ESTUDIO BÁSICO DE LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN PARA EL PROBLEMA DE DIRICHLET A TRAVÉS DEL MÉTODO DE PERRON

Manuel Arturo Nova Martinez

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Licenciatura en Matemáticas y Estadística
Facultad Seccional Duitama
2018

ESTUDIO BÁSICO DE LA EXISTENCIA Y UNICIDAD DE LA SOLUCIÓN PARA EL PROBLEMA DE DIRICHLET A TRAVÉS DEL MÉTODO DE PERRON

Manuel Arturo Nova Martinez
Código: 201220050

Trabajo de grado en la modalidad de Monografía para optar al título de:
Licenciado en Matemáticas y Estadística

Director:
M.Sc. Alexis Favián Malpica Vega

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Licenciatura en Matemáticas y Estadística
Facultad Seccional Duitama
2018

Con gran aprecio

A mis padres (;)

"Daría todo lo que sé por la mitad de lo que ignoro"

Descartes

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por su apoyo y confianza, de ellos es este gran esfuerzo. Mi más profundo agradecimiento al profesor Alexis Favián Malpica Vega por su orientación durante el desarrollo del trabajo. A los profesores Arbey Gómez y Gilberto Pérez por su contribución en la evaluación del informe, por las correcciones y sugerencias realizadas. Un gesto especial de gratitud para Laura Isabel Mesa León; por su afecto y comprensión, y por brindarme su compañia en cada momento.

Nota de aceptación

Director: M.Sc. Alexis Favián Malpica Vega

Jurado: M.Sc. Luis Arbey Gómez Gómez

Jurado: M.Sc. Pedro Gilberto Pérez Poblador

Duitama, Mayo de 2018.

Resumen

En este trabajo se estudia la existencia y unicidad de la solución para el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(y) = g(y), & y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un subconjunto abierto, conexo y acotado de $\mathbb{R}^N$, f es un campo escalar continuo sobre Ω y g es continuo en la frontera $\partial\Omega$. Para el caso $f = 0$ se analizan algunas propiedades de las funciones armónicas y se demuestra la existencia de solución mediante el método de Perron, esto bajo cierta hipótesis de regularidad en la frontera del dominio. En el caso general se construye la solución fundamental de la ecuación de Laplace a partir de las propiedades de simetría del operador Laplaciano, se deduce una fórmula de representación integral para la función solución y se demuestra que dicha solución verifica los datos del problema. Finalmente se presentan algunos criterios geométricos que aseguran la regularidad en los puntos de la frontera.

Palabras clave: Problema de Dirichlet, ecuación de Laplace, solución fundamental, función armónica, función de Green.

Abstract

In this work we study the existence and uniquessly of solution for the Dirichlet problem

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(y) = g(y), & y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where Ω is an open, connected and bounded subset de $\mathbb{R}^N$, f is a continuous scalar field on Ω and g is continuous on the boundary of Ω. For the case $f = 0$ some properties of the harmonic fuctions are analyzed and the existence of the solution is demostrated by the Perron method, this under a certain hypothesis of regularity of the domain boundary. In the general case the fundamental solution of the Laplace equation is constructed based on the properties of operator Laplaciano symmetry, a formula of integral representation for the solution fuction is deduced and it is demostrated that the solution verifies the problem data. Finally some geometric criteria that ensure the regularity in the boundary points are presented.

Key words: Dirichlet problem, Laplace equation, fundamental solution, harmonic fuction, Green fuction.

Contenido

Introducción

Una ecuación en derivadas parciales para una función $u(x_1, ..., x_N)$ es una relación de la forma

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_N, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, ...\right) = 0,$$

donde F es una función de las variables independientes $x_1, x_2, ... x_N$, de la función desconocida u y de un número finito de sus derivadas parciales. Ecuaciones de este tipo aparecen en aplicaciones de las matemáticas y son de gran interés a causa de su conexión con fenómenos del mundo físico; en física, química e ingeniería son abundantes sus aplicaciones, Simmons (1993). Cuando se intenta modelar fenómenos estacionarios, es decir independientes del tiempo, con frecuencia aparece el operador diferencial elíptico de segundo orden,

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + ... + u_{x_N x_N},$$

denominado Laplaciano. En términos de dicho operador se plantea la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, la ecuación de Poisson $\Delta u = f$ y en particular el siguiente problema de Dirichlet:

> Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, conexo y acotado. Sea una función f continua sobre Ω y g continua sobre $\partial\Omega$, (la frontera de Ω). Hallar u tal que $\Delta u = f$ en Ω y $u = g$ sobre $\partial\Omega$.

Cuando Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ o de $\mathbb{R}^3$, el problema anterior puede ser resuelto por el método de separación de variables, con el cual la ecuación diferencial parcial se reduce a ecuaciones diferenciales ordinarias. En contextos más generales se requiere otro tipo de estrategias, un método alternativo para resolver el problema de Dirichlet en dominios generales se conoce con el nombre de método de Perron de funciones subármonicas; consiste en definir el conjunto de funciones que satisfacen $\Delta u \geq 0$ sobre Ω, $u \leq g$ sobre $\partial\Omega$; y probar que la solución es la función máxima que verifique tales condiciones.

En esta monografía se presenta un estudio detallado de la existencia y unicidad de la solución del problema de Dirichlet, se basa principalmente en algunos apartes de los textos *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales*, (Peral Alonso 2004) y *Partial Differential Equations*, (John 1978). Este trabajo está dirigido a estudiantes con conocimientos básicos de cálculo, topología y ecuaciones diferenciales; una de sus metas es motivar la investigación en estos temas de gran interés, que conllevan a aplicar los conocimientos adquiridos y afianzar las habilidades matemáticas.

La estructura de los tópicos tratados en este texto es la siguiente: en el capítulo uno se recuerdan algunas definiciones y resultados respecto a topología, análisis funcional, cálculo vectorial y ecuaciones en derivadas parciales, esto dará sustento teórico a los procedimientos desarrollados en los capítulos posteriores. En el capítulo dos se estudia la invarianza del operador de Laplace bajo isometrías, hecho que sugiere encontrar la forma del Laplaciano para funciones radiales y posteriormente definir la solución fundamental de la ecuación de Laplace; esta será empleada para hallar una fórmula de representación de la solución del problema de Dirichlet. Se demuestra la existencia de función de Green para una bola abierta de $\mathbb{R}^N$ y la solución al problema de Dirichlet en dicha bola.

Algunas propiedades de las funciones armónicas se estudian en el capítulo tres, la propiedad del valor medio, el principio del máximo, la regularidad de una función armónica, el teorema de Azcoli y el teorema de Harnack para convergencia de sucesiones de funciones; además se presenta la definición de función subarmónica y se extiende el principio del máximo a estas funciones. En el capítulo cuatro se aborda el problema de Dirichlet en un dominio Ω con frontera regular. Se prueba la existencia de solución del problema para la ecuación de Laplace mediante el método de Perron, y luego se examinan las condiciones de regularidad que deben verificar los puntos de la frontera. También se resuelve la ecuación de Poisson.

Este texto fue redactado en el editor matemático *LATEX*, que con su estupenda labor de mecanografía permite organizar el contenido de manera que resulte más atractivo. Como referencia del manejo de este software puede consultarse Mora y Borbón (2014).[1]

[1] Mora, W. y Borbón, A. (2014). *Edición de textos científicos LATEX 2014*. Revista Matemática. Educación e Internet. Instituto tecnológico de Costa Rica.

Objetivos

Objetivo General

Realizar un estudio detallado de la existencia y unicidad de la solución para el problema de Dirichlet a través del método de Perron.

Objetivos Específicos

1. Analizar el problema de Dirichlet en un dominio con frontera regular, mediante el método de Perron.
2. Presentar algunas condiciones geométricas sobre la frontera del dominio para asegurar su regularidad.
3. Utilizar la función de Green en dominios generales para resolver la ecuación de Poisson.
4. Elaborar un documento que presente en detalle las demostraciones y demás procedimientos del estudio realizado.

1 Preliminares

Ninguna certeza existe allí donde
no es posible aplicar la Mátematica o en
aquello que no pueda relacionarse con la Matemática

Leonardo da Vinci

En este primer capítulo se presentan algunos conceptos y resultados básicos respecto a topología, análisis funcional, cálculo vectorial y ecuaciones en derivadas parciales; que serán indispensables en el estudio de existencia y unicidad de la solución para el problema de Dirichlet. Se omite la prueba de teoremas y proposiciones pues su uso es frecuente en cualquier estudio de análisis matemático.

1.1. Topología y análisis funcional

El propósito de esta sección es estudiar los denominados espacios métricos. Se extienden los conceptos de conjunto abierto y cerrado a espacios métricos generales; también el concepto de convergencia de una sucesión y la continuidad de una función. Por último se resaltan algunas propiedades de aquellos espacios métricos que poseen una estructura más fina; estos que son completos, compactos o conexos. Se toman de referencia los textos Kreyszing (1989), Munkres (1997), Rubiano (2002), Royden y Fitzpatrick (2010).

1.1.1. Espacios métricos

Muchos problemas de análisis matemático no persiguen el estudio de entes individuales, una función, una sucesión, un operador; sino de amplias colecciones de tales objetos. Con gran frecuencia tales colecciones resultan ser espacios vectoriales, es decir conjuntos cuyos elementos pueden sumarse y multiplicarse por escalares, o más precisamente:

Definición 1.1.1 *Un espacio vectorial, sobre el conjunto de números reales* $\mathbb{R}$, *es un conjunto* X *cuyos elementos se llaman vectores y sobre el que está definida una operación binaria* $+$ *llamada adición de vectores y una multiplicación por un escalar* η, *que satisfacen las siguientes propiedades; para* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

Suma:

1. *Es una operación cerrada,* $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in X$
2. *Es conmutativa,* $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
3. *Es asociativa,* $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$
4. *Tiene elemento neutro. Existe un único* $\mathbf{0} \in X$ *tal que* $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$
5. *Todo elemento de* X *posee un inverso, es decir a cada* $\mathbf{x}$ *le corresponde un único elemento* $-\mathbf{x} \in X$, *tal que* $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Multiplicación:

1. *Es una operación cerrada,* $\alpha\mathbf{x} \in X$
2. $1\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$, *siendo* 1 *la unidad de* $\mathbb{R}$
3. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
4. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
5. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$.

