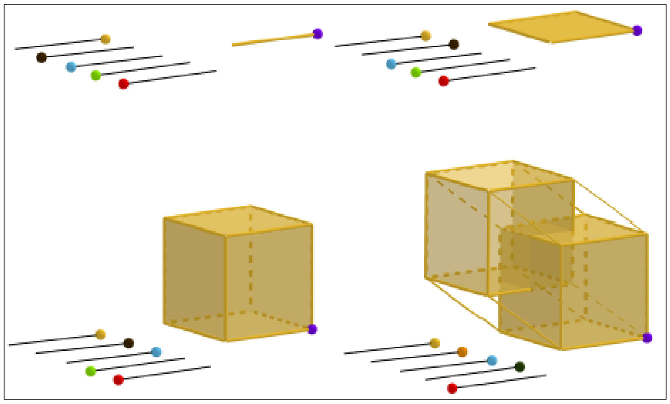
Fuente: respuesta del estudiante E10.

De acuerdo con Moreno-Armella y Elizondo (2017), se evidenció una de las implicaciones de la Geometría Dinámica, -el movimiento- que poseen los objetos geométricos.

En cuanto a la interpretación del objeto politopo como una generalización de las n dimensiones, se presentaron respuestas como la del estudiante E1 (Figura 65) quien afirmó “[…] como un politopo es la representación de una región en cualquier dimensión, entonces el momento en que se genera uno es cuando se garantiza la existencia de un punto cualquiera”

Figura 65

Fragmento de Respuesta a la Segunda Pregunta de Exploración (SP3) del Estudiante E1



Fuente: respuesta del estudiante E1.

También, los estudiantes realizaron conclusiones derivadas de la reflexión grupal, como por ejemplo, la descrita por el estudiante E4:

> Mi respuesta se adapta a lo que han dicho y estoy de acuerdo con [estudiante], se proyectan los elementos de una dimensión n a una dimensión n+1, es decir, un punto se proyecta hacia un segmento, un segmento a un polígono y un polígono a un poliedro.

Por otro lado, aunque las representaciones del hipercubo-4D, mediadas por los ambientes dinámicos propuestos, ayudaron a la comprensión de la configuración de sus componentes geométricos, los estudiantes evidenciaron algunas dificultades en cuanto a la visualización de objetos tetradimensionales desde una vista que percibe largo, ancho y alto, por ejemplo, el estudiante E3 al describir una representación del hipercubo-4D dijo “ […] formando un ángulo con la base y con las aristas inmediatas de aproximadamente 45º […]”, lo que suscita la imposibilidad de ver la amplitud verdadera de los ángulos, de este objeto, en la cuarta dimensión.

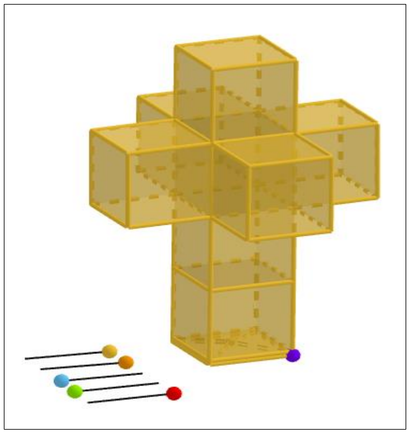
También surgieron más preguntas, por ejemplo, el estudiante E8 al referirse al hipercubo-4D dijo “[…] la pregunta que me queda es sobre el volumen, ¿en cuánto aumentará el volumen al realizar la proyección y ver el nuevo objeto?”.

Referente a la tercera pregunta, la mayoría de los estudiantes identificaron la imagen como una representación del hipercubo, algunas respuestas fueron más precisas que otras en cuanto a lo que significa esa representación, por ejemplo, el estudiante E10 dijo "Corresponde al politopo conocido como hipercubo en 4 dimensiones y lo que vemos en el programa es su desarrollo en tres dimensiones, por lo tanto, podemos decir que el hipercubo está compuesto por 8 cubos".

Un ejemplo, de respuesta no tan precisa, fue la del estudiante E6, quien refiriéndose a la Figura 66 dijo "Realmente no tengo conocimientos precisos sobre a qué politopo corresponde esta representación, sin embargo, teniendo en cuenta lo que vimos en clase previamente, puedo decir que es un hipercubo-4D, dada en una dimensión 3D."

Figura 66

Fragmento de Respuesta a la Tercera Pregunta de Exploración (SP3) del Estudiante E6



Fuente: respuesta del estudiante E6.

Respecto a las reflexiones que surgieron después de comunicar grupalmente sus ideas, hubo quienes estuvieron en acuerdo o desacuerdo con los resultados que obtuvieron sus compañeros, por ejemplo, el estudiante E9 dijo "Estoy de acuerdo con las respuestas de mis compañeros, pues me parece más comprensible la visualización de este objeto partiendo de su plantilla en el plano 3D y además que este representa la plantilla de un hipercubo en 4D".

En esta descripción, del estudiante E9, también se presenta la dificultad evidenciada en la investigación de Córdoba y Quintana (2013), pues se utiliza el término cotidiano “plantilla” para referirse al “desarrollo” de un sólido, probablemente sea un obstáculo generado por las actividades escolares que consisten en construir sólidos como el recorte y pegado de plantillas sin reflexionar los aspectos geométricos implicados.

En cuanto a la cuarta pregunta, se propuso a los estudiantes organizar los datos por medio de una tabla, sin embargo se propuso realizar el análisis de las generalizaciones desde la observación del comportamiento de los componentes geométricos, del hipercubo, al aumentar la dimensión, por ejemplo, se dijo “¿Por qué creen que va aumentando la cantidad de vértices?” o también se sugirió analizar relaciones entre ellos, por ejemplo, se dijo “Bueno ya que tienes analizado el comportamiento de los vértices, podrías intentar ver de qué manera se relacionan los vértices con las aristas”. Por ejemplo, los estudiantes E4 y E3 realizaron conjeturas como:

> Para el caso de saber el número de polígonos es necesario tener en cuenta que ese polígono se forma con 4 aristas, por lo cual en la dimensión 0 y en la 1 no habrá uno de estos. Así apoyándonos de la segunda deducción tenemos que dividirla por el número de aristas que forman al polígono, $(2^{n-1}n) / 4$, cumpliéndose únicamente para la segunda dimensión pues para la 3D obtenemos 3 polígonos, lo cual contradice lo de la tabla. Por lo tanto, tenemos que multiplicar todo eso por la dimensión anterior, es decir, por un n-1. Obteniendo $(2^{n-1}n)(n-1) / 4$.

Desde las descripciones que algunos estudiantes realizaron en cuanto al hipercubo, se intuye su significado pragmático como un V-politopo descrito anteriormente por (Sierra, 2019)

Finalmente, los estudiantes elaboraron ambientes para la comprensión de los componentes geométricos del hipercubo, algunos por medio de páginas web no publicadas y otros por medio de Wix.com, por ejemplo, en la Figura 67 se muestran algunas secciones del AVA elaborado por los estudiantes E1 y E9.

Figura 67

Fragmento de AVA Creado por los Estudiantes E1 y E9 (SP3)

Fuente: respuesta de los estudiantes E1 y E9.

De acuerdo con estos resultados, el estudio de objetos que pertenecen a la cuarta dimensión tiene implícita la dificultad de visualizar características tetradimensionales, sin embargo, de acuerdo con Fredes et al. (2012), cuando los ambientes virtuales permiten a los estudiantes simular los objetos de estudio, aumenta su aprendizaje; en este caso se realizó con ayuda de la interfaz de GeoGebra Clásico 6 y Cabri 3D.

Identificación de Objetos y Procesos Matemáticos. Esta situación problemática involucró cuatro tareas, primero los estudiantes indagaron en la historia del objeto politopo, después tuvieron que interpretar su conformación dependiendo la dimensión en que se encuentran y también identificaron patrones en el comportamiento de sus componentes geométricos en cuanto al paso de dimensiones inferiores a la quinta.

Los elementos lingüísticos que predominaron fueron descripciones verbales (expresiones en lenguaje natural para describir procesos realizados), descripciones gráficas (representaciones del objeto en mención, mediadas por software de geometría dinámica) como las presentadas en las Figuras 64-66 y descripciones simbólicas (expresiones algebraicas de las relaciones de los elementos geométricos del objeto en mención) ejemplificadas anteriormente.

Desde una perspectiva general, los conceptos previos fueron: poliedro regular, polígono, arista, vértice, segmento, ángulo, entre otros, y los conceptos emergentes fueron: politopo, hipercubo, lados 4D, proyección, entre otros.

Por otro lado, algunas de las propiedades que fueron utilizadas, con mayor frecuencia, por los estudiantes fueron que al proyectarse un objeto se conforma otro objeto perteneciente a la siguiente dimensión, por ejemplo, el estudiante E10 dijo "Un politopo se genera cuando se emplean los elementos de las dimensiones anteriores, pero proyectados, convirtiéndolos en nuevos objetos", también, se utilizaron propiedades de la conformación de aristas, polígonos, poliedros o hipercubos-4D, por ejemplo, el estudiante E3 dijo "Un hipercubo 4D se forma con 8 poliedros", entre otras.

Un procedimiento general, que los estudiantes realizaron, en unos casos parcialmente, consistió en visualizar la cantidad de los componentes geométricos (vértice, arista, polígono, poliedro) en los hipercubos presentes en las dimensiones 0-4, organizar la información por medio de una tabla, interpretar el comportamiento de éstos en términos de otros componentes, y finalmente describir con lenguaje algebraico una generalización de estos comportamientos, al respecto, los estudiantes E6 y E8 dijeron "[…] la metodología que utilizamos estuvo basada en ensayo y error pues de consideró inicialmente n como la dimensión la cual varía y para encontrar la expresión para el segmento se tuvo que agregar algunos objetos para que funcionara la fórmula […]".

La argumentación de los procesos realizados, en las tareas 2 y 3, estuvieron focalizados en su mayoría, hacia la explicación de las reflexiones críticas, que hicieron los estudiantes, en cuanto a los razonamientos de los demás compañeros, por ejemplo, el estudiante E1 refiriéndose al hipercubo dijo:

> La definición de mi compañera [estudiante] se parece mucho a mi respuesta, ya que también lo visualizó teniendo en cuenta la teoría de sombras, pero no estoy de acuerdo con ella, ya que ella afirma que es en cuarta dimensión y yo creo que es la representación en cualquier dimensión.

En cuanto a las argumentaciones presentes en las respuestas correspondientes a la tercera pregunta, estuvieron focalizadas hacia la justificación de las generalizaciones, por ejemplo, el estudiante E9 dijo:

> […] también tomé en cuenta que el número de segmentos que salen de cada vértice coincide con el número de dimensión, por eso yo multipliqué el número de dimensión por la cantidad de vértices en ella y la dividí en dos; esto porque los segmentos coincidían con dos vértices.

Identificación de Normas

La metodología de trabajo fue permeada por las características de una comunicación virtual para los procesos de enseñanza y de aprendizaje, en este sentido, se brindó la posibilidad a los estudiantes de explorar estas tres situaciones problemáticas de manera asincrónica (utilizada en la mayoría del proceso), lo que condujo a traspasar no sólo el aspecto físico de un salón de clase, sino que además, se expandieron los tiempos de la misma.

El papel de la investigadora fue guiar a los estudiantes en la resolución de dudas a medida en que ellos presentaban inquietudes, el medio de comunicación predominante fue WhatsApp; se evidenció una tendencia a fomentar en los estudiantes una participación autónoma y activa en su aprendizaje, pues no se introdujeron temas mediante acciones expositivas por parte de la investigadora. Se crearon materiales virtuales, como documentos en formatos pdf y PowerPoint, para los estudiantes que no podían acceder a las sesiones virtuales y el proceso de institucionalización estuvo guiado por las páginas web de retroalimentación en donde se diseñó una sección para cada una de las preguntas de las situaciones problemáticas.

Desarrollo de la Faceta Mediacional

A continuación se presenta una valoración cualitativa basada en la escala -Poco (P), Suficiente (S) y Mucho (M)- respecto a los niveles de desarrollo de competencias digitales de la Unidad de análisis; en la Tabla 9 se presentan las categorías basadas en los indicadores descritos por el INTEF (2017) y el MEN (2013a) y en la Tabla 10 se presentan las competencias implicadas en el trabajo con ambientes de Geometría Dinámica con base en la investigación realizada por Suárez (2018).

Tabla 9

Competencias Digitales Desarrolladas (Genéricas)

Competencia	**Nivel de desarrollo**	**E 1**	**E 2**	**E 3**	**E 4**	**E 5**	**E 6**	**E 7**	**E 8**	**E 9**	**E 10**
Uso de redes digitales con fines académicos	**1.1**. Búsqueda de información y exploración en páginas web especializadas para el aprendizaje del objeto poliedro.	M	S	S	S	S	S	P	P	S	S
	1.2. Interacción mediante redes virtuales para el aprendizaje del objeto poliedro convexo.	M	P	M	S	P	M	M	S	M	M
	1.3. Participación activa y cooperación en entornos virtuales para el aprendizaje del objeto poliedro convexo.	M	S	M	M	S	M	M	M	M	M
Uso de herramientas digitales para la organización de	**2.1.** Exploración del objeto poliedro convexo a partir de ambientes dinámicos virtuales de aprendizaje.	P	P	S	M	P	S	M	P	M	M

la información.	**2.2.** Registro de procesos de aprendizaje por medio de herramientas ofimáticas.	M	P	S	M	P	S	M	S	M	M
	2.3. Interpretación crítica de la información compartida en medios digitales referente al objeto poliedro convexo.	S	S	M	M	P	M	M	M	M	M
Uso de herramientas digitales como apoyo para la enseñanza.	**3.1.** Identificación de herramientas digitales para enseñar conceptos geométricos.	M	P	S	M	P	S	S	S	S	S
	3.2 Uso de herramientas digitales para la enseñanza del objeto politopo.	M	S	M	M	S	S	M	S	M	M
	3.3. Elaboración de ambientes virtuales para la enseñanza hipotética del objeto poliedro convexo.	M	S	M	M	M	M	M	M	M	S
Organización de secuencias de aprendizaje con el uso de recursos digitales.	**4.1**. Búsqueda de información y exploración en páginas web especializadas para la enseñanza del objeto poliedro convexo.	M	P	M	P	P	S	P	P	M	M
	4.2. Elaboración de ambientes virtuales para el aprendizaje del objeto poliedro convexo de acuerdo con las necesidades del nivel escolar al que va dirigido.	M	P	M	M	P	P	M	P	M	S
	4.3. Descripción de posibles procesos y tipos de pensamiento matemático emergentes en la exploración de ambientes virtuales para el aprendizaje del objeto poliedro convexo.	M	P	M	S	P	P	M	P	M	P
Elaboración de contenidos digitales como apoyo para la enseñanza.	**5.1**. Manejo de la interfaz de un software de geometría dinámica.	M	M	M	M	M	M	M	M	M	P
	5.2. Organización apropiada de elementos de un AVA mediado por software de geometría dinámica.	M	M	M	M	M	P	M	P	M	M
	5.3. Utilización de herramientas como rastro, animación, arrastre o deslizadores para la exploración de un objeto modelado en software de geometría dinámica.	M	M	M	M	M	M	M	M	M	P

Fuente: elaboración propia.

