



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE
COLOMBIA

Estudio de la generalización del principio de incertidumbre

Presentado por

Sandra Milena Fernandez Escobar

Dirigido por

Diego Mauricio Gallego Mahecha

como requisito parcial para optar
al título de Físico

en la

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

17 de septiembre de 2014

Índice general

Agradecimientos	III
1. Introducción	1
2. DEDUCCIÓN DEL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE	7
2.1. Fundamentos de Mecánica Cuántica	7
2.1.1. Observables	7
2.1.2. Representación Discreta	8
2.1.3. Representación continua	8
2.1.4. Postulado de probabilidad	9
2.1.5. Dinámica	9
2.2. Matriz densidad y postulados de Von Neumann	10
2.3. Principio de incertidumbre de Heisenberg mediante el formalismo ondulatorio	12
2.4. Dedución moderna del principio de incertidumbre de Heisenberg	15
3. TEORIA DE LA MEDIDA	17
3.1. Introducción	17
3.2. Estadística para medidas cuánticas generales	17
3.2.1. Distribuciones de probabilidad de salida	18
3.2.2. Operador Probabilidad para valores de medida	19
3.2.3. Reducción de estado cuántico	20
3.2.4. Ley de probabilidad mixta	21
3.2.5. Ley mixta (Probabilidad conjunta de salida)	21
3.2.6. Distribuciones operacionales	23
3.2.7. Reducción de estado cuántico individual	25
3.2.8. Postulado extensible	27
3.2.8.1. Postulado extensible	28
3.3. Proceso de medida	30
3.3.1. Modelos de medida indirectos	30
3.3.2. Distribución de probabilidad de salida	32
3.3.3. Reducción de estado cuántico	32
3.3.4. Distribuciones operacionales	33
3.3.5. Medidas Canónicas	34
4. RUIDO Y PERTURBACIÓN	38
4.1. Introducción	38

4.2. Ruido en la medida	38
4.2.1. Ruido en medidas directas	38
4.2.2. Ruido en medidas indirectas	40
4.3. Perturbación en la medida	42
4.3.1. Medidas sin perturbación	42
4.3.2. Medidas conjuntas con aparatos sin perturbación	43
4.3.3. Perturbación en modelos indirectos de medida	44
5. NUEVA FORMULACIÓN DEL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE	45
5.1. Introducción	45
5.2. Reconstrucción del argumento de Heisenberg	45
5.3. Modelos de interacción	47
5.3.1. Modelo de Von Neumann	47
5.3.2. Modelo de Hamiltoniano independiente del tiempo	50
5.3.3. Modelo con Hamiltoniano dependiente de tiempo	54
5.4. Relación de incertidumbre universalmente válida	56
5.5. Relación de incertidumbre Ruido-Perturbación generalizada	57
5.6. Relación universalmente válida para medidas conjuntas arbitrarias	59
5.6.1. Proceso de medida	59
6. DEMOSTRACIÓN EXPERIMENTAL	64
6.1. Introducción	64
6.2. Método	64
6.2.1. Determinación teórica del error y perturbación en medidas de espín	65
6.2.2. Determinación experimental del error y perturbación en medidas de espín	65
6.2.3. Preparación del estado y medidas sucesivas de espín en neutrones	67
6.3. Montaje experimental	67
7. CONCLUSIONES	72
 Bibliografía	 76

Agradecimientos

Me gustaría que estas líneas sirvieran para expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que con su ayuda han colaborado en la realización del presente trabajo, en especial al Ph.D Diego Mauricio Gallego, director de esta tesis, por la orientación, el seguimiento y la supervisión continúa de la misma, pero sobre todo por la motivación y el apoyo recibido a lo largo del desarrollo de este trabajo.

También quiero dar un agradecimiento extensivo a toda mi familia, en especial a mis padres por su apoyo, comprensión, paciencia y dedicación en todo momento. Un agradecimiento muy especial a Camilo Uribe por su amor, paciencia y apoyo, por las lecturas de los preliminares de este trabajo y por animarme en el desarrollo del mismo.

Finalmente, quiero agradecer a los docentes que me han acompañado durante el largo camino, brindándome siempre su orientación con profesionalismo ético en la adquisición de conocimientos y afianzando mi formación como estudiante universitario.

Capítulo 1

Introducción

En los orígenes de la Mecánica Cuántica, poco después de que Erwin Schrödinger publicara su interpretación ondulatoria de la misma, se vivían días de debate entre el formalismo matricial y el ondulatorio, donde Niels Bohr estaba dando forma a su famoso principio de complementariedad y mantenía interesantísimas discusiones al respecto con Schrödinger [1, 2, 3, 4]. Cabe destacar que aunque en aquel momento la mecánica matricial, desarrollada por Werner Karl Heisenberg parecía imponerse sobre la ondulatoria de Schrödinger, hoy en día los dos formalismos aparecen como complementarios, en la llamada teoría de las transformaciones, desarrollada independientemente por Pascual Jordan y Paul Dirac [5].

Simultáneamente, Heisenberg estipuló el principio de incertidumbre, el cual es considerado la base de la mecánica cuántica, estableciendo el límite en las medidas de las cantidades cuánticas como consecuencia de la no conmutatividad de observables canónicos [6, 7].

Algunos críticos iniciales de las relaciones de incertidumbre, afirmaban que los resultados de Heisenberg representaban simplemente la imprecisión inherente a los aparatos de medida, y según avanzase la tecnología y la física experimental los errores irían disminuyendo hasta hacerse tan pequeños como se quisiera [8].

Heisenberg trató de desmentir dicha idea preguntándose cómo determinar, por ejemplo, el lugar donde se encuentra un electrón, y construye un experimento mental con el siguiente esquema: Un fotón incide sobre el electrón y luego llega al microscopio. Pero para detectar la posición del electrón con mucha precisión hace falta un fotón de onda muy corta, es decir con mucha energía, así que escoge un fotón de radiación gamma; cuando este fotón muy energético choca con el electrón, este cambia su momento en una

dirección determinada. Así, al saber muy bien donde estaba el electrón no tenemos idea de su momento.

Si la física clásica fuera cierta, podríamos coger radiación de onda arbitrariamente corta (muy precisa) y, sin embargo, emitir una cantidad arbitrariamente pequeña de esa radiación (que apenas afectase al electrón). Desde luego, también sucedería lo contrario, si queremos alterar muy poco la velocidad del electrón haría falta un fotón con muy poca energía, es decir longitud de onda muy larga, y entonces no sabríamos de la posición del electrón.

Lo que nos lleva a concluir que no es posible conocer el estado completo del electrón, (posición y velocidad) con precisión arbitraria. La esencia del experimento es establecer que la limitación para detectar el electrón, no se debe a que el microscopio no sea suficientemente preciso, ni que el diseño sea defectuoso, se debe a la dualidad onda-partícula de la materia y la energía, expuesta en 1924 por Louis de Broglie [9]. En esta se cuestiona que así como la radiación tenía un comportamiento dual, la materia también podría tener este comportamiento. Sabemos que la naturaleza corpuscular de la radiación electromagnética se manifiesta cuando interacciona con la materia como por ejemplo en el efecto fotoeléctrico. Por otra parte su evidencia ondulatoria se manifiesta por su propagación, dando lugar a los fenómenos de interferencia y difracción. En conclusión podemos decir que la radiación electromagnética es una onda, que al interactuar con la materia manifiesta un comportamiento corpuscular. Por analogía de Broglie exploró la idea que el movimiento de una partícula está gobernado por la propagación de ciertas ondas asociadas con ella. Por lo que el argumento aplica aun si no son fotones, sino cualquier otra cosa, por ejemplo, otro electrón lo que se utiliza para la medición.

Existen dos efectos que NO son consecuencia del principio de incertidumbre: el primero de ellos es la imprecisión del aparato de medida. Esto tiene que ver sólo en parte con las causas de la indeterminación cuántica, pues en efecto para saber la longitud de algo tengo que compararla con un patron de medida, pero ese efecto existe en la física clásica no tiene que ver con cuántica. El segundo, son los efectos del observador. Estos afirman que el sistema es perturbado al realizar un proceso de medida sobre este. Esto es verídico, pero este efecto se puede observar en el mundo macroscópico y no es cuestión netamente cuántica. Lo que nos indica las relaciones de indeterminación es que existe un límite fijo para la precisión conjunta de las mediciones de observables canónicos. Sin embargo, no establece un límite cuántico alguno para la determinación precisa de estos por separado.

De lo anterior, concluimos que cualquier medida cuántica de un objeto microscópico involucra una interacción entre el objeto y el aparato de medición, introduciendo una inevitable e incontrolable perturbación al objeto medido. Así, Heisenberg establece un límite inferior para el producto de estas cantidades y formula una expresión cuantitativa

entre la perturbación causada en el momento y la interferencia en la medida de la posición [7]. Esta relación se formula como sigue:

Para cualquier medida de la posición \hat{Q} de una masa con error $\epsilon(\hat{Q})$, la perturbación $\eta(\hat{P})$ del momento \hat{P} de la masa, causada por la interacción de esta medida satisface la siguiente relación:

$$\epsilon(\hat{Q})\eta(\hat{P}) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (1.1)$$

La anterior expresión se formula en general como:

$$\epsilon(\hat{A}, \varphi, \mathbf{A})\eta(\hat{B}, \varphi, \mathbf{A}) \geq \frac{|\langle \varphi | [\hat{A}, \hat{B}] | \varphi \rangle|}{2}, \quad (1.2)$$

en principio válida para cualquier aparato \mathbf{A} que mide un observable \hat{A} , en cualquier estado inicial φ , y cualquier observable \hat{B} . Donde $\epsilon(\hat{A}, \varphi, \mathbf{A})$ representa la interferencia de la medida en el estado φ usando un aparato \mathbf{A} y $\eta(\hat{B}, \varphi, \mathbf{A})$ representa la perturbación de \hat{B} en el estado φ causado por el aparato \mathbf{A} .

Así, la formulación del principio de incertidumbre establece que cualquier conjunto de observables compatibles puede medirse con precisión arbitraria, es decir, que se puede preparar el sistema en un estado propio simultáneo de cualquier conjunto de observables. Sin embargo, cuando hablamos de observables no compatibles existe una cota inferior irreducible para la precisión en la medida simultánea de dichos observables [10].

Al poco tiempo de haber publicado Heisenberg su trabajo, sobre el principio de incertidumbre, que fue obtenido y formulado mediante un tratamiento matricial, se propuso una interpretación estadística del principio de incertidumbre de Heisenberg, dada por la relación establecida matemáticamente por Kennard [11] y generalizada por Robertson [12] en 1927. Quienes mejoraron la formulación introduciendo la noción de desviación estándar.

La deducción de la relación de incertidumbre de Heisenberg basada en la interpretación estadística, establece que el producto de las desviaciones estándar de dos operadores hermíticos \hat{A} y \hat{B} , nunca será menor que la mitad del valor absoluto de la media de su conmutador, esto es:

$$\sigma(\hat{A}, \varphi)\sigma(\hat{B}, \varphi) \geq \frac{|\langle \varphi | [\hat{A}, \hat{B}] | \varphi \rangle|}{2}. \quad (1.3)$$

Formalmente estipula: Para cualquier par de observables \hat{A} y \hat{B} , con la desviación estándar $\sigma(\hat{X}, \varphi)$ de un observable \hat{X} , definida como $\sigma(\hat{X}, \varphi)^2 = \langle \varphi | \hat{X}^2 | \varphi \rangle - \langle \varphi | \hat{X} | \varphi \rangle^2$, sobre un estado inicial φ , se cumple la anterior relación.

Como consecuencia de $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$, tenemos:

$$\sigma(\hat{Q})\sigma(\hat{P}) \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (1.4)$$

que fue probada por Heisenberg para estados gaussianos y por Kennard para estados generales.

Para Kennard $\sigma(\hat{A}, \varphi)$ y $\sigma(\hat{B}, \varphi)$ son obtenidas llevando a cabo mediciones repetidas sobre un gran ensamble, es decir realizar el mismo experimento en las mismas condiciones, luego se calcula la desviación estándar.

La expresión (1.3) presenta algunas peculiaridades, enunciadas a continuación: Cuando \hat{A} y \hat{B} son observables del espectro discreto en un espacio de Hilbert de dimensión finita, el lado derecho de la desigualdad no es una constante, si no el valor esperado de un operador, que depende del estado del sistema y puede ser pequeño. En particular para estados propios de \hat{A} (\hat{B}), tanto $\sigma(\hat{A})$ ($\sigma(\hat{B})$) como $\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle$ se anulan, entonces la expresión (1.3) se convierte en algo trivial ($0 = 0$), sin importar el valor que tome $\sigma(\hat{B})\sigma(\hat{A})$, y por lo tanto pareciera no prohibir la existencia de estados propios comunes para el par de observables \hat{A} y \hat{B} [8].

Debido a la no conmutatividad de los observables, las relaciones de indeterminación nos indican, además, la limitación para la preparación de diseños experimentales con el objetivo de llevar a cabo medidas en sistemas preparados de igual forma. Es decir no es posible tener dos observables \hat{A} y \hat{B} con resultados de dispersión cuadrática media tan pequeña como se quiera para ambos, a no ser que $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ [1, 10]. Resaltamos sin embargo, que el principio de indeterminación es debido a la naturaleza cuántica de la materia [2] y lo único que afirma es que existe una correlación estadística entre las desviaciones estándar que se pueden obtener en un conjunto de experimentos. Sin embargo, esta relación describe la limitación en la preparación del estado o la limitación de las medidas independientes ideales en los sistemas preparados de igual forma, pero no relaciona la limitación de la exactitud de los aparatos de medida, ni la medición simultánea de dos observables canónicos [13, 14, 15], a diferencia de la formulación de Heisenberg que si estipula el límite de medidas simultaneas de observables no compatibles.

Existe una tercera formulación establecida para medidas cuánticas conjuntas y se formula como sigue: *Para cualquier aparato \mathbf{A} , con dos salidas de medidas conjuntas de \hat{A} y \hat{B} , la relación*

$$\epsilon(\hat{A}, \varphi, \mathbf{A})\epsilon(\hat{B}, \varphi, \mathbf{A}) \geq \frac{|\langle\varphi|[\hat{A}, \hat{B}]|\varphi\rangle|}{2}, \quad (1.5)$$

se cumple, en principio, para cualquier estado de entrada φ , donde $\epsilon(\hat{X}, \varphi, \mathbf{A})$ representa el ruido de la medida \hat{X} en el estado φ usando un aparato \mathbf{A} para $\hat{X} = \hat{A}, \hat{B}$.

Heisenberg concluye que la relación (1.4) expresa las consecuencias físicas dadas por (1.1) [6]. Sin embargo, la validez de la expresión (1.1) ha sido criticada por mucho tiempo [16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23]. De hecho el “poder de resolución” del microscopio de rayos gamma no puede ser identificado en ninguna interpretación con la desviación

estándar de la posición de la masa en el estado a medir. Por lo tanto (1.4) no puede ser considerada como una expresión formal de la ecuación (1.1). Por otra parte, no se ha demostrado la relación (1.1) para medidas generales, incluso mediante el uso de la ecuación (1.4), no solo para el estado de la masa sino también para el estado del aparato. También la relación (1.2) no acota todas las medidas cuánticas generales y por lo tanto (1.2) no puede reducirse a la formulación para medidas conjuntas. Además la relación (1.5) debe cumplir la condición de insesgamiento la cual requiere que los valores medios de la salida \mathbf{x} de \hat{A} y la salida \mathbf{y} de la medida de \hat{B} coincida con los valores medios calculados teóricamente, en cualquier estado de entrada φ [24], pero no siempre se puede garantizar este requerimiento.

Debido a lo anteriormente expuesto, ninguna de estas relaciones del principio de incertidumbre se puede considerar universalmente válida y es necesario establecer una expresión que sea general. Para clarificar este asunto, vamos a utilizar las nociones de perturbación e interferencia para reconstruir el argumento de Heisenberg, y mediante el análisis de las relaciones de conmutación para los operadores que representan la interferencia y la perturbación, obtendremos la expresión generalizada de Heisenberg válida para medidas arbitrarias.

Posteriormente expondremos un modelo de interacción que obedece la relación de Heisenberg y otro que la viola, teniendo así la necesidad de llegar a una expresión general que describa todas las posibles interacciones de medida.

Para obtener una expresión universalmente válida de la relación de incertidumbre, comenzaremos por estudiar las medidas cuánticas generales, la representación de los estados, observables y la estadística que rige a los aparatos de medición.

En la axiomatización de Von Neumann de la mecánica cuántica no relativista [25] hecha en el año de 1932, se estipula la formulación de estados y observables generales, pero no específica nada acerca de las medidas cuánticas generales. Dicha inquietud fue estudiada por Davies y Lewis [26], quienes introdujeron la noción matemática de “instrumento” como un esquema de normalización positiva de valores de medidas, a los que designamos instrumentos **DL**. Además, mostraron que esta noción describe en general las propiedades estadísticas de una medición general. De modo que, para cualquier secuencia de medidas la distribución de probabilidad conjunta está determinada por sus instrumentos **DL** correspondientes. Sin embargo, surge una inquietud y es saber si todos los aparatos **DL** corresponden a un aparato de medida posible. Para resolver dicha cuestión Osawa [27, 28] introduce una clase general de modelos matemáticos de procesos de medida y, muestra que las propiedades estadísticas dadas por cualquiera de estos modelos es descrito por un esquema de normalización completamente positivo de valores de medidas, a lo que Osawa se refiere instrumento **CP**. En conclusión las medidas están

representadas por instrumentos \mathbf{CP} , así como los estados están determinados por los operadores densidad y los observables son representados por operadores autoadjuntos.

La perturbación en el objeto causada por la medida puede ser interpretada como la interacción entre el sistema cuántico y el aparato de medición. Debido a esto asociamos los instrumentos \mathbf{CP} con un modelo indirecto de medida en los cuales la interacción de la medida se puede describir mediante las ecuaciones de la mecánica cuántica. Luego formularemos el error y la perturbación para los modelos indirectos de medida y asociando el error y la perturbación, con entidades físicas mediante los operadores ruido y perturbación para describir las propiedades estadísticas de estos y mediante el análisis de las reglas de conmutación poder obtener la expresión universalmente válida.

El presente trabajo hará una revisión del método propuesto principalmente por Osawa [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35] y está organizado de la siguiente manera:

En el segundo capítulo se abordaran los conceptos fundamentales de la mecánica cuántica, las diferentes deducciones e interpretaciones del principio de incertidumbre. Empezando por la formulación hecha por Heisenberg en 1927, desde el punto de vista ondulatorio de la mecánica cuántica y la deducción moderna de la relación de incertidumbre.

En el tercer capítulo se estudiará la teoría de la medida, en donde se expondrán los principios estadísticos que rigen las medidas cuánticas generales, mediante la caracterización del aparato de medición, con esto se expondrá el proceso de medida que se puede establecer como la interacción entre el objeto y el aparato de medición, y cómo dicha interacción se puede relacionar a un modelo indirecto de medida sujeto a las ecuaciones de la mecánica cuántica.

En el capítulo 4 establecemos la definición formal de ruido y perturbación, y la relación que estas dos nociones tiene con las desviaciones estándar para poder relacionar las ecuaciones (1.3) y (1.2), observando como una puede implicar la otra. En el capítulo 5 se presentan modelos de interacción que cumplen y violan la relación (1.2), mostrando así la necesidad de establecer una expresión general que acote todas las medidas cuánticas generales. Mediante la formalización de los conceptos de ruido y perturbación y los operadores asociados con estos, se realiza un análisis de las relaciones de conmutación y se establece la relación universalmente válida. En el capítulo 6 se expone un modelo experimental basado en mediciones proyectivas sucesivas que corrobora la limitación de la relación de Heisenberg y la validez de la expresión de Osawa.

Finalmente se establecen las conclusiones más relevantes de este trabajo.

Capítulo 2

DEDUCCIÓN DEL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

2.1. Fundamentos de Mecánica Cuántica

Un estado físico es representado por un vector de estado en un espacio de Hilbert \mathcal{H} . Según la notación de Paul Dirac, llamamos estos vectores “**Ket**”, denotado por $|\alpha\rangle$, y contiene toda la información del estado físico [36]. En general y acudiendo al principio de superposición podemos expresar los estados como una superposición coherente de la base $\{|a_i\rangle\}$ de \mathcal{H} , así:

$$|\gamma\rangle = \sum_i^n C_i |a_i\rangle,$$

suponiendo una base discreta y dimensión finita. Existe un espacio vectorial dual \mathcal{H}^* . Postulamos que por un ket $|\alpha\rangle$, existe un vector en \mathcal{H}^* que se denota como $\langle\alpha|$, llamado “**Bra**”.

Este espacio dual está definido por la función producto interno $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{C}$, que denotamos $\langle\beta|\alpha\rangle$, de tal forma $|\alpha\rangle \rightarrow \langle\beta|\alpha\rangle$. Esto satisface $\langle\beta|\alpha\rangle = \langle\alpha|\beta\rangle^*$ y en particular $\langle\alpha|\alpha\rangle \geq 0$, con $\langle\alpha|\alpha\rangle = 0$, si $|\alpha\rangle = |^\circ\rangle$. Así se puede definir la norma como $\| |\alpha\rangle \| = \sqrt{\langle\alpha|\alpha\rangle}$.

2.1.1. Observables

Un **observable** puede ser representado por un **operador** lineal, Hermítico en \mathcal{H} . Una propiedad de los operadores Hermíticos, es que todos sus autovalores son reales y los autovectores que corresponden a diferentes autovalores son ortogonales de los cuales es

posible siempre construir un sistema ortonormal completo, formando una base para \mathcal{H} [10].

En general cualquier operador puede ser expresado como:

$$\hat{X} = \sum_{i,j} x_{ij} |a_i\rangle \langle a_j|, \quad (2.1)$$

Con $\{|a_i\rangle\}$ una base de \mathcal{H} y $x_{ij} = \langle a_i | \hat{X} | a_j \rangle$.

Si $\{|a_i\rangle\}$ es un conjunto de autovectores de \hat{A} , entonces:

$$\hat{A} = \sum_i a_i |a_i\rangle \langle a_i|, \quad (2.2)$$

donde $\{a_i\}$ son los autovalores.

2.1.2. Representación Discreta

Resumimos lo anterior como: dada una base ortonormal $\{|U_i\rangle\}$ es decir, $\langle U_i | U_j \rangle = \delta_{ij}$:

- Expansión del vector: $|\phi\rangle = \sum_i c_i |U_i\rangle$, con $c_i = \langle U_i | \phi \rangle$.
- Sea: $|\phi\rangle = \sum_i b_i |U_i\rangle$ y $|\varphi\rangle = \sum_i c_i |U_i\rangle$, el producto interno escalar se denota como: $\langle \phi | \varphi \rangle = \sum_i b_i^* c_i$. De lo anterior se deduce que φ está dado por $\langle \varphi | = \sum_i b_i^* \langle U_i |$.

Por otro lado, casos particulares de operadores $\hat{X} = \sum_{ij} x_{ij} |U_i\rangle \langle U_j|$ son:

- Operador identidad: $\sum_i |U_i\rangle \langle U_i| = 1$.
- Proyector: Dado un subconjunto $\{\tilde{U}_k\} \subset \{\tilde{U}_i\}$ estos forman un subespacio $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$. La proyección de un estado $|\alpha\rangle$ en $\tilde{\mathcal{H}}$ está dado por $\hat{P}_{\{\tilde{U}\}} |\alpha\rangle$, con $\hat{P}_{\{\tilde{U}\}} = \sum_k |\tilde{U}_k\rangle \langle \tilde{U}_k|$, el operador proyección.

2.1.3. Representación continua

En el espectro continuo, dada una base ortonormal $|w_\alpha\rangle$, es decir, $\langle w_\alpha | w_{\alpha'} \rangle = \delta(\alpha - \alpha')$, suponiendo el espectro en un intervalo $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$:

- Expansión del vector: $|\phi\rangle = \int_{\mathcal{I}} c(\alpha) |w_\alpha\rangle d\alpha$, con $c(\alpha) = \langle w_\alpha | \phi \rangle$.

- Sea: $|\phi\rangle = \int_{\mathcal{I}} b(\alpha)|w_\alpha\rangle d\alpha$ y $|\varphi\rangle = \int_{\mathcal{I}} c(\alpha)|w_\alpha\rangle d\alpha$, el producto interno escalar se denota como: $\langle\phi|\varphi\rangle = \int_{\mathcal{I}} b^*(\alpha)c(\alpha)d\alpha$.

Por otro lado, casos particulares de operadores $\hat{C} = \int_{\mathcal{I}} \int_{\mathcal{I}} c(\alpha, \beta)|w_\alpha\rangle\langle w_\beta| d\alpha d\beta$, son:

- Operador identidad: $\int |w_\alpha\rangle\langle w_\alpha| d\alpha = 1$.
- Proyector: Dado un intervalo $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$, les corresponde un subespacio $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$. La proyección de un estado $|\alpha\rangle$ en $\tilde{\mathcal{H}}$ está dado por $\hat{P}_{\{\mathcal{I}'\}}|\alpha\rangle$ con $\hat{P}_{\{\mathcal{I}'\}} = \int_{\mathcal{I}'} |\tilde{w}_\alpha\rangle\langle\tilde{w}_\alpha| d\alpha$.

2.1.4. Postulado de probabilidad

La probabilidad es la norma al cuadrado del estado proyectado en el subespacio correspondiente.

Se tiene, en la representación discreta, que dado un estado $|\alpha\rangle$, la probabilidad de encontrar el autovalor a_i es:

$$P_{a_i} = |\hat{P}_{a_i}|\alpha\rangle|^2, \quad (2.3)$$

con \hat{P}_{a_i} el proyector en el subespacio formado por los autovectores con autovalor a_i . En particular si $|\alpha\rangle = |a_j\rangle$, $P_{a_j} = \delta_{ij}$.