Si para la multiplicación escalar en lugar de *números reales* se toman números complejos, se dice que X es un espacio vectorial sobre los números complejos. Un ejemplo de un espacio vectorial sobre los números reales es el conjunto $\mathbb{R}^N$. Se obtiene al tomar todas las N-uplas de números reales $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N)$, $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_N)$, dotadas de suma y multiplicación por escalares; esto es,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, ..., x_N + y_N), \qquad c\mathbf{x} = (cx_1, ..., cx_N).$$

$\mathbb{R}^N$ verifica las propiedades de un espacio vectorial (véase Munkres (1997)). Una *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m \in X$ es un vector de X de la forma $c_1\mathbf{a}_1 + ... + c_m\mathbf{a}_m$ para ciertos escalares $c_1, ..., c_m \in \mathbb{R}$. Ahora bien, si a cada elemento $\mathbf{x} \in X$ le corresponde al menos una m-upla de escalares $c_1, ..., c_m$ tal que,

$$\mathbf{x} = c_1\,\mathbf{a}_1 + ... + c_m\,\mathbf{a}_m, \tag{1-1}$$

se dice que el conjunto de vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m\}$ forma un *sistema de generadores* de X. Los vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m\}$ son *linealmente independientes* si ninguno de ellos es combinación lineal de los restantes o, lo que es equivalente, si existe una combinación lineal de ellos igual al vector cero, necesariamente los escalares de la combinación lineal son cero.

Definición 1.1.2 *Los vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_m\}$ forman una base de X si generan X y son linealmente independientes.*

El siguiente conjunto de vectores se llama *base estándar* para $\mathbb{R}^N$,

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, ..., 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, ..., 0) \\ & ... \\ \mathbf{e}_N &= (0, 0, 0, ..., 1). \end{cases} \tag{1-2}$$

Se introduce en seguida la notación y la terminología más corriente relativa a *funciones* cualesquiera. Sean V y W dos conjuntos. La notación,

$$T : V \longrightarrow W,$$

se usa para indicar que T es una función cuyo *dominio* es V y cuyos valores están en W. Para cada x de V, el elemento $T(x)$ de W se llama *imagen* de x a través de la función T. La imagen del dominio V, $T(V)$, es el *recorrido* de T.

Definición 1.1.3 *Sea H un espacio vectorial real. Una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ se llama producto interior si satisface para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ las siguientes condiciones:*

a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$

b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{x} = 0$

c) $\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

d) $\langle \lambda\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$

e) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$.

Para un espacio vectorial dado pueden existir diferentes funciones *producto interior*. Un producto interior particularmente usado en $\mathbb{R}^N$ se presenta a continuación.
Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ se define,

$$\langle \mathbf{x} , \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_N y_N. \tag{1-3}$$

Este producto interior se conoce con el nombre de *producto punto* y se trabajará en varias situaciones en los próximos capítulos, por tanto conviene recordar algunos hechos básicos.

Definición 1.1.4 ***Conjunto ortonormal***
Se dice que un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *es un conjunto ortonormal si*

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0 \qquad i \neq j \tag{1-4}$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1. \tag{1-5}$$

Si sólo se satisface la ecuación (1-4)*, se dice que el conjunto es ortogonal.*

Uno de los objetivos del análisis es un estudio amplio de funciones cuyos dominios y recorridos son subconjuntos de espacios vectoriales. Uno de los ejemplos más sencillos, y que se tratan en todas las ramas de la matemática, son las llamadas *transformaciones lineales*. Supóngase ahora que V y W son espacios vectoriales que tienen el mismo conjunto de escalares y considérese la siguiente definición.

Definición 1.1.5 *Sean* V *y* W *espacios vectoriales. Una función* $T : V \to W$ *se llama transformación lineal si para todo* $\mathbf{x}$*,* $\mathbf{y}$ *en* V *y todo escalar* α*, satisface las siguientes propiedades:*

1) $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$

2) $T(\alpha\, \mathbf{x}) = \alpha\, T(\mathbf{x})$.

Esto significa que T conserva la adición y multiplicación por escalares. Las dos propiedades pueden combinarse en una fórmula que establece que,

$$T(\alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}) = \alpha\, T(\mathbf{x}) + \beta\, T(\mathbf{y}), \tag{1-6}$$

para todo $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ de V y todos los escalares α y β.

Definición 1.1.6 *Sean* U, V, W *espacios vectoriales. Sea* $T : U \to V$ *una función con dominio* U *y valores en* V*, y* $S : V \to W$ *otra función con dominio* V *y valores en* W*. La composición* $S \circ T$ *es la función* $S \circ T : U \to W$ *definida para todo* $\mathbf{x}$ *en* U *mediante,*

$$(S \circ T)\, (\mathbf{x}) = S\, [T(\mathbf{x})]\,, \tag{1-7}$$

Así pues, para aplicar $\mathbf{x}$ mediante la *composición* $S \circ T$ se aplica primero $\mathbf{x}$ mediante T y luego se aplica $T(\mathbf{x})$ por medio de S.

Teorema 1.1.1 *(Véase Grossman (2008)) Sea $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ una transformación lineal. Existe entonces una única matriz $A \in M_{M\times N}$ tal que $T(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})$; donde la j-ésima columna de A es $T(e_j)$, siendo e_j la base estándar de $\mathbb{R}^N$.*

La matriz A se denomina *matriz de transformación* correspondiente a T. Se considera en seguida un tipo especial de transformación lineal.

Definición 1.1.7 *Una transformación lineal $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ se denomina isometría si para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$:*

$$\begin{aligned} |\, T(\mathbf{x}) \,| &= |\, \mathbf{x} \,| \\ T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \end{aligned}$$

siendo $|\cdot|$ la norma euclídea.

Proposición 1.1.1 *(Véase Apostol (1998)) Si $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es isometría, entonces los vectores columna de la matriz de transformación correspondiente a T forman un conjunto ortonormal.*

En el próximo capítulo se verá la utilidad de las transformaciones lineales en este contexto, por el momento se continúa el estudio de espacios vectoriales.

Para abordar los espacios métricos se considera en primer lugar la definición de *métrica*. Este concepto fue introducido por el matemático francés *Maurice René Fréchet* (1978-1973) y constituye uno de los pasos decisivos en la creación de la topología general, Rubiano (2002). Se trataba de definir el concepto de *distancia*, entre objetos matemáticos, de la manera más general posible.

Definición 1.1.8 *Sea X un espacio vectorial real. Una función $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ se llama métrica si para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ en X,*

i) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$

ii) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{x} = \mathbf{y}$

iii) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$

iv) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y})$.

Un espacio vectorial X, dotado de una métrica ρ, se llama *espacio métrico* y se denota por (X, ρ). La propiedad iv) se conoce como *desigualdad triangular* para la métrica y recuerda el hecho de que la distancia más corta entre dos puntos es la que se toma directamente entre ellos. A continuación se extiende el concepto de *valor absoluto* a espacios vectoriales.

Definición 1.1.9 *Sea X un espacio vectorial real. Una función de valor real no negativa $||\cdot||$ definida sobre X se llama norma si para cada $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ y un número real λ,*

a) $||\mathbf{x}|| = 0$ *si y sólo si* $\mathbf{x} = 0$

b) $||\lambda \mathbf{x}|| = |\lambda| \, ||\mathbf{x}||$

c) $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.

Se denomina *espacio vectorial normado* $(X, ||\cdot||)$ a un espacio vectorial X dotado de una *norma* $||\cdot||$. El siguente resultado permite definir una métrica en términos de una norma. En este caso se dice que la métrica es inducida por una norma.

Teorema 1.1.2 *(Véase Rubiano (2002)) Si $(X, ||\cdot||)$ es un espacio vectorial normado, la fórmula,*

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|, \tag{1-8}$$

define una métrica para X.

Considerérese por ejemplo $\mathbb{R}^N = \{ (x_1, x_2, ..., x_N) \mid x_i \in \mathbb{R}, \, i = 1, 2, ..., N \}$, el *espacio euclidiano* N-dimensional, cuya métrica se define en términos de la *norma euclídea.*

Definición 1.1.10 *Para $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$ la norma Euclidiana de $\mathbf{x}$ viene dada por*

$$\| \mathbf{x} \| = \left[x_1^2 + ... + x_N^2 \right]^{1/2}. \tag{1-9}$$

Se definen a continuación tres importantes tipos de subconjuntos de un espacio métrico. Dado un punto $\mathbf{x}_0 \in X$ y un número real $r > 0$:

a) $B_r(\mathbf{x}_0) = B(\mathbf{x}_0, r) = \{ \mathbf{x} \in X \mid \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < r \}$, *bola abierta*

b) $\bar{B}_r(\mathbf{x}_0) = \bar{B}(\mathbf{x}_0, r) = \{ \mathbf{x} \in X \mid \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) \leq r \}$, *bola cerrada*

c) $S_r(\mathbf{x}_0) = S(\mathbf{x}_0, r) = \{ \mathbf{x} \in X \mid \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r \}$, *esfera.*

En los tres casos $\mathbf{x}_0$ y r son el centro y el radio respectivamente. Así, la *bola abierta*, $B(\mathbf{x}_0, r)$, está constituida por el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in X$ cuya distancia a $\mathbf{x}_0$ es menor que r. En este estudio se trabajará sobre el espacio euclidiano N-dimensional, algunos objetos centrales serán: la *bola unitaria* de $\mathbb{R}^N$,

$$B^N = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \| \mathbf{x} \| \leq 1 \}, \tag{1-10}$$

y la *esfera unitaria* de $\mathbb{R}^N$,

$$S^{N-1} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \| \mathbf{x} \| = 1 \}. \tag{1-11}$$

El símbolo S^{N-1} que denota la esfera unitaria tiene exponente $N - 1$ puesto que aún cuando la bola unitaria es un objeto N-dimensional, su superficie es un objeto de dimensión $N - 1$. Considérese por ejemplo el círculo en $\mathbb{R}^2$, B^2 es un objeto bidimensional y su circunferencia S^1, es un objeto unidimensional.