Tabla 10

Competencias Digitales Desarrolladas (Geometría Dinámica)

Componentes de un AVA	Competencia	E 1	E 2	E 3	E 4	E 5	E 6	E 7	E 8	E 9	E 10
Presentación visual	**1.1.** El tamaño del texto es legible.	M	M	P	S	P	S	M	M	M	M
	1.2. Configura la visualización de etiquetas necesarias.	P	P	S	P	P	S	P	P	P	P
	1.3. Adecúa el tamaño de los componentes geométricos.	M	M	P	M	S	P	M	P	M	P
	1.4. Configura la opacidad de los componentes geométricos adecuadamente.	M	S	M	M	S	M	S	M	M	M
	1.5. Utiliza una escala de colores tenues.	S	M	M	M	P	M	M	P	M	S
	1.6. Presenta un ambiente no saturado de objetos.	M	M	M	S	P	M	S	P	M	M
Funcionamiento de la construcción geométrica	**2.1.** El algoritmo de construcción es coherente con la elaboración correcta de procedimientos geométricos.	M	S	M	M	M	M	M	M	M	M
	2.2. La construcción mantiene las propiedades deseadas sin deformarse por movimiento.	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
	2.3. Permite visualizar más de una vista del objeto geométrico.	M	M	M	M	M	M	M	M	M	S
	2.4. Construye objetos primitivos independientes, cuasi-independientes o dependientes de acuerdo a los objetivos de exploración.	M	M	M	M	S	M	M	S	M	M
	2.5. Construye correctamente deslizadores, rastros o animaciones.	S	M	S	M	P	S	M	M	M	S
Fomento para su exploración	**3.1.** Fomenta el análisis de relaciones entre los componentes geométricos del objeto poliedro convexo.	M	M	S	M	S	M	M	S	M	M
	3.2. Presenta construcciones coherentes con las situaciones problemáticas propuestas.	M	S	M	M	S	M	M	M	M	M
	3.3. Las situaciones problemáticas permiten resoluciones desde diversos procedimientos.	S	S	S	P	P	M	S	M	P	P
	3.4. Promueve la resolución de problemas por medio de la utilización de varios tipos de lenguaje.	S	M	S	S	P	M	P	M	P	S
	3.5. Expone correspondencias entre objetos geométricos y sus elementos de animación.	S	P	P	M	P	P	S	M	M	P

Fuente: elaboración propia.

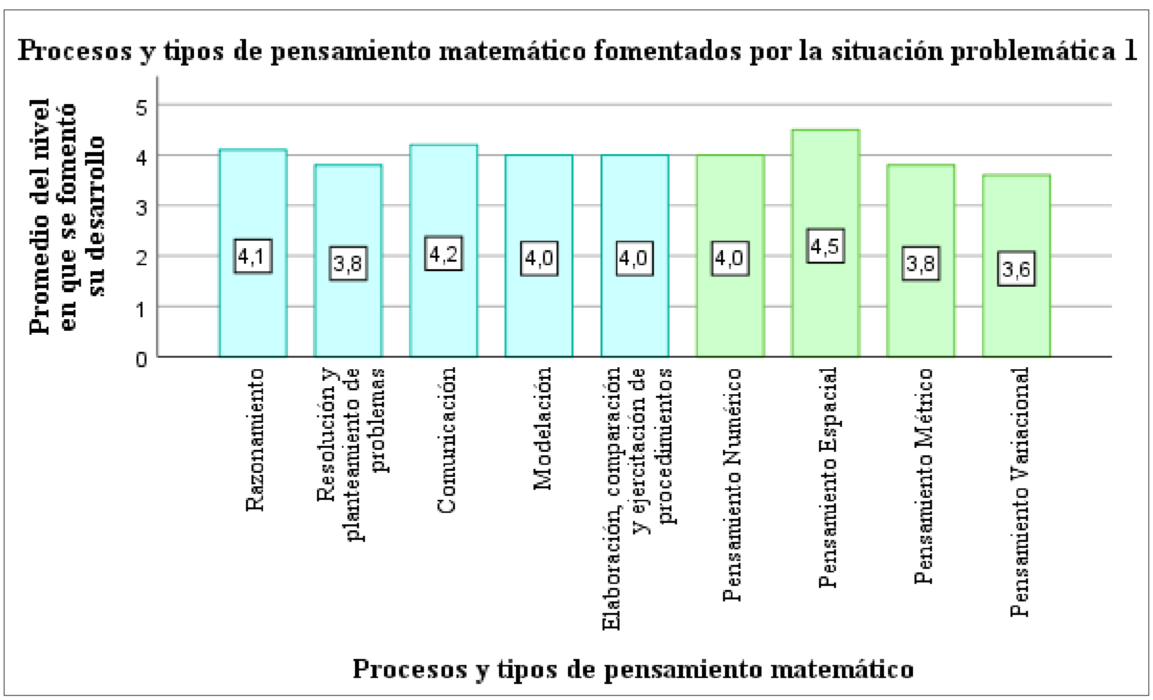
Cuarto Resultado: Reflexión del Proceso

A continuación se presenta un análisis de acuerdo a la percepción de los estudiantes frente al desarrollo de las tres situaciones problemáticas (SP) (anexos 6-9) con base en la herramienta *idoneidad didáctica* del EOS, y teniendo en cuenta los procesos y tipos de pensamiento matemático, que pudieron ser desarrollados a lo largo de la implementación, relacionados con los Lineamientos Curriculares del MEN; se emplearon las categorías de la Tabla 8 y se estableció una escala de valoración diferencial de cero a cinco (donde *0* es *nada* y *5* es *bastante).*

Los indicadores que utilizaron los estudiantes para valorar el grado en que las tres situaciones problemáticas tuvieron estas idoneidades están descritos en el apartado de niveles de análisis didáctico del modelo CDM del marco metodológico que guía esta investigación.

Figura 68

Percepción del Fomento de Procesos y Tipos de Pensamiento Matemático SP1



Fuente: elaboración propia.

Cuando los estudiantes se enfrentaron a la tarea (Anexo 6) de describir la medida de un ángulo interior de cualquier polígono regular convexo, tuvieron que identificar los objetos geométricos que le permitieran entender el comportamiento de la amplitud del ángulo respecto al polígono que lo contiene, como por ejemplo, los lados, diagonales u otros ángulos que conforman a estos polígonos; Vasco (2006) en su documento *Archipiélago Angular* estudia la complejidad inherente al objeto ángulo, la cual se manifestó en las actividades a la hora de explorar ángulos de polígonos.

Después, los estudiantes debieron ordenar las ideas que surgieron desde la visualización desde datos específicos (amplitud del ángulo interior del cuadrado, pentágono, hexaedro), por ejemplo, el estudiante E5 dijo “todos los ángulos interiores de un polígono regular son iguales”, que para la mayoría de ellos, dio bases para llegar de manera intuitiva a una generalización.

En la medida en que los estudiantes fueron impulsados a desarrollar este tipo de procesos, hubo una tendencia a fomentar la realización correcta de los cálculos de la amplitud de ángulos y expresar en lenguaje algebraico, gráfico y natural los procedimientos que elaboraron, relativos al objeto en mención.

Por otro lado, los estudiantes comunicaron sus ideas y razonamientos mediante la descripción, en unos casos más exhaustiva que en otros, una manera de visualizar la configuración de los polígonos que conforman un sólido regular. De esta manera, esta tarea matemática guió a los estudiantes para que, en el mejor de los casos, reconocieran un significado pragmático de ángulo sólido (triedro) y además reconocieran la existencia única de cinco poliedros regulares.

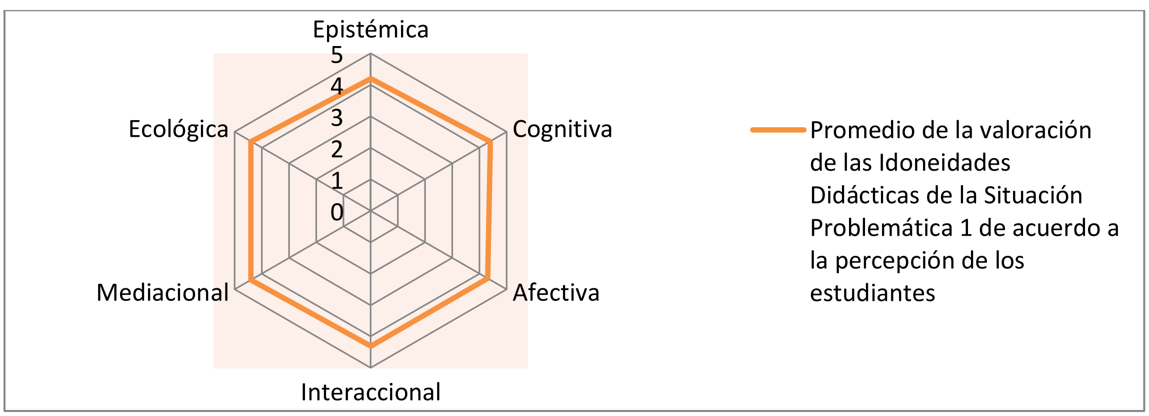
La razón más significativa por la cual la SP1 impulsó el planteamiento de problemas, fue la propuesta de realizar un pequeño ambiente virtual para el aprendizaje de sólidos regulares, el cual también implicó desarrollar cierto nivel de comunicación para guiar su exploración por medio de preguntas.

En la elaboración de estos AVA, los estudiantes desarrollaron estrategias de construcción de representaciones geométricas en ambientes dinámicos, de acuerdo con González (2001), las cuales se basaron en la organización de objetos primitivos (puntos, rectas, superficies) y relaciones geométricas entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, simetría), en la mayoría de los AVA se utilizaron, además, herramientas de animación como deslizadores.

Por otro lado, se observó una fuerte tendencia hacia el fomento del desarrollo de los pensamientos espacial, métrico y numérico de los estudiantes, en la medida en que la SP1 impulsó la elaboración, comparación y ejercitación de los procedimientos anteriormente descritos.

Figura 69

Idoneidad Didáctica de la Situación Problemática 1



Fuente: elaboración propia.

Una posible causa de que la SP1 no tuviese completamente la idoneidad epistémica pudo haber sido porque sólo se trabajó desde dos tareas, lo que sesgó el amplio espectro de nociones geométricas que se pueden interpretar desde la exploración del objeto polígono regular convexo.

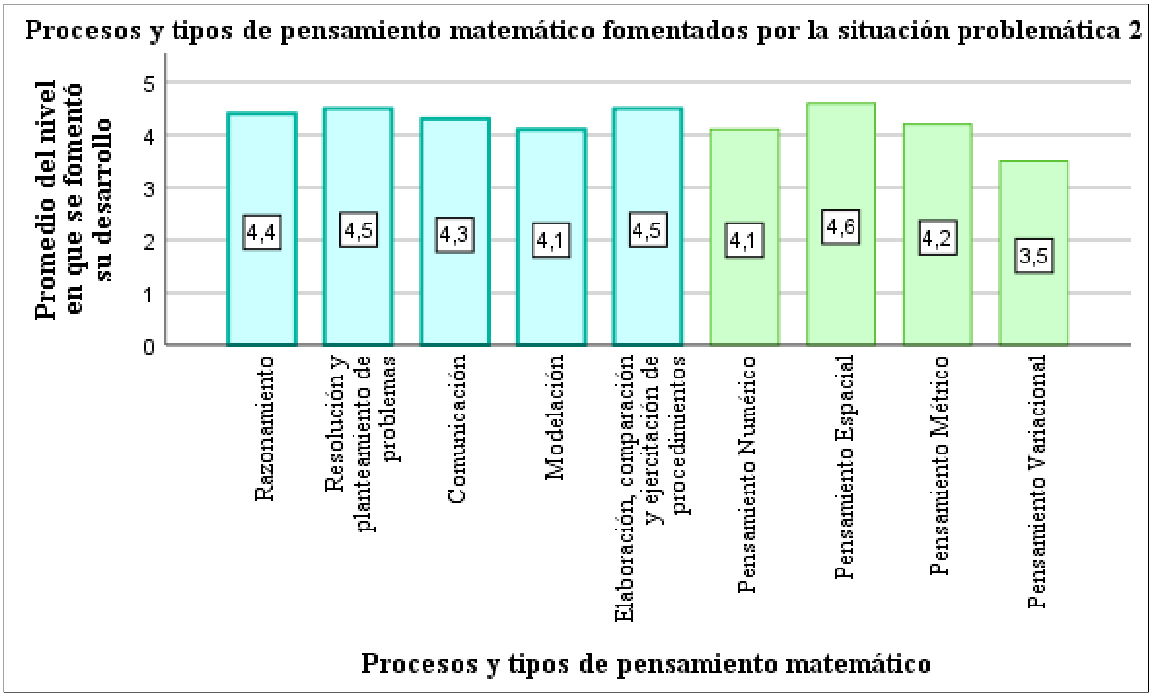
Se constató que, en la medida en que la SP1 evidenció tener idoneidad mediacional también tendió a fomentar los tipos de pensamiento matemático espacial, numérico y variacional, y el desarrollo de procesos de comunicación para describir los procedimientos que los estudiantes realizaron para el cálculo de la amplitud de un ángulo interior de cualquier polígono regular convexo y también para la interpretación de la conformación de sólidos regulares a partir de figuras poligonales.

Aunque no se estimaron con la misma profundidad las otras idoneidades, se tuvo un buen nivel del grado en que la SP1 las contempló, por un lado, se constata que cada uno de los factores que aluden a estas idoneidades están estrechamente relacionados en la clase de matemáticas y por otro lado, se considera una posible razón que radica en las concepciones acerca de la educación matemática, que se llevan a cabo implícitamente por los profesores, en este caso por la investigadora.

Los estudiantes describieron que la SP1 tuvo fortalezas como: el favorecimiento de la capacidad para describir ideas o procesos que incidieron en la conformación de nociones de ángulo interior de polígonos regulares y de sólidos regulares; también el hecho de que se tuviera una visualización de estos objetos y sus propiedades a partir de ambientes dinámicos; y por otro lado consideraron que se motivó a tener autonomía en su aprendizaje, que entre otros aspectos se debió a la libertad de razonamiento generado por preguntas abiertas y por el fomento de una reflexión acerca de su futuro desempeño profesional; entre otras.