En la representación continua, la probabilidad de obtener una medida en el intervalo \mathcal{I} , está descrita como:

$$P_{\mathcal{I}} = |\hat{P}_{\mathcal{I}}|\phi\rangle|^2. \quad (2.4)$$

Así si $|\phi\rangle = \int_{\mathcal{I}} b(\alpha)|w_\alpha\rangle d\alpha$, tenemos:

$$P_{\mathcal{I}} = \int_{\mathcal{I}'} |b(\alpha)|^2 d\alpha. \quad (2.5)$$

A la amplitud de probabilidad, $b(\alpha)$, en este caso se le denomina función de onda.

2.1.5. Dinámica

En la imagen de Schrödinger consideramos que un sistema físico está representado por estados de forma $|\phi(t)\rangle$ dependientes del tiempo. Los observables por el contrario, son independientes del tiempo, que denotamos \hat{A}_s [10]. Existe un operador de evolución temporal que se denota como $\hat{U}(t, t_0)$, de manera que la evolución de los estados está dada por:

$$|\alpha, t\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\alpha, t_0\rangle, \quad (2.6)$$

que satisface la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}|\alpha, t\rangle = \hat{H}\hat{U}|\alpha, t\rangle. \quad (2.7)$$

En la imagen de Heisenberg los estados $|\phi\rangle$ son independientes del tiempo, y los observables son variables dinámicas expresadas de la siguiente manera:

$$\hat{A}^H(t) = U^\dagger(t)\hat{A}^S U(t), \quad (2.8)$$

Satisfaciendo la ecuación de movimiento:

$$\frac{d\hat{A}^H}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}^H, H] + \frac{\partial \hat{A}^H}{\partial t}. \quad (2.9)$$

2.2. Matriz densidad y postulados de Von Neumann

La mecánica cuántica es desde el inicio una teoría estadística y las cantidades observadas, por ejemplo los autovalores, son en una medición del sistema variables aleatorias. De manera que resulta natural presentar la mecánica cuántica mediante el concepto de ensamble estadístico. El ensamble representa el conjunto de observaciones realizadas en condiciones similares, repetidas muchas veces [36].

Un estado descrito por $|\Psi\rangle$ se denomina estado puro. Un ensamble puro está formado por un conjunto de réplicas del sistema, cada una de las cuales está en el mismo estado puro.

En mecánica estadística cuántica se emplea un ensamble más general que el puro, que contiene este último como caso particular. Este ensamble se denomina mezclado, y está constituido por un gran número de copias iguales de un sistema dado, pero cada copia puede estar en estados cuánticos diferentes.

Para tratar los ensambles mezclados, es conveniente emplear el operador estadístico u operador densidad introducido por Landau e independientemente, en forma más general, por Von Neumann [25]. Para una base discreta de funciones de onda definimos la matriz densidad, como la matriz que representa el operador densidad del sistema. El operador

densidad lo podemos expresar como un operador en el espacio de Hilbert \mathcal{H} , como:

$$\hat{\rho} = \sum_j P_j |\Psi_j\rangle \langle \Psi_j|, \quad (2.10)$$

donde P_1, P_2, \dots, P_j representa las probabilidades de que el sistema se encuentre en los estados cuánticos $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, \dots, |\Psi_j\rangle$. Dada la normalización de las probabilidades, el operador estadístico $\hat{\rho}$, satisface la siguiente relación:

$$Tr(\hat{\rho}) = \sum_i P_i = 1.$$

Sea un observable \hat{A} , el valor promedio sobre el ensamble equivale a la siguiente operación:

$$\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{A}\hat{\rho}). \quad (2.11)$$

La anterior relación es útil para calcular los promedios de los observables, dado que la traza es invariante frente a transformaciones unitarias de los operadores.

Con base a lo anterior, Von Neumann establece los Postulados de la mecánica cuántica no relativista, como sigue [25]:

- **Postulado 1:** Cualquier sistema cuántico \mathbf{S} es asociado con un espacio único separable de Hilbert \mathcal{H}_s , denominado espacio de estados de \mathbf{S} , en el cual cualquier estado de \mathbf{S} , puede ser representado por un operador $\hat{\rho}$ con traza unitaria, llamado operador densidad de \mathcal{H}_s . Si consideramos un sistema unitario, cualquier observable de \mathbf{S} es representado, en correspondencia uno a uno, por un operador autoadjunto \hat{A} en \mathcal{H}_s .
- **Postulado 2:** Si un sistema \mathbf{S} está aislado en un intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$, existe un operador unitario \hat{U} , denominado operador de evolución temporal, de tal forma que si \mathbf{S} está en el estado $\hat{\rho}$ en el tiempo t entonces, \mathbf{S} en el tiempo $t + \Delta t$, está en el estado: $\hat{\rho}' = \hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger$.
- **Postulado 3:**(Formula estadística de Born): Cualquier observable \hat{A} puede ser medido precisamente en cualquier estado $\hat{\rho}$, de tal manera que la probabilidad de tomar un valor en intervalo Δ es $Tr(E^A(\Delta)\rho)$, donde E es la proyección espectral de \hat{A} correspondiente al intervalo Δ .
- **Postulado 4:**(Regla de composición): El espacio de estados de un sistema compuesto $\mathbf{S}+\mathbf{S}'$ de dos sistemas \mathbf{S} y \mathbf{S}' es el producto tensorial $\mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}'_s$ de estos espacios. Sea un observable \hat{A} en el sistema \mathbf{S} y un observable \hat{B} en \mathbf{S}' , en el

sistema compuesto, los observables \hat{A} y \hat{B} son expresados como $\hat{A} \otimes \hat{I}$ y $\hat{I} \otimes \hat{B}$ respectivamente, con \hat{I} el operador identidad.

2.3. Principio de incertidumbre de Heisenberg mediante el formalismo ondulatorio

Una vez establecidos los fundamentos de la mecánica cuántica, y los postulados de Von Neumann, vamos a exponer la demostración del principio de incertidumbre mediante el formalismo ondulatorio. Para empezar, proponemos el siguiente paquete de ondas gaussiano [13] para la función de onda:

$$\varphi(q) \propto e^{\left(\frac{-q^2}{2(\delta q)^2}\right)}, \quad (2.12)$$

donde q es el autovalor correspondiente a la posición,¹ y la indeterminación de la partícula, está dado por el ancho del paquete, δq . Obviando las constantes de normalización, podemos utilizar la transformada de Fourier para conocer la distribución en el momento, obteniendo:

$$\varphi(p) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{-ipq}{\hbar}\right)} e^{\left(\frac{-q^2}{2(\delta q)^2}\right)} dq. \quad (2.13)$$

Para resolver la integral planteada en la ecuación (2.13), completamos cuadrado en el exponente de la siguiente manera:

$$\frac{q^2}{(\delta q)^2} + \frac{2ipq}{\hbar} = \left(\frac{q}{\delta q} + \frac{ip\delta q}{\hbar}\right)^2 + \frac{p^2(\delta q)^2}{\hbar^2}, \quad (2.14)$$

de tal forma que:

$$\tilde{\varphi}(p) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\delta q} + \frac{ip\delta q}{\hbar}\right)^2} e^{-\frac{p^2(\delta q)^2}{2\hbar^2}} dq. \quad (2.15)$$

El segundo miembro de la integral no tiene dependencia con el diferencial, entonces se puede sacar de la integral, obteniendo:

$$\tilde{\varphi}(p) \propto e^{-\frac{p^2(\delta q)^2}{2\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{q}{\delta q} + \frac{ip\delta q}{\hbar}\right)^2} dq. \quad (2.16)$$

¹Argumentos análogos proceden para cualquier observable del espectro continuo.

Realizamos un cambio de variable $x = \frac{q}{\delta q} + \frac{ip\delta q}{\hbar}$. La integral queda expresada como:

$$\tilde{\varphi}(p) \propto e^{-\frac{p^2(\delta q)^2}{2\hbar^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x)^2} dx. \quad (2.17)$$

Obviando las constantes:

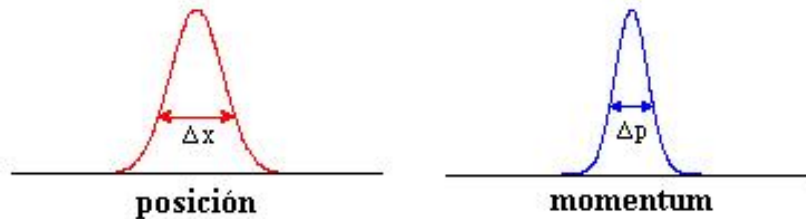
$$\tilde{\varphi}(p) \propto e^{-\frac{p^2(\delta q)^2}{2\hbar^2}}. \quad (2.18)$$

Comparándola con la expresión $\tilde{\varphi}(p) \propto e^{-\frac{p^2}{2(\delta p)^2}}$ identificamos δp , así el producto de la indeterminación será:

$$\delta q \delta p = \hbar. \quad (2.19)$$

La función de onda que representa la partícula es una función gaussiana, entonces si la posición de la partícula, no está bien determinada, es equivalente a ampliar la anchura de la curva estadística a medida que vaya aumentando la incertidumbre, entonces irá disminuyendo a la par la anchura de la curva estadística que se refiere a la incertidumbre del momento de la partícula.

Si tenemos el espacio de fase de una partícula que se mueve en una dimensión.



En mecánica clásica es posible determinar un punto en este espacio de forma exacta. Por el contrario en mecánica cuántica a causa del principio de incertidumbre, indica que no es posible ubicar un punto en dicho espacio de fases en un área menor a $\frac{\hbar}{2}$. Dicho de otra forma, el área en el espacio de fase dada por el producto de indeterminaciones en posición y momento, tiene que ser mayor o igual a esa cantidad. Así que, si uno disminuye la indeterminación en la posición, la del momento necesariamente tiene que aumentar. Por supuesto se puede hacer medidas de la posición con indeterminación nula, pero entonces, el principio de indeterminación nos dice que el momento de la partícula está totalmente indeterminado. De manera análoga sucede si deseamos hacer medidas precisas en el momento, la posición es indeterminada.

Si queremos ver el principio de incertidumbre en términos de las desviaciones estándar Δq , Δp en vez del ancho de la función de onda, dado que la distribución de probabilidad

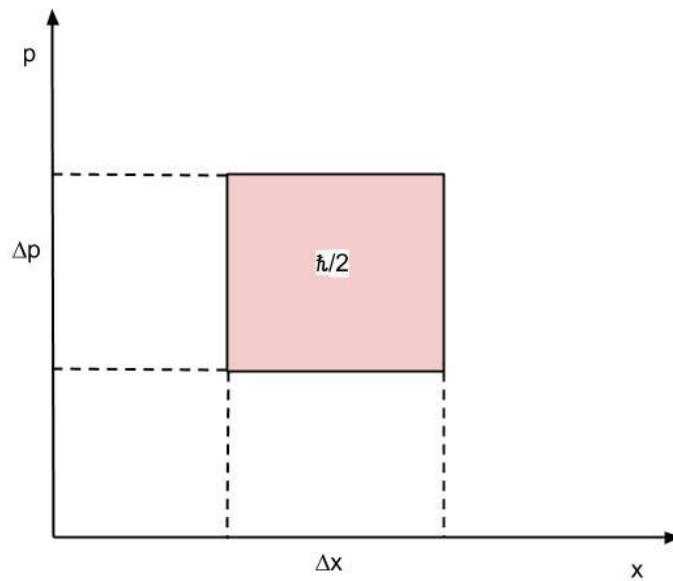


FIGURA 2.1: Espacio de fases para una partícula en una dimensión. Los estados cuánticos están determinados con una precisión máxima de $\frac{\hbar}{2}$

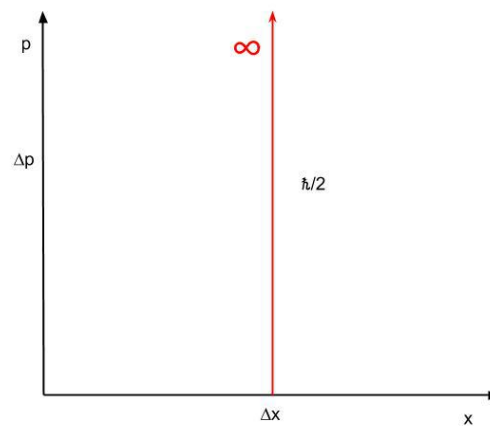


FIGURA 2.2: Espacio de fases para una partícula en una dimensión. Al precisar la posición $\Delta x \rightarrow 0$, el valor del momento se indetermina completamente.

está dada por el cuadrado de la función de onda, se tiene la siguiente relación:

$$\delta q = \sqrt{2}\Delta q, \delta p = \sqrt{2}\Delta p, \quad (2.20)$$

obteniendo finalmente:

$$\Delta q \Delta p = \frac{\hbar}{2}. \quad (2.21)$$

2.4. Deducción moderna del principio de incertidumbre de Heisenberg

Retomando la formulación hecha por Robertson de la ecuación (1.3):

$$\Delta_{\psi}A\Delta_{\psi}B \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[A, B]|\psi\rangle|, \quad (2.22)$$

la desviación estándar la definimos como:

$$(\Delta_{\psi}A) = \sqrt{\langle\psi|A^2|\psi\rangle - \langle\psi|A|\psi\rangle^2},$$

que denotamos como:

$$(\Delta_{\psi}A) = \sqrt{\langle A^2 \rangle_{\psi} - \langle A \rangle_{\psi}^2}. \quad (2.23)$$

Si suponemos, el valor medio del producto de los operadores Hermíticos \hat{C} y \hat{D} como:

$$\langle\psi|\hat{C}\hat{D}|\psi\rangle = x + iy. \quad (2.24)$$

Con x y y reales, los valores medios de los conmutadores y anticonmutadores serán:

$$\begin{aligned} \langle\psi|[\hat{C}, \hat{D}]|\psi\rangle &= 2iy, \\ \langle\psi|\{\hat{C}, \hat{D}\}|\psi\rangle &= 2x, \end{aligned} \quad (2.25)$$

Entonces

$$\begin{aligned} |\langle\psi|[\hat{C}, \hat{D}]|\psi\rangle|^2 + |\langle\psi|\{\hat{C}, \hat{D}\}|\psi\rangle|^2 &= 4y^2 + 4x^2, \\ &= 4|\langle\psi|\hat{C}\hat{D}|\psi\rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Comparando el conmutador, obtenemos:

$$|\langle\psi|[C, D]|\psi\rangle|^2 \leq 4|\langle\psi|CD|\psi\rangle|^2, \quad (2.27)$$

utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|\langle\psi|CD|\psi\rangle|^2 \leq \langle\psi|C^2|\psi\rangle\langle\psi|D^2|\psi\rangle, \quad (2.28)$$

Se sigue en la expresión (2.27) :

$$|\langle\psi|[C, D]|\psi\rangle|^2 \leq 4\langle\psi|C^2|\psi\rangle\langle\psi|D^2|\psi\rangle. \quad (2.29)$$

Tomamos los operadores de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\hat{C} &= \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle_\psi, \\ \hat{D} &= \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle_\psi,\end{aligned}$$

Se tiene que :

$$\begin{aligned}\langle \hat{C} \rangle_\psi^2 &= (\Delta_\psi A)^2, \\ \langle \hat{D} \rangle_\psi^2 &= (\Delta_\psi B)^2,\end{aligned}\tag{2.30}$$

$$[\hat{C}, \hat{D}] = [\hat{A}, \hat{B}].\tag{2.31}$$

Entonces la expresión (2.29) se reduce a :

$$\Delta_\psi \hat{A} \Delta_\psi \hat{B} \geq \frac{|\langle \psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \rangle|}{2},\tag{2.32}$$

que es completamente general, utilizando solo propiedades de operadores en \mathcal{H} . La anterior relación es matemáticamente válida, pero solo nos indican las limitaciones para la preparación del estado del sistema, más no expresa el contenido físico como la relación establecida por Heisenberg.

Capítulo 3

TEORIA DE LA MEDIDA

3.1. Introducción

Como dijimos anteriormente las relaciones de incertidumbre establecidas, presentan varias falencias que no permiten establecerlas como una expresión general, por lo tanto, es necesario estipular una relación que sea universalmente válida. Para ello comenzaremos con el estudio de la teoría de la medida, donde se caracterizaran los aparatos de medición y se expone el proceso de medida.

3.2. Estadística para medidas cuánticas generales

Tomando $\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_n$ como una secuencia de operadores densidad y P_1, \dots, P_n la distribución de probabilidades en $\{1, \dots, n\}$, tales que $\sum_{j=1}^n P_j = 1$. Decimos que \mathbf{S} es una muestra aleatoria para el ensamble $\{\hat{\rho}_j\}, \{P_j\}$, si y solo si \mathbf{S} está en el estado $\{\hat{\rho}_j\}$ con probabilidad $\{P_j\}$ [29].

En este caso, según el postulado 3 de Von Neumann, el observable \hat{A} es medido precisamente, con un valor en el intervalo Δ con probabilidad:

$$P(\Delta) = \sum_j P_j \text{Tr}(E^A(\Delta)\hat{\rho}_j). \quad (3.1)$$

Si tomamos $\hat{\rho} = \sum_j P_j \hat{\rho}_j$, por la linealidad de la traza, el operador densidad satisface:

$$P(\Delta) = \text{Tr}(E^A(\Delta)\hat{\rho}). \quad (3.2)$$

Entonces, tanto \hat{A} como Δ son arbitrarios, y del postulado 3, se concluye el siguiente teorema de estados mezclados.

TEOREMA: *Cualquier muestra aleatoria del ensamble $\{\hat{\rho}_j\}, \{P_j\}$ está en el estado $\hat{\rho} = \sum_j P_j \hat{\rho}_j$.*

El teorema anterior estableció así la interpretación de estados mezclados, ya que como lo definimos en la sección 2, el sistema \mathbf{S} está en el estado $P\hat{\rho}_1 + (1 - P)\hat{\rho}_2$. Siendo el estado $\hat{\rho}_1$ con probabilidad P y el estado $\hat{\rho}_2$ con probabilidad $(1 - P)$.

De los anteriores procedimientos se ha mostrado que la noción de mediciones precisas de los observables está determinada por el postulado 3. Sin asumir ninguna otra condición causada por la medición, por ejemplo, no supone que el observable tiene cierto valor desconocido en el estado justo después de la medición, que es producido al realizar una medida precisa. Únicamente requiere que la medición precisa reproduzca estadísticamente el postulado de probabilidad. El postulado indica que la medición proyecta el estado en el espacio propio correspondiente a los autovalores que se obtienen [29].

3.2.1. Distribuciones de probabilidad de salida

Una vez establecidas las características de una medida precisa, quisieramos formalizar el aparato que realiza la medida.

Cada aparato de medición tiene una variable de salida macroscópica, dicha variable de salida es una variable aleatoria, y de la teoría de la probabilidad clásica [37], la distribución de probabilidad depende únicamente del estado de entrada.

Sea un sistema cuántico \mathbf{S} , entonces $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ es un aparato de medición con variable de salida \mathbf{x} , que mide el objeto \mathbf{S} . Asumimos que \mathbf{x} toma valores en los reales, así cualquier intervalo Δ está en \mathbf{R} . Entonces “ $\mathbf{x} \in \Delta$ ” es el evento probabilístico que la salida \mathbf{x} tome un valor en Δ . Este evento es el resultado de la medición. La distribución de probabilidad de \mathbf{x} en el estado de entrada $\hat{\rho}$ es denotado por:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\}, \quad (3.3)$$

donde Δ varía en todos los subintervalos de la recta real.

Para que esta probabilidad tenga sentido físico, debe cumplir las siguientes propiedades [37]:

- Positividad: $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\} \geq 0$.

- Aditividad contable: $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \hat{\rho}\} = \sum_j Pr\{\mathbf{x} \in \Delta_j \mid \hat{\rho}\}$.
- Normalización: $Pr\{\mathbf{x} \in \mathbf{R} \mid \hat{\rho}\} = 1$.
- Ley mixta de las probabilidades de salida: Para cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, la función $\hat{\rho} \rightarrow Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \hat{\rho}\}$ es una función afín de los operadores densidad $\hat{\rho}$ para cada intervalo:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid P\hat{\rho}_1 + (1 - P)\hat{\rho}_2\} = PPr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \hat{\rho}_1\} + (1 - P)Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \hat{\rho}_2\}, \quad (3.4)$$

donde $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$ son operadores densidad y $0 < P < 1$.

Tenemos, entonces, que si un sistema \mathbf{S} es una muestra aleatoria del ensamble $(\{\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2\}, \{P, 1 - P\})$ entonces el evento “ $\mathbf{x} \in \Delta$ ” ocurre con probabilidad:

$$PPr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \hat{\rho}_1\} + (1 - P)Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \hat{\rho}_2\}. \quad (3.5)$$

3.2.2. Operador Probabilidad para valores de medida

Con el fin de caracterizar la distribución de probabilidad, definimos $\Pi : \Delta \rightarrow \Pi(\Delta)$, una función de la colección $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ de los subintervalos reales \mathbf{R} , en el espacio $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de operadores acotados en \mathcal{H} . Decimos, entonces, que existe un operador de probabilidad para valores de medida (**POVM**) que debe satisfacer [38, 39]:

- Positividad: $\Pi(\Delta) \geq 0$.
 - Aditividad contable: Para cualquier secuencia $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, de intervalos con $\Delta = \cup_j \Delta_j$,
- $$\Pi(\Delta) = \sum_j \Pi(\Delta_j).$$
- Condición de normalización: $\Pi(\mathbf{R}) = \hat{I}$.
 - La ley mixta de probabilidades: Para cualquier aparato existe un **POVM** que satisface:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \hat{\rho}\} = Tr[\Pi(\Delta)\hat{\rho}]. \quad (3.6)$$

Para demostrar (3.6) asumimos que la distribución de probabilidad de salida satisface la ley mixta de probabilidad de salida [29]. Recordemos que cada operador $\hat{\rho}$ se puede descomponer como:

$$\hat{\rho} = \sum_{j=1}^4 \alpha_j \hat{\rho}_j,$$

donde $\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_4$ son operadores densidad y $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ son números complejos. Una vez conocidas las descomposiciones pueden ser encontrada la descomposición espectral.

Debido a la anterior descomposición, el operador $\hat{\rho}$ y cada intervalo Δ puede ser definido por un número complejo $\Pi(\Delta, \hat{\rho})$:

$$\Pi(\Delta, \hat{\rho}) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}_j\}. \quad (3.7)$$

La ley mixta de probabilidades asegura que por cada descomposición del mismo $\hat{\rho}$, la anterior ecuación define un valor único y además la función Π es lineal en $\hat{\rho}$.

Si tomamos $\{|n\rangle\}$ como una base ortonormal de \mathcal{H} , podemos definir un operador $\Pi(\Delta)$:

$$\Pi(\Delta) = \sum_{n,m} \Pi(\Delta, |m\rangle\langle n|) |n\rangle\langle m|.$$

Luego por la linealidad de $\Pi(\Delta, \hat{\rho})$ en $\hat{\rho}$, obtenemos:

$$\begin{aligned} Tr(\Pi(\Delta)\hat{\rho}) &= \sum_{n,m} \Pi(\Delta, |m\rangle\langle n|) (\langle m|\hat{\rho}|n\rangle), \\ &= \Pi\left(\Delta, \sum_{n,m} \langle m|\hat{\rho}|n\rangle |m\rangle\langle n|\right), \\ &= \Pi(\Delta, \hat{\rho}) = Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\}. \quad Q.E.D. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por lo tanto $\Pi(\Delta, \hat{\rho})$ es un operador único que satisface (3.6).

De las relaciones (3.6) y del postulado 3, deducimos que el observable \hat{A} es medido precisamente si y solo si el **POVM** Π que representa $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, es la medida espectral E^A , es decir que:

$$\Pi = E^A .$$

3.2.3. Reducción de estado cuántico

Hemos asociado al aparato de medida un **PVOM** que determina la distribución de probabilidad. Sin embargo, los **PVOM** no determinan las distribuciones de probabilidad conjuntas de los resultados sucesivos que utilizan diversos aparatos.

Introducimos la noción de reducción de estado cuántico, el cual determina la distribución de probabilidad conjunta, dependiendo del estado de entrada $\hat{\rho}$ y el resultado $\mathbf{x} \in \Delta$ tenemos un estado reducido $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$, como el estado justo después de la medida condicionada al requerimiento $\mathbf{x} \in \Delta$ [29].

El estado $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ es llamado *estado de salida*, dado el resultado $\mathbf{x} \in \Delta$ en el estado de entrada $\hat{\rho}$. El cambio de estado $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ desde el estado de entrada al estado de salida se llama REDUCCIÓN DE ESTADO CUANTICO, mientras que la transformación desde el estado de entrada al estado de salida de la distribución de probabilidad, es llamada objetificación o REDUCCIÓN DE ESTADO OBJETIVO [30].

Se supone que para cualquier intervalo Δ con $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\} > 0$, el estado $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ se determina de forma única. Si $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\} = 0$ el estado $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ se toma como indefinido y la notación $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ denota un estado arbitrario.

Dos aparatos son estadísticamente equivalentes, si tienen la misma reducción de estado objetivo y reducción de estado cuántico, en otras palabras si tienen la misma distribución de probabilidad y los mismos estados de salida para cualquier resultado y cualquier estado de entrada.

3.2.4. Ley de probabilidad mixta

El significado operacional $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ se estipula como sigue:

Supongamos que hacemos una medida con el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ en el estado de entrada $\hat{\rho}$ e inmediatamente medimos con otro aparato $\mathbf{A}(\mathbf{y})$. La distribución de probabilidad conjunta se denota como $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\}$, para las variables de salida \mathbf{x} y \mathbf{y} será:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\} = Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}\} \cdot Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\}, \quad (3.9)$$

ya que el evento “ $\mathbf{x} \in \Delta$ ” ocurre con probabilidad $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\}$ y después el evento “ $\mathbf{y} \in \Delta'$ ” ocurre con probabilidad $Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}\}$. Entonces llamamos distribución de probabilidad conjunta de salida de las medidas de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ a la expresión (3.9).