Definición 1.1.11 *Sea X un espacio métrico. Un subconjunto Q de X es abierto si para todo punto $x \in Q$ existe una bola abierta centrada en x y contenida en Q. De otra parte, un subconjunto K de X es cerrado si su complemento en X es abierto; es decir $K^c = X - K$ es abierto.*

Es útil tener un nombre especial para un conjunto abierto que contenga un punto dado $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$. De esta manera se entiende por *vecindad* de $\mathbf{x}_0$, $V_{\mathbf{x}_0}$, a un conjunto abierto V que contiene al punto $\mathbf{x}_0$, Munkres (1997). Por ejemplo $B(\mathbf{x}_0, r)$ es una vecindad de $\mathbf{x}_0$ para cualquier $r > 0$.

Definición 1.1.12 *Para un subconjunto E de un espacio métrico X, un punto $c \in X$ se llama punto adherente si c no puede ser separado del conjunto E por ninguna de sus vecindades. Esto es, para toda V_c se tiene $V_c \cap E \neq \emptyset$.*

Definición 1.1.13 *Para un subconjunto E de un espacio métrico X, un punto $c \in X$ se llama punto de acumulación de E si toda vecindad de c contiene al menos un punto de E distinto de c. El conjunto de puntos de acumulación de E se llama derivado de E y se denota por E'.*

Los siguientes conceptos tiene sentido en un espacio métrico arbitrario, puesto que se utilizarán sólo en $\mathbb{R}^N$, aquí se definen sólo para este caso.

Definición 1.1.14 *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^N$. El interior de A se define como la unión de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$ que están contenidos en A; se denota por $Int\ A$. El exterior de A se define por la unión de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$ que son disjuntos de A; se denota por $Ext\ A$. La frontera de A consiste de aquellos puntos que no pertenecen ni al interior de A ni al exterior de A; se denota por ∂A.*

A partir del concepto de métrica se definió conjunto abierto, conjunto cerrado y vecindad. En seguida se presenta la noción de convergencia de *sucesiones* en espacios métricos.

Definición 1.1.15 *Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico X converge a el punto $x \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.*

El punto al que converge se denomina *límite* de la sucesión; para denotar la convergencia de $\{x_n\}$ a x a menudo se escribe $\{x_n\} \to x$. Las sucesiones permiten dar la definición de *continuidad* de una función sobre un espacio métrico.

Definición 1.1.16 *Sean X e Y espacios métricos. Una función $f : X \to Y$ es continua en el punto x_0 de X si para toda sucesión $\{x_n\}$ en X tal que,*

$$\{x_n\} \to x_0 \qquad \textit{entonces} \qquad \{f(x_n)\} \to f(x_0). \tag{1-12}$$

Se dice que f es continua en X si es continua en todo punto de X.

Esta definición de continuidad puede ser entendida a partir del resultado siguiente.

Proposición 1.1.2 *(Véase Royden y Fitzpatrick (2010)) Sean X e Y espacios métricos. $f : X \to Y$ es continua en el punto x_0 de X si y sólo si para cada conjunto abierto V de Y que contiene a $f(x_0)$ existe un conjunto abierto U de X que contiene a x_0 tal que $f(U) \subset V$.*

Para realizar un estudio provechoso de problemas interesantes en análisis matemático, es indispensable considerar espacios métricos que posean una propiedad adicional. Dicha propiedad se plantea a continuación.

Definición 1.1.17

i) Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico X se llama sucesión de Cauchy si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que si $n, m \geq N$ entonces $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

ii) Si toda sucesión de Cauchy en X converge en X se dice que el espacio métrico X es un espacio completo.

1.1.2. Espacios compactos

Una clase importante de subespacios de $\mathbb{R}^N$ la constituyen los *espacios compactos*. En seguida se define el término cubrimiento para luego hablar de compacidad en espacios métricos.

Definición 1.1.18 *Sea X un subespacio de $\mathbb{R}^N$. Un cubrimiento de X es una colección de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ cuya unión contiene a X. Si cada subconjunto es abierto en $\mathbb{R}^N$ se llama cubrimiento de X.*

Antes de ofrecer la definición formal de espacio compacto resulta útil presentar una visualización informal. Esta apreciación se debe al matemático *John D. Baum* y se tomó del texto *Topología General de G. Rubiano:*

> *"Supóngase que una gran multitud de personas (posiblemente infinita) están afuera bajo la lluvia, y que cada una de estas personas usa su sombrilla, claramente ellas permaneceran sin mojarse. Sin embargo, es posible que ellas estén juntas de manera tan compacta, que no sea necesario que todas abran sus sombrillas, tan sólo un número finito, y todavía permanezcan sin mojarse. En este caso podría pensarse que estas personas forman una especie de espacio compacto."* (Rubiano 2002, pág. 135).

Definición 1.1.19 *Sea X un subespacio de $\mathbb{R}^N$. El espacio X es compacto si todo cubrimiento abierto de X contiene una subcolección finita que también forma un cubrimiento abierto de X.*

En general lo que resalta la propiedad de compacidad es que el estudio de *cubrimientos abiertos* puede restringirse a estudiar cubrimientos finitos. Los resultados que se presentan a continuación tienen gran interés para el propósito de este estudio.

Proposición 1.1.3 *(Véase Royden y Fitzpatrick (2010)) Si X es un subespacio compacto de $\mathbb{R}^N$ entonces X es cerrado y acotado.*

Teorema 1.1.3 *(Véase Royden y Fitzpatrick (2010)) Sea X un subespacio compacto de $\mathbb{R}^N$. Si $f : X \to \mathbb{R}^N$ es continua entonces $f(X)$ es un subespacio compacto de $\mathbb{R}^N$.*

Proposición 1.1.4 *(Véase Royden y Fitzpatrick (2010)) Si X es un subespacio cerrado y acotado de $\mathbb{R}^N$ entonces X es compacto.*

1.1.3. Espacios de funciones

Para un espacio métrico X se denota por $C(X)$ al *espacio de funciones* continuas de valor real en X. Ahora bien, si X es compacto toda función continua sobre X toma un valor máximo; en particular para la función $f \in C(X)$ se define:

$$\| f \|_{max} = \max_{x \in X} |f(x)|. \tag{1-13}$$

Esta norma induce una métrica conocida como *métrica uniforme*. Para $f, g \in C(X)$ se define,

$$\rho(f, g) = \| f - g \|_{max} . \tag{1-14}$$

Definición 1.1.20 *Sean X e Y espacios métricos con métricas ρ_x y ρ_y respectivamente. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones, $f_n : (X, \rho_x) \to (Y, \rho_y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supóngase que para cada elemento $x \in X$ el $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe. Si se define $f(x)$ como el valor de este límite, entonces $f(x)$ define una función $f : (X, \rho_x) \to (Y, \rho_y)$. En este caso se dice que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f.*

Si en la definición anterior se supone que cada f_n es continua, en general no se puede esperar que f también sea continua. Se requiere entonces un tipo de convergencia más fuerte para una *sucesión de funciones*.

Definición 1.1.21 *Sean (X, ρ_x), (Y, ρ_y) espacios métricos y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones con $f_n : (X, \rho_x) \to (Y, \rho_y)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función f si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ entonces $\rho_y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ para cada $x \in X$.*

Una sucesión que es de Cauchy con respecto a la métrica uniforme se llama *uniformemente de Cauchy*. La propiedad que sigue garantiza la *completitud* del espacio de funciones continuas sobre un compacto.

Proposición 1.1.5 *(Véase Royden y Fitzpatrick (2010)) Sea X un espacio métrico. Si X es compacto entonces el espacio de funciones continuas $C(X)$ es completo en la métrica uniforme.*

Antes de culminar este apartado se consideran dos definiciones de gran interés en el estudio de sucesiones de funciones.

Definición 1.1.22 ***Acotación uniforme***
Sea $X \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Una sucesión, $\{f_n\} \subset C(X)$, de funciones continuas de valor real se dice acotada uniformemente si existe una constante $M > 0$ tal que para cualquier $x \in X$ se verifica $|f_n(x)| \leq M$.

Definición 1.1.23 ***Equicontinuidad***
Sea $X \subset \mathbb{R}^N$ compacto. Sea $\{f_n\} \subset C(X)$ una sucesión de funciones continuas de valor real. Se dice que $\{f_n\}$ es equicontinua si para cualquier número real $\varepsilon > 0$ existe un real $\delta > 0$ tal que si $x, y \in X$ verifican $|x - y| < \delta$ entonces $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

1.1.4. Espacios conexos

Definición 1.1.24 *Sea X un espacio métrico. Una separación para X la constituye un par A, B de subconjuntos abiertos no vacíos, tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$.*

Nótese que en la definición anterior los conjuntos A y B son complementarios entre sí; esto es equivalente al requerir que A y B sean ambos cerrados o ambos abiertos, o que exista $A \subset X$ no vacío, abierto y cerrado. Lo que se quiere realmente es que A y B sean dos piezas separadas; es decir que no haya puntos de A adherentes a B o viceversa, Rubiano (2002).