Figura 70

Percepción del Fomento de Procesos y Tipos de Pensamiento Matemático SP2



Fuente: elaboración propia.

La segunda situación problemática generó un ambiente dinámico que permitió a los estudiantes analizar propiedades geométricas, establecidas entre la relación de las áreas laterales de un sólido regular y su truncamiento, a partir de la interpretación de una familia de representaciones originadas por el dinamismo de la construcción (Anexo 7), por ejemplo, el estudiante E5 tomó inicialmente datos específicos para una medida particular de arista y describió “El área del dodecaedro sin truncar es aproximadamente 158,23 cm2 y cuando se trunca (icosidodecaedro) el área disminuye a 147,2 cm2”.

De esta manera se impulsó un análisis de posibles estrategias para encontrar la razón entre el área de un dodecaedro regular y de su truncamiento el icosidodecaedro, además de la realización y prueba de conjeturas.

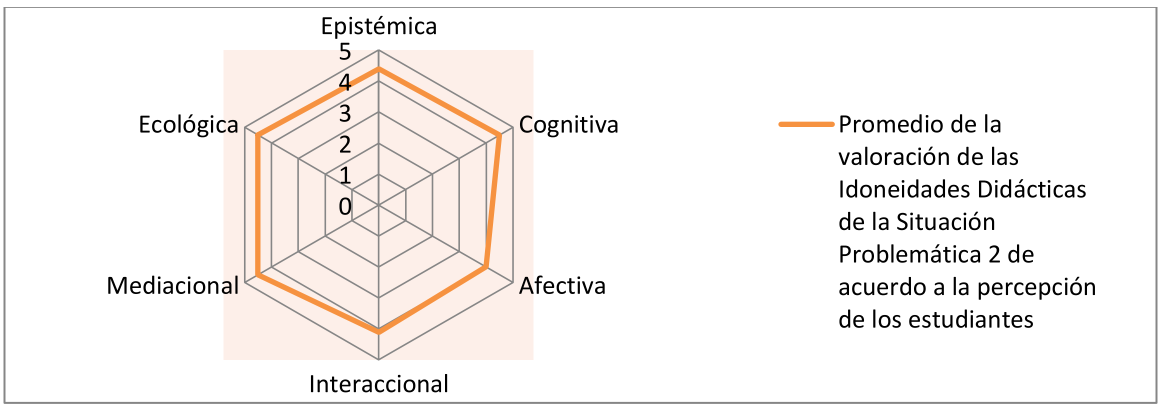
También se impulsó hacia la revisión de procedimientos como las transformaciones de expresiones algebraicas; la realización correcta del cálculo de longitudes y ángulos de los objetos en mención; el establecimiento de una generalización de la razón entre las áreas laterales de estos objetos para un valor cualquiera de la arista del dodecaedro, entre otros procesos, que en algunos casos se realizaron parcialmente o en diferente orden al descrito.

Se observó que en la medida en que la SP2 impulsó la elaboración, comparación y ejercitación de estos procedimientos, tendió significativamente a fomentar la modelación de las relaciones establecidas entre los objetos en mención y la comunicación de estas prácticas.

La SP2 también promovió el planteamiento de problemas, la comunicación en cuanto a la formulación de preguntas para la exploración y estrategias de construcción de representaciones geométricas, por medio de la propuesta realizada a los estudiantes para realizar un pequeño ambiente para el aprendizaje de alguna noción estudiada en la historia del objeto poliedro convexo.

Figura 71

Idoneidad Didáctica de la Situación Problemática 2



Fuente: elaboración propia.

Uno de los objetivos de la SP2 fue permitir a los estudiantes ampliar las prácticas matemáticas con la propuesta de retomar algún problema geométrico seleccionado desde la historia del objeto poliedro convexo.

Sin embargo, no todos los estudiantes consideraron que se tuviera la idoneidad epistémica en su totalidad, una posible razón pudo haber sido la libertad que se le dio a los estudiantes para encontrar las respuestas a los problemas propuestos, pues se pudieron haber sentido perdidos en los caminos de resolución que tomaron para encontrar una relación entre las áreas del dodecaedro y su truncamiento, lo cual concuerda con la disminución del grado de las idoneidades afectiva e interaccional con respecto a la primera situación problemática.

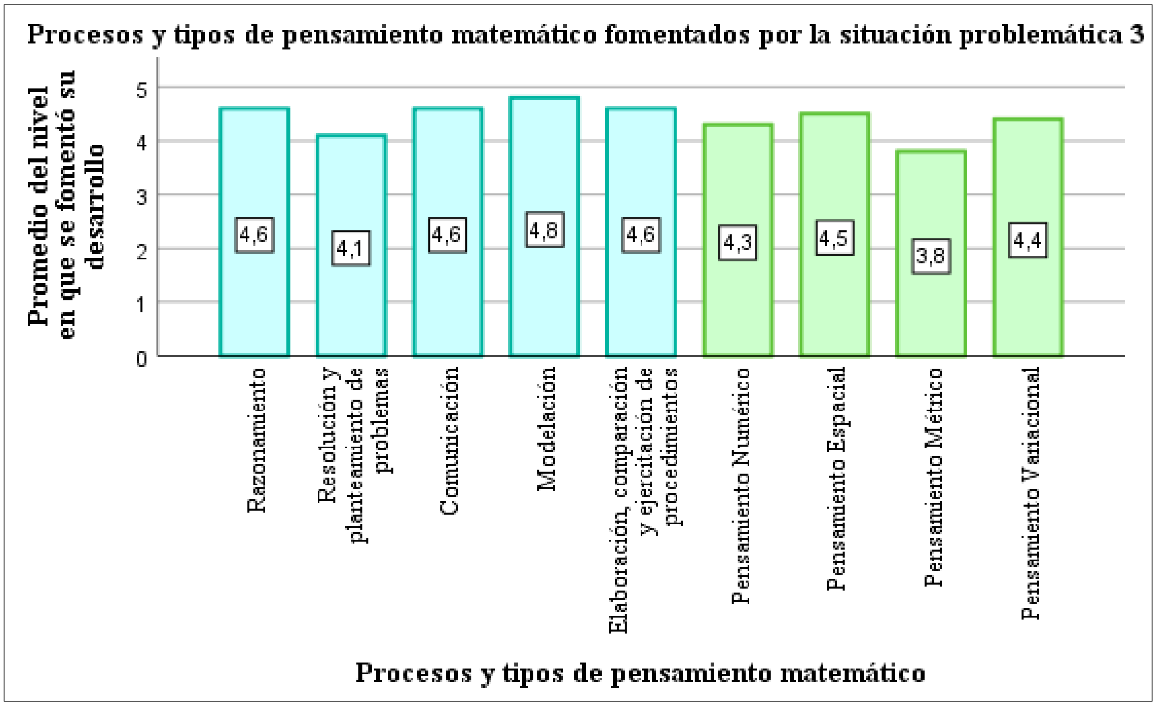
Desde otro punto de vista, se evidenció que se favoreció el desarrollo de los pensamientos numérico, espacial, métrico y variacional en la medida en que la SP2 demostró tener la idoneidad epistémica.

Se detectó que en la SP2 existe una fuerte incidencia entre las idoneidades epistémica y mediacional; esta última, aumentó de manera directamente proporcional con el fomento del desarrollo de procesos como la resolución de la tarea matemática propuesta, por medio de la elaboración de expresiones algebraicas que describieron una relación entre las áreas del dodecaedro y su truncamiento, así como la comunicación de estos razonamientos.

Entre las fortalezas que los estudiantes afirmaron presentarse con la SP2 están el análisis y reflexión de los caminos para identificar la relación entre las áreas del dodecaedro y el icosidodecaedro, el estudio de objetos geométricos poco estudiados como lo son los sólidos semirregulares (arquimedianos), las oportunidades de retroalimentación por medio de la comunicación con la investigadora y el entorno mediado por las páginas web establecidas con este fin; la interiorización de nociones matemáticas (regularidad, semirregularidad, área superficial, entre otras) mediante la visualización generada por el ambiente dinámico; estar a la vanguardia en cuanto al conocimiento del uso de los software especializado en geometría dinámica y la oportunidad de crear AVA, entre otras.

Figura 72

Percepción del Fomento de Procesos y Tipos de Pensamiento Matemático SP3



Fuente: elaboración propia.

En la tercera situación problemática (Anexos 8 y 9) se propuso a los estudiantes identificar propiedades geométricas del hipercubo desde una analogía del cambio de dimensiones 0, 1, 2, 3 y 4 hasta su posible generalización en n dimensiones, que la mayoría de los estudiantes realizó por medio de un proceso intuitivo desde la interpretación de las representaciones gráficas.

De esta manera, la SP3 tuvo mayor tendencia a promover una organización de datos específicos, que en la mayoría de los casos se dio por medio de una tabla en donde se especificó la cantidad de vértices, aristas, caras, y celdas presentes en el hipercubo en las dimensiones 1, 2, 3 y 4 (Figura 73). Lo cual implicó, a su vez, la correcta realización de estos cálculos y la utilización de argumentos para exponer la manera en que los estudiantes identificaron los respectivos patrones.

Figura 73

Organización de Elementos del Hipercubo Elaborada por el Estudiante E7

Representación	Dimensión	Vértices	Aristas	Polígonos	Poliedros	Lados 4D
Punto	0D	1	0	0	0	0
Segmento	1D	2	1	0	0	0
Cuadrado	2D	4	4	1	0	0
Cubo	3D	8	12	6	1	0
Hipercubo 4D	4D	16	32	24	8	1

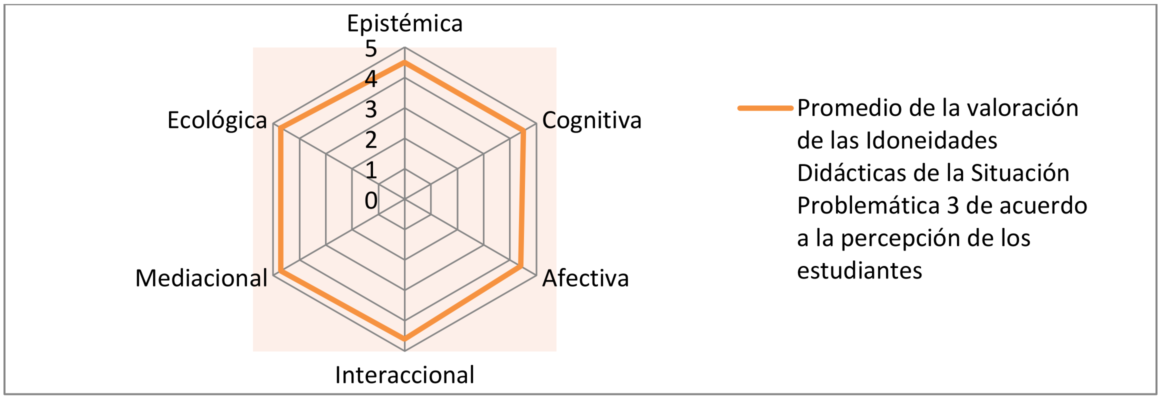
Fuente: respuesta del estudiante E7.

Una de las razones de que esta fuera la situación problemática con mayor nivel de fomento en el desarrollo de procesos y tipos de pensamiento matemático pudo haber sido porque, se diseñaron e implementaron dos ambientes en vez de uno, también basados en geometría dinámica, lo que permitió a los estudiantes tener más representaciones del hipercubo-4D y por ende, más herramientas conceptuales para describir los objetos geométricos contenidos en él.

Desde la experiencia que los estudiantes tuvieron en la exploración de los dos ambientes de aprendizaje, se constató que la SP3 impulsó de manera directamente proporcional el desarrollo de los tipos de pensamiento matemático espacial, numérico y variacional. Al respecto se retoman algunas de las opiniones de los estudiantes: E4 opinó "[…] ayuda en la percepción de las n-dimensiones y del manejo de los software de geometría para explorar propiedades muy interesantes en los politopos"; E7 opinó "esta situación problema me permitió mejorar en cuanto al razonamiento y a la modelación de ecuaciones, es una situación que permite el análisis y la exploración […]".

Figura 74

Idoneidad Didáctica de la Situación Problemática 3



Fuente: elaboración propia.

Un aspecto fundamental para el estudio del objeto hipercubo-4D fue la visualización de diferentes representaciones gráficas como una analogía de la proyección del hipercubo entre dimensiones, una analogía de la proyección de Schlegel para la cuarta dimensión, y una analogía de su desarrollo tridimensional, que a su vez, estuvieron caracterizadas por el dinamismo de los ambientes virtuales implementados. Lo cual pudo haber influido en la valoración más alta de las idoneidades de la SP3 en comparación con las otras dos situaciones problemáticas.

En la medida en que se evidenció la idoneidad afectiva de la SP3, se fomentó el proceso de comunicación al momento de describir la manera en que los estudiantes identificaron los vértices, aristas, caras y celdas del hipercubo en las dimensiones 1, 2, 3 y 4.

Por otro lado, el hecho por el cual los estudiantes encontraron modelos matemáticos dados por el reconocimiento de patrones del comportamiento de los lados 0D, 1D, 2D y 3D del hipercubo anteriormente descritos, fue influenciado por las idoneidades epistémica y mediacional de esta SP.

Los estudiantes manifestaron que la SP3 tuvo fortalezas como: facilitar la interpretación del paso de la tercera a la cuarta dimensión; la necesidad de describir la forma en que se identificaron patrones de la cantidad de los elementos geométricos del hipercubo al cambiar de dimensión; el fortalecimiento de razonamientos generados por la visualización de las tres representaciones propuestas para este objeto; la propuesta de una construcción progresiva de nociones geométricas como vértices, aristas, caras y celdas en el hipercubo, la retroalimentación del proceso de generalización de patrones de dichos elementos; el reconocimiento de aspectos históricos que dieron paso a la conformación del objeto politopo; y los ambientes virtuales para el aprendizaje de la noción de politopo que en este caso significaron en una guía para el estudio del objeto en mención.

En la Figura 75 se plasman las palabras que los estudiantes utilizaron para valorar de manera cualitativa la experiencia de aprendizaje anteriormente descrita.

Figura 75

Valoración Cualitativa de la Experiencia

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

A continuación se presentan los resultados más relevantes que surgieron de la caracterización de las *facetas epistémica y mediacional* referentes al aprendizaje del objeto poliedro convexo y del desarrollo de competencias digitales de estudiantes del curso de Electiva de Profundización I ofrecido por la Licenciatura en Matemáticas de la UPTC.