De la anterior deducción, podemos concluir que la distribución de probabilidad conjunta de salida de mediciones sucesivas, depende solo del estado de entrada de la primera medición y debe satisfacer el siguiente postulado.

3.2.5. Ley mixta (Probabilidad conjunta de salida)

Para cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{y})$, la función $\hat{\rho} \rightarrow Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\}$ es una función afín de los operadores densidad $\hat{\rho}$ para cualquier par de intervalos Δ y Δ' , es

decir:

$$\begin{aligned} Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | P\hat{\rho}_1 + (1-P)\hat{\rho}_2\} = \\ PPr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}_1\} + (1-P)Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}_2\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$ son operadores densidad y la probabilidad $0 < P < 1$.

Este postulado es justificado de la siguiente manera, la aplicación sucesiva de dos aparatos de medición $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ a un solo sistema \mathbf{S} puede ser considerado como la aplicación de un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ con dos variables de salida \mathbf{x} y \mathbf{y} , por lo tanto el anterior postulado sigue la ley mixta de probabilidad de salida, estudiada en la sección (3.2.1), generalizada para aparatos con dos variables de salida.

Si consideramos ahora, el caso donde $\Delta = \mathbf{R}$, el símbolo $\hat{\rho}$ en $Pr\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\}$, refiere al estado justo antes de la medición $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y el símbolo $\hat{\rho}$ en $Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\}$ refiere al estado antes de llevar a cabo la medición $\mathbf{A}(\mathbf{y})$. Por lo tanto las dos probabilidades anteriores son generalmente idénticas, de acuerdo con la expresión (3.9):

$$Pr\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\} = Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}\}}\}, \quad (3.11)$$

que caracteriza el estado $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}\}}$.

Si $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\} = 1$, por aditividad de la probabilidad, tenemos:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\} = Pr\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\}, \quad (3.12)$$

entonces la ecuación (3.9), lleva a:

$$Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}\} = Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}\}}\}. \quad (3.13)$$

Como el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ es arbitrario, tenemos que si $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} = \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}\}}$, entonces es un estado arbitrario. En este caso, el cambio de estado $\hat{\rho} \rightarrow \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ es llamado cambio de estado no selectivo, de la ecuación (3.9). La distribución de probabilidad condicional de \mathbf{y} , dado $\mathbf{x} \in \Delta$, dada por:

$$Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\} = Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}\}, \quad (3.14)$$

sugiere que $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\} > 0$, y:

$$Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\} = Tr[E^B(\Delta') \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}]. \quad (3.15)$$

Entonces si $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ es una medida precisa del observable \hat{B} , (3.15) únicamente determina el estado de salida $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$.

3.2.6. Distribuciones operacionales

En 1976, Davies y Lewis [26], introdujeron la siguiente noción matemática para la descripción unificada de las propiedades estadísticas de las mediciones, dada por una correlación de la siguiente manera:

Sea $\mathcal{I} : \Delta \mapsto \mathcal{I}(\Delta)$ de $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ en el espacio $\mathcal{L}(\tau c(H))$ de transformaciones lineales acotadas en el espacio de operadores de clase de traza en \mathcal{H} . Es llamado instrumento **DL**, si y solo si satisface las siguientes condiciones:

- Positividad: $\mathcal{I}(\Delta)$ es una transformación lineal positiva de $\tau c(H)$ para cada $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$.
- Aditividad contable: Para cualquier secuencia de intervalos $\Delta_1, \Delta_2, \dots$, con $\Delta = \cup_j \Delta_j$:

$$\mathcal{I}(\Delta) = \sum_j \mathcal{I}(\Delta_j),$$

donde la suma es convergente fuerte en la topología del operador en $\mathcal{L}(\tau c(H))$ ¹.

- Condición de normalización: $\mathcal{I}(\mathbf{R})$ preserva la traza, es decir,

$$Tr[\mathcal{I}(\mathbf{R})] = Tr\hat{\rho},$$

para cualquier $\hat{\rho} \in \tau c(H)$.

- Ley mixta es equivalente al siguiente requisito:

Para cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, existe un instrumento único **DL**, que satisface:

$$\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho} = Pr\{\mathbf{x} \in \Delta\|\hat{\rho}\}\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}},$$

para cualquier intervalo Δ y operador densidad $\hat{\rho}$.

Una de las consecuencias más importantes de la ley mixta, es la caracterización unificada de la distribución de probabilidad y la reducción del estado cuántico, mostrado aquí y en [31].

Un bosquejo de la prueba es el siguiente: Tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ como el aparato de medida, para cualquier estado $\hat{\rho}$ en el intervalo Δ . Definimos un operador $\mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho})$, así:

$$\mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho}) = Pr\{\mathbf{x} \in \Delta\|\hat{\rho}\}\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}.$$

¹Es decir $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{I}(\Delta)\rho - \sum_{j=1}^n \mathcal{I}(\Delta_j)\rho\|_{\tau c} = 0$ para cualquier $\rho \in \tau c(H)$ donde $\|X\|_{\tau c} = Tr\sqrt{X^\dagger X}$ para cualquier $X \in \tau c(H)$.

Si $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta || \hat{\rho}\} = 0$, por lo tanto $\mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho}) = 0$, entonces $\mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho})$ es determinado definitivamente a pesar que $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ es indefinido para este caso. Entonces cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ mide precisamente un observable \hat{B} , si tenemos:

$$\begin{aligned} Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' || \hat{\rho}\} &= Tr[E^B(\Delta') \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}] Pr\{\mathbf{x} \in \Delta || \hat{\rho}\}, \\ &= Tr[E^B(\Delta') \mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho})]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Por lo tanto por la ley mixta, obtenemos:

$$\mathcal{I}(\Delta, P\hat{\rho}_1 + (1 - P)\hat{\rho}_2) = P\mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho}_1) + (1 - P)\mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho}_2), \quad (3.17)$$

donde $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$ son operadores densidad y $0 < P < 1$. Entonces la definición de $\mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho})$ puede ser extendida a todos los operadores de clase de traza $\hat{\rho}$, mediante la relación:

$$\mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho}) = \sum_{j=1}^4 \alpha_j \mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho}_j),$$

para cualquier operador densidad $\hat{\rho}_1, \dots, \hat{\rho}_4$ y número complejo $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ de tal forma que $\hat{\rho} = \sum_{j=1}^4 \alpha_j \hat{\rho}_j$.

Dado que cada operador densidad tiene al menos una descomposición y de la ecuación (3.17) se garantiza la unicidad de la extensión, el operador $\mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho})$ está bien definido para todos los conjuntos del intervalo Δ y todos los operadores de clase de traza $\hat{\rho}$. Entonces podemos mirar que la correlación $\hat{\rho}$ con $\mathcal{I}(\Delta, \hat{\rho})$ es una transformación lineal acotada de $\tau c(H)$ para cualquier intervalo Δ [29, 40].

Denotamos esta correlación por $\mathcal{I}(\Delta)$, entonces definimos \mathcal{I} como la correlación de Δ a $\mathcal{I}(\Delta)$. La correlación $\mathcal{I}(\Delta)$ se denomina “operación del aparato” $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ asociada con el resultado $\mathbf{x} \in \Delta$ y la correlación \mathcal{I} es llamada “distribución operacional del aparato” $\mathbf{A}(\mathbf{x})$. La distribución de probabilidad de salida y el estado de salida están expresados así:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta || \hat{\rho}\} = Tr[\mathcal{I}(\Delta) \hat{\rho}], \quad (3.18)$$

$$\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} = \frac{\mathcal{I}(\Delta) \hat{\rho}}{Tr[\mathcal{I}(\Delta) \hat{\rho}]},$$

donde se asume $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta || \hat{\rho}\} > 0$.

Entonces si \mathcal{I}_x y \mathcal{I}_y son distribuciones operacionales de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ respectivamente, la distribución de probabilidad conjunta está determinada por:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' || \hat{\rho}\} = Tr[\mathcal{I}_y(\Delta') \mathcal{I}_x(\Delta) \hat{\rho}], \quad (3.19)$$

para cualquier $\hat{\rho}$ y cualquier par de intervalos Δ_1, Δ_2 .

Tanto la distribución de probabilidad de salida y los estados de salida se determinan por la distribución operacional, por lo tanto, dos aparatos son estadísticamente equivalentes si y solo si tienen la misma distribución operacional.

Ahora, Consideremos 3 aparatos $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{y}), \mathbf{A}(\mathbf{z})$, con distribución operacional $\mathcal{I}_x, \mathcal{I}_y, \mathcal{I}_z$ respectivamente y supongamos que en un estado $\hat{\rho}$, se aplican estos tres aparatos al sistema \mathbf{S} sucesivamente en el orden descrito anteriormente, la distribución de probabilidad de tres salidas, será:

$$\begin{aligned} Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta', \mathbf{z} \in \Delta'' | \hat{\rho}\} &= Pr\{\mathbf{y} \in \Delta', \mathbf{z} \in \Delta'' | \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}\} Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\}, \\ &= Tr[\mathcal{I}_z(\Delta'') \mathcal{I}_y(\Delta') \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}] Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\}, \\ &= Tr[\mathcal{I}_z(\Delta'') \mathcal{I}_y(\Delta') \mathcal{I}_x(\Delta) | \hat{\rho}]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Mediante inducción matemática, obtenemos :

$$Pr\{\mathbf{x}_1 \in \Delta_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \Delta_n | \hat{\rho}\} = Tr[\mathcal{I}_n(\Delta_n) \dots \mathcal{I}_1(\Delta_1) \hat{\rho}].$$

Para la distribución de probabilidad conjunta de variables de salida $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ de medidas sucesivas en el estado inicial $\hat{\rho}$ usando aparatos $A(x_1) \dots A(x_n)$ en este orden con distribuciones operacionales $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_n$ respectivamente.

Por lo tanto, la distribución de probabilidad conjunta de variables de salida de medidas sucesivas son determinadas por las distribuciones operacionales de los aparatos de modo, que estadísticamente los aparatos son equivalentes si son mutuamente intercambiables sin afectar la probabilidad conjunta de sus resultados.

Concluyendo en esta sección, según la ley mixta, hemos demostrado que las propiedades estadísticas de cada aparato se describen por instrumentos \mathbf{DL} y que dos aparatos son estadísticamente equivalentes si y solo si les corresponde el mismo instrumento \mathbf{DL} .

3.2.7. Reducción de estado cuántico individual

Vamos a suponer que la variable de salida \mathbf{x} se puede obtener con precisión arbitraria, además consideramos que en cada instante de la medida el resultado tiene un valor $\mathbf{x} = x$. Tomamos $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}$ como el estado del sistema \mathbf{S} justo después de la medición con estado inicial $\hat{\rho}$, obteniendo un valor de salida $\mathbf{x} = x$.

Denotamos la “reducción de estado cuántico individual” causado por el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ como el cambio de estado $\hat{\rho} \mapsto \hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}$ para cualquier número real x . El estado $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}$ es llamado “estado de salida” dado por $\mathbf{x} = x$, en el estado de entrada $\hat{\rho}$. Para la distinción,

vamos a llamar reducción de estado cuántico a lo anteriormente definido $\hat{\rho} \mapsto \hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}$, como la colectividad de la reducción del estado cuántico.

Si $Pr\{\mathbf{x} \in \{x\}|\hat{\rho}\} > 0$, el estado $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}$ es determinado:

$$\hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}} = \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \{x\}\}}.$$

Sin embargo, la relación anterior no determina $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}$, si la probabilidad de salida es una distribución continua. Para la determinación de los estados $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}$, introducimos la siguiente noción matemática [32] :

Una familia $\{\hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}|x \in \mathbf{R}\}$ de estados es llamada “Familia de estados posteriores” para un instrumento \mathbf{DL} , caracterizado por \mathcal{I} y un estado anterior $\hat{\rho}$, si satisface las siguientes condiciones:

- La función $x \mapsto \hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}$ es una función medible.
- Para cualquier intervalo Δ , tenemos:

$$\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho} = \int_{\Delta} \hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}} Tr[d\mathcal{I}(x)\hat{\rho}].$$

Se muestra en [32] que para cualquier instrumento \mathbf{DL} caracterizado por \mathcal{I} y un estado anterior $\hat{\rho}$, existe una “Familia de estados posteriores” única, donde dos familias son idénticas, si difieren solo en un conjunto Δ tal que:

$$Tr[\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}] = 0.$$

Definimos la reducción del estado cuántico individual como la correspondencia del estado inicial $\hat{\rho}$ a la familia $\{\hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}|x \in \mathbf{R}\}$ de estados posteriores de la distribución operacional \mathcal{I} de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ en el estado anterior $\hat{\rho}$. De acuerdo con la definición anterior, la reducción del estado cuántico individual y la colectividad de reducción de estados cuánticos se relacionan mediante:

$$\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} = \frac{1}{Pr\{\mathbf{x} \in \Delta|\hat{\rho}\}} \int_{\Delta} \hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}} Pr\{\mathbf{x} \in dx|\hat{\rho}\}. \quad (3.21)$$

Por lo tanto la reducción del estado cuántico individual y la colectividad de reducción de estados cuánticos son equivalentes según la expresión (3.21).

El significado operacional de la reducción del estado cuántico individual es dado como sigue: Supongamos que hacemos una medición usando el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ con estado de entrada $\hat{\rho}$, inmediatamente realizamos una medida con un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{y})$. Entonces la distribución de probabilidad conjunta $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta'|\hat{\rho}\}$ de las variables de salida \mathbf{x} y \mathbf{y} es dada por la ecuación (3.9).

La distribución de probabilidad condicional de \mathbf{y} dada $\mathbf{x} = x$ es definida en la teoría de probabilidad como:

$$Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \mathbf{x} \in \Delta\} = \frac{Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\}}{Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\}}. \quad (3.22)$$

Sin embargo esta definición no incluye la distribución de probabilidad condicional de \mathbf{y} dada $\mathbf{x} \in \Delta$, ya que puede suceder que $Pr\{\mathbf{x} \in \{x\} | \hat{\rho}\} = 0$ para cada x .

Para evitar dicha dificultad, en la teoría de distribución de probabilidad condicional de \mathbf{y} dada $\mathbf{x} = x$ se define una función $x \mapsto Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \mathbf{x} = x | \hat{\rho}\}$ y debe satisfacer:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\} = \int_{\Delta} Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \mathbf{x} = x | \hat{\rho}\} Pr\{\mathbf{x} \in dx | \hat{\rho}\}. \quad (3.23)$$

De las ecuaciones (3.21) y (3.22), tomamos la siguiente caracterización de la reducción del estado cuántico:

$$Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \mathbf{x} = x | \hat{\rho}\} = Pr\{\mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}_{\{\mathbf{x}=x\}}\}. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, la reducción del estado cuántico individual está determinada por la distribución de probabilidad condicional de salida de cualquier medición subsiguiente a la salida individual.

3.2.8. Postulado extensible

Las argumentaciones anteriores, en virtud de una única hipótesis la ley mixta, nos muestran que las propiedades estadísticas de cada aparato se describen por un instrumento **DL**, además que dos aparatos son estadísticamente equivalentes si y solo si les corresponde el mismo aparato **DL**. En consecuencia, el conjunto de equivalencias estadísticas de aparatos son consideradas como un subconjunto del conjunto de instrumentos **DL**.

En el sentido anterior “aparato” denota un sistema físico para la medición, y el “instrumento **DL**” pretende indicar la función de un aparato o denota matemáticamente la equivalencia de este. Por supuesto consideramos que dos aparatos tienen la misma función si y solo si son estadísticamente equivalentes.

Sin embargo, hasta este punto, algunos instrumentos **DL** representa equivalencia estadística para clases de aparatos, pero no para todos. En esta sección vamos a eliminar los instrumentos **DL** que físicamente son irrelevantes.

Nos ocupamos de cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ como una descripción matemática de un sistema físico con una variable de salida macroscópica \mathbf{x} para medir un sistema cuántico \mathbf{S} . Sin embargo, si es suficiente, especificamos la entidad física del aparato de medición descrito por $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Por ejemplo, sea \mathbf{S}' otro sistema cuántico que está alejado tanto de \mathbf{S} como de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, luego interactúa con \mathbf{S} . En el sistema compuesto $\mathbf{S}+\mathbf{S}'$, el aparato que mide un observable \hat{A} del sistema \mathbf{S} , es considerado como una medida del observable $\hat{I} \otimes \hat{A}$ del sistema compuesto. Así, que cada aparato real tenga la propiedad de describir una medida al sistema \mathbf{S} , también describe trivialmente el sistema compuesto $\mathbf{S}+\mathbf{S}'$. Lo anterior se explica en la siguiente sección.

3.2.8.1. Postulado extensible

Para cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ que mide el sistema \mathbf{S} y cualquier sistema cuántico \mathbf{S}' que no interactúa ni con $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ni con \mathbf{S} , existe un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ que mide el sistema $\mathbf{S}+\mathbf{S}'$ con las siguientes propiedades estadísticas:

$$\begin{aligned} Pr\{\mathbf{x}' \in \Delta | \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}'\} &= Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\}, \\ (\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}')_{\{\mathbf{x}' \in \Delta\}} &= \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} \otimes \hat{\rho}', \end{aligned} \quad (3.25)$$

para cualquier intervalo Δ , cualquier estado $\hat{\rho}$ de \mathbf{S} y cualquier estado $\hat{\rho}'$ de \mathbf{S}' .

Con el fin de obtener una condición matemática que caracteriza los modelos, se debe satisfacer el requerimiento anteriormente expuesto, necesitando nociones matemáticas. Denotamos \mathbf{C}^n como el espacio de Hilbert de vectores n-dimensionales. Debido a que cada operador lineal, con dimensión finita del espacio es limitado y con traza finita tenemos que $\tau_c(\mathbf{C}^n) = \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Entonces en el espacio de operadores de clase de traza es el producto tensorial en el espacio de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^n$, descompuesto como $\tau_c(\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^n) = \tau_c(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Por lo tanto cualquier transformación lineal, T en $\tau_c(\mathcal{H})$ puede ser extendida a una transformación lineal $T \otimes id_n$ en $\tau_c(\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^n)$ por:

$$(T \otimes id_n) = \left(\sum_j \hat{\rho}_j \otimes \hat{\rho}'_j \right) = \sum_j T(\hat{\rho}_j) \otimes \hat{\rho}'_j, \quad (3.26)$$

para cualquier $\hat{\rho}_j \in \tau_c(\mathcal{H})$, y $\hat{\rho}'_j \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$. Entonces T es llamado completamente positiva (**CP**), si $T \otimes id_n$ es una correlación de los operadores positivos en $\tau_c(\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^n)$ para cualquier entero positivo. Un instrumento **DL** es llamado un instrumento completamente positivo **CP** si $\mathcal{I}(\Delta)$ es **CP** para todo Δ [41], los instrumentos **CP** fueron introducidos por Osawa en [28].

TEOREMA: Según la ley mixta, el postulado extensible implica el siguiente requisito: “La distribución operacional de cada aparato debe ser un instrumento **CP**”.

Para cada aparato, tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, \mathbf{S} y \mathbf{S}' implicados en el postulado extensible. El espacio de los estados de \mathbf{S} es denotado por \mathcal{H} y el espacio de estados de \mathbf{S}' se supone en \mathbf{C}^n . Se ha demostrado que bajo la ley mixta cada aparato tiene su propia distribución operacional. Sea \mathcal{I} la distribución operacional de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, por el postulado extensible, el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x}')$ satisface las ecuaciones (3.25):

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(\Delta)(\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}') &= Pr\{x' \in \Delta | \hat{\rho} \otimes \hat{\rho}'\}(\hat{\rho} \otimes \hat{\rho}')_{\{x' \in \Delta\}}, \\ &= Pr\{x \in \Delta | \hat{\rho}\} \hat{\rho}_{\{x \in \Delta\}} \otimes \hat{\rho}', \\ &= [\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}] \otimes \hat{\rho}'. \end{aligned} \quad (3.27)$$

De esto se desprende que $\mathcal{I}'(\Delta)$ del aparato extendido $\mathbf{A}(\mathbf{x}')$ asociado con Δ es representado por $\mathcal{I}'(\Delta) = \mathcal{I}(\Delta) \otimes id_n$.

Entonces por la positividad de la operación $\mathcal{I}'(\Delta)$, $\mathcal{I}(\Delta) \otimes id_n$ debe ser una transformación lineal $\tau\mathcal{C}(\mathcal{H} \otimes \mathbf{C}^n)$. Como n es arbitrario se concluye que $\mathcal{I}(\Delta)$ es completamente positivo.

La operación de transposición de matrices es una base fija como un ejemplo de una correlación lineal positiva que no es de **CP** [29]. Sea T una operación de transformación en $\tau\mathcal{C}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{L})$ por $\mathcal{H} = \mathbf{C}^n$ y tomamos μ cualquier medida de probabilidad en \mathbf{R} , entonces la relación:

$$\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho} = \mu(\Delta)T(\hat{\rho}), \quad (3.28)$$

para cualquier intervalo Δ y cualquier operador $\hat{\rho}$ define un instrumento **DL**. Sin embargo, T no es un **CP**, luego la operación $\mathcal{I}(\Delta)$ no es un instrumento **CP**.

Llegamos a la conclusión que para cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, existe un aparato único **CP** asociado \mathcal{I} , de forma que la distribución de probabilidad de salida la reducción del estado cuántico está descrita por:

$$\begin{aligned} Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\} &= Tr[\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}] \\ \hat{\rho} \mapsto \hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} &= \frac{\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}}{Tr[\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}]} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para cualquier intervalo Δ y cualquier estado de entrada $\hat{\rho}$, se sabe que $Tr[\mathcal{I}(\Delta)\hat{\rho}] > 0$. Hemos planteado dos requisitos plausibles, la ley mixta y el postulado extensible, como conjunto de condiciones necesarias que todos los aparatos deben satisfacer.

En estas condiciones hemos demostrado que le corresponde de forma única a un instrumento \mathbf{CP} , la distribución de probabilidad de salida y la reducción del estado cuántico. Por lo tanto, el problema de la determinación de todas las posibles mediciones cuánticas se reduce al problema que podamos relacionar un instrumento \mathbf{CP} que corresponde a un aparato. Así, las clases de equivalencia estadística de todos los posibles aparatos de medición están descritos en correspondencia uno a uno por los instrumentos \mathbf{CP} .

3.3. Proceso de medida

3.3.1. Modelos de medida indirectos

La perturbación en el objeto causada por una medición se puede atribuir a una interacción denominada “interacción de medida” entre el objeto y el aparato de medida. Consideramos modelos de medición indirectos introducidos por Von Neumann [25] y generalizados por Osawa en [28], en los cuales la interacción de la medida está sujeta a las ecuaciones de movimiento de la mecánica cuántica [31, 33]. Mostraremos que a pesar que los modelos indirectos de medida son solo una subclase de todas las posibles mediciones cuánticas, cada medición es estadísticamente equivalente a uno de los modelos de medición indirecta.

Tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ el aparato con variable de salida macroscópica \mathbf{x} , que mide el objeto \mathbf{S} , la interacción de la medición ocurre en un tiempo t , cuando se enciende el aparato, denominado “*el tiempo de la medición*”. La interacción se apaga en un tiempo $(t + \Delta t)$, es decir, luego de este tiempo no existe interacción entre el objeto del sistema \mathbf{S} y el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$.

Asumimos que el aparato y el objeto no interactúan entre sí, ni antes t , ni después de $(t + \Delta t)$, además que el sistema compuesto $\mathbf{S} + \mathbf{A}(\mathbf{x})$ se encuentra aislado en el tiempo t y $(t + \Delta t)$.

Definimos la prueba \mathbf{P} como la mínima parte del aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ de tal manera que el sistema compuesto $\mathbf{S} + \mathbf{P}$, está aislado en el tiempo $(t + \Delta t)$. Por simplicidad asumimos que \mathbf{P} es un sistema cuántico representado por un espacio de Hilbert \mathcal{K} . Según el segundo postulado de la mecánica cuántica no relativista, denotamos \hat{U} como el operador evolución temporal, entonces, $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ rige la evolución temporal de $\mathbf{S} + \mathbf{P}$ para el intervalo $(t + \Delta t)$. En el momento de la medida, suponemos que el objeto está en un estado inicial arbitrario $\hat{\rho}$ y la prueba se prepara en un estado fijo $\hat{\sigma}$.

Entonces el sistema compuesto $\mathbf{S} + \mathbf{P}$ por el postulado 4 de la mecánica cuántica está en el estado $\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}$ en el tiempo t y $\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger$ en el tiempo $(t + \Delta t)$.

Justo después de la interacción de la medida el objeto se separará del aparato y la prueba se somete a una interacción local. Este último proceso se realiza para medir un observable \hat{M} llamado “*observable de prueba*”, cuya salida es representada por la variable de salida \mathbf{x} .

La medición de \hat{M} es asumida local en el sentido que el aparato de medida para medir \hat{M} , interactúa con la prueba \mathbf{P} , pero no interactúa con el sistema \mathbf{S} [33]. El proceso de medición del aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, descrito anteriormente se modela por el espacio de estados \mathcal{K} de la prueba, el estado inicial $\hat{\sigma}$ de \mathbf{P} , el operador de evolución temporal \hat{U} de $\mathbf{S}+\mathbf{P}$ y el observable de la prueba \hat{M} .

Con el fin de desarrollar la teoría de los procesos de medición descritos anteriormente, definimos un modelo de medida indirecto, de cualquier cuádruple $(\mathcal{K}, \hat{\sigma}, \hat{U}, \hat{M})$ contenido en un espacio de Hilbert \mathcal{K} , un operador densidad $\hat{\sigma}$ en \mathcal{K} , un operador unitario \hat{U} en $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ y un observable \hat{M} en \mathcal{K} .