Algunos espacios métricos parece que están formados de una sola pieza o literalmente sus partes constituyentes no están desconectadas. Para precisar:

Definición 1.1.25 *Sea X un espacio métrico. Se dice que X es conexo si no existe una separación para X en el sentido de la definición* (1.1.24).

Desde luego un subespacio será conexo si visto como espacio es conexo; claramente la conexidad del subespacio no depende del espacio que lo contiene. La primera noción de *conexidad* fue dada por K. Weierstrass,[1] la cual en el contexto de $\mathbb{R}^2$ significa lo siguiente: un subconjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ es *conexo* si dos puntos cualesquiera de M pueden ser conectados por un camino que no se sale de M. Para aclarar esta idea se presenta la definicion de *conjunto convexo* y se verá que estos conjuntos resultan ser conexos.

[1]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 - 1897). Matemático alemán que se suele citar como el padre del análisis moderno. Entre sus logros más destacados figuran la definición de continuidad de una función, la demostración del teorema del valor medio y el teorema de Bolzano-Weierstrass.

Definición 1.1.26 *Un subconjunto A de $\mathbb{R}^N$ se llama convexo si para todo par de puntos a, b de A el segmento de recta que une a y b está contenido en A.*

Proposición 1.1.6 *(Véase Rubiano (2002)) Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^N$. Si A es convexo entonces A es conexo.*

Con la propiedad de conexidad es posible caracterizar a los subconjuntos abiertos del espacio euclidiano; este es el objeto de la definición siguiente.

Definición 1.1.27 *Un subconjunto A de $\mathbb{R}^N$ abierto y conexo se llama dominio.*

Se finaliza este parágrafo presentando un par de resultados que darán sentido a algunos procedimientos que se realizarán posteriormente.

Proposición 1.1.7 *(Véase Royden y Fitzpatrick (2010)) Un espacio es conexo si y sólo si los únicos subconjuntos que son abiertos y cerrados a la vez son todo el espacio y el conjunto vacío.*

Teorema 1.1.4 *(Véase Royden y Fitzpatrick (2010)) Sea X un espacio conexo e Y cualquier espacio métrico. Si la función $f : X \to Y$ es continua entonces $f(X)$ es un subespacio conexo de Y.*

1.2. Cálculo vectorial

Se presentan algunas definiciones respecto a cálculo en campos escalares; estos conceptos darán bases para desarrollar los procedimientos de cálculo requeridos en el desarrollo de los capítulos siguientes. Para esta sección se toman de referencia los textos Apostol (1998), Marsden y Tromba (1991).

Definición 1.2.1 *Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N) \in A$. Si a cada $\mathbf{x}$ le corresponde un único número real $f(x_1, ..., x_N)$ se dice que f es una función de valor real en las variables $x_1, ..., x_N$ o más brevemente, f es un campo escalar.*

En la definición anterior el conjunto A se llama *dominio* de la función f y el conjunto de valores $f(x_1, ..., x_N)$ correspondiente a dicho dominio, se denomina *recorrido* de la función f. En el caso en que la función f asigna a cada $\mathbf{x}$ en su dominio un vector $f(\mathbf{x})$, se dice que f es un *campo vectorial* en $\mathbb{R}^N$.

1.2.1. Límites y continuidad

El concepto de *límite* es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones y por ende es indispensable presentar la teoría de límites de *campos escalares*.

Definición 1.2.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{x}_0$ un elemento de A. El $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $\mathbf{x} \in A$ que satisfaga $\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \| < \delta$ se verifica $|f(\mathbf{x}) - b| < \varepsilon$.*

La definición anterior significa intuitivamente que conforme $\mathbf{x}$ se acerca a $\mathbf{x}_0$, los valores de $f(\mathbf{x})$ se acercan a b. Es preciso recordar que un campo escalar f puede tener a lo más un límite cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.

Teorema 1.2.1 *(Véase Apostol (1998)) Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Sea una función $f : A \to \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{x}_0$ un elemento de A. Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b_1$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = b_2$ entonces $b_1 = b_2$.*

Las propiedades de los límites en campos escalares se disponen como en el caso de funciones de una variable (véase Apostol (1998)). Por otra parte, la continuidad en funciones de varias variables intuitivamente significa que la gráfica de la función no presenta agujeros.

Definición 1.2.3 *Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Sea $f : A \to \mathbb{R}$. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto de A. Se dice que f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y sólo si*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0). \tag{1-15}$$

f es continua en el conjunto A cuando es continua en cada punto $\mathbf{x}_0$ de A.

Como se mencionó antes, por $C(A)$ se denota el espacio de *funciones continuas* en A. Si se realizan operaciones, suma y producto entre funciones continuas, la continuidad se preserva. De igual modo para el caso del cociente entre funciones continuas, siempre que la función denominador no sea nula (véase Marsden y Tromba (1991)).

1.2.2. Derivación

Esta sección introduce las derivadas en campos escalares. En primer lugar se considera la *derivada* de un campo escalar respecto a un vector para en seguida dar la definición formal de derivada parcial y función diferenciable.

Definición 1.2.4 *Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto. Sean $f : A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{a}$ un punto de A e $\mathbf{y}$ un punto arbitrario de $\mathbb{R}^N$. La derivada de f en $\mathbf{a}$ con respecto a $\mathbf{y}$ se denota con el símbolo $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ y se define por*

$$f'(\mathbf{a}\,;\,\mathbf{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{a}+h\mathbf{y}) - f(\mathbf{a})}{h}, \tag{1-16}$$

cuando tal límite existe.

En el caso particular en el que $\mathbf{y}$ es un vector unitario, es decir, cuando $\| \mathbf{y} \|= 1$, la distancia entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}+h\mathbf{y}$ es $| h |$. En tal caso el cociente de diferencias (1-16) representa el promedio de variación de f por unidad de distancia a lo largo del segmento de recta que une $\mathbf{a}$ con $\mathbf{a}+h\mathbf{y}$, Apostol (1998).

Definición 1.2.5 *Si $\mathbf{y}$ es un vector unitario, la derivada $f'(\mathbf{a};\mathbf{y})$ se llama derivada direccional de f en $\mathbf{a}$ en la dirección de $\mathbf{y}$.*

La *derivada direccional* hace posible hallar la razón de cambio de una función de dos o más variables. Cuando se calcula la derivada direccional respecto al j-ésimo vector de la base estándar, se define la *derivada parcial* respecto a la j-ésima variable.

Definición 1.2.6 *Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_N)$ un punto de A. Sea el campo escalar $f : A \to \mathbb{R}$. Entonces $\partial f/\partial x_1,\ \partial f/\partial x_2, \dots, \partial f/\partial x_N$, las derivadas parciales de f respecto a la primera, segunda,..., N-ésima variable; son las funciones con valores reales de N variables, definidas en el punto $\mathbf{x}$ por*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, ..., x_N) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_j + h, ..., x_N) - f(x_1, ..., x_k, ..., x_N)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})}{h} \end{aligned} \tag{1-17}$$

si existen los límites, donde $1 \leq j \leq N$ y $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base estándar.

En otras palabras $\partial f/\partial x_j$ es la derivada de f respecto a la variable x_j manteniendo las otras variables fijas.

Definición 1.2.7 *Sea $A \subset \mathbb{R}^N$ y $\mathbf{x}_0$ un punto de A. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Se dice que f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si existen las derivadas parciales de f en $\mathbf{x}_0$ y si*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\| f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \|}{\| \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \|} = 0, \tag{1-18}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz renglón

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_N}(\mathbf{x}_0) \right], \tag{1-19}$$

y $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ con $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ considerado como un vector columna.

Se escribirá $C^k(A)$ para denotar el espacio de funciones k veces continuamente diferenciables en A y por $C^\infty(A)$ el espacio de funciones *infinitamente diferenciables* en A.

Teorema 1.2.2 *(Véase Marsden y Tromba (1991)) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Si existen todas las derivadas parciales de f y son continuas en una vecindad de un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.*

Definición 1.2.8 *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ un campo escalar. El gradiente de f es la función vectorial ∇f definida por*

$$\nabla f\left(x_1, ..., x_N\right) = \left(f_{x_1}\left(x_1, ...x_N\right), ..., f_{x_N}\left(x_1, ...x_N\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_N}\mathbf{e}_N \tag{1-20}$$

donde $\mathbf{e}_i$ es el i-ésimo vector de la base estándar.

Entonces el *gradiente* es un vector cuyas componentes son las derivadas parciales de la función f y está definido en cada punto $\mathbf{x}_0 \in A$ donde las derivadas parciales $f_{x_1}(\mathbf{x}_0)$, ..., $f_{x_N}(\mathbf{x}_0)$ existen. En ocasiones se emplea el símbolo Df para denotar el gradiente de la función f.

Teorema 1.2.3 *(Véase Marsden y Tromba (1991)) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable e $\mathbf{y}$ un punto arbitrario de $\mathbb{R}^N$. La derivada direccional de f en $\mathbf{x}$, en la dirección de $\mathbf{y}$ está dada por*

$$f'(\mathbf{x}\,;\,\mathbf{y}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y}. \tag{1-21}$$

Es decir la derivada direccional en la dirección de $\mathbf{y}$ puede expresarse en términos del *producto punto* entre el vector gradiente y el punto $\mathbf{y}$.