El aspecto más importante que apoyó el curso de esta investigación fue la participación activa por parte de diez estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, quienes a pesar de las condiciones dadas por la virtualidad, demostraron motivación por su formación académica y autonomía en su aprendizaje, superando a la vez dificultades en cuanto al funcionamiento de equipos de cómputo y redes de conexión a Internet.

Las páginas web propuestas para la retroalimentación de los procesos descritos anteriormente, permitieron a la unidad de análisis llevar a cabo un contraste entre los conocimientos personales y los declarados (como significados pragmáticos institucionales); al respecto, cabe resaltar que los contenidos presentados en estas páginas estuvieron enfocados para invitar al estudiante a indagar y extender las rutas de solución para las preguntas de las tres situaciones problemáticas planteadas.

Conclusiones en Relación con las Preguntas de Investigación

La *faceta epistémica* de los estudiantes, respecto al objeto poliedro convexo, se desarrolló por medio de la conformación de un conocimiento, en unos casos más fundamentada que en otros, de nociones geométricas desde una interpretación de la construcción de sólidos regulares, pasando por la identificación de propiedades subyacentes en la generación de poliedros semirregulares generados por truncamiento, hasta llegar finalmente, a una interpretación del objeto politopo como una generalización de objetos geométricos en *n dimensiones*, cuyo elemento mediador fue el hipercubo con $n<5$.

También, desde una dimensión didáctica esta faceta fue desarrollada, en unos casos con mayor nivel que en otros, por medio de la contextualización de contenidos temáticos desde lineamientos nacionales como procesos y tipos de pensamiento matemático, necesarios para la elaboración de ambientes virtuales para el aprendizaje del objeto poliedro convexo.

El trabajo con software de Geometría Dinámica permitió significativamente el desarrollo de la *faceta mediacional* de los estudiantes, por medio de su utilización progresiva, primero, desde la exploración de las tres situaciones problemáticas propuestas, segundo, desde la elaboración de un ambiente para el aprendizaje del objeto poliedro regular, tercero, desde la elaboración de un ambiente para la exploración de alguna situación problemática estudiada en la historia del poliedro convexo y finalmente desde la exposición de un posible análisis de la conformación de patrones en el hipercubo por medio de herramientas digitales.

Por otro lado, de acuerdo al recorrido histórico realizado, referente al objeto poliedro convexo, algunos de sus significados pragmáticos estuvieron enfocados hacia: el cálculo del volumen de cuerpos sólidos, donde, probablemente el conocimiento del cálculo del volumen de una pirámide pudo haber tenido una importante influencia; la construcción de sólidos regulares como la unión de polígonos en torno a un vértice; la descomposición de sus caras poligonales por medio de triángulos rectángulos escalenos, con la hipotenusa doble que el cateto menor.

También se analizaron propiedades implícitas en la inscripción de sólidos regulares en una esfera; se demostró la existencia única de cinco sólidos regulares; la construcción de sólidos semirregulares; la inclusión de sólidos regulares entre ellos mismos; la construcción de poliedros desde la perspectiva en el arte; y el análisis de politopos tetradimensionales, por ejemplo, propiedades perceptibles desde su desarrollo tridimensional.

En cuanto a los significados pragmáticos personales previos de la unidad de análisis, respecto al objeto poliedro convexo, estuvieron enfocados en su construcción a partir de figuras poligonales; también en el análisis informal de su convexidad de acuerdo a conceptos como interior y frontera de un conjunto de puntos; y en su conformación como una representación de un polígono en la tercera dimensión.

Por otro lado, desde el conocimiento común previo, en algunos casos, se identificaron dificultades para reconocer y expresar algebraicamente propiedades de poliedros regulares y semirregulares, lo que suscitó una escases de representaciones interiorizadas previamente por los estudiantes respecto al objeto en mención.

Para el conocimiento ampliado previo, desde el objeto politopo, la unidad de análisis presentó desconocimiento en cuanto a sus componentes geométricos y su constitución en diferentes dimensiones espaciales.

Respecto al conocimiento especializado previo, en algunos casos, se observó una dificultad para reconocer los conocimientos implicados en el estudio de un polígono, lo que incide en el reconocimiento para cuerpos tridimensionales. Esta dificultad pudo haber influido en el desconocimiento respecto a la organización por grados escolares de los aprendizajes básicos referentes al objeto poliedro convexo.

Las competencias digitales que los estudiantes tenían previamente desarrolladas, aunque con niveles bajos, tuvieron énfasis en la utilización de recursos digitales para el aprendizaje de las matemáticas, dejando su utilización en la enseñanza del área como la competencia con menos nivel de desarrollo.

Por otro lado, a partir de la exploración de las tres situaciones problemáticas, el desarrollo de la *faceta epistémica* (desde los conocimientos común y ampliado) estuvo conformado por la construcción, en unos casos más fundamentada que en otros, de significados pragmáticos enfocados hacia la:

- Identificación de un ángulo interior de cualquier polígono regular convexo.
- Conformación de un poliedro regular desde polígonos regulares y ángulos sólidos menores a 360°.
- Diferenciación entre propiedades de un sólido regular y otro semirregular.
- Identificación de una relación entre el área lateral de un dodecaedro y su truncamiento, el icosidodecaedro.
- Análisis de la conformación de componentes geométricos del politopo hipercubo dependiendo la dimensión espacial en que se encuentra.
- Identificación de algunas propiedades referentes a los politopos simplece y ortoplex

El desarrollo de la *faceta epistémica* (desde el conocimiento especializado) estuvo fomentado por la elaboración de ambientes virtuales para el aprendizaje del objeto poliedro convexo, contextualizados desde los lineamientos para la educación escolar nacional; en éstos se propusieron prácticas matemáticas relacionadas con:

- Cálculo del volumen de un sólido regular a partir de un valor incógnito de la longitud de su arista.
- Descomposición de sólidos regulares en pirámides para el cálculo de su volumen.
- Identificación de una relación entre el área lateral de un poliedro regular y la de su sólido dual.

- Cálculo del área lateral de un sólido a partir de un valor incógnito de la longitud de su arista.
- Caracterización de componentes geométricos de sólidos regulares y semirregulares.
- Cálculo de áreas laterales y volúmenes de poliedros regulares inscritos en otros del mismo tipo.
- Inscripción de sólidos en esferas e identificación de una relación entre el diámetro de la esfera y la arista del poliedro.
- Interpretación de la fórmula de Euler-Descartes.
- Construcción de sólidos de Catalan.

El desarrollo de la *faceta mediacional*, fue impulsado gracias a la exploración de las representaciones de los objetos en mención, desde las tres situaciones problemáticas implementadas, por medio de software de geometría dinámica, además de las cuatro páginas web propuestas para las retroalimentaciones, y también gracias a la propuesta de la elaboración de ambientes virtuales de aprendizaje del objeto poliedro convexo, para un caso hipotético dentro de la educación escolar; en general, se evidenció un nivel alto de apropiación de competencias digitales tanto genéricas como específicas.

De acuerdo con la percepción de los estudiantes, desde una escala diferencial donde *0 es nada* y *5 es bastante*, las tres situaciones problemáticas implementadas fomentaron, en promedio, el desarrollo de los procesos de razonamiento (4.4), comunicación (4.1), modelación (4.4), resolución de problemas (4.3), planteamiento de problemas (4.4) y elaboración de procedimientos (4.4), también tipos de pensamiento matemático como numérico (4.1), espacial (4.5), métrico (3.9) y variacional (3.8). Por otro lado, no sólo manifestaron que éstas tuvieron idoneidad epistémica y mediacional, sino que además, cognitiva, afectiva, interaccional y ecológica, siendo la tercera situación problemática con mayor promedio respecto a las otras dos situaciones, probablemente debido a que ésta permitió más representaciones gráficas del objeto en estudio.

Conclusiones en Relación con los Objetivos Planteados

Gracias a una interpretación de la argumentación y recursos visuales que los estudiantes brindaron, en unos casos con mayor precisión que otros, para explicar los procedimientos o ideas emergentes en las tres situaciones problemáticas, se logró realizar una caracterización de estas prácticas matemáticas y didácticas, que a su vez significó la descripción del desarrollo de las *facetas epistémica y mediacional*, bajo la contextualización del entorno académico y virtual, que la unidad de análisis presentó en su momento.

Desde la herramienta *configuración epistémica* propuesta por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos, se logró estudiar un significado global del objeto poliedro convexo a partir de las 10 situaciones problemáticas resaltadas, donde se evidenció la fuerte tendencia de explorar estos objetos desde representaciones gráficas, lo que pone de manifiesto no sólo su belleza geométrica, sino que además, permite la introducción de nociones geométricas desde la intuición hasta su posible teorización abstracta.

Por medio de la utilización del cuestionario virtual, se logró organizar la información de acuerdo con la categorización de los contenidos temáticos propuestos desde las tres vertientes del conocimiento de los futuros profesores (común, especializado y ampliado), y se constató la necesidad de reflexionar acerca de la fundamentación teórica que poseen los estudiantes y que se espera que enseñen en su futuro desempeño profesional.

La utilización de herramientas virtuales para la comunicación reveló su potencial como instrumentos para la recolección de información en cuanto a los procesos de enseñanza y de aprendizaje en mención, pues algunos permitieron almacenar interacciones como audios o textos, y otros facultaron a los estudiantes para tener una escritura fluida, así como su redacción en armonía con las imágenes referentes a la exploración realizada en software.

Finalmente, los cuestionarios online que se implementaron, al finalizar cada situación problemática, apoyaron la reflexión por parte de los estudiantes en cuanto a los procesos y tipos de pensamiento matemático que fueron influenciados durante dichas exploraciones; además, se presentó la oportunidad de valorar las idoneidades de estos instrumentos de aprendizaje.

Conclusiones desde Elementos Particulares de la Investigación

Gracias a la caracterización de las prácticas matemáticas, realizadas por los estudiantes, desde los niveles de análisis didáctico propuestos por el modelo de Conocimientos Didáctico Matemáticos del Profesor, se constató que no existe un único camino para llegar a una solución de cada tarea propuesta, y que además, en la exploración de las representaciones de los politopos en dos, tres y cuatro dimensiones, predomina la utilización de elementos lingüísticos como descripciones verbales, gráficas y simbólicas.

De acuerdo con los indicadores de competencias digitales genéricas, la competencia que evidenció mayor dificultad para su desarrollo, fue la organización de secuencias para el aprendizaje del objeto poliedro convexo, lo que refleja la complejidad inherente a la elaboración o utilización de recursos digitales desde una contextualización de los conocimientos dentro de niveles educativos escolares específicos.

Por otro lado, aunque el objeto poliedro convexo es un contenido temático que se puede abordar desde grados escolares, los resultados de esta investigación evidenciaron que la unidad de análisis presentó dificultades para realizar procedimientos de generalización, en cuanto a la interpretación de sus propiedades, lo que suscita una problemática al suponer que el futuro licenciado ya ha interiorizado nociones geométricas básicas.

La tercera situación problemática fue la que presentó mayor nivel de dificultad al introducir por primera vez, para la unidad de análisis, el estudio de objetos geométricos desde la cuarta dimensión, sin embargo se contrarrestó con la exposición de un segundo ambiente, también basado en geometría dinámica, donde se permitió realizar tratamientos visuales entre tres elementos lingüísticos gráficos del hipercubo tetradimensional.

Se propone para futuras investigaciones consolidar un estudio histórico y epistemológico con mayor profundidad acerca del objeto politopo, incluyendo además, el análisis de posibles obstáculos inherentes en su aprendizaje.

Finalmente, el desarrollo de esta investigación contribuyó, en mi formación profesional, desde la ampliación de conocimientos inherentes en el aprendizaje del objeto politopo, lo que brinda herramientas teóricas para empezar un camino investigativo más amplio del tema en mención. También, contribuyó en el fortalecimiento de conocimientos especializados para la elaboración de AVA, lo que permitió a su vez, tener una postura crítica frente al uso de recursos digitales en el aula de geometría espacial, esto desde la reflexión del valor epistémico (naturaleza, posibilidad, alcance y fundamentos del conocimiento) y pragmático (la práctica, la ejecución o la realización de las acciones) de algunas nociones geométricas. Por otro lado, gracias a las bases teóricas brindadas por el EOS y el modelo CDM, no sólo se interpretaron las *facetas del conocimiento del profesor* de la unidad de análisis, emergentes en el trabajo de campo de esta investigación, sino que además, se interpretaron desde un punto de vista personal, lo que nutre la reflexión en cuanto a la formación profesional propia y además fomenta la búsqueda de su perfeccionamiento.

Referencias

Acosta, M. (2005). Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. *Educación Matemática*, *17*(3), 121-140.

Albert, C. (2016). *Materiales didácticos: poliedros [tesis de maestría, Universitat Jaume]*. http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/164445/TFM_2016_AlbertPardoCarmen.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Alsina, C. (2010). *Las mil caras de la belleza geométrica :los poliedros* (EDITEC (ed.)).

Álvarez, L., & Arias, C. (2014). Los ambientes virtuales de aprendizaje (AVA) como facilitadores del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría analítica en la educación media. *Revista de Educación y Desarrollo*, *30*, 63-70. http://www.cucs.udg.mx/revistas/edu_desarrollo/anteriores/30/30_Alvarez.pdf

Alvarez, W., & Forero, A. (2018). Estudio comparativo de las competencias digitales en el contexto urbano y rural en los educadores de Duitama, Boyacá. *Revista CEDOTIC*, *3*(2), 5-26. https://editorial.uniatlantico.edu.co/revistas/index.php/cedotic/article/view/69

Arias, H. (2013). *Strategy to teach surface areas of regular and irregular solids using physical and virtual manipulatives [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]*. http://www.bdigital.unal.edu.co/12545/1/8411502.2013.pdf

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas : desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *6*(8), 13-33.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in cabri environments. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *34*(3), 66-72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barbosa, J. (2004). Los ambientes virtuales de aprendizaje. En *Los Ambientes Virtuales de Aprendizaje –AVA–*. http://sgpwe.izt.uam.mx/files/users/virtuami/file/int/practica_entornos_actv_AVA.pdf

Bartolini, M., & Mariotti, M. (2015). Semiotic mediation in the mathematics classroom. Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of International Research in Mathematics Education*, *2*, 746-783. https://doi.org/10.4324/9780203930236.ch28

Bolea, P., Cañadas, M., Cid, E., Escolano, R., Gairín, J., Ibáñez, R., Muñoz, J., & Sancho, J. (2008). Diseño de prácticas en la geometría para maestros. *II Jornadas de Innovación Docente, Tecnologías de la Información y de la Comunicación e Investigación Educativa en la Universidad de Zaragoza*.