Un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ se dice que está descrito por un modelo indirecto de medida $(\mathcal{K}, \hat{\sigma}, \hat{U}, \hat{M})$, si el proceso de medición de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ admite la anterior descripción con un aparato de estado \mathcal{K} en la prueba, el estado inicial $\hat{\sigma}$, el operador de evolución temporal \hat{U} del objeto más el de la prueba durante la interacción de la medición y el observable \hat{M} de la prueba.

Dos modelos de medición indirectos $(\mathcal{K}, \hat{\sigma}, \hat{U}, \hat{M})$ y $(\mathcal{K}', \hat{\sigma}', \hat{U}', \hat{M}')$ se dicen que son “unitariamente equivalentes”, si existe una transformación unitaria \hat{O} desde \mathcal{K} a \mathcal{K}' tal que:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} &= \hat{O}^\dagger \hat{\sigma}' \hat{O}, \\ \hat{U} &= (\hat{I} \otimes \hat{O}^\dagger) \hat{\sigma}' (\hat{I} \otimes \hat{O}), \\ \hat{M} &= \hat{O}^\dagger \hat{M}' \hat{O}.\end{aligned}\tag{3.30}$$

No podemos distinguir dos modelos equivalentes unitariamente, ya que pueden describir el mismo sistema físico.

En un modelo de medición indirecta, el papel de la interacción de la medición es caracterizado por un transductor y las etapas posteriores como un amplificador. En la medida de Stern-Gerlach de la componente z del espín, el sistema objeto modela los grados de libertad del espín de una partícula, la prueba modela los grados orbitales de la partícula, y los observables sonda corresponde a la componente z del momento lineal de la partícula.

3.3.2. Distribución de probabilidad de salida

Tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ como el aparato con modelo de medición indirecta $(\mathcal{K}, \hat{\sigma}, \hat{U}, \hat{M})$, luego el resultado de esta medición es obtenido por la medición del observable \hat{M} de la prueba en el tiempo $(t + \Delta t)$.

Por la formula estadística de Born, para el observable \hat{M} en el estado de entrada $U(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})U^\dagger$, la distribución de probabilidad de salida de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ está determinada por:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\} = Tr\{[\hat{I} \otimes E^M(\Delta)]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger\}. \quad (3.31)$$

Por la linealidad de los operadores y la traza, es simple comprobar que la distribución de probabilidad de salida de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ satisface la ley mixta de probabilidad de salida, por lo tanto por la expresión (3.6) existe un **PVOM** Π , usando la definición de los operadores de clase de traza $Tr_{\mathcal{K}}$ sobre \mathcal{K} la ecuación (3.31) queda:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\} = Tr[Tr_{\mathcal{K}}\{\hat{U}^\dagger[\hat{I} \otimes E^M(\Delta)]\hat{U}(\hat{I} \otimes \hat{\sigma})\}\hat{\rho}]. \quad (3.32)$$

Si $\hat{\rho}$ es arbitrario comparando las expresiones (3.6) y (3.32), el **PVOM** de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ es determinado como:

$$\Pi(\Delta) = Tr_{\mathcal{K}}\{U^\dagger[\hat{I} \otimes E^M(\Delta)]\hat{U}(\hat{I} \otimes \hat{\sigma})\}, \quad (3.33)$$

para cualquier intervalo Δ .

3.3.3. Reducción de estado cuántico

Dado que el sistema compuesto $\mathbf{S}+\mathbf{P}$ está en el estado $\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger$ en el tiempo $t + \Delta t$, en general el estado del objeto en dicho tiempo es obtenido por la traza del estado de salida de la prueba, por lo tanto el cambio de estado no selectivo está determinado por:

$$\hat{\rho} \mapsto \hat{\rho}' = Tr_{\mathcal{K}}[\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger]. \quad (3.34)$$

Con el fin de determinar la reducción del estado cuántico suponemos que en el tiempo $t + \Delta t$ el observador realiza una medida local a un observable arbitrario \hat{B} del mismo objeto \mathbf{S} . Tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ como el aparato con variable de salida \mathbf{y} que realiza la medida precisa de \hat{B} . Dado que ambas mediciones, tanto la de \hat{M} en el sistema \mathbf{P} y la medida de \hat{B} en \mathbf{S} , en el tiempo $t + \Delta t$ son locales, la distribución de probabilidad conjunta de sus salidas satisface la fórmula de probabilidad conjunta para medidas simultáneas de

$\hat{I} \otimes \hat{M}$ y $\hat{B} \otimes \hat{I}$ en el estado $\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger$ [33]. La distribución de probabilidad conjunta de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ está dada por:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\} = Tr\{[E^B(\Delta') \otimes E^M(\Delta)]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger\}, \quad (3.35)$$

usando la traza parcial $Tr_{\mathcal{K}}$, tenemos:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\} = Tr\{[E^B(\Delta')Tr_{\mathcal{K}}\{\hat{I} \otimes E^M(\Delta)\}]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger\}. \quad (3.36)$$

De otro lado, de la ecuación (3.9), la misma distribución de probabilidad de salida conjunta puede ser representada por:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\} = Tr[E^B(\Delta')Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\}\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}]. \quad (3.37)$$

Puesto que B y Δ' arbitrarios, comparando las ecuaciones (3.36) y (3.37), tenemos:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \hat{\rho}\}\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} = Tr_{\mathcal{K}}\{[\hat{I} \otimes E^M(\Delta)]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger\}. \quad (3.38)$$

De la ecuación (3.31), el estado $\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ está determinado como:

$$\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} = \frac{Tr_{\mathcal{K}}\{[\hat{I} \otimes E^M(\Delta)]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger\}}{Tr\{[\hat{I} \otimes E^M(\Delta)]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger\}}, \quad (3.39)$$

para cualquier intervalo Δ con $Pr\{\mathbf{x} \in \Delta\} > 0$. La anterior relación fue obtenida en [28].

La expresión anterior no asume el postulado de proyección, cómo es asumido en el estado compuesto $\mathbf{S}+\mathbf{P}$ con resultado $\mathbf{x} \in \Delta$, de la siguiente manera:

$$\hat{\rho}_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}^{\mathbf{S}+\mathbf{P}} = \frac{[\hat{I} \otimes E^M(\Delta)]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger[\hat{I} \otimes E^M(\Delta)]}{Tr\{[\hat{I} \otimes E^M(\Delta)]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger\}}, \quad (3.40)$$

siendo el estado justo después de la medición.

3.3.4. Distribuciones operacionales

En la sección anterior nos hemos limitado al caso donde se hace una medición usando un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y en seguida se realiza una medida precisa de un observable, ahora en general suponemos que en el tiempo $t + \Delta t$ el observador hará una medida local al mismo sistema \mathbf{S} con un aparato arbitrario $\mathbf{A}(\mathbf{y})$. En la sección (3.2.6) relacionamos la

distribución operacional con la ley mixta de probabilidad y por la ecuación (3.38), la distribución operacional queda expresada como:

$$\mathcal{I}(\Delta)\rho = \text{Tr}_{\mathcal{K}}\{[\hat{I} \otimes E^M(\Delta)]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger\}, \quad (3.41)$$

para cualquier intervalo Δ y cualquier estado $\hat{\rho}$.

3.3.5. Medidas Canónicas

Vamos a considerar el modelo que ha sido estudiado para describir un proceso de medida típico de un observable arbitrario [34]. Tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ como el aparato de medida del observable \hat{A} de un objeto \mathbf{S} descrito por un espacio de Hilbert \mathcal{H} . El proceso de medida de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ es descrito por un modelo indirecto de medida $(\mathcal{K}, \hat{\sigma}, \hat{U}, \hat{M})$, como sigue:

La prueba es modelada por una masa de un grado de libertad, con posición \hat{q} y momento \hat{p} , de modo que el espacio de Hilbert \mathcal{K} es el espacio de funciones de onda con dominio en \mathbf{R} , es decir, $\mathcal{K} = L^2(\mathbf{R})$. La interacción de la medida es encendida en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$, entonces el Hamiltoniano del sistema compuesto para este intervalo de tiempo está dado por:

$$\hat{H}_{\mathbf{S}+\mathbf{P}} = \hat{H}_{\mathbf{S}} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{H}_{\mathbf{P}} + K\hat{A} \otimes \hat{p}, \quad (3.42)$$

donde $H_{\mathbf{S}}$ y $H_{\mathbf{P}}$ son los Hamiltonianos libres del objeto y la prueba, respectivamente, y K es la constante de acoplamiento. Suponemos que el acoplamiento es fuerte de tal manera que podemos despreciar las evoluciones libres y la duración Δt es tan pequeña que satisface $K\Delta t = 1$. Así, el tiempo de evolución del sistema compuesto $\mathbf{S}+\mathbf{P}$ durante la interacción de la medida está dado por:

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\hat{A} \otimes \hat{p}\right). \quad (3.43)$$

Después de la interacción de la medida, el aparato hace una medida precisa de la posición \hat{q} de la prueba cuya salida es el resultado de la medición. Tomamos $\hat{\xi}$ como el vector de estado de la prueba en el tiempo de la medida. Entonces el aparato anterior es modelado por un modelo indirecto de medida $\mu(\hat{A}, \hat{\xi})$ definido por:

$$\mu(\hat{A}, \hat{\xi}) = \left(L^2(\mathbf{R}), \hat{\xi}, \exp\left(\frac{-i}{\hbar}\hat{A} \otimes \hat{p}\right), \hat{q}\right). \quad (3.44)$$

Llamamos a este modelo el *modelo canónico* con el observable \hat{A} y el estado de la prueba $\hat{\xi}$. Ahora vamos a denotar su distribución operacional como $\mathcal{I}_{\hat{\xi}}$ y el **POVM** como $\Pi_{\hat{\xi}}$.

La ecuación de Schrödinger para la función de onda $\Psi_{t+\tau} \in \mathcal{H} \otimes L^2(\mathbf{R})$ en el intervalo de tiempo $t < t + \tau < t + \Delta t$ está dada por:

$$\frac{\partial \Psi_{t+\tau}(q)}{\partial \tau} = -K\hat{A} \frac{\partial \Psi_{t+\tau}(q)}{\partial q}, \quad (3.45)$$

y asumimos la condición inicial,

$$\Psi_t(q) = \hat{\xi}(q)\hat{\psi}, \quad (3.46)$$

donde $\hat{\psi} \in \mathcal{H}$ es un vector de estado del sistema medido, y la función de valor vectorial $\hat{\xi}(q)\psi$ representa el producto tensorial $\hat{\psi} \otimes \hat{\xi}$ en $\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbf{R})$. La solución de la ecuación de Schrödinger está dada por:

$$\Psi_{t+\tau}(q) = \hat{\xi}(q\hat{I} - \tau K\hat{A})\hat{\psi}, \quad (3.47)$$

donde \hat{I} es el operador identidad en \mathcal{H} . Para $\tau = \Delta t$, tenemos:

$$\Psi_{t+\Delta t}(q) = \hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})\hat{\psi}. \quad (3.48)$$

TEOREMA: Para cualquier operador unitario \hat{U} en $\mathcal{H} \otimes L^2(\mathbf{R})$, el modelo indirecto de medida $(L^2(\mathbf{R}), \hat{\xi}, \hat{U}, \hat{q})$ tiene la distribución operacional \mathcal{I} determinada por:

$$\mathcal{I}(\Delta)|\hat{\psi}\rangle\langle\hat{\psi}| = \int_{\Delta} |\hat{U}(\hat{\psi} \otimes \hat{\xi})(q)\rangle\langle\hat{U}(\hat{\psi} \otimes \hat{\xi})(q)|dq, \quad (3.49)$$

para cualquier estado de entrada $\hat{\psi}$ e intervalo Δ . La estadística del modelo canónico $\mu(\hat{A}, \hat{\xi})$ es determinado por la distribución operacional $\mathcal{I}_{\hat{\xi}}$. De la solución (3.48):

$$\begin{aligned} |\hat{U}(\hat{\psi} \otimes \hat{\xi})(q)\rangle\langle\hat{U}(\hat{\psi} \otimes \hat{\xi})(q)| &= |\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})\hat{\psi}\rangle\langle\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})\hat{\psi}|, \\ &= \hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})|\hat{\psi}\rangle\langle\hat{\psi}|\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})^\dagger, \end{aligned} \quad (3.50)$$

para cualquier $\hat{\psi} \in \mathcal{H}$. Luego de (3.49) tenemos:

$$\mathcal{I}_{\hat{\xi}}(\Delta)|\hat{\psi}\rangle\langle\hat{\psi}| = \int_{\Delta} \hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})|\hat{\psi}\rangle\langle\hat{\psi}|\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})^\dagger dq, .$$

Por linealidad y continuidad tenemos :

$$\mathcal{I}_{\hat{\xi}}(\Delta)\hat{\rho} = \int_{\Delta} \hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})\hat{\rho}\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})^\dagger dq. \quad (3.51)$$

El POVM $\Pi_{\hat{\xi}}$, de la ecuación (3.35) está dado por:

$$\Pi_{\hat{\xi}}(\Delta) = \int_{\Delta} |\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})|^2 dq. \quad (3.52)$$

La distribución de probabilidad de salida está dada por:

$$Pr\{\mathbf{q} \in \Delta | \hat{\rho}\} = \int_{\Delta} Tr[|\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})|^2 \hat{\rho}] dq, \quad (3.53)$$

para cualquier estado de entrada $\hat{\rho}$. De la ecuación (3.51), el estado de salida dado el resultado $\mathbf{q} = q$ es obtenido como:

$$\hat{\rho}_{\{\mathbf{q}=q\}} = \frac{\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A}) \hat{\rho} \hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})^\dagger}{Tr[|\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})|^2 \hat{\rho}]} \quad (3.54)$$

Si el estado de entrada es un vector de estado $\hat{\rho} = |\hat{\psi}\rangle\langle\hat{\psi}|$, tenemos:

$$Pr\{\mathbf{q} \in \Delta | \hat{\psi}\} = \int_{\Delta} \|\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})\hat{\psi}\|^2 dq, \quad (3.55)$$

y el estado de salida es también el vector de estado $\hat{\rho}_{\{\mathbf{q}=q\}} = |\hat{\psi}_{\{\mathbf{q}=q\}}\rangle\langle\hat{\psi}_{\{\mathbf{q}=q\}}|$ tal que:

$$\hat{\psi}_{\{\mathbf{q}=q\}} = \frac{\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})\hat{\psi}}{\|\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{A})\hat{\psi}\|}. \quad (3.56)$$

Por el cálculo de la función del operador auto-adjunto \hat{A} , tenemos:

$$\int_{\Delta} |\xi(q\hat{I} - \hat{A})|^2 dq = \int_{\mathbf{R}} dE^{\hat{A}}(\lambda) \int_{\mathbf{R}} \chi_{\Delta}(q) |\xi(q - \lambda)|^2 dq, \quad (3.57)$$

donde χ_{Δ} es la función característica del intervalo Δ , es decir, $\chi_{\Delta}(x) = 1$ si $x \in \Delta$ y $\chi_{\Delta}(x) = 0$ si $x \notin \Delta$. Tomamos $f(q) = |\xi(-q)|^2$. De la ecuación 3.52, tenemos:

$$\Pi_{\hat{\xi}}(\Delta) = \int_{\mathbf{R}} (f * \chi_{\Delta})(\lambda) dE^{\hat{A}}(\lambda), \quad (3.58)$$

donde $f * \chi_{\Delta}$ es la convolución, es decir:

$$(f * \chi_{\Delta})(\lambda) = \int_{\mathbf{R}} f(q) \chi_{\Delta}(\lambda - q) dq. \quad (3.59)$$

Por lo tanto, si el estado inicial $\hat{\xi}$ de la prueba va a la posición de un autoestado $|\hat{q} = 0\rangle$, ósea la función densidad de la posición inicial $|\hat{\xi}(q)|^2$ y $f(q)$ se acerca a la función delta

de Dirac, de manera que en efecto $\Pi_{\hat{\xi}}(\Delta)$ se aproxima a la proyección espectral $E^{\hat{A}}(\Delta)$ del observable \hat{A} . Similarmente, si $\hat{\xi}$ va a la posición de un autoestado, el estado de salida $\hat{\rho}_{\{q=q\}}$ va a un autoestado del observable \hat{A} correspondiente a la salida de la medida. Así, el modelo $\mu(\hat{A}, \hat{\xi})$ describe una medida aproximadamente precisa de \hat{A} , que deja el objeto en un autoestado aproximado de \hat{A} correspondiente a la salida. Para más detalles de las propiedades estadísticas de $\mu(\hat{A}, \hat{\xi})$ ver [34].

Capítulo 4

RUIDO Y PERTURBACIÓN

4.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos asociado el aparato de medición con un modelo indirecto de medida, que permite describir el proceso de medida mediante una interacción modelada por las ecuaciones de la mecánica cuántica. Ahora formalizaremos las nociones de ruido y perturbación para estos modelos de medida indirectos.

4.2. Ruido en la medida

4.2.1. Ruido en medidas directas

El ruido en la medición puede ser definido como la diferencia entre el valor verdadero de la cantidad a medir y el valor de salida que nos proporciona el aparato de medición [42]. En mecánica clásica no se presenta ninguna dificultad, pero en mecánica cuántica no siempre se puede esperar que exista el valor verdadero definido. Sin embargo, esto no evita que podamos definir la cantidad promedio de ruido de la medición en un estado dado. De hecho si podemos identificar el ruido como una cantidad física, podemos describir las propiedades estadísticas del ruido incluso en la mecánica cuántica. A dicha cantidad física la denominaremos “operador ruido”.

Suponemos que con el fin de medir un observable \hat{A} en un estado dado, el observador realmente hace una medida precisa en otro observable \hat{X} en el mismo estado, en este caso definimos el operador ruido como el observable:

$$\hat{N}(\hat{A}) = \hat{X} - \hat{A}. \quad (4.1)$$

Denominaremos ruido, denotando $\epsilon(\hat{A})$, a la raíz cuadrática media (**rms**) de esta medición en el estado de entrada ϕ :

$$\epsilon(\hat{A}) = \langle \phi | \hat{N}(A)^2 | \phi \rangle^{1/2} = \langle \phi | (\hat{X} - \hat{A})^2 | \phi \rangle^{1/2}. \quad (4.2)$$

La anterior expresión la podemos escribir como:

$$\epsilon(\hat{A}) = \|\hat{X}|\phi\rangle - \hat{A}|\phi\rangle\|. \quad (4.3)$$

Como nos podemos dar cuenta el ruido $\epsilon(\hat{A})$ contiene propiedades de distancia entre los vectores $\hat{A}|\phi\rangle$ y $\hat{X}|\phi\rangle$.

Si el observable \hat{A} tiene un valor definido a en el estado ϕ , es decir que $\hat{A}|\phi\rangle = a|\phi\rangle$, [29] tenemos que:

$$\epsilon(\hat{A}) = \left(\int_{\mathbf{R}} (x - a)^2 \langle \phi | dE^X(x) | \phi \rangle \right)^{1/2}, \quad (4.4)$$

y por lo tanto $\epsilon(\hat{A})$ es la raíz cuadrática media de la diferencia entre la salida x y el valor verdadero a .

Si tomamos $\langle \hat{A} \rangle$, $\langle \hat{X} \rangle$, $\sigma(\hat{A})$ y $\sigma(\hat{X})$ como las medias y las desviaciones estándar de los observables \hat{A} y \hat{X} respectivamente, en el estado ϕ . Y, tenemos $\sigma(\hat{A}) = \|\hat{A}|\phi\rangle - \langle \hat{A} \rangle|\phi\rangle\|$. De la desigualdad triangular para la distancia entre dos vectores tenemos que:

$$\|\hat{X}|\phi\rangle - \langle \hat{X} \rangle|\phi\rangle\| \leq \|\hat{X}|\phi\rangle - \hat{A}|\phi\rangle\| + \|\hat{A}|\phi\rangle - \langle \hat{A} \rangle|\phi\rangle\| + \|\langle \hat{A} \rangle|\phi\rangle - \langle \hat{X} \rangle|\phi\rangle\|, \quad (4.5)$$

que implica la desigualdad estadística:

$$\sigma(\hat{X}) \leq \epsilon(\hat{A}) + \sigma(\hat{A}) + |\langle \hat{X} \rangle - \langle \hat{A} \rangle|. \quad (4.6)$$

De forma análoga obtenemos las siguientes desigualdades:

$$\sigma(\hat{A}) \leq \epsilon(\hat{A}) + \sigma(\hat{X}) + |\langle \hat{X} \rangle - \langle \hat{A} \rangle|, \quad (4.7)$$

$$\epsilon(\hat{A}) \leq \sigma(\hat{A}) + \sigma(\hat{X}) + |\langle \hat{X} \rangle - \langle \hat{A} \rangle|. \quad (4.8)$$

De lo anterior tenemos

$$|\sigma(\hat{X}) - \sigma(\hat{A})| \leq \epsilon(\hat{A}) + |\langle \hat{X} \rangle - \langle \hat{A} \rangle|. \quad (4.9)$$

Por lo tanto el cambio de la desviación estándar de salida y la desviación estándar del observable medido, en el estado de entrada está acotado por el ruido más el sesgo, la diferencia de los valores medios. Si \hat{A} tiene un valor definido y la salida no es sesgada es

decir $\hat{A} = \langle \hat{X} \rangle |\phi\rangle$, de las ecuaciones (4.6) y (4.8), tenemos:

$$\epsilon(\hat{A}) = \sigma(\hat{X}), \quad (4.10)$$

por lo tanto, el ruido en este caso es igual con la fluctuación del observable medido. Si la salida es constante, es decir $\hat{X} = x_0 \hat{I}$, de la ecuación (4.8), tenemos:

$$\epsilon(\hat{A}) \leq \sigma(\hat{A}) + |x_0 - \langle \hat{A} \rangle|, \quad (4.11)$$

que muestra que la relación de incertidumbre de Heisenberg Ruido-Perturbación no cubre todas las posibles formas de medir el mismo observable \hat{A} .

De hecho, si suponemos que para medir el observable \hat{Q} , en un estado ψ , el observador realmente realiza una medida precisa de un observable constante $\hat{X} = x_0 \hat{I}$. Entonces esta medida puede ser realizada, sin perturbar ningún observable, en particular el momento \hat{P} . Sin embargo, el ruido de esta medida está acotada por un número finito $\sigma(\hat{Q}) + |x_0 - \langle \hat{Q} \rangle|$, para cualquier estado ψ con $\|\hat{Q}|\psi\rangle\| < \infty$ [43]. Así, para esta medida el producto de la raíz cuadrática media del ruido y la raíz cuadrática media de la perturbación desaparece sobre todos los estados ψ , en el dominio del operador \hat{Q} .

4.2.2. Ruido en medidas indirectas

Tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ como un aparato con modelo de medición indirecta $(\mathcal{K}, \hat{\sigma}, \hat{U}, \hat{M})$. Suponemos que el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ es utilizado para medir un observable \hat{A} en el estado $\hat{\rho}$ en el tiempo t . En la imagen de Heisenberg con un estado original $\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}$, escribimos entonces $\hat{A}^{in} = \hat{A} \otimes \hat{I}$, $\hat{M}^{in} = \hat{I} \otimes \hat{M}$, $\hat{A}^{out} = \hat{U}^\dagger (\hat{A} \otimes \hat{I}) \hat{U}$, y $\hat{M}^{out} = \hat{U}^\dagger (\hat{I} \otimes \hat{M}) \hat{U}$. Para cualquier observable \hat{C} de $\mathbf{S}+\mathbf{P}$, el valor medio y la desviación estándar de \hat{C} en el estado $\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}$, [29], es denotado por:

$$\langle \hat{C} \rangle = Tr[\hat{C}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})], \quad (4.12)$$

$$\sigma(\hat{C}) = Tr[(\hat{C} - \langle \hat{C} \rangle)^2 (\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})]^{1/2}. \quad (4.13)$$

La anterior definición puede ser escrita como:

$$\sigma(\hat{C}) = \|(\hat{C} - \langle \hat{C} \rangle) \sqrt{(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})}\|_{HS}, \quad (4.14)$$

donde $\|\cdots\|_{HS}$ es la norma de Hilbert-Schmidt definida por:

$$\|\hat{X}\|_{HS} = \sqrt{Tr \hat{X}^\dagger \hat{X}}.$$

Aplicando la desigualdad de Schwarz para el producto interno $\langle \hat{X}, \hat{Y} \rangle = Tr \hat{X}^\dagger \hat{Y}$ en los operadores de clase en Hilbert-Schmidt, tenemos:

$$\sigma(\hat{C})\sigma(\hat{D}) \geq |Tr[(\hat{C} - \langle \hat{C} \rangle)(\hat{D} - \langle \hat{D} \rangle)\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}]| \geq \frac{1}{2}|Tr[(\hat{C}, \hat{D})\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}]|, \quad (4.15)$$

para cualquier observable \hat{C}, \hat{D} con $\sigma(\hat{C}), \sigma(\hat{D}) < \infty$. La anterior desigualdad es conocida como la relación de incertidumbre de Robertson.