Teorema 1.2.4 *(Véase Apostol (1998)) Sean f y g dos campos vectoriales tales que la función compuesta $h = f \circ g$ esté definida en un entorno del punto a. Supóngase que g es diferenciable en a, con diferencial $g'(a)$. Sea $b = g(a)$ y supóngase que f es diferenciable en b, con diferencial $f'(b)$. Entonces h es diferenciable en a y la diferencial $h'(a)$ viene dada por,*

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a),$$

que es la composición de las transformaciones lineales $f'(b)$ y $g'(a)$.

Se puede expresar la *regla de la cadena* en función de las *matrices jacobianas* $D\,h(a)$, $D\,f(b)$ y $D\,g(a)$ que representan las transformaciones lineales $h'(a)$, $f'(b)$ y $g'(a)$ respectivamente. Puesto que la composición de transformaciones lineales corresponde a la multiplicación de sus matrices, se obtiene,

$$D\,h(a) = D\,f(b)\,D\,g(a), \tag{1-22}$$

donde $b = g(a)$. La ecuación (1-22) es la llamada *forma matricial* de la regla de la cadena. Supóngase que f es un campo escalar, en consecuencia h también lo es; en este caso las derivadas parciales de h se pueden expresar para $j = 1$, ..., N mediante,

$$D_m\,h(a) = \sum_{j=1}^{N} D_j\,f(b)\,D_m\,g(a), \tag{1-23}$$

es decir, se obtienen las derivadas parciales de los componentes de h en función de las derivadas parciales de los componentes de f y g.

Definición 1.2.9 *Sea* $A \subset \mathbb{R}^N$ *un conjunto abierto. Sea* $f : A \to \mathbb{R}$ *un campo escalar tal que* $f \in C^2(A)$*. El operador lineal* Δ *definido por la ecuación,*

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_N^2}, \tag{1-24}$$

se llama Laplaciano N-dimensional.

El operador *Laplaciano* será objeto de estudio en los próximos capítulos. Por el momento, en la siguiente sección de preliminares se recordarán algunos conceptos básicos sobre integración de funciones.

1.2.3. Integración

En esta parágrafo se introducen las definiciones de *integral* de línea y de superficie, se presentan las ecuaciones de transformación a coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^N$ y las fórmulas de Green, resultados indispensables para abordar el problema de Dirichlet.

Definición 1.2.10 *Sea* $J = [a, b]$ *un intervalo cerrado de* $\mathbb{R}$*. Sea* α *una función vectorial definida en el intervalo* J*. Cuando* t *va tomando los valores de* J*, la función* $\alpha(t)$ *describe un conjunto de puntos en el N-espacio llamado gráfica de la función. Si* α *es continua en* J *la gráfica se llama curva.*

Al estudiar las *integrales de línea* interesa no sólo el conjunto de puntos de una *curva* sino la manera como tal curva ha sido originada, es decir la función α.

Definición 1.2.11 *Sea* $J = [a, b]$ *un intervalo cerrado de* $\mathbb{R}$*. Se llama camino continuo a una función* $\alpha : J \to \mathbb{R}^N$ *continua en* J*. El camino se llama regular si existe* α' *y es continua en el intervalo abierto* (a, b)*. El camino se llama regular a trozos si el intervalo* $[a, b]$ *puede descomponerse en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales el camino es regular.*

Definición 1.2.12 *Sea* α *un camino regular a trozos en el N-espacio definido en el intervalo* $[a, b]$ *y sea* f *un campo vectorial definido y acotado sobre la gráfica de* α*. La integral de línea de* f *a lo largo de* α *se define por,*

$$\int_\alpha f \, ds = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \, dt, \tag{1-25}$$

es decir, se integra el producto punto de f *con* α'*.*

Teorema 1.2.5 *(Véase Marsden y Tromba (1991)) Sea* f *continua en una región que contiene un camino regular a trozos* α*.*

i) Si α está definida por las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$ donde $a \leq t \leq b$, entonces,

$$\int_\alpha f(x,y)\ ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ \ dt.$$

ii) Si α se define mediante $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, donde $a \leq t \leq b$, entonces,

$$\int_\alpha f(x,y,z)\ ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\ \ dt.$$

Por ejemplo si α es la frontera de la bola unidad en $\mathbb{R}^2$, otra forma de expresar esta curva es a través de las ecuaciones $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$; y si $f(x,y) = 1$ entonces,

$$\int_\alpha f(x,y)\ ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\ \ dt = 2\pi.$$

Previo a introducir el concepto de *integral de superficie* se considera la definición de *superficie* parametrizada.

Definición 1.2.13 *Una superficie parametrizada es una función $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. La superficie S correspondiente a la función Φ es su imagen, $S = \Phi(D)$. Se puede escribir,*

$$\Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)).$$

Definición 1.2.14 *Si $f(x,y,z)$ es una función continua de valores reales definida en la superficie S, se define la integral de f sobre S como,*

$$\int_S f\ ds = \int_D f(u,v) \sqrt{\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right]^2}\ \ du\,dv.$$

Por ejemplo si D es la bola unidad en $\mathbb{R}^3$ entonces S es la superficie de la esfera generada por la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, y si $f(x,y,z) = 1$ se deduce que,

$$\iint_S f(x,y,z)\ ds = \int_{-1}^{1} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{-\frac{1}{x^2 + y^2 - 1}}\ \ dy\,dx = 4\pi.$$

Como se verá más adelante, en este estudio será indispensable conocer la medida de superficie de la *bola unitaria* de $\mathbb{R}^N$. A continuación se presenta una fórmula sencilla para calcular la medida de un bola N-dimensional. Sea $B^N = \{(x_1, ..., x_N) : x_1^2 + ... + x_N^2 \leq 1\}$, la bola cerrada de radio 1. Su medida está dada por,

$$\upsilon_N = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}N + 1)},$$

donde Γ es la *función gamma.* Para $N = 1$ la fórmula arroja $\upsilon_1 = 2$, la longitud del intervalo $[-1, 1]$. Para $N = 2$ resulta $\upsilon_2 = \pi$, el área de un disco de radio 1.

Proposición 1.2.1 *(Véase Apostol (1998)) Sea $B^N(a)$, la bola N-dimensional de radio a. Entonces $\upsilon_N(a) = a^N \upsilon_N$ donde υ_N denota la medida de la bola unitaria* (1-10)*.*

En otras palabras, la medida de una bola de radio a es a^N veces la medida de una bola de radio uno. También, a partir del valor υ_N se puede calcular el valor de la medida de superficie de la esfera unitaria (1-11), obteniendo

$$\omega_N = \text{superficie}\,(S^{N-1}) = N\,\upsilon_N. \tag{1-26}$$

Desde luego, la medida de cualquier bola en $\mathbb{R}^N$ no cambia si se traslada su centro a un punto $\mathbf{x}_0$ de $\mathbb{R}^N$ sin modificar el radio.

Teorema 1.2.6 *(Véase Apostol (1998)) Sea Ω un dominio. Sean $x_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Si $f \in C(\Omega)$ entonces,*

$$f(\mathbf{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\upsilon_N r^N} \int_{B_r(\mathbf{x}_0)} f(x)\,dx,$$

donde υ_N designa la medida de la bola unitaria.

El resultado anterior se puede extender a calcular la integral únicamente sobre la frontera de la bola.

Teorema 1.2.7 *(VéaseApostol (1998)) Sea Ω un dominio y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Sea un punto $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $B_r(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$. Si $f \in C(\Omega)$ entonces,*

$$f(\mathbf{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{S_r(\mathbf{x}_0)} f(x)\,d\sigma(x), \tag{1-27}$$

donde ω_N denota la medida de la N-esfera unitaria.

En los procesos de integración a menudo resulta útil transformar la variable para facilitar su manejo. Una aplicación importante de la fórmula de cambio de variables es el caso de coordenadas polares en $\mathbb{R}^2$, coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$, y su generalización en $\mathbb{R}^N$. Estas son particularmente importantes cuando la función, o el conjunto sobre el que se está integrando exhibe algún tipo de símetria. En seguida se considera la transformación de coordenadas cartesianas a *coordenadas esféricas* en el espacio euclideano N-dimensional.

Para $\mathbf{y} = (y_1,\ ...,\ y_N) \in \mathbb{R}^N$ y $(\rho,\ \theta_1,\ ...,\ \theta_{N-1}) \in (0,\infty) \times (0,\pi) \times ... \times (0.\pi) \times (0{,}2\pi)$, se propone la transformación (Stein y Shakarchi 2003, pág. 193):

$$\begin{cases} y_1 & = \rho cos\theta_1 \\ y_2 & = \rho sen\theta_1 cos\theta_2 \\ ... & \\ y_{N-1} & = \rho sen\theta_1 sen\theta_2 ... sen\theta_{N-2} cos\theta_{N-1} \\ y_N & = \rho sen\theta_1 sen\theta_2 ... sen\theta_{N-2} sen\theta_{N-1}, \end{cases} \tag{1-28}$$

cuyo elemento diferencial está dado por,

$$dy = \rho^{N-1}\,(sen\theta_1)^{N-2}\,(sen\theta_2)^{N-3} ...\,(sen\theta_{N-2})\,d\rho\,d\theta_1\,d\theta_2 ...\,d\theta_{N-1}.$$

Abreviadamente se escribe $\mathbf{y} = \rho\omega$ con $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N)$, obviamente definido por,

$$\begin{cases} \omega_1 & = cos\theta_1 \\ \omega_2 & = sen\theta_1 cos\theta_2 \\ ... & \\ \omega_{N-1} & = sen\theta_1 sen\theta_2 ... sen\theta_{N-2} cos\theta_{N-1} \\ \omega_N & = sen\theta_1 sen\theta_2 ... sen\theta_{N-2} sen\theta_{N-1}, \end{cases} \tag{1-29}$$

y con ello $\| \omega \| = 1$. Luego con esta notación se obtiene $dy = \rho^{N-1}\,d\omega\,d\rho$, siendo $d\omega$ el elemento diferencial sobre la superficie de la bola unitaria. Por tanto para una función continua f se verifica,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\ dy = \int_0^\infty \int_{S^{N-1}} f(\rho\omega)\,\rho^{N-1}\,d\sigma(\omega)\,d\rho. \tag{1-30}$$

La ecuación 1-30 será empleada posteriormente cuando se requiera transformar la variable a coordenadas esféricas.