Camargo, Á. (2013). El papel de los registros de representación semiótica en la enseñanza y el aprendizaje del cálculo. *Vii Cibem*, 1841-1849. http://funes.uniandes.edu.co/18554/1/Camargo2013El.pdf

Camargo, L., & Acosta, M. (2012). La geometría, su enseñanza y su aprendizaje. *Tecné Episteme y Didaxis: TED*, *32*, 4-8. https://doi.org/10.17227/ted.num32-1865

Cañadas, M., Durán, F., Gallardo, S., Martínez, M., Peñas, M., & Villegas, J. (2003). Poliedros : lenguajes y representación espacial. *XI Jornada sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, 623-628. http://funes.uniandes.edu.co/271/

Cardona, C. (2006). *La geometría de Alberto Durero. Estudio y modelación de sus construcciones*. Universidad de Bogotá, Jorge Tadeo Lozano. https://n9.cl/cz62v

Casalderrey, F. (2010). *La burla de los sentidos* (EDITEC (ed.)).

Chiappe, A., & Manjarrés, G. (2013). Incidencia de un ambiente de aprendizaje blended, en la transformación de competencias matemáticas en estudiantes universitarios. *Ciência & Educação*, *19*(1), 113-122. http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132013000100008

Clemens, S., O' Daffer, P., & Cooney, T. (1998). *Geometry with applications and problem solving* (Addison-Wesley Iberoamericana. S. A. (ed.)).

Congreso de la República de Colombia. Ley 115 de febrero 8 de 1994. Ley General de Educación, mineducación (1994). https://bit.ly/2BxYhbU

Consejo Nacional de Política Económica y Social. (2008). *Política nacional de competitividad y productividad 3527*. https://www.ica.gov.co/getattachment/9ead52fd-f432-4175-b42a-484ea0662194/2008CN3527.aspx

Consejo Nacional de Política Económica y Social. (2010). *Lineamientos de política para la continuidad de los programas de acceso y servicio universal a las tecnologías de la información y las comunicaciones 3670*. https://bit.ly/2VWEYn1

Corbetta, P. (2007). *Metodología y técnicas de investigación social* (S. A. U. McGraw-Hill/INTERAMERICANA DE ESPAÑA (ed.)). https://diversidadlocal.files.wordpress.com/2012/09/metodologc3ada-y-tc3a9cnicas-de-investigacic3b3n-social-piergiorgio-corbetta.pdf

Córdoba, P., & Quintana, Y. (2013). Dificultades de los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas, para comprender el lenguaje matemático utilizado en demostraciones geométricas euclidianas. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 173-178). Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones. http://funes.uniandes.edu.co/3752/

Corrales, C. (2004). Salvador Dalí y la cuestión de las dimensiones. *SUMA*, *47*, 99-108. http://www.mat.ucm.es/~ccorrale/pdfs/suma47.pdf

Council, E. (2006). Recommendation of the European Parliament and the Council of 18 December 2006 on key competencies for lifelong learning. *Brussels: Official Journal of the European Union*, *30*(12), Article (2006/962/EC). http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/LexUriServ.do?uri=OJ:L:2006:394:0010:0018:en:PDF

Critchlow, K. (1982). *Time stands still. New lighton megalithic science* (Internet Archive (ed.)). https://n9.cl/xc756

Cruz, I. (2007). *Rotaciones multidimensionales generales [tesis de maestría, Universidad de las Américas Puebla]*. http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/mcc/cruz_m_ia/

Draco. (2009). *De la geometría básica a los politopos regulares convexos*. OCTOPATHOS. http://iarkof.blogspot.com/2009/01/de-la-geometra-bsica-los-politopos.html

Durero, A. (2000). *De la medida* (Jeanne Pei (ed.)). https://cutt.ly/VeyZsEq

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática (ed.)).

Fernández, E. (2018). La geometría para la vida y su enseñanza. *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería*, *6*(1), 36-65. https://doi.org/10.15649/2346030x.475

Fernandez, P. (2015). *Politopos. Ingeniería algorítmica*. https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3459.4723

Fiallo, J. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica [tesis de doctorado, Universitat de*

València.].

Field, J. (2005). *Piero della Francesca. A mathematician's art.* (Yale University Press (ed.)).

Font, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(2), 1-18.

Font, V., & Ramos, A. (2005). Objetos personales matemáticos y didácticos del profesorado y cambio institucional: el caso de la contextualización de funciones en una facultad de ciencias económicas y sociales. *Revista de educación*, *338*, 309-346.

Fredes, C., Hernández, J., & Díaz, D. (2012). Potencial y problemas de la simulación en ambientes virtuales para el aprendizaje. *Formacion Universitaria*, *5*(1), 45-56. https://doi.org/10.4067/S0718-50062012000100006

García, M., & Jaramillo, D. (2019). *Hacia una resignificación del currículo de matemáticas de la educación básica primaria, a partir de una educación matemática crítica*. 1-8. https://bit.ly/36Zfufj

Gizzi, C. (2016). *De prospectiva pingendi. Piero della Francesca* (Edizioni Ca´Foscari (ed.)). http://cataleg.ub.edu/record=b1236021~S1*spi

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13-31. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino Union_020 2009.pdf

Godino, J. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME)*, *0*, 1-20. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf

Godino, J. (2018a). *Bases epistémolgicas e instruccionales del enfoque ontosemiótico en educación matemática*. Enfoque Ontosemiótico.

http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_epins_EOS.pdf

Godino, J. (2018b). Bases semióticas, antropológicas y cognitivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Universidade de Granada*, 1-33. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_sac_EOS.pdf

Godino, J. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática : motivación, supuestos y herramientas teóricas* (Universidad de Granada (ed.); pp. 1-60). http://www.ugr.es/local/jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf%5CnJuan

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J., Beltrán, P., Burgos, M., & Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.*, 1-13. enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., & Ruiz, F. (2002). Geometría y su didáctica para maestros. En Universidad de Granada (Ed.), *Matemáticas y su Didáctica para Maestros. Manual para el Estudiante* (pp. 453-606). http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Godino, J., & Font, V. (1994). *Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. Anexo al artículo, "significado institucional y personal de los objetos matemáticos".* Recherches en Didactique des Mathématiques. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema Rio Claro, 31*(57), 90-

113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J., Rivas, M., Castro, W., & Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 1-21. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p1

Gómez, M. (2011). *Pensamiento geométrico y métrico en las Pruebas Nacionales [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]*. http://www.bdigital.unal.edu.co/7547/

Gómez, P., Castro, P., Bulla, A., Mora, M., & Pinzón, A. (2016). Derechos básicos de aprendizaje en matemáticas: revisión crítica y propuesta de ajuste. *Educación y Educadores*, *19*(3), 315-338. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_abstract&pid=S0123-12942016000300315

González, F. (2014). Formación inicial de profesores en geometría con Geogebra. *Revista Iberoamericana de Educación*, *65*, 161-172. https://rieoei.org/RIE/article/view/400

González, M. (2001). La gestión de la clase de matemáticas utilizando sistemas de Geometría Dinámica. En P Gómez & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en dinámica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.: Vol. Primera ed* (pp. 277-290). Universidad de Granada. https://cutt.ly/Dedr530. Obtenido de https://cutt.ly/sedr4Xc

González, P. (2009). Los sólidos pitagórico-platónicos geometría, arte. mística y filosofía. En *XTEC - Xarxa Telemàtica Educativa de Catalunya*. http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/14Poliedros.pdf

Gonzato, M., Godino, J., & Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, *23*(3), 5-37. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/gonzato_godino_neto visualizacion.pdf

Gordillo, W., & Pino-Fan, L. R. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *30*(55), 535-558. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a12

Grisales, A. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Entramado, 14*(2), 198-214. https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751

Grünbaum, B., & Shephard, G. (2007). Convex polytopes. En P. Geuber (Ed.), *Convex and Discrete Geometry* (Vol. 1, pp. 243-351). Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-540-71133-9_3

Guamán, C., & Paredez, R. (2016). *Estudio de las competencias digitales educativas de los docentes de básica media de las instituciones educativas de la Parroquia Veloz de la ciudad de Riobama [tesis de Pregrado, Universidad Nacional de Chimborazo]*. http://dspace.unach.edu.ec/handle/51000/1848

Gutiérrez, A. (2008). Aspectos metodológicos de investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez, & M. Torralbo (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (Vol. 53, Número 9, pp. 27-44). https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Gutiérrez, S. (2009). Luca Pacioli y la Divina Proporción. *Suma*, *61*, 107-112. https://revistasuma.es/IMG/pdf/61/107-112.pdf

Hayek, N. (2008). Impre Lakatos: matemático y filósofo. *Rev. Acad. Canar. Cienc*, *XIX*(2007), 73-92. https://mdc.ulpgc.es/utils/getfile/collection/racc/id/738/filename/744.pdf

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (McGraw-Hill Education (ed.)).

Hise, J. (2019). *Hyperspace can spin*. ENTROPY GAMES. http://www.entropygames.net/

INTEF. (2017). Marco común de competencia digital docente. En Gobierno de España (Ed.), *Ministerio de Educación, Cultura y Deporte*. http://aprende.intef.es/sites/default/files/2018-05/2017_1020_Marco-Común-de-Competencia-Digital-Docente.pdf

Jaramillo, A. (2012). *Ambientes virtuales en el proceso educativo: modos de asumir el entorno virtual [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]*. http://www.bdigital.unal.edu.co/10208/

Jiménez, A. (2019). Formación de profesores de matemáticas: el caso de la Licenciatura más antigua de Colombia. *Praxis & Saber*, *10*(22), 45-70.

Jiménez, A., Díaz, M., & Leguizamón, J. (2011). Propuesta de modelo pedagógico para formar Licenciados en Matemáticas. *Praxis & Saber*, *2*(3), 61-86.

Joyce, D. (1996). *Euclid´s Elements*. CLARK UNIVERSITY. https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/toc.html

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestros días* (Educación para todos (ed.)).

Koehler, M., Mishra, P., & Cain, W. (2015). ¿Qué son los saberes tecnológicos y pedagógicos del contenido (TPACK)? *Virtualidad, Educación y Ciencia*, *6*(10), 9-23. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/11552

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strasser, R. (2019). Teaching and learning geometry with technology. En A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 275-304). 2006 Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789087901127

Laborde, C., & Laborde, J. (1995). The case of Cabri-géomètre: learning geometry in a computer based environment. En D. et al Watson (Ed.), *Integrating Information Technology into Education* (pp. 95-106). © Springer Science+Business Media Dordrecht 1995. https://doi.org/10.1007/978-0-387-34842-1_10

Lakatos, I. (1963). *Proofs and Refutations (I)* (pp. 7-25). https://math.berkeley.edu/~kpmann/Lakatos.pdf

Leguizamón, J., Jiménez, A., & Chaparro, A. (2020). Tendencias didácticas de algunos docentes universitarios de matemáticas. *Praxis & Saber, 11*(26), 1-17. https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.11040

Leguizamón, J., Patiño, O., & Suárez, P. (2015). Tendencias didácticas de los docentes de matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los medios educativos en el aula. *Educación matemática*, *27*(3), 151-174.

López, L. (2017). Indagación en la relación entre aprendizaje - tecnologías digitales. *Educación y Educadores*, *20*(1), 91-105. https://doi.org/10.5294/edu.2017.20.1.5

Luchiari, M. (2018). *Poliedros de Kepler-Poinsot: uma verificação da relação de Euler com jujubas, canudos e varetas* (UNESP (ed.)). https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6378515

Mariotti, M., & Maffia, A. (2018). From using artefacts to mathematical meanings: the teacher's role in the semiotic mediation process. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d'aula*, *3*, 50-63. https://doi.org/10.33683/ddm.18.4.3.1

Martín, M. (2017). *Sólidos de Catalan*. Geómetra. Arte, orden y simetría. https://geometra.es/solidos-de-catalan/

Martínez, J. (1988). El estudio de casos en la investigación educativa. *Investigación en la* *escuela*, *6*, 41-50. https://n9.cl/wosr

McMillan, J., & Schumacher, S. (2005). Investigación educativa. Una introducción conceptual. En S. S. PEARSON EDUCATION (Ed.), *Investigación educativa* (5.ª ed.). https://des-for.infd.edu.ar/sitio/upload/McMillan_J._H.__Schumacher_S._2005._Investigacion_educativa_5_ed..pdf

Melo, D., Díaz, P., Vega, O., & Serna, C. (2018). Situación digital para instituciones de educación superior: modelo y herramienta. *Información tecnológica*, *29*(6), 163-174. https://doi.org/10.4067/s0718-07642018000600163

Mendoza, P., & Galvis, A. (1999). Ambientes virtuales de aprendizaje: una metodología para su creación. *Revista Informática Educativa RIE*, *12*(2), 295-316. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Mesa, F. (2012). Las tecnologías de la información y la comunicación en la universidad colombiana: evolución y prospectiva. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana*, *14*(19), 71-90. https://doi.org/10.19053/01227238.1986

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matematicas, ciencias y ciudadanas*. file:///C:/Users/marym_000/Pictures/estandares basicos.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2007). *Plan nacional decenal de educación 2006-2016: compendio general*. http://bit.ly/2YuHFRV

Ministerio de Educación Nacional. (2013a). *Competencias TIC para el desarrollo profesional docente*. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-339097_archivo_pdf_competencias_tic.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2013b). *Sistema colombiano de formación de educadores y lineamientos de política*. https://doi.org/http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-345822_ANEXO_19.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2017). *Plan nacional decenal de educación 2016 -2026*. https://bit.ly/2z8ie8S

Mishra, P., & Koehler, M. (2006). Technological pedagogical content knowledge: a framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, *108*(6), 1017-1054. http://one2oneheights.pbworks.com/f/MISHRA_PUNYA.pdf

Mommensohn, M., & Petrella, P. (2006). *Reflexoes sobre laban, o mestre do movimento* (summus (ed.)). https://cutt.ly/IeySdhG

Moreno-Armella, L. (2002). Ideas geométricas del currículum presentadas mediante el Cabri Geometre. En A. Castiblanco, L. Moreno-Armella, F. Rodríguez, M. Acosta, L. Camargo, & E. Acosta (Eds.), *Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación media de Colombia* (pp. 141-150). Ministerio de Educación Nacional.

Moreno-Armella, L. (2018). La geometría en el mundo moderno. *Praxis, Educación Y Pedagogía*, *2*, 96-123. https://doi.org/10.25100/praxis_educacion.v0i2.7800

Moreno-Armella, L., & Elizondo, R. (2017). La Geometria al encuentro del aprendizaje. *Educacion Matematica*, *29*(1), 9-36. https://doi.org/10.24844/em2901.01

Moreno-Armella, L., & Santos, M. (2002). Proceso de transformación del uso de tecnología en herramienta para solucionar problemas de matemáticas por los estudiantes. En A. Castiblanco, L. Moreno-Armella, F. Rodríguez, M. Acosta, L. Camargo, & E. Acosta (Eds.), *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia* (pp. 263-268). Ministerio de Educación Nacional.