Para cuantificar el ruido, introducimos el operador ruido $\hat{N}(\hat{A})$ de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ para la medida de \hat{A} . De acuerdo al proceso de medida descrito en la sección (3.3), tenemos que con el fin de medir el observable \hat{A}^{in} en el estado $\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}$, el observador realmente realiza una medida precisa en el observable \hat{M}^{out} en el mismo estado. Definimos el operador ruido $\hat{N}(\hat{A})$ de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ para la medida de \hat{A} como:

$$\hat{N}(\hat{A}) = \hat{M}^{out} - \hat{A}^{in} = \hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M})\hat{U} - \hat{A} \otimes \hat{I}. \quad (4.16)$$

El ruido, denotado como $\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho})$, de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ para la medida de \hat{A} , en el estado de entrada $\hat{\rho}$, está definido por la ecuación (4.2). Usando la norma de Hilbert-Schmidt, la anterior expresión queda como:

$$\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho}) = \|\hat{M}^{out} \sqrt{\hat{\rho} \otimes \sigma} - \hat{A}^{in} \sqrt{\hat{\rho} \otimes \sigma}\|_{HS}. \quad (4.17)$$

Para aclarar la anterior definición, suponemos que la prueba es preparada en un estado puro $\sigma = |\xi\rangle\langle\xi|$ y consideramos el observable $\hat{A} = \sum_{n,\nu} a_n |a_n, \nu\rangle\langle a_n, \nu|$. Suponemos que el estado de entrada es $|a_n, \nu\rangle$, tenemos:

$$\hat{N}(\hat{A})|a_n, \nu\rangle|\xi\rangle = (\hat{M}^{out} - a_n)|a_n, \nu\rangle|\xi\rangle, \quad (4.18)$$

y

$$\epsilon(\hat{A}, |a_n, \nu\rangle) = \langle (\hat{M}^{out} - a_n)^2 \rangle^{1/2}, \quad (4.19)$$

donde $\epsilon(\hat{A}, |a_n, \nu\rangle)$, representa la raíz cuadrática media de la diferencia entre la salida experimental \hat{M}^{out} y el valor verdadero a_n del observable \hat{A} . Si $\epsilon(\hat{A}, |a_n, \nu\rangle) = 0$, tenemos:

$$\hat{M}^{out}|a_n, \nu\rangle|\xi\rangle = a_n|a_n, \nu\rangle|\xi\rangle, \quad (4.20)$$

de manera que $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ tiene salida a_n con probabilidad 1. Por lo tanto si $\epsilon(\hat{A}, \psi) = 0$, para cualquier autoestado ψ , de un observable discreto \hat{A} , entonces $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ mide precisamente \hat{A} .

Para un observable general \hat{A} , si el observable \hat{A} tiene un valor definido a en el estado $\hat{\rho}$, es decir $\hat{A}\hat{\rho} = a\hat{\rho}$, tenemos de la ecuación (4.4):

$$\epsilon(\hat{A}) = \left(\int_{\mathbf{R}} (x - a)^2 \langle dE^{M^{out}}(x) \rangle \right)^{1/2}. \quad (4.21)$$

Aquí, $\epsilon(\hat{A})$ es la raíz cuadrática media de la diferencia entre la salida x y el valor verdadero a .

Utilizando, $\langle \hat{M}^{out} \rangle$, $\langle \hat{A}^{in} \rangle$, $\sigma(\hat{M}^{out})$ y $\sigma(\hat{A}^{in})$ como las medias y las desviaciones estándar de los observables \hat{M}^{out} y \hat{A}^{in} respectivamente, en el estado $\hat{\rho}$.

Entonces tenemos $\sigma(\hat{M}^{out}) = \|\hat{M}^{out}|\hat{\rho}\rangle - \langle \hat{M}^{out}|\hat{\rho}\rangle\|$. De la desigualdad triangular para la distancia entre dos vectores tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\hat{M}^{out}|\hat{\rho}\rangle - \langle \hat{M}^{out}|\hat{\rho}\rangle\| &\leq \\ \|\hat{M}^{out}|\hat{\rho}\rangle - \hat{A}^{in}|\hat{\rho}\rangle\| + \|\hat{A}^{in}|\hat{\rho}\rangle - \langle \hat{A}^{in}|\hat{\rho}\rangle\| + \|\langle \hat{A}^{in}|\hat{\rho}\rangle - \langle \hat{M}^{out}|\hat{\rho}\rangle\| \end{aligned} \quad (4.22)$$

Por lo tanto, de la desigualdad geométrica, ecuación (4.22), tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \sigma(\hat{M}^{out}) &\leq \epsilon(\hat{A}) + \sigma(\hat{A}^{in}) + |\langle \hat{M}^{out} \rangle - \langle \hat{A}^{in} \rangle|, \\ \sigma(\hat{A}^{in}) &\leq \epsilon(\hat{A}) + \sigma(\hat{M}^{out}) + |\langle \hat{M}^{out} \rangle - \langle \hat{A}^{in} \rangle|, \\ \epsilon(\hat{A}) &\leq \sigma(\hat{A}^{in}) + \sigma(\hat{M}^{out}) + |\langle \hat{M}^{out} \rangle - \langle \hat{A}^{in} \rangle|. \end{aligned} \quad (4.23)$$

De lo anterior tenemos

$$|\sigma(\hat{M}^{out}) - \sigma(\hat{A}^{in})| \leq \epsilon(\hat{A}) + |\langle \hat{M}^{out} \rangle - \langle \hat{A}^{in} \rangle|. \quad (4.24)$$

4.3. Perturbación en la medida

4.3.1. Medidas sin perturbación

Tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ como el aparato con modelo indirecto de medida $(\mathcal{K}, \hat{\sigma}, \hat{U}, \hat{M})$. Asumimos que en general un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ no perturba un observable \hat{B} de \mathbf{S} , si el cambio de estado no selectivo no perturba la evolución dinámica de la distribución de probabilidad de \hat{B} , [29], es decir :

$$Tr\{[E^{\hat{B}}(\Delta) \otimes \hat{I}]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger\} = Tr[E^{\hat{B}}(\Delta)e^{-iH\Delta t/\hbar}\hat{\rho}e^{iH\Delta t/\hbar}], \quad (4.25)$$

para cualquier intervalo Δ y cualquier estado inicial $\hat{\rho}$, donde \hat{H} , es el hamiltoniano del sistema \mathbf{S} . Asumimos que el aparato realiza instantáneamente la medición, en el sentido que la duración Δt es muy pequeña y el acople entre \mathbf{S} y \mathbf{P} es muy grande, así que la evolución libre de \mathbf{S} en el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ puede ser despreciada. En este caso el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ no cambia la distribución de probabilidad de un observable \hat{B} de \mathbf{S} en el estado de entrada $\hat{\rho}$, si

$$Tr\{[E^{\hat{B}}(\Delta) \otimes \hat{I}]\hat{U}(\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma})\hat{U}^\dagger\} = Tr[E^{\hat{B}}(\Delta)\hat{\rho}]. \quad (4.26)$$

En la imagen de Heisenberg,

$$\langle E^{\hat{B}^{out}}(\Delta) \rangle = \langle E^{\hat{B}^{in}}(\Delta) \rangle, \quad (4.27)$$

para cualquier intervalo Δ , donde $\hat{B}^{in} = \hat{B} \otimes \hat{I}$ y $\hat{B}^{out} = \hat{U}^\dagger(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U}$.

Establecemos que un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ no perturba un observable \hat{B} , si el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ no perturba la distribución de probabilidad del observable \hat{B} en cualquier estado de entrada $\hat{\rho}$ [33]. Se puede mostrar que las medidas sin perturbación son caracterizadas por operaciones no selectivas. Por lo tanto es independiente de una elección particular del modelo indirecto de medida asociado con el aparato [29].

4.3.2. Medidas conjuntas con aparatos sin perturbación

La relación entre las medidas simultáneas y las medidas sin perturbación fueron investigadas por Osawa [33] quien comprobó que cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ mide precisamente un observable \hat{A} sin perturbar un observable \hat{B} , si y solo si se realizan medias sucesivas precisas de los observables \hat{A} y \hat{B} , utilizando $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ para medir \hat{A} , el cual satisface la fórmula de probabilidad conjunta para medidas simultáneas en el estado inicial. El siguiente teorema generaliza el anterior resultado para aparatos que no necesariamente realicen una medida precisa.

TEOREMA : Supongamos que un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ mide precisamente un observable \hat{B} , inmediatamente después realizamos una medida utilizando un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ con **POVM** Π_x . Entonces, el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ no perturba el observable \hat{B} si y solo si su distribución de probabilidad satisface:

$$Pr\{\mathbf{x} \in \Delta, \mathbf{y} \in \Delta' | \hat{\rho}\} = Tr[\Pi_x(\Delta)E^{\hat{B}}(\Delta')\hat{\rho}], \quad (4.28)$$

para cualquier estado de entrada $\hat{\rho}$ y cualquier intervalo Δ y Δ' . En este caso, Π es necesariamente compatible con \hat{B} [29].

4.3.3. Perturbación en modelos indirectos de medida

Con el fin de cuantificar la perturbación, introducimos el operador perturbación $\hat{D}(\hat{B})$ del aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ para un observable \hat{B} definido como:

$$\hat{D}(\hat{B}) = \hat{B}^{out} - \hat{B}^{in} = \hat{U}^\dagger(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U} - \hat{B} \otimes \hat{I}. \quad (4.29)$$

La perturbación $\eta(\hat{B}, \hat{\rho})$ del observable \hat{B} con un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ en un estado de entrada ψ , es definida como la **rms** del operador \hat{D} ,

$$\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) = \langle \hat{D}(\hat{B})^2 \rangle^{1/2}, \quad (4.30)$$

que podemos escribir como:

$$\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) = \|\hat{B}^{out} \sqrt{\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}} - \hat{B}^{in} \sqrt{\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}}\|_{HS}. \quad (4.31)$$

De la ecuación (4.29), tenemos:

$$\hat{D}(\hat{B}) = \hat{U}^\dagger[\hat{B} \otimes \hat{I}, \hat{U}]. \quad (4.32)$$

y reemplazando en (4.30), tenemos:

$$\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) = \langle |[\hat{B} \otimes \hat{I}, \hat{U}]|^2 \rangle^{1/2}, \quad (4.33)$$

y $\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) = 0$ si y solo si $[\hat{B} \otimes \hat{I}, \hat{U}]\hat{\rho} \otimes \sigma = 0$.

Anteriormente, definimos la perturbación de un aparato asociándola con el modelo indirecto de medida. En [29] se muestra que la perturbación es determinada por una operación no selectiva de un aparato y este depende solo de las equivalencias estadísticas de clases de aparatos, además muestra que en general la perturbación $\eta(\hat{B}, \hat{\rho})$ de un observable \hat{B} para cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ en el estado $\hat{\rho}$ como la distancia $d_p(T * E^B, B)$. La anterior definición es consistente con la definición para aparatos con modelos indirectos de medida.

Una de las propiedades fundamentales de la perturbación es que un aparato que no perturba y un aparato con perturbación cero son nociones equivalentes, como se estipula en el siguiente teorema.

TEOREMA: el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ no perturba el observable \hat{B} si y solo si $\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) = 0$ para cualquier estado $\hat{\rho}$ [29].

Capítulo 5

NUEVA FORMULACIÓN DEL PRINCIPIO DE INCERTIDUMBRE

5.1. Introducción

Con las nociones de ruido y perturbación descritas en el capítulo anterior, vamos a reconstruir el argumento hecho por Heisenberg para obtener la expresión (1.1) y poderla relacionar con (1.4). Expondremos un modelo de interacción que cumple la relación de incertidumbre de Heisenberg y otro que la viola, teniendo así la necesidad de obtener una expresión generalizada válida para medidas cuánticas generales, mediante el análisis de las relaciones de conmutación para los operadores que representan el ruido y la perturbación.

5.2. Reconstrucción del argumento de Heisenberg

De las nociones de ruido y perturbación descritas en el capítulo cuatro, podemos considerar la medida de la posición \hat{Q} de una masa con momento \hat{P} , la interacción entre la masa y el aparato es asumida en el intervalo de tiempo $(0, \Delta t)$, el estado de la masa es ϕ y el estado del aparato es descrito por ξ . Suponemos que después de la interacción de la medición, un observable \hat{M} de la prueba es medido localmente. La perturbación está dada por:

$$\hat{D}(\hat{P}) = \hat{P}(\Delta t) - \hat{P}(0), \quad (5.1)$$

Si la masa tiene un momento cero antes de la medida es decir $\hat{P}(0)\psi = 0\psi$, la perturbación es:

$$\eta(\hat{P})^2 = \langle \hat{P}(\Delta t)^2 \rangle. \quad (5.2)$$

Es decir, si la masa está en reposo antes de la medida, todo el momento del objeto después surge de la interacción de la medición. El ruido está dado por:

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{Q}) &= \hat{M}(\Delta t) - \hat{Q}(0), \\ \epsilon(\hat{Q})^2 &= \langle [\hat{M}(\Delta t) - \hat{Q}(0)]^2 \rangle. \end{aligned} \quad (5.3)$$

En 1927, Heisenberg afirmó que la ecuación (1.1) es una consecuencia matemática de la relación de conmutación canónica, sin embargo, su argumento incluye algunos supuestos implícitos: Se comienza con una medida con error $\epsilon(\hat{Q})$, y se afirma que el estado justo después de la medición tiene $\sigma(\hat{Q}) = \epsilon(\hat{Q})$, de tal manera que de la expresión (1.4), podemos obtener $\epsilon(\hat{Q})\sigma(\hat{P}) \geq \frac{\hbar}{2}$. Ahora lo que resta es poder relacionar $\sigma(\hat{P})$ con $\eta(\hat{P})$, para poder obtener (1.1).

Para aclarar los requerimientos implícitos, vamos a demostrar que la prueba original propuesta por Heisenberg puede ser rigurosamente construida bajo dos suposiciones adicionales:

1. Ambos, tanto $\epsilon(\hat{Q})$ como $\eta(\hat{P})$, son independientes del estado de entrada. Es decir, la medida tiene ruido y perturbación constante.
2. La medida siempre deja la masa con desviación estándar en la posición menor que $\epsilon(\hat{Q})$. A este requisito se le denomina equipredicibilidad.

Bajo estas consideraciones la prueba de la expresión (1.1), se estipula como sigue: Con el fin de obtener una estimación de la perturbación del momento vamos a considerar el caso donde la masa se encuentra en reposo antes de la medida, estableciendo la perturbación como (5.2). Tomamos ψ_x como el estado de la masa después de la medida con resultado x . Debido a que la varianza es menor que el cuadrado medio [13], la perturbación cumple con la siguiente relación:

$$\eta(\hat{P}) \geq \sigma_x(\hat{P}). \quad (5.4)$$

Por otro lado, por la condición de equipredicibilidad tenemos:

$$\epsilon(\hat{Q}) \geq \sigma_x(\hat{Q}). \quad (5.5)$$

De las expresiones (5.4) y (5.5), se satisface

$$\epsilon(\hat{Q})\eta(\hat{P}) \geq \sigma_x(\hat{Q})\sigma_x(\hat{P}). \quad (5.6)$$

Por lo tanto de la ecuación (1.1) se deduce (1.4), si la masa está en reposo antes de la medición. Así por la primera suposición se asegura que la relación de incertidumbre de Heisenberg 1.1, se cumple con independencia particular del estado de entrada.

En [35] se muestra que todas las medidas con intervención independiente satisfacen (1.1) para cualquier estado de entrada ψ y cualquier estado del aparato ξ , sin requerir equipredicibilidad. Por lo tanto la equipredicibilidad no es un requerimiento esencial para que la medida satisfaga la relación de Heisenberg.

A pesar que se puede mostrar la expresión (1.1) rigurosamente, no se puede decir que es una expresión universalmente válida pues ha dejado un problema abierto en cuanto a las dos condiciones implícitas que la rigen. Además, esta expresión solo es válida para el tipo de medidas con intervención independiente, por ello es necesario realizar una generalización de la relación de incertidumbre válida para medidas cuánticas generales.

5.3. Modelos de interacción

5.3.1. Modelo de Von Neumann

Un modelo que satisface la medida de la posición canónica fue propuesto por Von Neumann [25], dicho modelo cumple la relación de incertidumbre de Heisenberg. Para comenzar consideremos el caso donde el objeto \mathbf{S} es una masa unidimensional, con posición \hat{x} y momento \hat{p}_x , cumpliendo la relación de conmutación $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar\hat{1}$, y el hamiltoniano $\hat{H}_{\mathbf{S}}$ en el espacio de Hilbert, $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$. Bajo las definiciones generales establecidas anteriormente, la relación de incertidumbre para ruido-perturbación propuesta por Heisenberg es:

$$\epsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}_x) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (5.7)$$

Tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ como el aparato que realiza la medida sobre el sistema \mathbf{S} descrito a continuación:

La prueba \mathbf{P} de $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ se supone como un sistema unidimensional con observables canónicos \hat{q} , \hat{p} , cumpliendo $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar\hat{1}$, y el hamiltoniano $\hat{H}_{\mathbf{P}}$ en el espacio de Hilbert $\mathcal{K} = L^2(\mathbf{R})$. El observable de la prueba está diseñado para ser la coordenada \hat{q} de \mathbf{P} . La prueba es diseñada en un estado con una función de onda normalizada $\hat{\xi}(q)$ justo antes de la medición. Matemáticamente, se supone que la función de onda es rápidamente decreciente, es decir $\hat{\xi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, entonces tenemos $\sigma(\hat{q}), \sigma(\hat{p}) < \infty$ en el estado $\hat{\xi}$. La interacción objeto-prueba \hat{H} es encendida en el tiempo t a $t + \Delta t$. El Hamiltoniano total

para el objeto y la prueba es tomado como:

$$\hat{H}_{\mathbf{S}+\mathbf{P}} = \hat{H}_{\mathbf{S}} + \hat{H}_{\mathbf{P}} + K\hat{H}, \quad (5.8)$$

donde K es la constante de acoplamiento. Asumimos que el acoplamiento es fuerte es decir $K \gg 1$, entonces se puede prescindir de los Hamiltonianos libres y la duración Δt del acoplamiento se elige de tal manera que $K\Delta t = 1$. Von Neumann [25] introduce la interacción de la medición como:

$$\hat{H} = \hat{x}\hat{p},$$

para una medida aproximada de la posición, para detalles mirar en [34, 44, 45]. Entonces el operador unitario de evolución temporal de $\mathbf{S}+\mathbf{P}$ en $t + \Delta t$ está dado por:

$$\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{x}\hat{p}}. \quad (5.9)$$

La medida está descrita por un modelo indirecto de medida:

$$\mu(\hat{x}, \hat{\xi}) = \left(L^2(\mathbf{R}), \hat{\xi}, e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{x}\hat{p}}, \hat{q} \right), \quad (5.10)$$

con distribución operacional y correspondiente dual, determinadas por:

$$\mathcal{I}_{\hat{\xi}}(\Delta)\hat{\rho} = \int_{\Delta} \hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})\hat{\rho}\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})^{\dagger}dq, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{I}_{\hat{\xi}}(\Delta)^* \hat{X} = \int_{\Delta} \hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})^{\dagger}\hat{\rho}\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})dq. \quad (5.12)$$

El (POVM) es:

$$\Pi_{\hat{\xi}}(\Delta) = \int_{\Delta} |\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})|^2 dq, \quad (5.13)$$

así, la distribución de probabilidad y el estado de salida son:

$$Pr\{\mathbf{q} \in \Delta | \hat{\rho}\} = \int_{\Delta} Tr[|\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})|^2 \hat{\rho}]dq, \quad (5.14)$$

$$\hat{\rho}_{\{\mathbf{q}=q\}} = \frac{\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})\hat{\rho}\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})^{\dagger}}{Tr[|\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})|^2 \hat{\rho}]}. \quad (5.15)$$

Si el estado de entrada es un vector de estado $\hat{\rho} = |\hat{\Psi}\rangle\langle\hat{\Psi}|$, entonces la distribución de probabilidad de salida está determinada como:

$$Pr\{\mathbf{q} \in \Delta | \hat{\Psi}\} = \int_{\Delta} dq \int_{\mathbf{R}} |\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})|^2 |\hat{\Psi}(x)|^2 dx, \quad (5.16)$$

y el estado de salida:

$$\hat{\Psi}_{\{q=q\}}(x) = \frac{\hat{\xi}(q-x)\hat{\Psi}(x)}{\left(\int_{\mathbf{R}} |\hat{\xi}(q\hat{I} - \hat{x})|^2 |\hat{\Psi}(x)|^2 dx\right)^{1/2}}, \quad (5.17)$$

con $\hat{\rho}_{\{q=q\}}(x) = |\hat{\Psi}_{\{q=q\}}\rangle\langle\hat{\Psi}_{\{q=q\}}|$.

Resolviendo las ecuaciones de movimiento de Heisenberg:

$$\frac{d\hat{X}(t+\tau)}{d\tau} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{X}(t+\tau), K\hat{H}], \quad (5.18)$$

para $t < t + \tau < t + \Delta t$, donde $\hat{X}(t + \tau)$ es cualquier observable de Heisenberg de $\mathbf{S} + \mathbf{P}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t + \tau) &= \hat{x}(t), \\ \hat{q}(t + \tau) &= K\tau\hat{x}(t) + \hat{q}(t), \\ \hat{p}_x(t + \tau) &= \hat{p}_x(t) - K\tau\hat{p}(t), \\ \hat{p}(t + \tau) &= \hat{p}(t). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para $\tau = \Delta t = 1/K$, tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t + \Delta t) &= \hat{x}(t), \\ \hat{q}(t + \Delta t) &= \hat{x}(t) + \hat{q}(t), \\ \hat{p}_x(t + \Delta t) &= \hat{p}_x(t) - \hat{p}(t), \\ \hat{p}(t + \Delta t) &= \hat{p}(t). \end{aligned} \quad (5.20)$$

De ello se deducen los operadores ruido y perturbación:

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\hat{x}) &= \hat{q}(t + \Delta t) - \hat{x}(t) = \hat{q}(t), \\ \hat{D}(\hat{p}_x) &= \hat{p}_x(t + \Delta t) - \hat{p}_x(t) = -\hat{p}(t). \end{aligned}$$

Y sus operadores medios:

$$\begin{aligned} n(\hat{x}) &= \langle \hat{\xi} | \hat{q} | \hat{\xi} \rangle \hat{I}, \\ d(\hat{p}_x) &= -\langle \hat{\xi} | \hat{p} | \hat{\xi} \rangle \hat{I}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Por lo tanto, en esta medida el ruido de la posición y la perturbación en el impulso son estadísticamente independientes, de manera que satisface la relación de Heisenberg

ruido-perturbación. El ruido y la perturbación están dadas por:

$$\epsilon(\hat{x})^2 = \langle \hat{q}(t)^2 \rangle \geq \sigma(\hat{q})^2, \quad (5.22)$$

$$\eta(\hat{p}_x)^2 = \langle \hat{p}(t)^2 \rangle \geq \sigma(\hat{p})^2. \quad (5.23)$$

Así, llegamos a la conclusión que el modelo de Von Neumann obedece a la relación de Heisenberg ruido-perturbación, es decir,

$$\epsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}_x) \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (5.24)$$

como consecuencia de la relación de Kennard-Robertson:

$$\sigma(\hat{q})\sigma(\hat{p}) \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (5.25)$$

aplicada a la prueba justo antes de la medición. Este modelo representa una característica básica del microscopio de rayos γ en el punto que la relación entre el ruido y la perturbación, surge de la limitación física fundamental en la preparación de la prueba.

Se podría esperar que una característica básica sea compartida por todos los modelos de una clase considerable de medidas de posición, sin embargo, el siguiente modelo sugiere que no es el caso.

5.3.2. Modelo de Hamiltoniano independiente del tiempo

Vamos a modificar la interacción de la medida del modelo de Von Neumann [46] para construir un modelo que viola la relación de incertidumbre de Heisenberg ruido-perturbación.

Este modelo de medida surgió de la controversia sobre el límite de la sensibilidad de los detectores de ondas gravitacionales: el límite de sensibilidad del interferómetro del detector de ondas gravitacionales, se deriva de la exactitud del seguimiento de la posición de la masa libre, relativo a la posición de los espejos del interferómetro. Branginsky, Caves y otros [23, 33, 44, 47, 48, 49, 50, 51], afirman que cualquier medida de la posición obedece la relación de Heisenberg (1.1) que conduce al límite de sensibilidad llamado “límite cuántico estándar” (SQL), para el seguimiento de la posición límite de la masa. Sin embargo, Yuen [52] afirma que el SQL no es universalmente válido y puede ser violado por un “estado de medida contractivo” que deja la masa libre en un estado con incertidumbre en la posición decreciendo en el tiempo.

En este nuevo modelo el objeto, la prueba, la preparación de la prueba y el observable de la prueba son los mismos sistemas, el mismo estado y el mismo observable como en

el modelo de Von Neumann. En lugar de $\hat{H} = \hat{x}\hat{p}$, la interacción de la medida está ahora determinada por [51]:

$$\hat{H} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}(2\hat{x}\hat{p} - 2\hat{p}_x\hat{q} + \hat{x}\hat{p}_x - \hat{q}\hat{p}), \quad (5.26)$$

donde el factor $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ se escoge para simplificar futuras expresiones.