Teorema 1.2.8 *(Véase Evans (2010))*

a) Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ un campo escalar. Si f es continuo e integrable entonces,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\ dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f\ dS \right) dr,$$

para cada punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$.

b) En particular,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{B_r(x_0)} f\ dx \right) = \int_{\partial B_r(x_0)} f\ ds,$$

para cada $r > 0$.

Antes de finalizar este parágrafo conviene presentar un importante hecho para afirmar que una función integrable es aproximadamente continua en casi todo punto.

Teorema 1.2.9 *(Véase Evans (2010))* ***Diferenciación de Lebesgue***
Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ función localmente integrable. Entonces para todo $x_0 \in \mathbb{R}^N$ se verifica:

$$1) \qquad \lim_{r\to 0} \int_{B_r(x_0)} f(x)\,dx = f(x_0),$$

$$2) \qquad \lim_{r\to 0} \int_{B_r(x_0)} |\ f(x) - f(x_0)\ |\ \ dx = 0.$$

Para introducir las denominadas *fórmulas de Green* es necesario considerar subconjuntos abiertos y acotados de $\mathbb{R}^N$ cuya frontera sea suficientemente regular, para precisar:

Definición 1.2.15 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado y sea $k \in \mathbb{N}$. Se dice que la frontera de Ω es C^k si para cada $x_0 \in \partial\Omega$ existe una vecindad B de x_0 y una función $\gamma \in C^k(B)$, $k \in \mathbb{N}$ tal que*

1. $\Omega \cap B = \{\, x \ : \ \gamma(x) < 0 \,\}$
2. $\partial\Omega \cap B = \{\, x \ : \ \gamma(x) = 0 \,\}$
3. $\nabla\gamma(x) \neq 0$ *para* $x \in \partial\Omega \cap B$.

Si la frontera de Ω es C^1, entonces a lo largo de $\partial\Omega$ está definido el *vector normal exterior* $\mathbf{n} = (n_1, ..., n_N)$. Es posible calcular la derivada direccional con respecto al vector $\mathbf{n}$; en este caso dicha derivada recibe un nombre más específico.

Definición 1.2.16 *Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ campo escalar tal que $u \in C^1(\Omega)$. A la expresión $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ se le llama derivada normal exterior de u.*

Para los resultados que se formulan a continuación considere $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y acotado cuya frontera es C^1.

Teorema 1.2.10 *(Véase Evans (2010))* ***Teorema de Gauss-Green***
Sea $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ campo escalar. Si $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ entonces,

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)\, dx \ = \int_{\partial\Omega} u(x)\, n_i \ dS \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ N.$$

Teorema 1.2.11 *(Véase Evans (2010))* ***Integración por partes***
Sean u y v campos escalares definidos sobre $\overline{\Omega}$. Si $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, entonces,

$$\int_\Omega u_{x_i}(x)\, v(x) \ dx = -\int_\Omega u(x)\, v_{x_i}(x) \ dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\, v\,(n_i) \ dS \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ N.$$

Teorema 1.2.12 *(Véase Evans (2010))* ***Fórmulas de Green***
Sean u y v campos escalares definidos sobre $\overline{\Omega}$. Si $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ entonces,

$$1) \quad \int_\Omega v(x)\, \Delta\, u(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} v(x)\, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) \ d\sigma(x) - \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \ dx,$$

$$2) \quad \int_\Omega (\, v(x)\, \Delta\, u(x) \, - \, u(x)\, \Delta\, v(x)\,) \ dx = \int_{\partial\Omega} \left(v(x)\, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) \, - \, u(x)\, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(x) \right) \ d\sigma(x),$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior y $d\sigma$ el elemento de área sobre $\partial\Omega$.

Un caso particular de la primera fórmula de Green es cuando $v = 1$; obsérvese que,

$$\begin{aligned}\int_\Omega v(x)\,\Delta\, u(x)\ \ dx &= \int_\Omega 1\ \Delta\, u(x)\ \ dx \\ &= \int_{\partial\Omega} 1\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\, d\sigma(x) - \int_\Omega \langle\, \nabla\, u,\, \nabla\,(1)\,\rangle\ \ dx.\end{aligned}$$

Cómo el $\nabla\,(1) = \mathbf{0}$ se obtiene,

$$\int_\Omega \Delta\, u(x)\ \ dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\ \ d\sigma(x). \tag{1-31}$$

1.3. Ecuaciones en derivadas parciales

En esta sección se define el término *ecuación en derivadas parciales* y se presenta su clasificación en derivadas parciales de segundo orden. Posteriormente se concentra la atención en el estudio de las funciones solución de la *ecuación de Laplace*, considerando el caso $N = 2$ en el plano complejo y las *funciones holomorfas*. Para finalizar se propone el problema de Dirichlet y se describe la construcción de Perron; método para resolver el problema en conjuntos abiertos, acotados y conexos del espacio euclidiano N-dimensional. De referencia se consideran los textos Mijailov (1982), Peral Alonso (2004), Churchill y Ward Brown (1992).

1.3.1. Ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden

Se llama ecuaciones diferenciales aquellas cuyas incógnitas son funciones de una o varias variables, con la particularidad de que en dichas ecuaciones figuran no sólo las propias funciones sino también sus derivadas. En el caso en que las incógnitas son funciones de dos o más variables se denominan *ecuaciones en derivadas parciales*. Una ecuación en derivadas parciales de una función incógnita u de N variables $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_N$ se denomina ecuación de N-ésimo orden, si contiene siquiera una derivada de orden N y no contiene derivadas de orden superior a N; es decir la ecuación,

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^N u}{\partial x_N^N}\right) = 0. \tag{1-32}$$

En un dominio $A \subset \mathbb{R}^N$ considérese una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden, es decir una ecuación de tipo,

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\mathbf{x})\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\ +\ \sum_{i=1}^{N} b_i(\mathbf{x})\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\ +\ c(\mathbf{x})\, u\ +\ f(\mathbf{x}) = 0, \tag{1-33}$$

con $a_{ij} = a_{ji}$ y $\mathbf{x} = (x_1,\ ...,\ x_N)$. Las funciones $a_{ij}(\mathbf{x})$, $b_i(\mathbf{x})$ y $c(\mathbf{x})$ se denominan coeficientes de la ecuación (1-33) y la función f término independiente.

La matriz $A(\mathbf{x})$ compuesta por los coeficientes $a_{ij}(\mathbf{x})$ es simétrica y por consiguiente tiene todos sus *valores propios* reales. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto arbitrario de A y sean $\lambda_1(\mathbf{x}_0)$, ..., $\lambda_N(\mathbf{x}_0)$ los valores propios de la matriz $A(\mathbf{x}_0)$. Se designa con N_+ el número de autovalores positivos, N_- el número de autovalores negativos y con N_0 el número de autovalores nulos.

Definición 1.3.1 ***Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden***

i) La ecuación (1-33) *es de tipo elíptico en el punto* x_0 *si* $N_+ = N$ *o* $N_- = N$.

ii) La ecuación (1-33) *se denomina ecuación de tipo hiperbólico en* x_0 *si* $N_+ = N - 1$ *y* $N_- = 1$ *o si* $N_- = N - 1$ *y* $N_+ = 1$.

iii) La ecuación (1-33) *es de tipo parabólico en el punto* x_0 *si* $N_0 > 0$.

iv) La ecuación (1-33) *es de tipo ultra-hiperbólico en* x_0 *si* $N_0 = 0$ *y* $1 < N_+ < N - 1$.

En este texto se estudiarán *ecuaciones de tipo elíptico* en subconjuntos abiertos, conexos y acotados de $\mathbb{R}^N$. Particularmente se considera la *ecuación de Laplace*,

$$\Delta u = 0, \tag{1-34}$$

y su contraparte no homogénea, la *ecuación de Poisson*,

$$\Delta u = f, \tag{1-35}$$

en ambos casos Δ es el operador *Laplaciano* definido por la ecuación (1-24).

1.3.2. Funciones armónicas

Definición 1.3.2 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *abierto, conexo y acotado. Sea* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *campo escalar tal que* $u \in C^2(\Omega)$. *Se dirá que* u *es armónica si* $\Delta u = 0$.

En este sentido, una función de valor real se dice armónica en un dominio dado Ω si sobre ese dominio tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden y satisface la ecuación (1-34). A continuación se considera la definición de función de variable compleja, para luego presentar una forma de obtener *funciones armónicas* en dimensión $N = 2$.

Definición 1.3.3 ***Función de variable compleja.***
Sea S *un conjunto de números complejos. Una función* f *definida sobre* S *es una regla que asigna a cada* z *en* S *un número complejo* w. *El número* w *se llama el valor de* f *en* z *y se denota por* $f(z)$, $\quad w = f(z)$.

Definición 1.3.4 *Una función f de una variable compleja z se dice análitica en un conjunto abierto si en todo punto de ese abierto f puede ser expresada en forma de serie de potencias, es decir,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x + i\,y)^n,$$

con a_n constantes complejas.