Niño, Á. (2018). *Competencia tecnológica y habilidades de visualización en estudiantes de Licenciatura en Matemáticas y Estadística UPTC* [tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]. https://repositorio.uptc.edu.co/handle/001/2942

Ortiz, A. (1936). La matemática en la antiguedad. En Pontificia Universidad Católica del Perú (Ed.), *Historia De La Matemática* (Vol. 1, pp. 1-386). http://textos.pucp.edu.pe/pdf/2389.pdf

Pacioli, L. (1509). *Divina Proportione* (Titivillus (ed.)). Traducción de Ricardo Resta. https://n9.cl/spqr7

Padrón, E. (2017). *Historia de un poliedro*. Libros Maravillosos. http://www.librosmaravillosos.com/historiadeunpoliedro/index.html

Pando, S. (2009). Geometría, arte, ciencia y teselaciones. En STUDYLIB (Ed.), *El extraño mundo de las teselaciones, un paseo por la geometría par estudiantes de bachillerato* (pp. 32-73). https://studylib.es/doc/7523676/capítulo-2.-geometría--arte--ciencia-y-teselaciones

Peña, A. (2010). *Enseñanza de la geometría con tic en educación secundaria obligatoria [tesis de doctorado, Universidad Nacional De Educación a Distancia]*. https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=27187

Perea, B. (2016). *Las tecnologías de información y la comunicación como estrategias para potenciar el desarrollo de competencias y el aprendizaje de poliedros regulares [tesis de maestría, Universidad Pontificia Bolivariana]*. https://repository.upb.edu.co/handle/20.500.11912/2913

Pinasco, J., Amster, P., Saintier, N., Laplagne, S., & Saltiva, I. (2009). *Las geometrías* (Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica (ed.)).

Pino-Fan, L., & Godino, J. (2015). Perpectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradígma*, *36*(1), 87-109. http://docente.ulagos.cl/luispino/wp-content/uploads/2015/07/2662-6235-1-PB.pdf

Pino, M., & Soto, J. (2010). Identificación del dominio de competencias digitales en el alumnado del grado de magisterio. *Education in the knowledge society (EKS), 11*(3), 336-362. https://doi.org/10.14201/eks.7466

Platón. (1872). Timeo. En Patricio de Azcárate (Ed.), *Nova Tellus* (Vol. 6).

Polo-blanco, I. (2008). *Politopos regulares en la cuarta dimensión, por Alicia Boole Stott*. 31-38.

Polo-blanco, I. (2010). Actividades de visualización para la formación de profesores de matemáticas: el método de Alicia Boole Stott. *La Gaceta de la RSME*, *13*, 137-152. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=916

Ponce de León, A., & Fregoso, N. (2009). *Geometría sagrada y arquitectura biológica* (Psicogeome (ed.)). https://n9.cl/vt3mg

Quintero, D. (2015). Grupos de simetría de los polígonos: el caso del triángulo equilátero y el pentágono regular. *Revista EJES*, *3*, 74-78. http://funes.uniandes.edu.co/9817/

Reyes, D. (2017). *Visualización y exploración, acciones que se fortalecen en el ambiente [tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]*. https://doi.org/10.1177/0309133309346882

Rincón, F., & Soto, S. (2019). Introducción a la teoría de politopos. *Lecturas Matemáticas*, *40*(2), 177-215. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7215102

Ruiz, N. (2012). *Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica Geogebra en la formación inicial del profesorado de primaria [tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Madrid]*.

https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=29947

Salas, R. (2018). Uso del modelo TPACK como herramienta de innovación para el proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas. *Perspectiva Educacional*, *57*(2), 3-26. https://doi.org/10.4151/07189729-vol.57-iss.2-art.689

Sandí, J., & Sanz, C. (2018). Revisión y análisis sobre competencias tecnológicas esperadas en el profesorado en Iberoamérica. *EDUTEC*, *66*, 93-121. https://doi.org/10.21556/edutec.2018.66.1225

Sandoval, C. (2002). Investigación cualitativa. En ARFO Editores e Impresores Ltda (Ed.), *Pharmaceutical Care Espana* (Vol. 13, Número 6). Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior, ICFES. https://doi.org/10.33132/9789585459014

Sandoval, I., & Moreno-Armella, L. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. *Horizontes Pedagógicos*, *14*(1), 21-29. https://doi.org/10.33881/0123-8264.hop.%x

Sandoval, O., & Lee, P. (2007). *One of the most charming topics in geometry*. https://math.rice.edu/~nsfmli/presentations/Cohort2Presentations/Polyhedra.pdf

Santos, F. (2000). *Poliedros y politopos*. https://personales.unican.es/santosf/

Sarriugarte, I. (2014). Introducción a la cuarta dimensión y su relación con la obra pictórica de Kazimir Malevich. *Quintana*, *13*, 283-300. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=653/65342954018

Sgreccia, N., Massa, M., & Ordóñez, A. (2006). Hacia la configuración de la “geometría del profesor” como contenido de enseñanza. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19*.

Shulman, L. (1992). Those who understand the knowledge growth in teaching. *Educational*

Research, 4-14.

Shulman, L. (2019). Recuperando a los clásicos. Aquellos que entienden: desarrollo del conocimiento en la enseñanza. *Profesorado*, *23*(3), 269-295. https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i3.11230

Sierra, J. (2019). *Funciones multisimétricas y politopos de transporte [tesis de pregrado, Pontifcia Universidad Javeriana]*. http://bibliotecavirtualoducal.uc.cl/vufind/Record/oai:localhost:10554-43183/Description#tabnav

Stols, G. (2012). Does the use of technology make a difference in the geometric cognitive growth of pre-service mathematics teachers? *Australasian Journal of Educational Technology*, *28*(7), 1233-1247. https://doi.org/10.14742/ajet.799

Suárez, P. (2018). *Formación inicial y permanente de profesores de matemáticas con ambientes virtuales para la enseñanza de las geometrías [tesis de doctorado, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia]*. https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004

Suárez, P., & Ramírez, G. (2012). Exploración de sólidos a partir de sistemas de representación. *Praxis & Saber*, *2*(3), 27-60. https://revistas.uptc.edu.co/index.php/praxis_saber/article/view/1109

Suárez, P., Salamanca, A., & Jaime, A. (2018). Estrategias mediadas por TIC para desarrollar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos. *Voces y Realidades Educativas*, *1*, 99-114. http://www.vocesyrealidadeseducativas.com/volumen/articulo 8.pdf

Téliz, F. (2015). Uso didáctico de las TIC en las buenas prácticas de enseñanza de las matemáticas. Estudio de las opiniones y concepciones de docentes de educación secundaria en el departamento de Artigas. *Cuadernos de Investigación Educativa*, *6*(2), 13-31.

https://doi.org/10.18861/cied.2015.6.2.34

Toledo, S. (1992). *La geometría pitagórica* (Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia (ed.)). http://fundacionorotava.org/media/web/files/page83__cap04_web.pdf

Toro, J. (2014). *Acercamiento a la argumentación en un ambiente de Geometría Dinámica: grado octavo [tesis de maestría, Universidad de Medellín]*. http://funes.uniandes.edu.co/11472/1/Toro2014Acercamiento.pdf

UNESCO. (2008). *Estándares de competencias en TIC para docentes*. http://eduteka.icesi.edu.co/pdfdir/UNESCOEstandaresDocentes.pdf

Valdivieso, R., & Carrera, I. (2006). Polígonos y poliedros. En *Colección Matemática Maravillosa* (pp. 1-240). https://pdfslide.tips/documents/fundacion-polar-matematica-maravillosapdf.html

Valero, P., & Skovsmose, O. (2017). *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (Centro de Investigación y Formación en Educación (CIFE) (ed.)). Universidad de los Andes. https://www.researchgate.net/publication/281438280

Vargas, J. (2013). *Un viaje por la historia de algunas ecuaciones algebraicas y su enseñanza en la escuela [tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]*. http://www.bdigital.unal.edu.co/11739/

Várilly, J. (1995). La geometría en su contexto histórico. *Las matemáticas y su enseñanza*, *6*(17), 21-34. http://www.kerwa.ucr.ac.cr/handle/10669/11350

Vasco, C. (2006). *Didáctica de las matemáticas. Artículos selectos* (Universidad Pedagógica Nacional (ed.)). https://n9.cl/zsty

Velázquez, L. (2010). *Una mirada a los sólidos de Jonhson*. Seminario permantente del

Laboratorio de Cómputo Científico. https://docplayer.es/41845692-Una-mirada-a-los-solidos-de-jonhson.html

Villamil, D., Aldana, E., & Wagner, G. (2018). Análisis de contenido del concepto de área en educación superior. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, *8*(2), 265-278. https://doi.org/10.19053/20278306.v8.n2.2018.7964

Warburton, N. (2002). *La caverna de Platón y otras delicias* (Traducción castellana de Antonio Desmonts (ed.)). https://issuu.com/russito/docs/warburton-nigel-la-caverna-de-plato

Zenil, H. (2011). *Lo que cabe en el espacio* (CopIt-arXi (ed.)).

Zuñiga, M. (1998). Poliedros arquimedianos. *Revista del Profesor de Matemáticas*, *6*, 49-57. https://revistadelprofesor.files.wordpress.com/2012/09/rpm_ancc83o-3-nc2b0-2_pag-49-57.pdf

Anexos

Anexo 1. Estándares Básicos de Competencias para el Objeto Poliedro Convexo

Grado	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Pensamiento espacial y sistemas geométricos
Primero a tercero	•Uso diversas estrategias de cálculo (especialmente cálculo mental) y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. •Identifico, si a la luz de los datos de un problema, los resultados obtenidos son o no razonables.	•Reconozco en los objetos propiedades o atributos que se puedan medir (longitud, área, volumen, capacidad, peso y masa) y, en los eventos, su duración. •Analizo y explico sobre la pertinencia de patrones e instrumentos en procesos de medición.	•Dibujo y describo cuerpos o figuras tridimensionales en distintas posiciones y tamaños. •Realizo construcciones y diseños utilizando cuerpos y figuras geométricas tridimensionales y dibujos o figuras geométricas bidimensionales.
Cuarto a quinto	•Identifico, en el contexto de una situación, la necesidad de un cálculo exacto o aproximado y lo razonable de los resultados obtenidos.	•Diferencio y ordeno, en objetos y eventos, propiedades o atributos que se puedan medir (longitudes, distancias, áreas de superficies, volúmenes de cuerpos sólidos, volúmenes de líquidos y capacidades de recipientes; pesos y masa de cuerpos sólidos; duración de eventos o procesos; amplitud de ángulos). •Utilizo diferentes procedimientos de cálculo para hallar el área de la superficie exterior y el volumen de algunos cuerpos sólidos. •Justifico relaciones de dependencia del área y volumen, respecto a las dimensiones de figuras y sólidos. •Describo y argumento relaciones entre el perímetro y el área de figuras diferentes, cuando se fija una de estas medidas.	•Comparo y clasifico objetos tridimensionales de acuerdo con componentes (caras, lados) y propiedades. •Comparo y clasifico figuras bidimensionales de acuerdo con sus componentes (ángulos, vértices) y características. •Identifico, represento y utilizo ángulos en giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas. •Construyo objetos tridimensionales a partir de representaciones bidimensionales y puedo realizar el proceso contrario en contextos de arte, diseño y arquitectura.
Sexto a séptimo	•Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas y multiplicativas, en diferentes contextos y dominios numéricos.	•Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.	•Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas. •Identifico y describo figuras

	•Justifico la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas. •Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores. •Justifico la elección de métodos e instrumentos de cálculo en la resolución de problemas.	•Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas). •Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.	y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales. •Clasifico polígonos en relación con sus propiedades. •Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas. •Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.
Octavo a noveno	•Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	•Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos. •Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.	•Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. •Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.
Décimo a undécimo	•Establezco relaciones y diferencias entre varias notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.	•Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos.	•Uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

Fuente: adaptado del Ministerio de Educación Nacional (2006).

Anexo 2. Niveles de Competencias Digitales

Competencia	N1	N2	N3
Tecnológica. Es la capacidad para seleccionar y aplicar herramientas tecnológicas de manera pertinente, responsable y eficiente.	Conoce gran variedad de herramientas tecnológicas y cómo utilizarlas en la práctica educativa.	Utiliza las herramientas tecnológicas de acuerdo al área y contexto.	Aplica el conocimiento de conceptos tecnológicos en el diseño de ambientes de aprendizaje innovadores que respondan a problemas del contexto.
Comunicativa. Es la capacidad de expresarse, establecer contacto y relacionarse en espacios virtuales y audiovisuales utilizando diversos medios y múltiples lenguajes.	Se comunica con la comunidad educativa por medio de diferentes canales y lenguajes ofrecidos por las TIC.	Utiliza redes basadas en las TIC para desarrollar estrategias de trabajo colaborativo.	Participa en comunidades y publica investigaciones en espacios virtuales.
Pedagógica. Es la capacidad de utilizar las TIC con el fin de fortalecer los procesos de enseñanza y aprendizaje reconociendo las limitaciones para su incorporación en la formación integral de los estudiantes.	Identifica estrategias y metodologías novedosas basadas en las TIC como herramienta para su desempeño profesional.	Propone proyectos y estrategias de aprendizaje mediadas por las TIC.	Lidera experiencias significativas que involucran ambientes de aprendizaje.
De gestión. Es la capacidad de utilizar las TIC en la planeación, organización y evaluación de procesos de enseñanza.	Organiza actividades con el uso de las TIC.	Integra las TIC en procesos de gestión tanto a nivel directiva como comunitaria de la institución.	Propone y lidera acciones para optimizar la gestión escolar.
Investigativa. Es la capacidad de utilizar las TIC en pro de la generación de nuevos conocimientos.	Utiliza las TIC para registrar lo que vive y observa en su contexto.	Lidera proyectos de investigación.	Construye estrategias educativas innovadoras para la generación colectiva de conocimiento.

Fuente: adaptado de MEN (2013a).