La interacción de la medida \hat{H} , es encendida en el tiempo $(t, t + \Delta t)$. El hamiltoniano total para el objeto y la prueba es:

$$\hat{H}_{\mathbf{S}+\mathbf{P}} = \hat{H}_{\mathbf{S}} + \hat{H}_{\mathbf{P}} + K\hat{H}, \quad (5.27)$$

la constante de acoplamiento K y el tiempo de duración Δt son elegidos como anteriormente $K \gg 1$ y $K\Delta t = 1$. El operador de evolución temporal \hat{U} para el intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ está dado por:

$$\hat{U} = \exp \left[-\frac{i\pi}{3\sqrt{3}\hbar}(2\hat{x}\hat{p} - 2\hat{p}_x\hat{q} + \hat{x}\hat{p}_x - \hat{q}\hat{p}) \right]. \quad (5.28)$$

La medida está, entonces, descrita por un modelo indirecto de medida dado por:

$$\left(L^2(\mathbf{R}), \hat{\xi}, \exp \left[-\frac{i\pi}{3\sqrt{3}\hbar}(2\hat{x}\hat{p} - 2\hat{p}_x\hat{q} + \hat{x}\hat{p}_x - \hat{q}\hat{p}) \right], \hat{q} \right). \quad (5.29)$$

Para el intervalo de tiempo $t < t + \tau < t + \Delta t$, la función de onda $\Psi_{t+\tau}(x, q)$ del sistema compuesto $\mathbf{S}+\mathbf{P}$, satisface la ecuación de Schödinger [53, 54]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{t+\tau}(x, q)}{\partial \tau} = K\hat{H}\Psi_{t+\tau}(x, q), \quad (5.30)$$

cuya solución es:

$$\Psi_{t+\tau}(x, q) = \Psi_t \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ x \operatorname{sen} \left(\frac{(1-K\tau)\pi}{3} \right) + q \operatorname{sen} \left(\frac{K\tau\pi}{3} \right) \right\} \right) \quad (5.31)$$

$$\times \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ -x \operatorname{sen} \left(\frac{K\tau\pi}{3} \right) + q \operatorname{sen} \left(\frac{(1+K\tau)\pi}{3} \right) \right\}. \quad (5.32)$$

Para $\tau = \Delta t = 1/K$, tenemos:

$$\Psi_{t+\Delta t}(x, q) = \Psi_t(q, q - x). \quad (5.33)$$

Ahora, suponemos que en el tiempo t , justo antes de que el acoplamiento esté encendido, la función de onda del objeto es $\psi(x)$ con $\sigma(\hat{x}), \sigma(\hat{p}_x) < \infty$ en el estado $\psi(\hat{x})$. Dado que la prueba es preparada en la función de onda $\hat{\xi}(q)$, la función de onda total es:

$$\Psi_t = \hat{\psi}(x)\hat{\xi}(q). \quad (5.34)$$

En el tiempo $t + \Delta t$, la interacción finaliza, la función de onda total está dada por:

$$\Psi_{t+\Delta t} = \hat{\psi}(q)\hat{\xi}(q-x). \quad (5.35)$$

En el estado anterior, el observable de prueba \hat{q} es medido para obtener el resultado, entonces la distribución de probabilidad de salida de esta medida esta dada por:

$$Pr\{\mathbf{q} \in \Delta | \hat{\psi}\} = \int_{\Delta} dq \int_{\mathbf{R}} |\Psi_{t+\Delta t}(x, q)|^2 dx = \int_{\Delta} |\hat{\psi}(q)|^2 dq, \quad (5.36)$$

la anterior expresión está normalizada.

La distribución de probabilidad de salida tiene la función densidad de probabilidad $|\hat{\psi}(q)|^2$, que coincide con la densidad de Born de un objeto x justo antes de la medición y muestra que esta medición es una medida precisa de la posición [29]. La función de onda del objeto $\hat{\psi}_{\{\mathbf{q}=q\}}$ justo después de la medición dada por $\mathbf{q} = q$ es obtenida de la ecuación (3.21):

$$\hat{\psi}_{\{\mathbf{q}=q\}}(x) = \frac{\Psi_{t+\Delta t}(x, q)}{\left(\int_{\mathbf{R}} |\Psi_{t+\Delta t}(x, q)|^2 dx\right)^{1/2}} = \frac{\hat{\psi}(q)}{|\hat{\psi}(q)|} \hat{\xi}(q-x) = C \hat{\xi}(q-x), \quad (5.37)$$

donde $C, |C| = 1$ es una constante de factor de fase que solo depende de la salida $\mathbf{q} = q$. La anterior relación puede ser obtenida utilizando los resultados generales del capítulo 3. Tomamos $f(x)$, como la función de onda en \mathcal{H} definida por:

$$f(x) = \hat{\xi}(-x),$$

para todos $x \in \mathbf{R}$. Tenemos:

$$\hat{\xi}(q-x) = f(x-q) = [\exp(-iq\hat{p}_x/\hbar)f](x), \quad (5.38)$$

donde utilizamos el hecho que \hat{p}_x es el generador de translaciones en x . Por lo tanto, de

$$\hat{U}(\hat{\psi} \otimes \hat{\xi})(x, q) = \hat{\psi}(q)\hat{\xi}(q-x), \quad (5.39)$$

tenemos

$$\hat{U}(\hat{\psi} \otimes \hat{\xi})(q) = \hat{\psi}(q)\exp(-iq\hat{p}_x/\hbar)f. \quad (5.40)$$

La distribución operacional \mathcal{I} satisface:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{I})|\hat{\psi}\rangle\langle\hat{\psi}| &= \int_{\Delta} |\hat{\psi}(q)\exp(-iq\hat{p}_x/\hbar)f\rangle\langle\hat{\psi}(q)\exp(-iq\hat{p}_x/\hbar)f|dq, \\
 &= \int_{\Delta} \exp(-iq\hat{p}_x/\hbar)|f\rangle\langle f|\exp(iq\hat{p}_x/\hbar)|\hat{\psi}(q)|^2dq, \\
 &= \int_{\Delta} \exp(-iq\hat{p}_x/\hbar)|f\rangle\langle f|\exp(iq\hat{p}_x/\hbar)\text{Tr}[dE^{\hat{q}}(q)|\hat{\psi}\rangle\langle\hat{\psi}|]. \tag{5.41}
 \end{aligned}$$

Esto muestra que el estado de salida dado por $\mathbf{q} = q$ es:

$$|\hat{\psi}_{\mathbf{q}=q}\rangle\langle\hat{\psi}_{\mathbf{q}=q}| = \exp(-iq\hat{p}_x/\hbar)|f\rangle\langle f|\exp(iq\hat{p}_x/\hbar), \tag{5.42}$$

y de aquí tenemos:

$$\hat{\psi}_{\mathbf{q}=q}(x) = [\exp(-iq\hat{p}_x/\hbar)f](x) = \hat{\xi}(q - x), \tag{5.43}$$

con un factor de fase constante.

Por linealidad y continuidad de la ecuación (5.41) la distribución operacional de este modelo está dada por:

$$(\mathcal{I})(\Delta)\hat{\rho} = \int_{\Delta} \exp(-iq\hat{p}_x/\hbar)|f\rangle\langle f|\exp(iq\hat{p}_x/\hbar)\text{Tr}[dE^{\hat{q}}\hat{\rho}]. \tag{5.44}$$

Resolviendo las ecuaciones de movimiento de Heisenberg para $t < t + \tau < t + \Delta t$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t + \tau) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{x}(t)\text{sen}\left(\frac{(1 + K\tau)\pi}{3}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{q}(t)\text{sen}\left(\frac{K\tau\pi}{3}\right), \\
 \hat{q}(t + \tau) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{x}(t)\text{sen}\left(\frac{K\tau\pi}{3}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{q}(t)\text{sen}\left(\frac{(1 - K\tau)\pi}{3}\right), \\
 \hat{p}_x(t + \tau) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{p}_x(t)\text{sen}\left(\frac{(1 - K\tau)\pi}{3}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{p}(t)\text{sen}\left(\frac{K\tau\pi}{3}\right), \\
 \hat{p}(t + \tau) &= \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{p}_x(t)\text{sen}\left(\frac{K\tau\pi}{3}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\hat{p}(t)\text{sen}\left(\frac{(1 + K\tau)\pi}{3}\right). \tag{5.45}
 \end{aligned}$$

Para $\tau = \Delta t = 1/K$, tenemos:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t + \Delta t) &= \hat{x}(t) - \hat{q}(t), \\
 \hat{q}(t + \Delta t) &= \hat{x}(t), \\
 \hat{p}_x(t + \Delta t) &= -\hat{p}(t), \\
 \hat{p}(t + \Delta t) &= \hat{p}_x(t) + \hat{p}(t). \tag{5.46}
 \end{aligned}$$

Entonces el operador ruido, el operador perturbación, el valor medio del operador ruido y perturbación están dados por:

$$\begin{aligned}
 \hat{N}(\hat{x}) &= \hat{q}(t + \Delta t) - \hat{x}(t) = 0, \\
 \hat{D}(\hat{p}_x) &= \hat{p}_x(t + \Delta t) - \hat{p}_x(t) = -\hat{p} - \hat{p}_x, \\
 n(\hat{x}) &= 0, \\
 d(\hat{p}_x) &= -\langle \xi | \hat{p} | \xi \rangle I - \hat{p}_x.
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Entonces el ruido para la medida de la posición y la perturbación en el momento están dadas por:

$$\begin{aligned}
 \epsilon(\hat{x}) &= 0, \\
 \eta(\hat{p}_x)^2 &= \langle [\hat{p}_x(t) + \hat{p}(t)]^2 \rangle = \sigma(\hat{p}_x)^2 + \sigma(\hat{p})^2 + [\langle \hat{p}_x(t) \rangle + \langle \hat{p}(t) \rangle]^2.
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

Ya que la segunda es finita:

$$\epsilon(\hat{x})\eta(\hat{p}_x) = 0, \tag{5.49}$$

entonces el modelo planteado viola la relación de incertidumbre de Heisenberg Ruido-perturbación. Si $\langle \hat{p}_x(t)^2 \rangle \rightarrow 0$ y $\langle \hat{p}(t)^2 \rangle \rightarrow 0$ (es decir, ψ y ξ son autoestados del momento con autovalor cero), entonces tenemos $\eta(\hat{p}_x(t)) \rightarrow 0$ con $\epsilon(\hat{x}) = 0$. Por lo tanto, puede medirse la posición precisamente sin perturbar el momento, en un nuevo autoestado del momento.

5.3.3. Modelo con Hamiltoniano dependiente de tiempo

La interacción del modelo anterior ecuación (5.26), que incluye términos $\hat{x}\hat{p}_x - \hat{q}\hat{p}$, no puede ser aplicado a cualquier acoplamiento. Por lo tanto, este modelo es mucho más difícil que el modelo de Von Neumann. En esta sección mostraremos, sin embargo, que si usamos una interacción dependiente del tiempo el modelo anteriormente propuesto es sencillo de desarrollar como el modelo de Von Neumann [29].

En este modelo el objeto, la prueba, la preparación de la prueba y el observable de la prueba son los mismos como en los anteriores modelos.

La interacción del objeto-prueba es encendida en el tiempo $t, t + \Delta t$. Para el intervalo de tiempo $t < t + \tau < t + \Delta t$, el hamiltoniano total dependiente del tiempo $\hat{H}_{\mathbf{S}+\mathbf{P}}(t + \tau)$ de $\mathbf{S}+\mathbf{P}$ está dado por:

$$\hat{H}_{\mathbf{S}+\mathbf{P}}(t + \tau) = \hat{H}_S \hat{I} + \hat{I} \hat{H}_P - K_1(\tau) \hat{p}_x \hat{q} + K_2(\tau) \hat{x} \hat{p}, \tag{5.50}$$

donde los acoplamientos son fuertes, $K_1(\tau)$ y $K_2(\tau)$ satisfacen:

$$\begin{aligned} K_1(\tau) &= 0, \text{ si } \tau \notin (t, t + \frac{\Delta t}{2}), \\ K_2(\tau) &= 0, \text{ si } \tau \notin (t + \frac{\Delta t}{2}, t + \Delta t), \end{aligned} \quad \text{y} \quad (5.51)$$

$$\begin{aligned} \int_t^{t+\frac{\Delta t}{2}} K_1(\tau) d\tau &= 1, \\ \int_{t+\frac{\Delta t}{2}}^{t+\Delta t} K_2(\tau) d\tau &= 1. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Suponemos que Δt es tan pequeña que el sistema de Hamiltonianos \hat{H}_S y \hat{H}_P pueden ser despreciados en t a $t + \Delta t$, resolviendo la ecuación de Schrödinger, al igual que en el modelo de Von Neumann, el tiempo de evolución durante el acoplamiento $\mathbf{S}+\mathbf{P}$, es descrito por un operador unitario de evolución:

$$\begin{aligned} \hat{U}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, t\right) &= \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{p}_x \otimes \hat{q}\right), \\ \hat{U}\left(t + \Delta t, t + \frac{\Delta t}{2}\right) &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{x} \otimes \hat{p}\right). \end{aligned} \quad (5.53)$$

Entonces en la base de la posición tenemos:

$$\begin{aligned} \langle x, y | \hat{U}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, t\right) | x', y' \rangle &= \langle x + y, y | x', y' \rangle, \\ \langle x, y | \hat{U}\left(t + \Delta t, t + \frac{\Delta t}{2}\right) | x', y' \rangle &= \langle x, y - x | x', y' \rangle, \end{aligned} \quad (5.54)$$

de lo anterior, tenemos:

$$\langle x, y | \hat{U}\left(t + \Delta t, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \hat{U}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, t\right) | x', y' \rangle = \langle y, y - x | x', y' \rangle. \quad (5.55)$$

De la ecuación (5.39), concluimos que el operador de evolución temporal es:

$$\hat{U} = \hat{U}\left(t + \Delta t, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \hat{U}\left(t + \frac{\Delta t}{2}, t\right), \quad (5.56)$$

es el mismo operador unitario del modelo independiente del tiempo. Entonces los dos modelos son idénticos. En particular obtenemos la relación:

$$\exp\left[\frac{-i\pi}{3\sqrt{3}\hbar}(2\hat{x}\hat{p} - 2\hat{p}_x\hat{q} + \hat{x}\hat{p}_x - \hat{q}\hat{p})\right] = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{x}\hat{p}\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}\hat{p}_x\hat{q}\right). \quad (5.57)$$

De este modo podemos evitar implementar el término $\hat{x}\hat{p}_x - \hat{q}\hat{p}$, y solo tipos de interacción de Von Neumann $\hat{x}\hat{p}$ y $\hat{p}_x\hat{q}$ son suficientes para implementar el modelo propuesto en la sección anterior.

5.4. Relación de incertidumbre universalmente válida

En el capítulo anterior hemos introducido las definiciones de la raíz cuadrática media para el ruido y la perturbación, ahora vamos a establecer de forma rigurosa la validez de la relación de incertidumbre de ruido y perturbación [24, 29]. Para este propósito, tomamos $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ como el aparato con modelo indirecto de medida $(\mathcal{K}, \hat{\sigma}, \hat{U}, \hat{M})$, con \hat{A} y \hat{B} como dos observables del objeto. Recordamos que el operador ruido $\hat{N}(\hat{A})$ y perturbación $\hat{D}(\hat{B})$ satisfacen:

$$\hat{M}^{out} = \hat{A}^{in} + \hat{N}(\hat{A}), \quad (5.58)$$

$$\hat{B}^{out} = \hat{B}^{in} + \hat{D}(\hat{B}). \quad (5.59)$$

Ya que \hat{M} y \hat{B} son observables en diferentes sistemas, tenemos que $[\hat{M}^{out}, \hat{B}^{out}] = 0$, por lo tanto obtenemos la siguiente relación de conmutación para el operador ruido y perturbación:

$$[\hat{N}(\hat{A}), \hat{D}(\hat{B})] + [\hat{N}(\hat{A}), \hat{B}^{in}] + [\hat{A}^{in}, \hat{D}(\hat{B})] = -[\hat{A}^{in}, \hat{B}^{in}]. \quad (5.60)$$

Tomando los módulos medios en el estado original $\hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}$ de ambos lados y aplicando la desigualdad triangular tenemos:

$$|\langle [\hat{N}(\hat{A}), \hat{D}(\hat{B})] \rangle| + |\langle [\hat{N}(\hat{A}), \hat{B}^{in}] \rangle| + |\langle [\hat{A}^{in}, \hat{D}(\hat{B})] \rangle| \geq |Tr([\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho})|. \quad (5.61)$$

Debido a que la varianza es menor que el cuadrado medio, obtenemos:

$$\begin{aligned} \epsilon(\hat{A}, \hat{\rho}) &\geq \sigma(\hat{N}(\hat{A}), \hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}), \\ \eta(\hat{B}, \hat{\rho}) &\geq \sigma(\hat{D}(\hat{B}), \hat{\rho} \otimes \hat{\sigma}), \end{aligned} \quad (5.62)$$

y por la relación de Heisenberg-Robertson, se tiene :

$$\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho})\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) \geq \frac{1}{2}|\langle [\hat{N}(\hat{A}), \hat{D}(\hat{B})] \rangle|, \quad (5.63)$$

De aquí se obtiene la relación de incertidumbre universal para el par (\hat{A}, \hat{B}) ,

$$\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho})\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) + \frac{1}{2}|\langle [\hat{N}(\hat{A}), \hat{B}^{in}] \rangle| + |\langle [\hat{A}^{in}, \hat{D}(\hat{B})] \rangle| \geq \frac{1}{2}|Tr([\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho})|. \quad (5.64)$$

La anterior relación da condiciones rigurosas en cuanto a que los aparatos satisfagan la relación de incertidumbre de Heisenberg para el ruido y la perturbación. A continuación estableceremos algunas de estas condiciones:

Tomamos \hat{A} y \hat{B} como un par de observables. Un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ con modelo indirecto de medida $(\mathcal{K}, \hat{\sigma}, \hat{U}, \hat{M})$ satisface la relación de Heisenberg para el ruido y la perturbación, es decir,

$$\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho})\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) \geq \frac{1}{2}|Tr([\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho})|, \quad (5.65)$$

para cualquier estado $\hat{\rho}$, si se tiene una de las siguientes condiciones [55]:

- El operador ruido conmuta con \hat{B}^{in} y el operador perturbación conmuta con \hat{A}^{in} , es decir,

$$\begin{aligned} [\hat{N}(\hat{A}), \hat{B}^{in}] &= 0, \\ [\hat{D}(\hat{B}), \hat{A}^{in}] &= 0. \end{aligned} \quad (5.66)$$

- El operador ruido y el operador perturbación pertenecen al mismo sistema de prueba, es decir, existen dos observables \hat{N} y \hat{D} en \mathcal{K} , tal que:

$$\begin{aligned} \hat{N}(\hat{A}) &= \hat{I} \otimes \hat{N}, \\ \hat{D}(\hat{B}) &= \hat{I} \otimes \hat{D}. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Las dos condiciones anteriores caracterizan formalmente el tipo de mediciones que cumplen la relación de incertidumbre de Heisenberg (1.1) y la expresión (5.64) es la relación válida para todas las medidas cuánticas generales.

5.5. Relación de incertidumbre Ruido-Perturbación generalizada

Para obtener la relación entre el ruido $\epsilon(A, \hat{\rho})$, la perturbación $\eta(B, \hat{\rho})$, y las incertidumbres $\sigma(A, \hat{\rho})$, $\sigma(B, \hat{\rho})$, aplicamos la relación de Robertson a todos los términos en el lado izquierdo de la relación de incertidumbre para el ruido y la perturbación universalmente válida, ecuación (5.64), obteniendo así la relación de incertidumbre Ruido-perturbación generalizada. Estipulamos la relación de incertidumbre generalizada para el ruido y la perturbación como sigue:

Para cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y observables \hat{A} y \hat{B} , tenemos la siguiente relación

$$\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho})\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) + \epsilon(\hat{A}, \hat{\rho})\sigma(\hat{B}, \hat{\rho}) + \sigma(\hat{A}, \hat{\rho})\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) \geq \frac{1}{2}|Tr([\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho})|, \quad (5.68)$$

para cualquier estado $\hat{\rho}$.

En una medición canónica del observable \hat{Q} , bajo la restricción de energía finita, es decir, $\sigma(\hat{Q}), \sigma(\hat{P}) < \infty$, la anterior relación excluye la posibilidad de tener ambos, $\epsilon(\hat{Q})$ y $\eta(\hat{P})$, nulos simultáneamente. Sin embargo, $\epsilon(\hat{Q}) = 0$ es posible con $\sigma(\hat{Q})\eta(\hat{P}) \geq \frac{\hbar}{2}$ y permite tener $\eta(\hat{P}) \rightarrow 0$ y $\sigma(\hat{Q}) \rightarrow \infty$, de modo que una pequeña perturbación en el momento es compensada por una gran incertidumbre en la posición inicial. De la ecuación (1.4) implica la posibilidad de una medida de la posición precisa con solo perturbar el momento tanto como la incertidumbre del momento inicial lo permita [35]. La otra opción es $\eta(\hat{P}) = 0$, posible con $\epsilon(\hat{Q})\sigma(\hat{P}) \geq \frac{\hbar}{2}$. La anterior relación incluso permite tener $\epsilon(\hat{Q}) \rightarrow 0$ con $\sigma(\hat{P}) \rightarrow \infty$, en este caso el pequeño error no es compensado por una gran perturbación en el momento pero sí por la gran incertidumbre en el momento inicial. De la ecuación (1.4) significa que sin perturbar el momento, la posición puede medirse con mayor precisión, tanto como nuestro conocimiento inicial de la posición del objeto nos lo permita [35].

En particular, cuando $\epsilon(\hat{Q}) = 0$ y $\eta < \varepsilon$, con ε arbitrariamente pequeño es posible para algún estado de entrada con $\sigma(\hat{Q}) > \frac{\hbar}{2\varepsilon}$, y el caso donde $\eta(\hat{P}) = 0$ y $\epsilon(\hat{Q}) < \varepsilon$ es posible con algún estado de entrada con $\sigma(\hat{P}) > \frac{\hbar}{2\varepsilon}$. Tales casos extremos ocurren en compensación para incertidumbres grandes en el estado de entrada.

Para el caso de mínima incertidumbre, es decir, $\sigma(\hat{Q}) = \sigma(\hat{P}) = (\hbar/2)^{1/2}$, tenemos:

$$\epsilon(\hat{Q})\eta(\hat{P}) + \sqrt{\frac{\hbar}{2}}[\epsilon(\hat{Q}) + \eta(\hat{P})] \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (5.69)$$

Incluso en este caso es posible tener $\epsilon(\hat{Q})\eta(\hat{P}) = 0$ con $\epsilon(\hat{Q}) = 0$ y $\eta(\hat{P}) \geq (\hbar/2)^{1/2}$ o con $\eta(\hat{P}) = 0$ y $\epsilon(\hat{Q}) \geq (\hbar/2)^{1/2}$.

En el caso general, la relación para una medida precisa \hat{A} y una medida sin perturbación \hat{B} se estipula en los siguientes teoremas:

TEOREMA A: Para cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y observables \hat{A} , \hat{B} , si $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ no perturba \hat{B} , es decir, $\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) = 0$, tenemos que:

$$\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho})\sigma(\hat{B}, \hat{\rho}) \geq \frac{1}{2}|Tr([\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho})|, \quad (5.70)$$

para cualquier estado $\hat{\rho}$.

TEOREMA B : Para cualquier aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ y observables \hat{A} , \hat{B} , si $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ mide precisamente \hat{A} , es decir, $\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho}) = 0$, tenemos

$$\sigma(\hat{A}, \hat{\rho})\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) \geq \frac{1}{2}|Tr([\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho})|, \quad (5.71)$$

para cualquier estado $\hat{\rho}$.

De los teoremas anteriores se estipulan de forma general las dos posibles violaciones de la relación de Heisenberg (1.1), denominadas tipos de violación I y II respectivamente [33].

5.6. Relación universalmente válida para medidas conjuntas arbitrarias

Hemos mostrado la expresión general de la relación de incertidumbre para medidas arbitrarias independientes. Ahora mostraremos la expresión general para medidas conjuntas arbitrarias [56], demostrando que la siguiente relación, basada en la estadística [14, 57],

$$\epsilon(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) \geq \frac{|\langle \Psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \Psi \rangle|}{2}, \quad (5.72)$$

no es una expresión general. Para comenzar mostraremos un esquema del proceso de medida y finalmente demostraremos la expresión universalmente válida.

5.6.1. Proceso de medida

Tomamos un sistema cuántico \mathbf{S} descrito por un espacio de Hilbert \mathcal{H} , con dos observables \hat{A} y \hat{B} . Asociamos cualquier medida conjunta de los observables \hat{A} y \hat{B} con un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ que tiene dos variables de salida \mathbf{x} y \mathbf{y} , donde \mathbf{x} mide \hat{A} y \mathbf{y} mide \hat{B} . La prueba, una parte del aparato, tiene dos observables que conmutan \hat{M}_1 y \hat{M}_2 , que son medidos localmente al final de la interacción para obtener el valor de la medida de \mathbf{x} y \mathbf{y} [58, 59, 60, 61].

Asumimos que cada medida conjunta se lleva a cabo en los sistemas individuales a obtener simultáneamente o sucesivamente en el tiempo. Los valores medidos de \hat{A} y \hat{B} están en un estado común justo antes de la medición. Suponemos que \mathbf{x} y \mathbf{y} toman valores finitos.

Como sabemos del Capítulo 3, el aparato de medición está asociado con una familia de operadores probabilidad, cuya descripción estadística se establece por medio del **POVM**,

para la medida conjunta tenemos que:

$$Pr\{\mathbf{x} = x, \mathbf{y} = y | \Psi\} = \langle \Psi | \Pi(x, y) | \Psi \rangle, \quad (5.73)$$

dicha expresión indica la probabilidad conjunta de obtener los resultados $\mathbf{x} = x, \mathbf{y} = y$ en el estado Ψ [28].