Usualmente se emplean los términos *holomorfas* y *regulares* para referirse a las funciones análiticas, (Churchill y Ward Brown 1992). $f(z)$ puede ser expresado en términos de un par de funciones de valor real; $f(z) = u\,(x, y) + i\,v\,(x, y)$ siendo u y v parte real e imaginaria respectivamente. Supuesta f análitica en un conjunto abierto sus funciones componentes han de satisfacer las ecuaciones de Cauchy - Riemman, esto es,

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x. \tag{1-36}$$

Al derivar estas expresiones se llega a deducir el próximo teorema. Este resultado tiene gran interés en la teoría de funciones analíticas y es fuente de funciones armónicas.

Teorema 1.3.1 *(Véase Churchill y Ward Brown (1992)) Sea $f(z) = u(x, y) + i\,v\,(x, y)$ una función en el plano complejo con $u\,(x, y)$, $v\,(x, y)$, partes real e imaginaria respectivamente. Si f es análitica sobre un dominio D, sus funciones componentes son armónicas en D.*

Las soluciones de la ecuación de Laplace en $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, no tienen la relación con las funciones de variable compleja que presentan si $N = 2$; no obstante, como se verá en el capítulo 3, tienen las propiedades importantes de las funciones armónicas de dos variables; como la *propiedad del valor medio* y verificación del *principio del máximo*.

1.3.3. El problema de Dirichlet

Uno de los propósitos de este estudio es demostrar la existencia de soluciones de la ecuación de Laplace y de la ecuación de Poisson y varios resultados referentes al *problema de Dirichlet* para dichas ecuaciones.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado. Sea $u : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar con $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Supóngase las funciones $f \in C(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$ fijas. Considérese el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson,

$$(PDP) \qquad \begin{cases} \Delta\, u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \quad u(y) = g(y), & y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

siendo Δ el operador *Laplaciano*. Para el problema anterior, se introduce el concepto de solución clásica.

Definición 1.3.5 *Una solución clásica del problema de Dirichlet (PDP) es cualquier función u, con $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que verifica $\Delta u(x) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$ y $u(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$.*

Se denomina problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace al problema (PDP) en el caso en que $f = 0$, es decir,

$$(PDL) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(y) = g(y), & y \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Una vez establecido el concepto de solución, el análisis de cualquiera de estos problemas pasa en primera instancia por establecer resultados de existencia y unicidad de solución. Un método importante, para probar existencia, lo constituye el denominado *método de Perron* que se describe superficialmente a continuación.

1.3.4. Descripción Método de Perron

Cuando el problema de Dirichlet para la *ecuación de Laplace* (PDL) se plantea sobre un conjuto abierto, conexo y acotado Ω de $\mathbb{R}^n$ y g denota una función de valor real continua sobre la frontera $\partial\Omega$, puede definirse la llamada construcción de Perron.

Si se define el conjunto de Perron Σ_g como el conjunto de funciones continuas de valor real u, definidas sobre $\overline{\Omega}$ que verifican $\Delta u \geq 0$ sobre Ω y que satisfacen $u \leq g$ sobre $\partial\Omega$; se puede probar que la función $\omega_g(x) = \sup\{ v(x) \, : \, v \in \Sigma_g \}$ es solución del problema de Dirichlet (PDL) cuando la frontera es tal que el problema admite solución única. Estos resultados de existencia están basados en trabajos de H. Poincaré[2] en 1887 que fueron desarrollados y simplificados por O. Perron[3] en 1923. Precisamente los resultados que se utilizan para abordar el problema de Dirichlet (PDL) con el método de Perron, son la solución en una bola de $\mathbb{R}^N$ y las propiedades de las funciones armónicas. En dichos aspectos se centran los próximos capítulos.

[2] Jules Henri Poincaré (1854-1912), matemático francés. Desarrollo un nuevo método en el estudio de las ecuaciones diferenciales y fue el primero en analizar sus propiedades geométricas.

[3] Oskar Perron (1880-1975), matemático alemán. Perfeccionó el método de Poincaré para resolver el problema de Dirichlet para ecuaciones diferenciales parciales elípticas.

2 Fórmula de Representación Integral

Lo que caracteriza al hombre de ciencia no es
la posesión del conocimiento o de verdades irrefutables,
sino la investigación desinteresada e incesante de la verdad.

K. Popper

En este capítulo se inicia formalmente el estudio del problema de Dirichlet. Se introduce la propiedad de invarianza del operador Laplaciano, argumento primordial para construir la denominada solución fundamental. Con dicha función será posible encontrar una representación integral para las funciones soluciones; esto permitirá probar la existencia de solución para el problema de Dirichlet en una bola del espacio euclídeano N-dimensional.

2.1. La invarianza del operador Laplaciano

Una buena estrategia para estudiar algunas ecuaciones diferenciales parciales es primero identificar alguna solución implícita y luego, siempre que la ecuación sea lineal, armar una solución general; sin embargo, en la búsqueda de soluciones es a menudo sensato restringuir la atención a la clase de funciones con ciertas propiedades de simetría. Una de las principales características de la *ecuación de Laplace*,

$$\Delta u = 0 \qquad u \in C^2(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^N, \tag{2-1}$$

es su *simetría esférica*; la ecuación se conserva bajo movimientos rígidos; rotaciones y traslaciones. Para estudiar[1] las propiedades de invarianza del operador Laplaciano se considera en primer lugar el caso bidimensional. Una *rotación* en el plano es una transformación $g \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por,

$$(x, y) \longrightarrow (x', y') = (\ x \cos\alpha \ + \ y\,sen\,\alpha\ , \ -\,x\,sen\,\alpha \ + \ y\cos\alpha\ ), \qquad \text{(2-2)}$$

para algún ángulo $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Al derivar, aplicando la regla de la cadena se sigue,

$$\begin{aligned} u_x(x', y') &= u_{x'}(x', y') \cos\alpha - u_{y'}(x', y')\,sen\,\alpha \\ u_y(x', y') &= u_{x'}(x', y')\,sen\,\alpha - u_{y'}(x', y') \cos\alpha. \end{aligned}$$

Las derivadas parciales de segundo orden son,

$$\begin{aligned} u_{xx}(x', y') &= \frac{\partial}{\partial x'}\left[u_{x'}(x', y') \cos\alpha \ - \ u_{y'}(x', y')\,sen\,\alpha\right] \cos\alpha \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y'}\left[u_{x'}(x', y') \cos\alpha \ - \ u_{y'}(x', y')\,sen\,\alpha\right] sen\,\alpha. \\ &= u_{x'x'}(x', y') \cos^2\alpha \ - \ u_{x'y'}(x', y')\,sen\,\alpha \cos\alpha \\ &\quad - u_{y'x'}(x', y')\,sen\,\alpha \cos\alpha \ + \ u_{y'y'}(x', y')\,sen^2\alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{yy}(x', y') &= \frac{\partial}{\partial x'}\left[u_{x'}(x', y')\,sen\,\alpha \ + \ u_{y'}(x', y') \cos\alpha\right] sen\,\alpha \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y'}\left[u_{x'}(x', y')\,sen\,\alpha \ + \ u_{y'}(x', y') \cos\alpha\right] \cos\alpha. \\ &= u_{x'x'}(x', y')\,sen^2\alpha \ + \ u_{x'y'}(x', y')\,sen\,\alpha \cos\alpha \\ &\quad + u_{y'x'}(x', y')\,sen\,\alpha \cos\alpha \ + \ u_{y'y'}(x', y') \cos^2\alpha. \end{aligned}$$

Las derivadas parciales mixtas no se consideran aquí, ya que para el operador Laplaciano no tienen interés. Entonces,

$$\begin{aligned} u_{x\,x}(x', y') \ + \ u_{y\,y}(x', y') &= u_{x'\,x'}(x', y')\,(sen^2\alpha \ + \ \cos^2\alpha) \\ &\quad + u_{y'\,y'}(x', y')\,(sen^2\alpha \ + \ \cos^2\alpha) \\ &= u_{x'\,x'}(x', y') \ + \ u_{y'\,y'}(x', y'). \end{aligned}$$

Luego el operador Laplaciano es invariante bajo rotaciones en el plano. Así mismo, una *traslación* en el plano es una transformación $f \ : \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por,

$$(x, y) \longrightarrow (x', y') = (x + a\,,\, y + b) \qquad a, b \in \mathbb{R}. \qquad \text{(2-3)}$$

[1]Como referencia de esta sección véase Strauss (2008), Axler, Bourdon y Ramey (2001).

Si se aplican procesos de derivación, como en el caso anterior, se llega al mismo resultado. En resumen, se ha probado el resultado siguiente.

Proposición 2.1.1 *El operador Laplaciano Δ es invariante bajo movimientos rígidos en el plano. Esto es, Δ es invariante bajo cualquier transformación en el plano que sea la composición de rotaciones y traslaciones.*

Desde luego, no es suficiente con haber establecido el resultado para el caso $N = 2$. En lo que sigue se verá que la propiedad de *invarianza* también se cumple en cualquier otra dimensión del espacio euclídeo. En general, para un punto fijo $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y una función u, continua sobre Ω, la x_0-*trasladada* de u es la función sobre $\Omega + x_0$ cuyo valor en x es $u(x - x_0)$. Las traslaciones de funciones armónicas son armónicas.