Anexo 3. Software y Aplicaciones que Permiten el Trabajo con Geometría Dinámica

Software	Versión	Sistema operativo	Requerimientos	Página web
Antiprism	0.26	Windows, Cygwin (Windows), FreeBSD, Mac OSX y Raspbian.	Software libre	https://bit.ly/2vnAnT2
AR Geometry	1.0	Android 4.0	Aplicación libre	https://bit.ly/2uz2cb5
AR Sólidos Platónicos	0.12	Android 4.4	Aplicación libre	https://bit.ly/37h5vB3
Arloon Geometry	1.4	Android 4.0.3	Aplicación costo $ 7.500	https://bit.ly/38hW4Cy
Cabri II plus	1.4.3	-Mac OS X -Windows	Licencia del propietario	https://cabri.com/es/
Cabri 3D	2.1	Windows: Win XP, Vista, 7 o superior.	Licencia del propietario. 64 Mb de RAM	https://bit.ly/378zCKY
CarMetal	4.3	Mac OS X, Windows y Linux.	Licencia Pública General de GNU (GPL v3)	https://bit.ly/2tPa7AM
CaR Regla y Compás	8.84	Windows	Software libre Java RunTime Environment 1.4	https://bit.ly/39uhJId
Cinderella	2.9	Windows 95/98/NT/2000/XP/Vista/7	Software libre	https://bit.ly/3bqFzWN
Curved Spaces	4.1.3	Windows, macOS	Software libre	https://bit.ly/38hwTA6
Dr. Geo	19.09	GNU/Linux, Windows or Mac OS X	Software libre	http://www.drgeo.eu/
Euclidea	4.40	Android 4.4	Aplicación libre	https://bit.ly/3bpQboY
FreeGeo Mathematics	1.8.6	Andorid 2.2	Aplicación libre	https://bit.ly/37c0gm5

GeoGebra	3D	iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook y Linux	Software libre	https://www.GeoGebra.org/?lang=es
Geometer's Sketchpad	5.01	Mac Windows	-JavaSketchpad -Licencia propietario	https://bit.ly/2He7vj4
Geometría	3.0.2	Android 4.0.3	Aplicación libre	https://bit.ly/2OJ83lb
Geometría	2.21	Android 4.1	Aplicación libre	https://bit.ly/2UEV5Zf
Geometría Calculadora	2.8.3	Android 4.1	Aplicación libre	https://bit.ly/2w7ZaLt
Geometría Master	2.0	Android 4.1	Aplicación libre	https://bit.ly/2UMeQ1j
Geometría - Realidad Aumentada	1.0.4	Android 4.0	Aplicación libre	https://bit.ly/37emV16
Geometry Pad	2.7.9	Android	Aplicación libre	https://bit.ly/2OJpOk3
Geometryx	2.5	Android 4.3	Aplicación libre	https://bit.ly/2ScWxk3
Geonext	1.73	Windows	Software libre Java	https://bit.ly/38hyRAH
Geup	8.0.1	Windows 2000, XP, Vista, 7, 8	Licencia del propietario	https://bit.ly/38iFmTJ
Hypercube Viewer	1.1	Andorid 5.0	Aplicación libe	https://cutt.ly/prG857w
iCrosss	1.0.2	Android 4.0.3	Aplicación costo $2547	https://cutt.ly/BrG86Zg
Limix Geometric	1.3.2 5	Windows XP, Vista y Windows 7.	Software libre	https://cutt.ly/zrG4qvf
MoStella	1.4	Android 2.2	Aplicación libre	https://cutt.ly/mrG4wtc

Free				
Poly Pro	1.11	Windows Versión de prueba	Licencia del propietario	https://poly-pro.softonic.com/
Polygeom Calc	1.5.0	Android 4.1	Aplicación libre	https://cutt.ly/VrG4w6m
Polyhedra	2.11.1	Android 5.0	Aplicación libre	https://cutt.ly/2rG4emI
Polytope	0.8	Android 2.2	Aplicación libre	https://cutt.ly/TrG4e36
Pythagorea 60°	2.07	Android 4.4	Aplicación libre	https://cutt.ly/OrG4rQN
Shapes - La Geometría 3D	2.3.5	Android 4.1	Aplicación costo $11.000	https://cutt.ly/wrG4r52
Sketchometry	1.5.0	Android 3.2	Aplicación libre	https://cutt.ly/OrG4tnj
Sketchpad	2019	Windows Navegador	Acceso a sitio web	https://sketchpad.app/
Triangulos	1.0	Windows XP, Vista	Software libre	https://triangulos.uptodown.com/windows
Wingeom	1.63	Windows	Software libre	https://cutt.ly/crG4yUT
xGeometry	1.4	Android 5.0	Aplicación libre	https://cutt.ly/zrG4ukK
XSection	1.04	Android 5.0	Aplicación libre	https://cutt.ly/IrG4uZO

Fuente: elaboración propia.

Anexo 4. Solicitud de Permiso al Programa Académico Licenciatura en Matemáticas.

Tunja, 01 de junio de 2020

Señores
COMITÉ DE CURRÍCULO
Licenciatura en Matemáticas
Facultad Ciencias de la Educación U.P.T.C.

Cordial saludo,

Respetados señores, actualmente me encuentro desarrollando el proyecto de investigación titulado "Competencia Digital en el Aprendizaje de los Poliedros Convexos", bajo la dirección del profesor Publio Suárez Sotomonte, como requisito parcial para optar el título de Magister en Educación Matemática en la UPTC.

Este proyecto tiene por objetivo caracterizar e interpretar el desarrollo de las Facetas Epistémica y Mediacional del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática, relacionadas con las competencias digitales de los estudiantes que cursan Electiva de Profundización I, del programa académico Licenciatura en Matemáticas, en el aprendizaje de los poliedros convexos.

Por tal motivo solicitamos respetuosamente nos sea concebido el permiso para realizar el respectivo trabajo de campo, hasta el momento de manera virtual y aspiramos en un futuro de manera presencial, con los estudiantes que ingresan en el primer semestre de 2020 a la asignatura en mención.

Agradecemos su colaboración

Atentamente,

Firmado

Laura Catalina Pedroza Pinilla
Licenciada en Matemáticas
Cel. 3178288929

Firmado

Publio Suárez Sotomonte
Profesor de la asignatura.
Director de Tesis.

Anexo 5. Consentimiento Informado de la Unidad de Análisis

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Facultad de Ciencias de la Educación
Maestría en Educación Matemática

Competencia Digital en el Aprendizaje de los Poliedros Convexos

Estimado estudiante, actualmente me encuentro cursando el programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, y estoy llevando a cabo una investigación titulada "Competencia Digital en el Aprendizaje de los Poliedros Convexos", como requisito parcial para obtener el título como Magíster en Educación Matemática.
El objetivo de esta investigación es "Caracterizar e interpretar el desarrollo de las Facetas Epistémica y Mediacional del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática relacionadas con las competencias digitales de los estudiantes que cursan Electiva de Profundización I, en el aprendizaje de los poliedros convexos"; por tanto, nos dirigimos respetuosamente para solicitar su participación activa en este proceso.
Solicitamos su consentimiento informado para la organización, interpretación y sustentación de la información que podamos observar en su aprendizaje; este proceso será estrictamente confidencial y su nombre no se verá afectado de ninguna manera, es decir su identidad será preservada confidencialmente.

Cordialmente,

Laura Catalina Pedroza Pinilla.
Licenciada en matemáticas.

Dr. Publio Suárez Sotomonte.
Profesor de la asignatura.
Director de tesis.

*Obligatorio

Dirección de correo electrónico *

Tu dirección de correo electrónico

Apellidos y Nombres *
(En mayúscula sostenida: APELLIDOS - NOMBRES). Ejemplo: ACUÑA SOLER JUAN CARLOS

Tu respuesta

Código estudiantil *

Tu respuesta

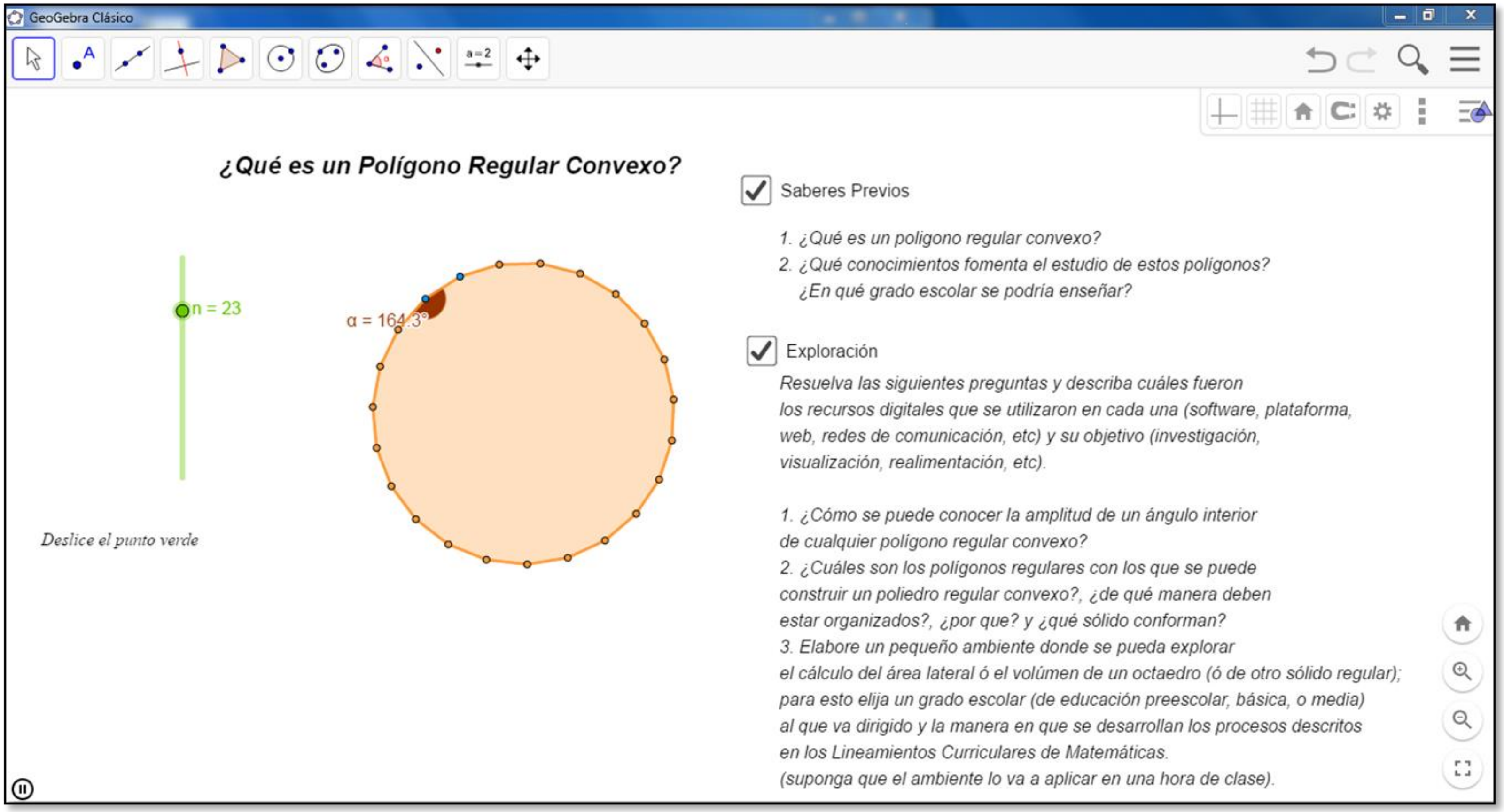
Estoy de acuerdo con dar mi consentimiento informado para llevar a cabo el proceso descrito arriba: *

- Sí
- No

Siguiente — Página 1 de 6

Nunca envíes contraseñas a través de Formularios de Google.

Anexo 6. *Situación Problemática 1*. ¿Qué es un Polígono Regular Convexo?

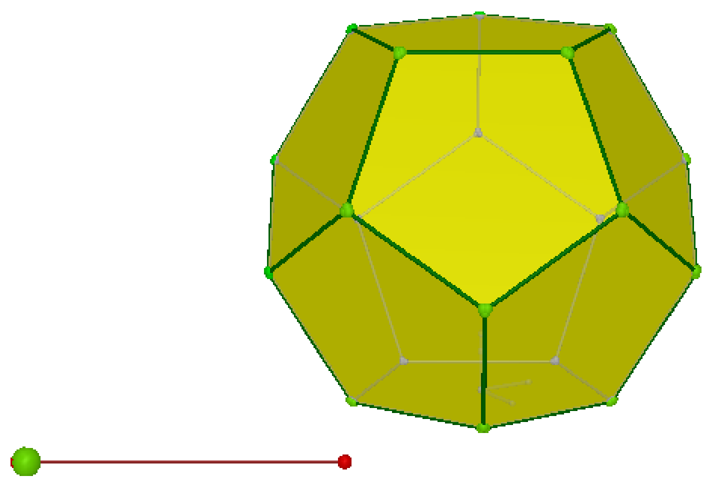


Anexo 7. Situación Problemática 2: ¿Qué Sucede al Truncar un Dodecaedro Regular?

¿Qué sucede al truncar un dodecaedro regular?

Saberes previos:

1. ¿Qué diferencia existe entre un poliedro regular y uno semirregular?
2. ¿En qué grado escolar es posible estudiar los poliedros regulares? y ¿qué conocimientos se llevarían a cabo?



Exploración:

Resuelva las siguientes preguntas y describa cuáles fueron los recursos digitales (plataformas, páginas web, software, videos, etc) que se utilizaron y su objetivo (investigación, visualización, realimentación, etc).

1. Usando la opción de animación ¿Cuántos y cuáles tipos (clases) de poliedros observa?
2. ¿Quiénes fueron los personajes, en la historia, que estudiaron los poliedros convexos? ¿qué problemas geométricos exploraron?.
3. Desarrollando el proceso de estimación ¿qué area lateral debe ser mayor: la del dodecaedro o la de su truncamiento (el icosidodecaedro)? . Argumente su respuesta.
4. ¿Qué relación existe entre el área lateral de un dodecaedro de arista = a unidades, y el área del icosidodecaedro generado por él? (deslice el punto verde para apoyar su visualización).
5. Elabore un pequeño ambiente que permita la exploración de alguno de los problemas que indagó en el punto dos, tenga en cuenta el grado escolar al que va dirigido y describa de qué manera se desarrollan los pensamientos matemáticos según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas.

(suponga que el ambiente lo va a aplicar en una hora de clase)

Anexo 8. Situación Problemática 3: ¿Hipercubo?

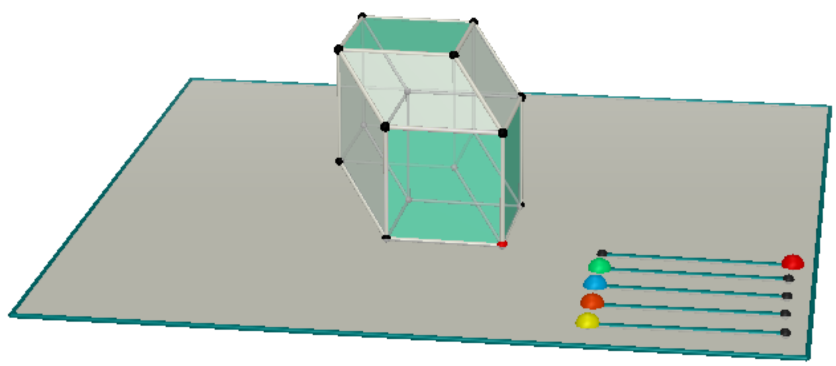
¿HIPERCUBO?