La anterior descripción estadística de la medida está asociada con un modelo indirecto de medida $(\mathcal{K}, \xi, \hat{U}, \hat{M}1, \hat{M}2)$ consistente con el espacio de Hilbert \mathcal{K} . Definimos $\hat{C} = \hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}1)\hat{U}$ y $\hat{D} = \hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}2)\hat{U}$, así el operador ruido \hat{N}_A y \hat{N}_B , en la medida de \hat{A} y \hat{B} respectivamente, satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \hat{A} \otimes \hat{I} + \hat{N}_A, \\ \hat{D} &= \hat{B} \otimes \hat{I} + \hat{N}_B. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Debido a que la medida es preparada en el estado inicial ξ , el operador ruido medio para los observables \hat{A} y \hat{B} están dados por:

$$\begin{aligned} n_A &= \langle \xi | \hat{N}_A | \xi \rangle, \\ n_B &= \langle \xi | \hat{N}_B | \xi \rangle. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Recordando la definición de ruido:

$$\epsilon(\hat{A}) = \langle \hat{N}_A^2 \rangle^{\frac{1}{2}}. \quad (5.76)$$

Dado que $[\hat{C}, \hat{D}] = 0$, reemplazando \hat{C} y \hat{D} , tenemos:

$$[\hat{A} \otimes \hat{I} + \hat{N}_A, \hat{B} \otimes \hat{I} + \hat{N}_B] = 0. \quad (5.77)$$

Ahora definiendo:

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{A}} &= \hat{A} \otimes \hat{I}, \\ \tilde{\hat{B}} &= \hat{B} \otimes \hat{I}, \end{aligned} \quad (5.78)$$

Se sigue:

$$[\hat{N}_A, \hat{N}_B] + [\hat{N}_A, \tilde{\hat{B}}] + [\tilde{\hat{A}}, \hat{N}_B] = -[\hat{A}, \hat{B}] \otimes \hat{I}. \quad (5.79)$$

Aplicando los módulos medios y la desigualdad triangular tenemos:

$$|\langle [\hat{N}_A, \hat{N}_B] \rangle| + |\langle [\hat{N}_A, \tilde{\hat{B}}] \rangle| + |\langle [\tilde{\hat{A}}, \hat{N}_B] \rangle| \geq |\langle \Psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \Psi \rangle|. \quad (5.80)$$

De la relación de Robertson:

$$\epsilon(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) \geq \sigma(\hat{N}_A)\sigma(\hat{N}_B) \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{N}_A, \hat{N}_B]\rangle|, \quad (5.81)$$

y por la relación:

$$\langle\hat{N}_A\tilde{\hat{B}}\rangle = \langle\Psi|\langle\xi|\hat{N}_A|\xi\rangle\hat{B}|\Psi\rangle = \langle\Psi|n_A\hat{B}|\Psi\rangle, \quad (5.82)$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \langle[\hat{N}_A, \tilde{\hat{B}}]\rangle &= \langle\Psi|[n_A, \hat{B}]|\Psi\rangle, \\ \langle[\tilde{\hat{A}}, \hat{N}_B]\rangle &= \langle\Psi|[\hat{A}, n_B]|\Psi\rangle. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Aplicando (5.81) y (5.83) en (5.80), obtenemos:

$$\sigma(\hat{N}_A)\sigma(\hat{N}_B) + \frac{1}{2}|\langle\Psi|[n_A, \hat{B}]|\Psi\rangle| + \frac{1}{2}|\langle\Psi|[\hat{A}, n_B]|\Psi\rangle| \geq \frac{1}{2}|\langle\Psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle|. \quad (5.84)$$

La expresión de incertidumbre universalmente válida para medidas conjuntas es entonces:

$$\epsilon(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) + \frac{1}{2}|\langle\Psi|[n_A, \hat{B}]|\Psi\rangle| + \frac{1}{2}|\langle\Psi|[\hat{A}, n_B]|\Psi\rangle| \geq \frac{1}{2}|\langle\Psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle|. \quad (5.85)$$

Con el fin de obtener la relación de los ruidos $\epsilon(\hat{A})$ y $\epsilon(\hat{B})$ y las incertidumbres $\sigma(\hat{A})$ y $\sigma(\hat{B})$, aplicamos la relación de Robertson a cada término de la relación (5.80):

$$\begin{aligned} \epsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) &\geq \sigma(n_A)\sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle[n_A, \hat{B}]\rangle|, \\ \sigma(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) &\geq \sigma(\hat{A})\sigma(n_B) \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, n_B]\rangle|, \end{aligned}$$

obteniendo finalmente:

$$\epsilon(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) + \epsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle\Psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle|. \quad (5.86)$$

Otra manera de obtener la expresión para medidas cuánticas conjuntas generales es tomar la expresión general del principio de incertidumbre para medidas cuánticas arbitrarias, dada por:

$$\epsilon(\hat{A})\eta(\hat{B}) + \epsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\eta(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle\Psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle|, \quad (5.87)$$

y realizar el cambio, $\eta(\hat{B}) = \epsilon(\hat{B})$, obteniendo:

$$\epsilon(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) + \epsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle\Psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle|. \quad (5.88)$$

Para que se cumpla la condición, $\eta(\hat{B}) = \epsilon(\hat{B})$, se debe tener que :

$$\langle (\hat{B}^{out} - \hat{B}^{in})^2 \rangle^{1/2} = \langle (\hat{M}_B^{out} - \hat{B}^{in})^2 \rangle^{1/2}, \quad (5.89)$$

lo que requiere:

$$\hat{B}^{out} = \hat{M}_B^{out}. \quad (5.90)$$

Esto es cierto si el observable \hat{B} es medido precisamente es decir que el valor de salida del observable \hat{B} , sea igual al valor del observable \hat{M} de la prueba. Para describir lo anterior, mostramos el proceso de medida como sigue: Tenemos un sistema \mathbf{S} , donde se encuentran los observables \hat{A} y \hat{B} . El aparato de medición es representado por el sistema \mathbf{P} , donde se encuentran los observables \hat{M}_A y \hat{M}_B , los cuales tienen las variables de salida \mathbf{x} y \mathbf{y} .

Los dos sistemas interactúan en el tiempo t y $t + \Delta t$, el sistema compuesto $\mathbf{S}+\mathbf{P}$, está representado por:

$$\begin{aligned} \hat{A}^{in} &= \hat{A} \otimes \hat{I}, \\ \hat{A}^{out} &= \hat{U}^\dagger (\hat{A} \otimes \hat{I}) \hat{U}, \\ \hat{B}^{in} &= \hat{B} \otimes \hat{I}, \\ \hat{B}^{out} &= \hat{U}^\dagger (\hat{B} \otimes \hat{I}) \hat{U}, \\ \hat{M}_A^{in} &= \hat{I} \otimes \hat{M}_A, \\ \hat{M}_A^{out} &= \hat{U}^\dagger (\hat{I} \otimes \hat{M}_A) \hat{U}, \\ \hat{M}_B^{in} &= \hat{I} \otimes \hat{M}_B, \\ \hat{M}_B^{out} &= \hat{U}^\dagger (\hat{I} \otimes \hat{M}_B) \hat{U}. \end{aligned}$$

Después separamos los dos sistemas. La prueba \mathbf{P} se somete a una medición precisa, donde se miden los observables \hat{M}_A y \hat{M}_B . Para el observable \hat{B} , la medida precisa está expresada como:

$$\begin{aligned} \hat{B}^{out} &= \hat{M}_B^{out}, \\ \hat{U}^\dagger (\hat{B} \otimes \hat{I}) \hat{U} &= \hat{U}^\dagger (\hat{I} \otimes \hat{M}_B) \hat{U}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

En conclusión, tenemos que el requerimiento para poder relacionar la relación general de medidas arbitrarias y la relación para medidas conjuntas arbitrarias es $\epsilon(\hat{B}) = \eta(\hat{B})$, el cual se cumple si el observable \hat{B} es medido precisamente.

Además, en [24] se muestra que el ruido de un observable \hat{A} y la perturbación para otro observable \hat{B} en una medición con una sola salida, usando un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, puede ser identificado con los dos ruidos de \hat{A} y \hat{B} en una medida conjunta de estos observables,

usando un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Obtenida por la medida sucesiva, que consiste en una medición usando el aparato $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ e inmediatamente una medida precisa del observable \hat{B} , usando un aparato $\mathbf{A}(\mathbf{y})$. De esta manera obtienen las relaciones de ruido y perturbación previamente establecidas.

La relación para medidas conjuntas arbitrarias (5.86), tiene varias características, como las siguientes: si es una medida precisa tenemos que $\epsilon(\hat{A}) = 0$ y la anterior desigualdad queda convertida en:

$$\sigma(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|, \quad (5.92)$$

y si el ruido es de intervención independiente es decir:

$$\begin{aligned} n_A &= rI, \\ n_B &= r'I, \\ [n_A, \hat{B}] &= [\hat{A}, n_B] = 0. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Lo anterior conlleva a (2.1)

$$\epsilon(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) \geq \sigma\hat{N}_A\sigma\hat{N}_B \geq \frac{1}{2}|\langle\Psi|[\hat{A}, \hat{B}]\Psi\rangle|, \quad (5.94)$$

cumpléndose la desigualdad de Heisenberg.

En este capítulo hemos obtenido las formulaciones generales (5.64) y (5.85) que acotan todas las posibles medidas cuánticas generales individuales y conjuntas, también hemos logrado relacionar estas dos relaciones mediante la condición $\eta(\hat{B}) = \epsilon(\hat{B})$. Además hemos establecido las condiciones y limitaciones que rigen la relación de Heisenberg para ambos tipos de medidas.

Capítulo 6

DEMOSTRACIÓN EXPERIMENTAL

6.1. Introducción

Con el fin de comprobar experimentalmente la expresión universal obtenida por Osawa, se muestra un experimento óptico propuesto e implementado por [62]. El método que registra el error de una medida de la componente del espín en un haz de neutrones, así como la perturbación causada en otra componente del espín. Los resultados confirman que ambos, tanto el error como la perturbación, obedecen a la nueva relación de incertidumbre propuesta y viola la antigua expresión para un rango amplio del parámetro experimental [63].

6.2. Método

Según la relación de incertidumbre universalmente válida, cualquier aparato \mathbf{M} es en principio modelado por un operador unitario \hat{U} que describe la evolución temporal del sistema, compuesto por \mathbf{S} y el sistema de prueba \mathbf{P} . Si el estado inicial del objeto y el aparato es $|\Psi\rangle$ y $|\xi\rangle$ respectivamente, el error $\epsilon(\hat{A})$ de \mathbf{M} para medir el observable \hat{A} de \mathbf{S} y la perturbación $\eta(\hat{B})$ de \mathbf{M} causada en un observable \hat{B} de \mathbf{S} son definidas por las ecuaciones (4.3) y (4.31) que en este caso toman la forma:

$$\epsilon(\hat{A}) = \|\hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M})\hat{U} - \hat{A} \otimes \hat{I}\|\Psi\|\xi\|, \tag{6.1}$$

$$\eta(\hat{B}) = \|\hat{U}^\dagger(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U} - \hat{B} \otimes \hat{I}\|\Psi\|\xi\|.$$

Suponemos que el aparato \mathbf{M} tiene una familia $\{\hat{M}_m\}$ de operadores de medida, esto significa que el aparato de medición \mathbf{M} tiene posibles salidas m con probabilidad $P(m) = \|\hat{M}_m|\Psi\rangle\|^2$ y es estado de \mathbf{S} después de la medición con salida m es $\frac{\hat{M}_m|\Psi\rangle}{\|\hat{M}_m|\Psi\rangle}$. En este caso el ruido y la perturbación están dados por:

$$\epsilon(\hat{A})^2 = \sum_m \|\hat{M}_m(m - A)|\Psi\rangle\|^2, \quad (6.2)$$

$$\eta(\hat{B})^2 = \sum_m \|\hat{M}_m|\hat{B}|\Psi\rangle\|^2. \quad (6.3)$$

Si $\{\hat{M}_m\}$ consta de proyecciones ortogonales, las medidas son llamadas medidas proyectivas. En este caso (6.2) puede ser simplificada $\epsilon(\hat{A}) = \|(O_A - A)|\Psi\rangle\|$, por el teorema de Pitágoras, donde $O_A = \sum_m m\hat{M}_m$ es llamado el operador de salida.

6.2.1. Determinación teórica del error y perturbación en medidas de espín

En el experimento, se pone a prueba la relación de incertidumbre universalmente válida (5.68), con los observables $\hat{A} = \sigma_x$ y $\hat{B} = \sigma_y$, donde el estado inicial $|\Psi\rangle$ es $|+Z\rangle$ y el aparato de medida $\mathbf{M} = \mathbf{M1}$ es considerado para llevar a cabo medidas proyectivas de $O_A = \sigma_\phi = \cos\phi\sigma_x + \sin\phi\sigma_y$. Por lo tanto el aparato $\mathbf{M1}$ es descrito por los operadores de medida:

$$E^\phi(+1) = (1 + \sigma_\phi)/2, \quad y \quad (6.4)$$

$$E^\phi(-1) = (1 - \sigma_\phi)/2$$

con $O_A = \sum_{x=\pm 1} xE^\phi(x)$, de las ecuaciones (6.2) y (6.3) tenemos:

$$\epsilon(\hat{A}) = \|(\sigma_\phi - \sigma_x)|\Psi\rangle\| = 2\sin\frac{\phi}{2}, \quad (6.5)$$

$$\eta(\hat{B}) = \sqrt{2}\|[\sigma_\phi/2, \sigma_y]|\Psi\rangle\| = \sqrt{2}\cos\phi.$$

6.2.2. Determinación experimental del error y perturbación en medidas de espín

En el experimento, se determina $\epsilon(\hat{A})$ y $\eta(\hat{B})$ a partir de los datos obtenidos estadísticamente por medidas sucesivas de la medida del espín del neutrón. Según el análisis teórico

[29], el error $\epsilon(\hat{A})$ es determinado por los valores medidos de O_A en tres diferentes estados, se formula como sigue:

$$\begin{aligned}\epsilon(\hat{A})^2 &= \langle \Psi | \hat{A}^2 | \Psi \rangle + \langle \Psi | O_A^2 | \Psi \rangle + \langle \Psi | O_A | \Psi \rangle + \langle \Psi | \hat{A} O_A \hat{A} | \Psi \rangle - \langle \Psi | (\hat{A} + \hat{I}) O_A (\hat{A} + \hat{I}) | \Psi \rangle \\ &= 2 + \langle \Psi | O_A | \Psi \rangle + \langle \hat{A} \Psi | O_A | \hat{A} \Psi \rangle - \langle (\hat{A} + \hat{I}) \Psi | O_A | (\hat{A} + \hat{I}) \Psi \rangle,\end{aligned}\quad (6.6)$$

donde se han usado las siguientes abreviaciones: $|\hat{A}\Psi\rangle = \hat{A}|\Psi\rangle$ y $|(\hat{A} + \hat{I})\Psi\rangle = (\hat{A} + \hat{I})|\Psi\rangle$. Como el aparato **M1** lleva a cabo la medición proyectiva de O_A , para determinar $\epsilon(\hat{A})$ del estado inicial $|\Psi\rangle$, necesitamos solamente medir las intensidades del aparato **M1**, en los tres estados incidentes auxiliares de **M1** correspondiente a $|\Psi\rangle$, $\hat{A}|\Psi\rangle$, $(\hat{A} + \hat{I})|\Psi\rangle$.

Los valores esperados expresados en la ecuación (6.6), son estimados a partir de las intensidades, usando:

$$\langle \Psi | O_A | \Psi \rangle = \frac{(I_{++} + I_{+-}) - (I_{-+} + I_{--})}{I_{++} + I_{+-} + I_{-+} + I_{--}}.\quad (6.7)$$

Donde I_{++} simboliza la intensidad del haz respectivo a la medición $++$, I_{+-} representa la intensidad del haz cuando la medición tiene como resultado $+-$, I_{-+} simboliza la intensidad del haz correspondiente a la medición $-+$ y I_{--} representa la intensidad del haz respectivo a la medición $--$. Para detectar la perturbación de \hat{B} causada por el aparato **M1**, el aparato **M2** lleva a cabo medidas proyectivas de \hat{B} en el estado justo después de la medida de **M1**, se modifican los operadores de salida del aparato **M2** para un estado inicial de **M1** dados como:

$$O_B = \sum_x E^\phi(x) \hat{B} E^\phi(x),\quad (6.8)$$

$$O_B^{(2)} = \sum_x E^\phi(x) \hat{B}^2 E^\phi(x),$$

que describe la medida y el segundo momento de la medida de **M2** para el estado inicial de **M1**. De las ecuaciones (189) y (227) del artículo [29], la perturbación $\eta(\hat{B})$ es también determinada por los valores esperados de O_B en tres diferentes estados, como:

$$\begin{aligned}\eta(\hat{B})^2 &= \langle \Psi | \hat{B}^2 | \Psi \rangle + \langle \Psi | O_B^{(2)} | \Psi \rangle + \langle \Psi | O_B | \Psi \rangle + \langle \hat{B} \Psi | O_B | \hat{B} \Psi \rangle - \langle (\hat{B} + \hat{I}) \Psi | O_B | (\hat{B} + \hat{I}) \Psi \rangle \\ &= 2 + \langle \Psi | O_B | \Psi \rangle + \langle \hat{B} \Psi | O_B | \hat{B} \Psi \rangle - \langle (\hat{B} + \hat{I}) \Psi | O_B | (\hat{B} + \hat{I}) \Psi \rangle,\end{aligned}\quad (6.9)$$

donde las nociones $|\hat{B}\Psi\rangle$ y $|(\hat{B} + \hat{I})\Psi\rangle$, son usadas como antes y los valores esperados están dados como:

$$\langle \Psi | O_B | \Psi \rangle = \frac{(I_{++} + I_{-+}) - (I_{+-} + I_{--})}{I_{++} + I_{+-} + I_{-+} + I_{--}},\quad (6.10)$$

por lo tanto $\eta(\hat{B})$ es determinado de la misma manera como $\epsilon(\hat{A})$. De las relaciones $|\Psi\rangle = | +z\rangle$, $\hat{A}|\Psi\rangle = | -z\rangle$, $\hat{B}|\Psi\rangle = i| -z\rangle$, $(\hat{A} + \hat{I})|\Psi\rangle = \sqrt{2}| +x\rangle$, y $(\hat{B} + \hat{I})|\Psi\rangle = \sqrt{2}| +y\rangle$,¹ los estados requeridos por las expresiones (6.6) y (6.9) son generados por la configuración de las bobinas en el experimento.

6.2.3. Preparación del estado y medidas sucesivas de espín en neutrones

Mediante el uso del espejo polarizador, el haz de neutrones monocromático entrante es altamente polarizado en la dirección $+z$. El estado del neutrón es controlado por cuatro bobinas, la primera de ellas produce un campo magnético en la dirección x , (Bx), que puede ser usado para rotar el vector inicial alrededor del eje x [10]. Los estados iniciales puede ser preparados, mediante la precesión de Larmor alrededor del eje $+z$, inducida por el campo guía estático (presente en todo el bosquejo) y variando la posición de la primera bobina.

La medida proyectiva del observable O_A es realizada por mecanismos similares, se prepara el estado girando alrededor del eje z . Dicho giro es debido a la precesión de Larmor y mediante la ubicación de la segunda bobina, la componente del espín medido se puede proyectar hacia la dirección $+z$, donde se refleja por un analizador (analizador-1). Después de pasar a través del primer analizador en el estado $|Z\rangle$, la tercera bobina produce el autoestado $|\pm\phi\rangle = E^\phi(\pm 1)|\Psi\rangle$ de σ_ϕ , de manera que el aparato **M1** hace una medida proyectiva de O_A en (6.6). De la misma manera el aparato **M2** hace la medida del observable \hat{B} en el autoestado $|\pm\phi\rangle$ que detecta la perturbación en el observable \hat{B} . Aquí se obtienen los valores medios de O_B en (6.9) del aparato **M2**. La combinación de las medidas proyectivas de σ_ϕ y σ_y dan cuatro ratas en el detector de neutrones.

Se debe tener en cuenta que la medida realizada por el aparato **M2** es libre de error y \hat{B} es medido en el estado justo después de la medición llevada por **M1**.

6.3. Montaje experimental

Para corroborar la relación universalmente válida para las medidas de espín en un neutrón. Se toman los observables \hat{A} y \hat{B} como la componente x y y del espín del neutrón (por simplicidad $\hbar/2$ es omitida para componente del espín). El error $\epsilon(\hat{A})$ y la perturbación $\eta(\hat{B})$ son definidas por un aparato **M1**, de tal manera que **M1** mide el observable

¹ Recordemos $| +x\rangle = (| +z\rangle + | -z\rangle)/\sqrt{2}$ y $| +y\rangle = (| +z\rangle + i| -z\rangle)/\sqrt{2}$.

$\hat{A} = \sigma_x$ con error $\epsilon(\hat{A})$ y $\hat{B} = \sigma_y$ con perturbación $\eta(\hat{B})$, durante la medida, donde σ_x y σ_y denotan las matrices de Pauli.

Para controlar el error y la perturbación, el aparato **M1** está diseñado para llevar a cabo medidas proyectivas de $O_A = \sigma_\phi = \sigma_x \cos\phi + \sigma_y \sin\phi$ en lugar de la medida exacta $\hat{A} = \sigma_x$, con un ángulo azimutal de desfase ϕ , de σ_ϕ que varía entre 0 y $\pi/2$, el cual es un parámetro controlado experimentalmente, por lo tanto $\epsilon(\hat{A})$ y $\eta(\hat{B})$ son determinados como función de ϕ . Como el operador de salida O_A y el observable \hat{A} no son medidas simultáneas, su diferencia es una cantidad no detectable directamente y tampoco el cambio del observable \hat{B} . En este sentido las nociones de error y perturbación han sido denominadas experimentalmente inaccesibles.

Para superar esta dificultad, se usa el método propuesto anteriormente, determinando el error y la perturbación a partir de datos experimentales disponibles.

En este experimento, un haz de neutrones pasa por una etapa de preparación generando un estado Ψ , el error $\epsilon(\hat{A})$ es determinado por los datos obtenidos del aparato **M1** y la perturbación $\eta(\hat{B})$ es determinada por los datos de otro aparato que denominado **M2**, que lleva a cabo medidas proyectivas de \hat{B} en el estado justo después de la medida de **M1**. Por lo tanto el experimento es basado en las medidas proyectivas sucesivas de dos observables no conmutativos O_A en **M1** y \hat{B} en **M2**, descritos en la figura 6.1.

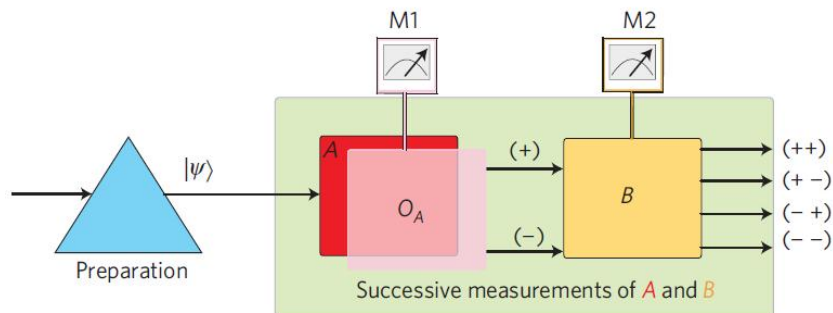


FIGURA 6.1: **Concepto del experimento.** Esquema de medidas sucesivas de los observables \hat{A} y \hat{B} para demostrar la relación de incertidumbre generalizada. Después de preparar el estado inicial Ψ , el aparato **M1** se utiliza para medir un observable \hat{A} . Este aparato hace una medida proyectiva de O_A en lugar de \hat{A} para poder controlar experimentalmente el ruido y la perturbación. La perturbación $\eta(\hat{B})$ en el observable \hat{B} es causada por la medida realizada por **M1** que proyecta al azar el estado, en uno de los autoestados de O_A , y es cualificada usando la medida de \hat{B} llevada a cabo por el aparato **M2**. Las medidas sucesivas de O_A y \hat{B} resultan en cuatro posibles resultados denotados por $(++)$, $(+-)$, $(-+)$ y $(--)$, de las cuales se determinan cualitativamente el error $\epsilon(\hat{A})$ y la perturbación $\eta(\hat{B})$

[62].

El aparato **M1** tiene dos posibles salidas, que son $+1$ y -1 , correspondiente a los operadores de medida $E^\phi(\pm) = (1/2)(I \pm \sigma_\phi)$. El aparato **M2** también reproduce $+1$ o -1 correspondiente a los operadores de medida $E^y(\pm) = (1/2)(I \pm \sigma_y)$, por lo tanto

las medidas sucesivas llevadas a cabo por **M1** y **M2** tienen como resultado cuatro intensidades que se denotan como $(++)$, $(+-)$, $(-+)$ y $(--)$, el esquema del experimento se muestra en la figura 6.2.

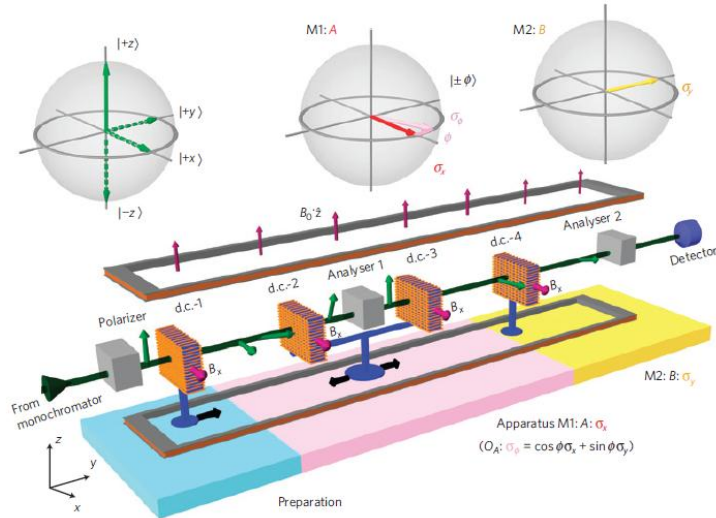


FIGURA 6.2: **Figura del aparato experimental.** El diseño experimental consta de tres etapas: Preparación (región azul), aparato **M1** hace la medida del observable $O_A = \sigma_\phi$ (región roja) y aparato **M2** lleva a cabo la medida del observable $\hat{B} = \sigma_y$ (región amarilla). Un haz monocromático de neutrones es polarizado en dirección $+z$ pasando a través de un haz polarizador de espín, debido a la combinación de 4 bobinas de corriente continua, el campo magnético guía B_O y el analizador, las medidas sucesivas de σ_ϕ y σ_y son hechas para los estados requeridos de acuerdo al método. El error $\epsilon(\hat{A})$ y la perturbación $\eta(\hat{B})$, así como las desviaciones estándar de $\sigma(\hat{A})$ y $\sigma(\hat{B})$, se determinan a través de los valores esperados de las medidas sucesivas

[62].