SABERES PREVIOS:

Responda las siguientes preguntas individualmente y a continuación identifique diferencias con la respuesta de sus compañeros de grupo.

1. ¿Qué características geométricas podría tener un politopo? ¿por qué?

A CONTINUACIÓN VA A EXPLORAR EL DIBUJO DINÁMICO 3D, EN DONDE SE PARTE DEL PUNTO HASTA LLEGAR AL HIPERCUBO INCREMENTANDO LA DIMENSIÓN.



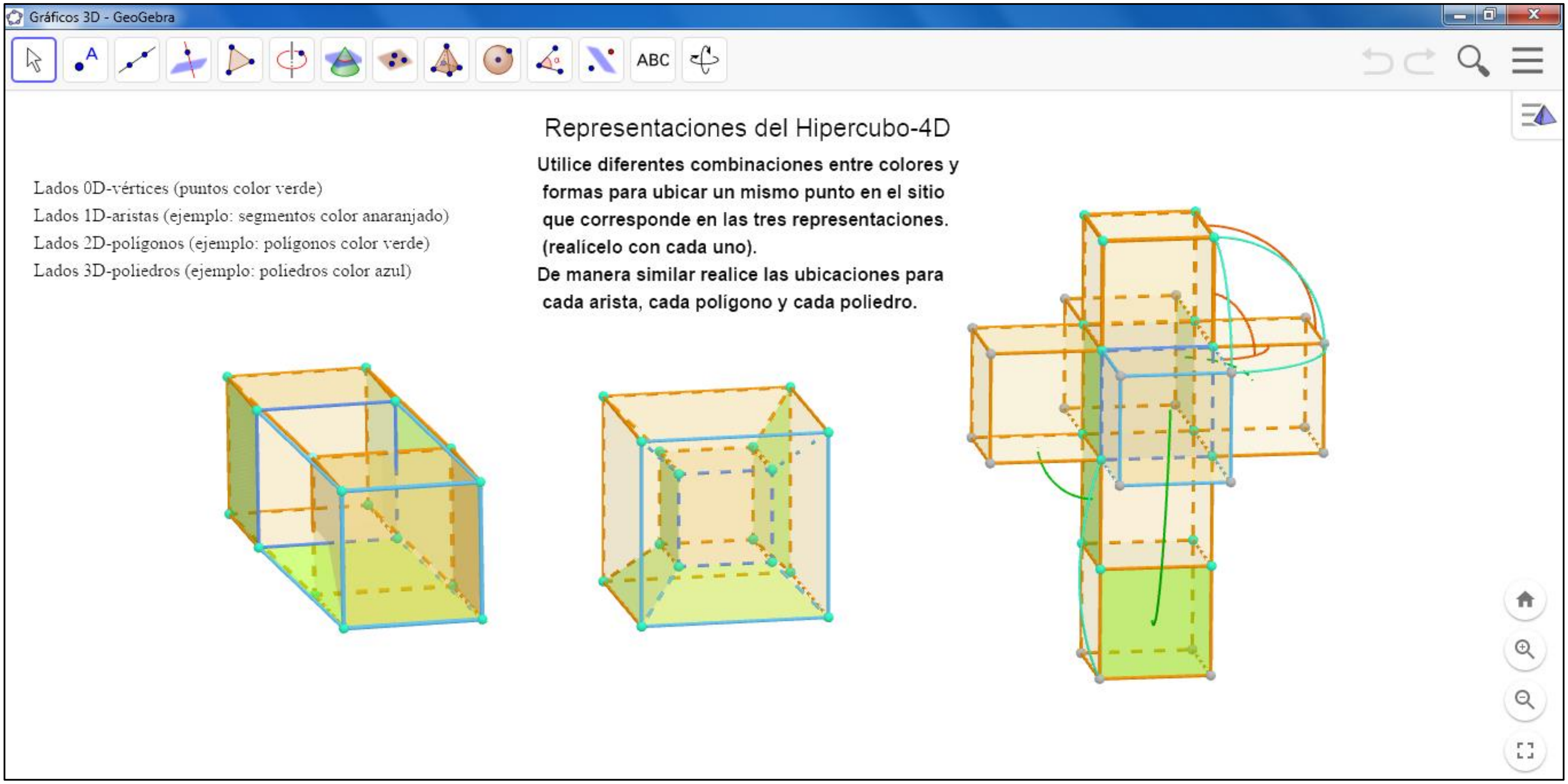
EXPLORACIÓN:

Responda las siguientes preguntas, y en cada una mencione los recursos digitales (plataformas, páginas web, software, videos, etc) que utilizó y de qué manera (investigación, visualización, realimentación, etc).

1. ¿Quiénes fueron los personajes que, en la historia, estudiaron a los politopos? y ¿qué problemas geométricos exploraron?.
2. Utilice los deslizadores en orden amarillo, anaranjado, azul y verde; ¿qué conclusión puede deducir en cuanto al cambio de dimensión?, ¿en qué momento se genera un politopo? justifique su respuesta.
3. Devuelva al punto inicial los deslizadores verde y azul, y a continuación utilice el deslizador rojo; ¿a qué politopo corresponde esta representación?
4. ¿Existen patrones que describan la cantidad de vértices (lados 0D), aristas (lados 1D), polígonos (lados 2D) y poliedros (lados 3D) que tienen : un punto, un segmento, un cuadrado, un cubo, un hipercubo- 4D e hipercubo en dimensión nD?, ¿cuáles?; de ser necesario realice una tabla.

Al finalizar socialicen sus respuestas con el grupo de clase por medio de alguna herramienta digital.

Anexo 9. Situación Problemática 3: Representaciones del Hipercubo-4D



Anexo 10. Exponer los Lados de las Cinco Figuras y Compararlos Entre sí - Euclides

Elementos de Euclides

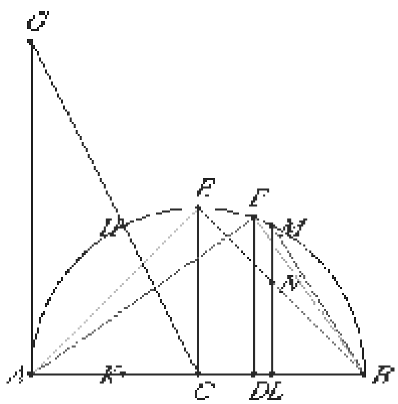
Libro XIII

Proposición 18

Exponer los lados de las cinco figuras y compararlos entre sí.

Establezca *AB* el diámetro de la esfera dada y córtelo en *C de* modo que *AC sea* igual a *CB* y en *D de* modo que *AD* sea el doble de *DB*. Describe el semicírculo *AEB* en *AB*, dibuja *CE* y *DF* desde *C* y *D* en ángulo recto con *AB* y une *AF*, *FB* y *EB*. I.11

Entonces, dado que *AD* es doble de *DB*, por lo tanto, *AB* es triple de *BD*. En conversión, por lo tanto, *BA* es una vez y media *AD*.



Pero *BA* es *AD* como el cuadrado de *BA* es el cuadrado de *AF*, porque el triángulo *AFB* es equiangular con el triángulo *AFD*. Por lo tanto, el cuadrado de *BA* es una vez y media el cuadrado de *AF*. V.Def.9 VI.8

Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es también una vez y media el cuadrado del lado de la pirámide. Y *AB* es el diámetro de la esfera, por lo tanto, *AF* es igual al lado de la pirámide. XIII.13

Una vez más, ya que *AD* es el doble de *DB*, por lo tanto, *AB* es el triple de *BD*. Pero *AB* es para *BD* como el cuadrado de *AB* para el cuadrado de *BF*, por lo tanto , el cuadrado de *AB* es el triple del cuadrado de *BF*. V.Def.9 VI.8

Pero el cuadrado del diámetro de la esfera también es el triple del cuadrado del lado del cubo. Y *AB* es el diámetro de la esfera, por lo tanto *BF* es el lado del cubo. XIII.15

Y, dado que *AC* es igual a *CB*, por lo tanto, *AB* es doble *BC*. Pero *AB* es para *BC* como el cuadrado de *AB* para el cuadrado de *BE*, por lo tanto , el cuadrado de *AB* es el doble del cuadrado de *BE*.

Pero el cuadrado del diámetro de la esfera también es el doble del cuadrado del lado del octaedro. Y *AB* es el diámetro de la esfera dada, por lo tanto *BE* es el lado del octaedro. XIII.14

A continuación, dibuje *AG* desde el punto *A* en ángulo recto con la línea recta *AB*, haga que *AG sea* igual a *AB*, una *GC* y dibuje *HK* desde *H* perpendicular a *AB*. I.11 . I.3 I.12

Entonces, dado que *GA* es doble *AC*, para *GA* es igual a *AB* y *GA* es a *AC* como *HK* es a *KC*, por lo tanto , *HK* también es doble *KC*.

Por lo tanto, el cuadrado de *HK* es cuádruple del cuadrado de *KC*, por lo tanto , la suma de los cuadrados de *HK* y *KC*, es decir, el cuadrado de *HC*, es cinco veces el cuadrado de *KC*.

Pero *HC* es igual a *CB*, por lo tanto , el cuadrado de *BC* es cinco veces el cuadrado de *CK*. Y, dado que *AB* es doble *CB*, y, en ellos, *AD* es doble *DB*, por lo tanto , el resto *BD* es el doble del resto *DC*.

Por lo tanto, *BC* es triple *CD*, por lo tanto , el cuadrado de *BC* es nueve veces el cuadrado de *CD*. Pero el cuadrado de *BC* es cinco veces el cuadrado de *CK*, por lo tanto , el cuadrado de *CK* es mayor que el cuadrado de *CD*. Por tanto, *CK* es mayor que *CD*.

Haga *CL* igual a *CK*, dibuje *LM* desde *L* en ángulo recto con *AB* y una *MB*. I.3 . I.11

Ahora, dado que el cuadrado de *BC* es cinco veces el cuadrado de *CK*, y *AB* es doble *BC*, y *KL* es doble *CK*, por lo tanto , el cuadrado de *AB* es cinco veces el cuadrado de *KL*. Pero el cuadrado del diámetro de la esfera es XIII.16, Cor. IV.15, Cor.

también cinco veces el cuadrado del radio del círculo del que se ha descrito el icosaedro. Y *AB* es el diámetro de la esfera, por lo tanto *KL* es el radio del círculo desde el que se ha descrito el icosaedro. Por lo tanto, *KL* es un lado del hexágono en dicho círculo.

Y, dado que el diámetro de la esfera está formado por el lado del hexágono y dos de los lados del decágono inscritos en el mismo círculo, y *AB* es el diámetro de la esfera, mientras que *KL* es un lado del hexágono, y *AK* es igual a *LB*, por lo tanto , cada una de las líneas rectas *AK* y *LB* es un lado del decágono inscrito en el círculo a partir del cual se ha descrito el icosaedro. XIII.16, Cor.

Y, dado que *LB* pertenece a un decágono y *ML* a un hexágono, para *ML* es igual a *KL*, ya que también es igual a *HK* estando a la misma distancia del centro y cada una de las rectas *HK* y *KL* es doble *KC*, por lo tanto *MB* pertenece a un pentágono. XIII.10

Pero el lado del pentágono es el lado del icosaedro, por lo tanto, *MB* pertenece al icosaedro. XIII.16

Ahora, dado que *FB* es un lado del cubo, córtelo en la proporción media y extrema en *N*, y sea *NB* el segmento mayor. Por tanto, *NB* es un lado del dodecaedro. XIII.17, Cor.

Y, dado que se demostró que el cuadrado del diámetro de la esfera era una vez y media el cuadrado del lado *AF* de la pirámide, doble el cuadrado del lado *BE* del octaedro y triplique el lado *FB* del cubo, por lo tanto , cuyas partes el cuadrado del diámetro de la esfera contiene seis, el cuadrado del lado de la pirámide contiene cuatro, el cuadrado del lado del octaedro tres y el cuadrado del lado del cubo dos.

Por lo tanto, el cuadrado del lado de la pirámide es cuatro tercios del cuadrado del lado del octaedro y el doble del cuadrado del lado del cubo, y el cuadrado del lado del octaedro es una vez y media la cuadrado en el lado del cubo.

Por tanto, dichos lados de las tres figuras, me refiero a la pirámide, el octaedro y el cubo, están entre sí en proporciones racionales.

Pero los dos restantes, me refiero al lado del icosaedro y al lado del dodecaedro, no están en proporciones racionales ni entre sí ni con los lados antes mencionados, pues son irracionales, siendo uno menor y el otro apotomo. XIII.16 XIII.17

Que el lado *MB* del icosaedro es mayor que el lado *NB* del dodecaedro podemos demostrarlo.

Dado que el triángulo *FDB* es equiangular con el triángulo *FAB*, proporcionalmente *DB* es a *BF* como *BF* es a *BA*. VI.8 . VI.4

Y, dado que las tres líneas rectas son proporcionales, la primera es a la tercera como el cuadrado de la primera es al cuadrado de la segunda, entonces *DB* es a *BA* como el cuadrado de *DB* es al cuadrado de *BF*. Por lo tanto, *AB* es inversamente a *BD* como el cuadrado de *FB* es al cuadrado de *BD*. V.Def.9 VI.20, Cor.

Pero *AB* es triple *BD*, por lo tanto , el cuadrado de *FB* es triple del cuadrado de *BD*.

Pero el cuadrado de *AD* también es cuádruple del cuadrado de *DB*, porque *AD* es doble *DB*, por lo tanto , el cuadrado de *AD* es mayor que el cuadrado de *FB*. Por lo tanto, *AD* es mayor que *FB*. Por lo tanto, *AL* es mucho mayor que *FB*.

Y, cuando *AL* se corta en una proporción extrema y media, *KL* es el segmento mayor, ya que *LK* pertenece a un hexágono y *KA* a un decágono, y, cuando *FB* se corta en una proporción extrema y media, *NB* es el segmento mayor, por lo tanto *KL* es mayor que *NB*. XIII.9

Pero *KL* es igual a *LM*, por lo tanto , *LM* es mayor que *NB*.

Por lo tanto , *MB*, que es un lado del icosaedro, es mucho mayor que *NB*, que es un lado del dodecaedro.

QEF

Fuente: Joyce (1996, Libro XIII, P18)