A partir de la ecuación (6.6) y (6.9), el error $\epsilon(\hat{A})$ y la perturbación $\eta(\hat{B})$ para el estado $|\Psi\rangle = |+z\rangle$ son obtenidas por las medidas sucesivas de O_A y \hat{B} en el estado $|+z\rangle$, $|+x\rangle$ y $|+y\rangle$. Para detalles técnicos dirigirse a [62].

Para probar la relación de Heisenberg universalmente válida (5.68), las desviaciones estándar $\sigma(\hat{A})$ y $\sigma(\hat{B})$ son llevadas a cabo por **M1** y **M2** separadamente, mientras que el error $\epsilon(\hat{A})$ y la perturbación $\eta(\hat{B})$ son determinadas por medidas proyectivas sucesivas usando **M1** y **M2**.

La relación entre el error y la perturbación concuerdan con la teoría, cuando un observable es medido muy precisamente, la perturbación del otro es muy grande. Los valores esperados calculados son normalizados debido a la limitación de la eficiencia del aparato, de manera que los valores esperados toman un valor de ± 1 . Los errores son calculados usando propagación de error de la desviación estándar de las cantidades de ratas, y teniendo en cuenta la inexactitud de los ángulos de precesión de Lamor. Este último se deriva principalmente de la falta de homogeneidad del campo guía a lo largo del haz.

De los términos obtenidos anteriormente $\epsilon(\hat{A})$, $\eta(\hat{B})$, $\sigma(\hat{A})$ y $\sigma(\hat{B})$, el producto $\epsilon(\hat{A})\eta(\hat{B})$ y la expresión universalmente válida $\epsilon(\hat{A})\eta(\hat{B}) + \epsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\eta(\hat{B})$, son graficados como función del ángulo azimutal en la figura 6.3. Esta figura muestra el hecho que el producto de Heisenberg es siempre menor que el límite en un amplio rango de ϕ .

La invalidez del límite de Heisenberg utilizando medidas proyectivas se discute en [33]. De hecho las medidas proyectivas de \hat{A} y \hat{B} pueden lograr ser $\epsilon(\hat{A}) = 0$ y $\eta(\hat{B}) = 0$ respectivamente, mientras se tiene $0 \leq \eta(\hat{B}), \epsilon(\hat{A}) \leq 2$ para cualquier medida. Por lo tanto, al menos alguna región en estos puntos ($\phi = 0$ y $\phi = \pi/2$) se espera que exhiba la violación de la relación de Heisenberg.

Vale la pena señalar que los valores medios del observable \hat{A} se producen correctamente para cualquier ángulo ϕ , es decir $\langle +z|O_A|+z \rangle = \langle +z|A|+z \rangle$ de modo que la medición proyectiva O_A reproduce correctamente la distribución de probabilidad de \hat{A} , mientras se puede detectar error no nulo $\epsilon(\hat{A})$ para $\phi \neq 0$.

Los resultados muestran que la nueva relación de incertidumbre soluciona un gran problema en la discusión de la relación entre precisión y perturbación, y arroja luz sobre las limitaciones fundamentales de mediciones cuánticas, como el debate del límite cuántico estándar.

Otra manera de realizar la verificación experimental es mediante mediciones débiles que buscan representar el sistema cuántico antes y después de la interacción con un aparato de medición, para obtener la caracterización directa del ruido y la perturbación [64]. En este experimento implementa una propuesta hecha por Lund y Wiseman en 2010 [65], donde el sistema y la prueba pueden enredarse a través de la interacción, perturbando el sistema de tal manera que la prueba lleva información acerca del estado del sistema.

De la definición de perturbación, se puede obtener una estimación realizando una medición débil antes del aparato, después se hace una interacción fuerte entre el sistema y el aparato y finalmente se hace otra medida débil. Mientras que la precisión se puede obtener midiendo el sistema débilmente antes de la interacción luego, la interacción entre la prueba y el sistema, y finalmente se hace la interacción con la prueba. Lund y Wiseman muestran que estas diferencias pueden ser obtenidas directamente de las mediciones débiles en el sistema antes y después de la medida proyectiva en la prueba.

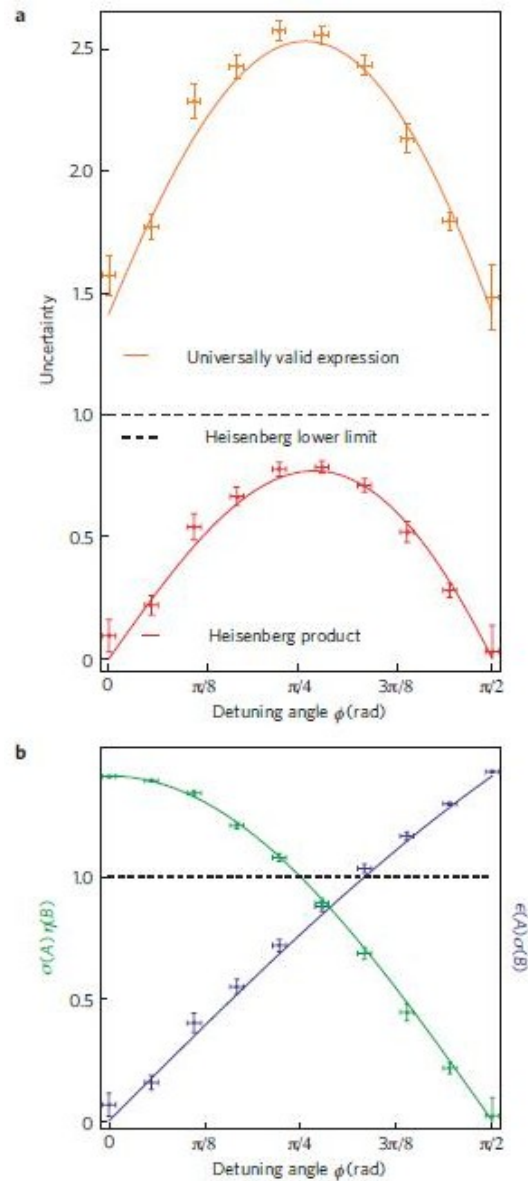


FIGURA 6.3: Valores determinados experimentalmente de la relación de incertidumbre universalmente válida. (a) Grafica de la expresión de Osawa y la relación de incertidumbre de Heisenberg en función del ángulo azimutal, incluyendo las predicciones teóricas. El producto de Heisenberg es siempre menor que el límite calculado $(1/2)|\langle\Psi|[\hat{A}, \hat{B}]\Psi\rangle| = 1$ (líneas de puntos). Por el contrario la expresión universal es siempre válida (mayor al límite). (b) Grafica de los dos términos adicionales $\epsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B})$ (línea verde) + $\sigma(\hat{A})\eta(\hat{B})$ (línea azul) en la expresión de Osawa junto con las predicciones teóricas [62].

Capítulo 7

CONCLUSIONES

En este trabajo se mostró que las relaciones de incertidumbre establecidas por las expresiones (1.2), (1.3) y (1.5), no se pueden considerar como expresiones generales, por varias razones. Una de ellas es que a pesar de que la relación (1.3) es una expresión matemáticamente válida, solo da información acerca de la preparación del estado más no de la exactitud, ni la medición simultánea de los observables canónicos. Debido a esto Heisenberg establece la relación de incertidumbre en función de la precisión y la perturbación de la medida dada en (1.2) [6, 7], pero dicha expresión no acota todas las posibles medidas cuánticas. Además, no se ha podido demostrar la expresión (1.2) para medidas cuánticas generales ni siquiera aplicando (1.3). Otro de los problemas es que “el poder de resolución” del microscopio de rayos gamma utilizado en el experimento mental de Heisenberg, no puede ser identificado con la desviación estándar, por ejemplo, de la posición de la masa en el estado a medir. Entonces (1.3), no puede ser considerada como una expresión formal de la ecuación (1.2). Además, la condición de insesgamiento para relacionar (1.2) con (1.5) no siempre se garantiza [35].

Por lo anterior es necesario establecer una expresión universal, válida para todas las medidas cuánticas. Dicha relación es demostrada en el presente trabajo, revisando el método propuesto por Osawa [28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35].

Para dicho propósito se comenzó con un repaso de los conceptos básicos de mecánica cuántica, la matriz densidad y los postulados de Von Neumann [25], también se mostraron las relaciones de incertidumbre existentes.

Posteriormente establecemos las condiciones que rigen las medidas cuánticas arbitrarias, haciendo un tratamiento de la mecánica cuántica como una teoría estadística, Además, mostramos los requerimientos estadísticos que un aparato de medida debe cumplir y

probamos que cada aparato que obedece estas propiedades es estadísticamente equivalente a un aparato descrito por un modelo indirecto de medida.

Con esto, en el capítulo cuarto formalizamos las nociones de ruido y perturbación para el modelo indirecto de medida, definiendo el ruido como la raíz cuadrática media de la diferencia entre el valor real y el valor medido, también mostramos que la diferencia de la desviación estándar del observable medido y el valor medido está acotado por el ruido más el sesgo (la diferencia entre sus valores medios) de la medida (2.8). En cuanto a la perturbación la definimos como la raíz cuadrática media de la diferencia del observable perturbado antes y después del proceso de medida. La noción de un aparato con perturbación cero es igual a un aparato sin perturbación, por lo tanto un aparato que no perturba debe dejar invariante la distribución de probabilidad del observable, expresión (4.28). Notamos que las nociones de ruido y perturbación son determinadas independiente del modelo. De esta manera se muestra que todas las expresiones obtenidas para los aparatos con modelo indirecto de medida, son universales para todos los aparatos que sean independientes del modelo que lo describe.

Así, los modelos indirectos de medida, en principio introducidos por Neumann [25] y generalizados formalmente por Osawa [27, 28], son una poderosa herramienta para estudiar procesos de medida, ya que se describe la interacción entre el sistema y el aparato mediante la mecánica cuántica. Además el modelo indirecto de medida está relacionada con la parte macroscópica del aparato, el cual nos brinda el resultado de la medición.

Posteriormente, establecimos rigurosamente el argumento de Heisenberg, considerando dos condiciones implícitas que limitan la clase de medidas para las que se cumple. Además se expusieron dos tipos distintos de medidas en las cuales la desigualdad de Heisenberg es violada dados por $\epsilon(\hat{A}) = 0$ o $\eta(\hat{B}) = 0$, generalizadas en los teoremas (5.70) y (5.71) respectivamente.

Mostramos un modelo de medida donde $\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho}) = 0$, que surgió de la controversia sobre el límite de la sensibilidad de los detectores de ondas gravitacionales, donde se muestra que el llamado límite cuántico estándar (**SQL**) no es una noción universal. En dichos modelos se muestran las posibilidades de obtener esquemas de medidas que violen el límite de la relación de Heisenberg, debido a estas limitaciones es necesario establecer una expresión general que acote todas las medidas cuánticas generales.

Las relaciones universalmente válidas para medidas cuánticas generales están descritas por las siguientes expresiones:

$$\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho})\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) + \frac{1}{2}|\langle[\hat{N}(\hat{A}), \hat{B}^{in}]\rangle + \langle[\hat{A}^{in}, \hat{D}(\hat{B})]\rangle| \geq \frac{1}{2}|Tr([\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho})|, \quad (7.1)$$

que podemos establecer en función del ruido, la perturbación y las desviaciones estándar, obteniendo:

$$\epsilon(\hat{A}, \hat{\rho})\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) + \epsilon(\hat{A}, \hat{\rho})\sigma(\hat{B}, \hat{\rho}) + \sigma(\hat{A}, \hat{\rho})\eta(\hat{B}, \hat{\rho}) \geq \frac{1}{2}|Tr([\hat{A}, \hat{B}]\hat{\rho})|. \quad (7.2)$$

Estas relaciones demuestran que el límite de Heisenberg para el producto del ruido y la perturbación es válido para medidas con intervención independiente, es decir que el operador que representa el ruido conmute con el observable perturbado en la medición, $[\hat{N}(\hat{A}), \hat{B}^{in}] = 0$ y el operador que representa la perturbación conmute con el observable que se mide, $[\hat{A}^{in}, \hat{D}(\hat{B})] = 0$ o que el operador ruido y perturbación esten en sistemas independientes del objeto de medida.

Además, estas expresiones generales excluyen la posibilidad de tener $\epsilon(\hat{A})$ y $\eta(\hat{B})$ nulos simultáneamente, pero permiten tener modelos de medida extremos como $\epsilon(\hat{Q}) = 0$, $\eta(\hat{P}) \rightarrow 0$ o $\sigma(\hat{Q}) \rightarrow \infty$, y $\eta(\hat{P}) = 0$, $\epsilon(\hat{Q}) \rightarrow 0$ con $\sigma(\hat{P}) \rightarrow \infty$. Estos casos límites ocurren en compensación de grandes incertidumbres.

También se logró relacionar “el poder de resolución” del microscopio de rayos gamma como la coincidencia con el error experimental en el estado antes de la medida, hasta un factor constante. De manera que la teoría concluye que el poder de resolución y la perturbación, por ejemplo en el momento, está acotada inferiormente por un límite dado por la constante de Planck y el factor constante.

Además, demostrarnos la relación universalmente válida para medidas cuánticas conjuntas arbitrarias expresada de la siguiente manera:

$$\epsilon(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) + \frac{1}{2}|\langle \Psi|[n_A, \hat{B}]|\Psi \rangle| + \frac{1}{2}|\langle \Psi|[\hat{A}, n_B]|\Psi \rangle| \geq \frac{1}{2}|\langle \Psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi \rangle|, \quad (7.3)$$

con n_A y n_B los operadores de ruido medio de los observables \hat{A} y \hat{B} respectivamente.

Cuya relación general es :

$$\epsilon(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) + \epsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle \Psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi \rangle|. \quad (7.4)$$

Si un aparato es estadísticamente independiente para los ruidos de \hat{A} y \hat{B} , tenemos que $\langle \Psi|[n_A, \hat{B}]|\Psi \rangle = \langle \Psi|[\hat{A}, n_B]|\Psi \rangle = 0$, y nos reducimos a la expresión de Heisenberg.

$$\epsilon(\hat{A})\epsilon(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle \Psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi \rangle|. \quad (7.5)$$

En la relación de Heisenberg una medida precisa de un observable ($\epsilon(\hat{X})$), excluye la medida del otro observable no conmutativo incluso con cualquier ruido finito. Sin embargo,

de la relación universal es posible tener $\epsilon(\hat{A}) = 0$, obteniendo

$$\epsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle\Psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\Psi\rangle|, \quad (7.6)$$

lo anterior sugiere la posibilidad de poder superar la limitación de Heisenberg, cuando uno de los ruidos no es estadísticamente independiente.

Se puede relacionar la expresión general para medidas cuánticas arbitrarias (7.2) con la de medidas conjuntas (7.4), si $\eta(\hat{B}) = \epsilon(\hat{B})$, para que lo anterior se cumpla es necesario que el observable \hat{B} sea medido precisamente, como se discutió en el final del capítulo 5.

Finalmente, en el capítulo 6 se muestran dos modelos experimentales que corroboran la validez de la nueva expresión obtenida por Osawa, además se observa que la relación de Heisenberg siempre se viola en un amplio rango experimental. Ambos determinan que los resultados experimentales están de acuerdo con los modelos teóricos, concluyendo así con el establecimiento de esta nueva relación.

El límite cuántico, es la restricción que impone la mecánica cuántica sobre la imposibilidad de medir con precisión, un sistema cuántico y se deriva del principio de incertidumbre de Heisenberg. Por lo tanto la relación general obtenida en este trabajo no solo trae una visión sobre las limitaciones fundamentales en las medidas establecidas por la mecánica cuántica, sino también un avance en la tecnología de la medida de la precisión, mejorando técnicas y métodos para potenciar la sensibilidad de los aparatos, como los detectores de ondas gravitacionales, los interferómetros en los cuales se basan los relojes atómicos, los que se usan en las prospecciones geológicas, la navegación por satélite y el diagnóstico por imagen en medicina [66, 67].

Además, habría un avance en el procesamiento de información, cuántica, por ejemplo, en la criptografía cuántica donde se utiliza el principio de incertidumbre de Heisenberg para establecer la seguridad de la información [68, 69].

Bibliografía

- [1] M. Born, *The statistical interpretation of quantum mechanics, Nobel Lecture* **11** (1954) 1942–1962.
- [2] M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan, *On quantum mechanics ii, Z. Phys* **35** (1926), no. 8-9 557–615.
- [3] E. Schrödinger, *Der stetige übergang von der mikro-zur makromechanik, Naturwissenschaften* **14** (1926), no. 28 664–666.
- [4] E. Schrödinger, *Über das verhältnis der heisenberg-born-jordanschen quantenmechanik zu der meinem, Annalen der Physik* **384** (1926), no. 8 734–756.
- [5] C. Cohen-Trannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum mechanics. volume i, .*
- [6] W. Heisenberg, *The physical principles of the quantum theory.* Courier Dover Publications, 2013.
- [7] W. Heisenberg, *Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik, Zeitschrift für Physik* **43** (1927), no. 3-4 172–198.
- [8] C. Mataix, A. R. Rodríguez, and A. Rivadulla, *Física cuántica y realidad*, vol. 18. Editorial Complutense, 2002.
- [9] L. De Broglie, *Recherches sur la théorie des quanta.* PhD thesis, Migration-université en cours d’affectation, 1924.
- [10] J. Sakurai and J. Napolitano, *Modern Quantum Mechanics.* Pearson Education, 2014.
- [11] E. Kennard, *Zur quantenmechanik einfacher bewegungstypen, Zeitschrift für Physik* **44** (1927), no. 4-5 326–352.
- [12] H. P. Robertson, *The uncertainty principle, Physical Review* **34** (1929), no. 1 163.
- [13] L. E. Ballentine, *The statistical interpretation of quantum mechanics, Reviews of Modern Physics* **42** (1970), no. 4 358.

- [14] A. Peres, *Separability criterion for density matrices*, *Physical Review Letters* **77** (1996), no. 8 1413.
- [15] H. P. Yuen, *Generalized quantum measurements and approximate simultaneous measurements of noncommuting observables*, *Physics Letters A* **91** (1982), no. 3 101–104.
- [16] E. Arthurs and J. Kelly, *Bstj briefs: On the simultaneous measurement of a pair of conjugate observables*, *Bell System Technical Journal, The* **44** (1965), no. 4 725–729.
- [17] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Physical review* **47** (1935), no. 10 777.
- [18] M. Ozawa, *Position measuring interactions and the heisenberg uncertainty principle*, *Physics Letters A* **299** (2002), no. 1 1–7.
- [19] J. Hilgevoord and J. Uffink, *A new view on the uncertainty principle*, in *Sixty-two years of uncertainty*, pp. 121–137. Springer, 1990.
- [20] H. Martens and W. M. De Muynck, *The inaccuracy principle*, *Foundations of physics* **20** (1990), no. 4 357–380.
- [21] S. Ishikawa, *Uncertainty relations in simultaneous measurements for arbitrary observables*, *Reports on mathematical physics* **29** (1991), no. 3 257–273.
- [22] M. Ozawa, *Controlling quantum state reductions*, *Physics Letters A* **282** (2001), no. 6 336–342.
- [23] D. Appleby, *Concept of experimental accuracy and simultaneous measurements of position and momentum*, *International journal of theoretical physics* **37** (1998), no. 5 1491–1509.
- [24] M. Ozawa, *Universally valid reformulation of the heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement*, *Physical Review A* **67** (2003), no. 4 042105.
- [25] J. Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*. Verlag von Julius Springer Berlin, 1932.
- [26] E. B. Davies and J. T. Lewis, *An operational approach to quantum probability*, *Communications in Mathematical Physics* **17** (1970), no. 3 239–260.
- [27] M. Ozawa, *Conditional expectation and repeated measurements of continuous quantum observables*, in *Probability Theory and Mathematical Statistics*, pp. 518–525. Springer, 1983.

- [28] M. Ozawa, *Quantum measuring processes of continuous observables*, *Journal of Mathematical Physics* **25** (1984), no. 1 79–87.
- [29] M. Ozawa, *Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements*, *Annals of Physics* **311** (2004), no. 2 350–416.
- [30] T. Japan Association for Philosophy of Science, *Annals*. No. v. 11,n.^o 2. Japan Association for Philosophy of Science, 2003.
- [31] M. Ozawa, *Measurements of nondegenerate discrete observables*, *Physical Review A* **62** (2000), no. 6 062101.
- [32] M. Ozawa, *Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics*, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences* **21** (1985), no. 2 279–295.
- [33] M. Ozawa, *Operations, disturbance, and simultaneous measurability*, *Physical Review A* **63** (2001), no. 3 032109.
- [34] M. Ozawa, *Canonical approximate quantum measurements*, *Journal of mathematical physics* **34** (1993), no. 12 5596–5624.
- [35] M. Ozawa, *Physical content of heisenberg’s uncertainty relation: limitation and reformulation*, *Physics Letters A* **318** (2003), no. 1 21–29.
- [36] A. Messiah and F. Villars, *Mécanique quantique*, *American Journal of Physics* **27** (1959), no. 7 531–532.
- [37] A. Kolmogorov, *Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitsrechnung, berlin, 1933*, *English translation, Chelsea, New York* (1950).
- [38] S. K. Berberian, K. Berberian, *et. al.*, *Notes on spectral theory*, .
- [39] M. Ozawa, *Optimal measurements for general quantum systems*, *Reports on Mathematical Physics* **18** (1980), no. 1 11–28.
- [40] M. Ozawa, *An operational approach to quantum state reduction*, *annals of physics* **259** (1997), no. 1 121–137.
- [41] K. Kraus, *General state changes in quantum theory*, *Annals of Physics* **64** (1971), no. 2 311–335.
- [42] D. Appleby, *Error principle*, *International journal of theoretical physics* **37** (1998), no. 10 2557–2572.
- [43] M. Ozawa, *Quantum limits of measurements and uncertainty principle*. Springer, 1991.

- [44] C. M. Caves, K. S. Thorne, R. W. Drever, V. D. Sandberg, and M. Zimmermann, *On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. i. issues of principle*, *Reviews of Modern Physics* **52** (1980), no. 2 341.
- [45] C. M. Caves, *Defense of the standard quantum limit for free-mass position*, *Physical review letters* **54** (1985), no. 23 2465.
- [46] M. Ozawa, *Quantum-mechanical models of position measurements*, *Physical Review A* **41** (1990), no. 3 1735.
- [47] V. Braginsky and F. Y. Khalili, *Quantum measurement*, *Physics Letters A* **257** (1999), no. 5 241–246.
- [48] V. B. Braginsky, Y. I. Vorontsov, and K. S. Thorne, *Quantum nondemolition measurements*, *Science* **209** (1980), no. 4456 547–557.
- [49] M. Raymer, *Uncertainty principle for joint measurement of noncommuting variables*, *American of physics* **62** (1994), no. 11 986–993.
- [50] M. Ozawa, *Conservation laws, uncertainty relations, and quantum limits of measurements*, *Physical review letters* **88** (2002), no. 5 050402.
- [51] M. Ozawa, *Measurement breaking the standard quantum limit for free-mass position*, *Physical review letters* **60** (1988), no. 5 385.
- [52] H. P. Yuen, *Contractive states and the standard quantum limit for monitoring free-mass positions*, *Physical Review Letters* **51** (1983), no. 9 719.
- [53] R. Haberman, *Elementary applied partial differential equations*. Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ, 1983.
- [54] F. John, *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*. Courier Dover Publications, 2004.
- [55] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics: Functional analysis*, vol. 1. Gulf Professional Publishing, 1980.
- [56] M. Ozawa, *Uncertainty relations for joint measurements of noncommuting observables*, *Physics Letters A* **320** (2004), no. 5 367–374.
- [57] A. S. Holevo and R. F. Werner, *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory, 1982*, *Physical Review A* **63** (2001), no. 3 032312.
- [58] J. A. Wheeler and W. Zurek, *Quantum Theory and Measurement (Princeton Series in Physics)*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1983.

- [59] H. Araki and M. M. Yanase, *Measurement of quantum mechanical operators*, *Physical Review* **120** (1960), no. 2 622.
- [60] M. Ozawa, *Does a conservation law limit position measurements?*, *Physical review letters* **67** (1991), no. 15 1956.
- [61] E. P. Wigner, *The problem of measurement*, *American Journal of Physics* **31** (1963), no. 1 6–15.
- [62] J. Erhart, S. Sponar, G. Sulyok, G. Badurek, M. Ozawa, and Y. Hasegawa, *Experimental demonstration of a universally valid error-disturbance uncertainty relation in spin measurements*, *Nature Physics* **8** (2012), no. 3 185–189.
- [63] H. Martens and W. M. De Muynck, *Nonideal quantum measurements*, *Foundations of Physics* **20** (1990), no. 3 255–281.
- [64] L. A. Rozema, A. Darabi, D. H. Mahler, A. Hayat, Y. Soudagar, and A. M. Steinberg, *Violation of heisenberg’s measurement-disturbance relationship by weak measurements*, *Physical review letters* **109** (2012), no. 10 100404.
- [65] A. Lund and H. M. Wiseman, *Measuring measurement–disturbance relationships with weak values*, *New Journal of Physics* **12** (2010), no. 9 093011.
- [66] J. H. Shapiro, *Quantum information technology: Entanglement, teleportation, and memory*, tech. rep., DTIC Document, 2005.
- [67] M. A. Nielsen, *Optical quantum computation using cluster states*, *Physical review letters* **93** (2004), no. 4 040503.
- [68] G. M. D’Ariano and O. Hirota, *Quantum Communication, Computing and Measurement 2*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2000.
- [69] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.