Sea $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *isometría*, definición (1.1.7). Si u es una función continua sobre Ω la función $u \circ T$ se denomina rotación de u. A continuación se mostrará que el operador Laplaciano conmuta con isometrías, más precisamente:

Teorema 2.1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y $u \in C^2(\Omega)$. Si T es isometría, entonces sobre $T^{-1}(\Omega)$ se verifica,*

$$\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T. \tag{2-4}$$

Prueba: Para probar este resultado se usará notación matricial. Sea $T = [t_{jk}]$ la matriz transformación de T relativa a la base estándar de $\mathbb{R}^N$. En virtud de la ecuación (1-23) se sigue,

$$D_m (u \circ T) = \sum_{j=1}^{N} t_{jm} \, (D_j \, u) \circ T,$$

donde D_m denota la derivada parcial con respecto a la m-ésima variable coordenada. Derivando una vez más y sumando sobre m se obtiene,

$$\begin{aligned} \Delta (u \circ T) &= \textstyle\sum_{m=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} t_{jm} t_{jm} \, (D_j D_j \, u) \circ T \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{N} t_{jm} t_{jm} \right) (D_j D_j \, u) \circ T. \end{aligned}$$

Cada vector columna de la matriz transformación de T es ortonormal, luego,

$$\begin{aligned} \Delta (u \circ T) &= \sum_{j=1}^{N} (D_j D_j \, u) \circ T \\ &= (\Delta u) \circ T, \end{aligned}$$

quedando demostrado. □

El resultado anterior pone de manifiesto que las rotaciones de *funciones armónicas* resultan ser también funciones armónicas. Estas propiedades de invarianza tienen gran relevancia en el proceso que sigue.

2.2. Solución fundamental de la ecuación de Laplace

Los resultados estudiados en la sección anterior hacen posible que existan soluciones de la ecuación de Laplace que tengan una característica especial; que sean invariantes bajo rotaciones cerca de un punto $y \in \mathbb{R}^N$; es decir que tengan el mismo valor en todos los puntos x a la misma distancia de y. En seguida[2] se estudia este tipo de funciones, llamadas comunmente *soluciones radiales* y que tienen la forma,

$$v(x) = \psi(r), \tag{2-5}$$

donde,

$$r =| x - y |= \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2}, \tag{2-6}$$

representa la *distancia euclidiana* entre x e y. Se procede a calcular el valor del Laplaciano para funciones radiales; nótese que para $i = 1, \; ..., \; N$

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{1}{2\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i - y_i)^2}} 2(x_i - y_i) \\ &= \frac{x_i - y_i}{r},\end{aligned}$$

de modo que,

$$v_{x_i}(x) = \psi'(r) \; \frac{x_i - y_i}{r},$$

y así,

$$v_{x_i x_i}(x) = \psi''(r) \, (\frac{x_i - y_i}{r})^2 + \psi'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{(x_i - y_i)^2}{r^3} \right). \tag{2-7}$$

Por consiguiente, al obtener las derivadas parciales de segundo orden hasta el índice $i = N$ y sumarlas se sigue que,

$$\begin{aligned} v_{x_i x_i}(x) + ... + v_{x_N x_N}(x) &= \psi''(r) \left(\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 \right) + \psi'(r) \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{r} - \frac{(x_i - y_i)^2}{r^3} \right) \\ &= \psi''(r) \left(\frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 \right) + \psi'(r) \left(\frac{N}{r} \right) \\ &- \psi'(r) \left(\frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 \right) \\ &= \psi''(r) + \frac{N-1}{r} \psi'(r), \end{aligned}$$

[2]En este parágrafo se sigue la referencia John (1978). También se consultó (Peral Alonso 2004, Evans 2010, Gilbarg y Trudinger 2001)

siendo N la dimensión del espacio. En consecuencia, las *soluciones radiales* de la ecuación de Laplace vienen dadas por las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden,

$$\psi''(r) + \frac{N-1}{r}\psi'(r) = 0. \tag{2-8}$$

Para resolver la ecuación anterior considérese $p = \psi'$ y así (2-8) se convierte en,

$$p'(r) + \frac{N-1}{r}p(r) = 0, \tag{2-9}$$

es decir, una ecuación separable. Para el caso $N = 2$ al resolver la ecuación separable (2-9) se sigue,

$$\frac{p'(r)}{p(r)} = -\frac{1}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad ln(p) = -ln(r) + ln(a) \qquad \Longrightarrow \qquad p = \frac{a}{r}.$$

Como $p = \psi'$ entonces,

$$\psi' = \frac{a}{r} \qquad \text{y así} \qquad \psi(r) = a\, ln(r) + b.$$

Cuando $N > 2$,

$$\frac{p'(r)}{p(r)} = \frac{1-N}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad ln(p) = (1-N)\, ln(r) \qquad \Longrightarrow \qquad p = a\, r^{1-N},$$

y de forma análoga se sigue,

$$\psi' = a\, r^{1-N} \qquad \text{y entonces} \qquad \psi(r) = \frac{a}{(2-N)}\, r^{2-N} + b.$$

En resumen para C y b constantes arbitrarias,

$$\psi(r) = \begin{cases} C\, ln(r) + b, & \text{si } N = 2\ , \\ \dfrac{C}{r^{N-2}} + b, & \text{si } N \geq 3. \end{cases} \tag{2-10}$$

La función $v(x) = \psi(r)$ satisface (2-1) para $r > 0$, es decir, para los puntos $x \neq y$. Sin embargo cuando $r = 0$ dichas soluciones son singulares, esta singularidad es clave en la utilidad de dichas funciones. Por razones de normalización se toman en particular las soluciones radiales,

$$\psi(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} ln(r), & \text{si } N = 2\ , \\ -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N}\dfrac{1}{r^{N-2}}, & \text{si } N \geq 3, \end{cases} \tag{2-11}$$

siendo ω_N la medida de la esfera unitaria. Nótese que toda función de la forma,

$$v(x) = \psi(\mid x - y \mid), \tag{2-12}$$

con $y \in \mathbb{R}^N$ fijo y ψ dada por la ecuación (2-10), es una función infinitamente diferenciable salvo en el punto y, además el valor de su Laplaciano es nulo, es decir en $\mathbb{R}^N - \{y\}$ se satisface $\Delta\, v(x) = 0$. Con base en esto se introduce la siguiente definición.

Definición 2.2.1 *Se denomina solución fundamental de la ecuación de Laplace en* $\mathbb{R}^N$ *a la función* Φ *definida en el conjunto* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \ : \ x \neq y\}$, *por*

$$\Phi(\mid x - y \mid) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\, ln(\mid x - y \mid), & para \ \ N = 2 \ , \\ -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N}\, \dfrac{1}{\mid x - y \mid^{N-2}}, & para \ \ N \geq 3, \end{cases} \tag{2-13}$$

donde ω_N *es la medida superficial de la esfera unidad de* $\mathbb{R}^N$ *y* $\mid \cdot \mid$ *la norma euclídea.*

De la ecuación (2-13) se deduce que la función Φ está bien definida en todo $\mathbb{R}^N$ salvo en y. Nótese también que Φ se puede derivar infinitamente, es decir $\Phi \in C^\infty(A)$. Además para todo par $(x, y) \in A$ el Laplaciano en la variable x es nulo, $\Delta_x \Phi(\mid x - y \mid) = 0$.

A continuación se obtienen algunas estimaciones de la solución fundamental Φ definida por (2-13), en dimensión $N \geq 3$. Al calcular las derivadas parciales de primer orden de la función Φ se obtiene,

$$\begin{aligned} \Phi_{x_1}(\mid x - y \mid) &= -\frac{1}{(N-2)\omega_N}\,(2 - N) \mid x - y \mid^{1-N} \frac{1}{2 \mid x - y \mid}\ 2\,(x_1 - y_1) \\ &= \frac{1}{\omega_N} \mid x - y \mid^{-N} (x_1 - y_1) \end{aligned} \tag{2-14}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{x_2}(\mid x - y \mid) &= -\frac{1}{(N-2)\omega_N}\,(2 - N) \mid x - y \mid^{1-N} \frac{1}{2 \mid x - y \mid}\ 2\,(x_2 - y_2) \\ &= \frac{1}{\omega_N} \mid x - y \mid^{-N} (x_2 - y_2), \end{aligned}$$

o de forma general para $i = 1, \ ..., \ N$;

$$\Phi_{x_i}(\mid x - y \mid) = \frac{1}{\omega_N} \mid x - y \mid^{-N} (x_i - y_i). \tag{2-15}$$

Con el resultado expresado en la ecuación (2-15) se calcula el *gradiente* de la función Φ de lo cual se deduce,

$$\nabla\Phi(\mid x - y \mid) = \frac{1}{\omega_N} \mid x - y \mid^{-N} (x_1 - y_1, \ x_2 - y_2, ..., x_N - y_N), \tag{2-16}$$

y por consiguiente la norma del vector gradiente resulta ser,

$$\begin{aligned} \mid \nabla\Phi(\mid x - y \mid) \mid &= \frac{1}{\omega_N} \mid x - y \mid^{-N} \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_N - y_N)^2} \\ &= \frac{1}{\omega_N} \mid x - y \mid^{-N} \mid x - y \mid \\ &= \frac{1}{\omega_N} \mid x - y \mid^{1-N}. \end{aligned} \tag{2-17}$$

Por otra parte, al obtener las derivadas parciales de primer orden de la función Φ_{x_1} definida por (2-14) se sigue que,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{x_1\,x_1}(\mid x-y \mid) &= \frac{1}{\omega_N}\Big(\mid x-y\mid^{-N} + (x_1-y_1)(-N) \mid x-y \mid^{-N-1} \\
&\quad \frac{1}{2\mid x-y\mid}\; 2\,(x_1-y_1)\Big) \\
&= \frac{1}{\omega_N}\left(\mid x-y\mid^{-N} - N\,(x_1-y_1)^2 \mid x-y\mid^{-N-2}\right) \\
&= \frac{1}{\omega_N} \mid x-y\mid^{-(N+2)} \left[\mid x-y\mid^2 - N\,(x_1-y_1)^2\right].
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{x_1x_2}(\mid x-y\mid) &= \frac{1}{\omega_N}(x_1-y_1)(-N) \mid x-y\mid^{-N-1} \frac{1}{2\mid x-y\mid}\; 2\,(x_2-y_2) \\
&= \frac{1}{\omega_N}\left[-N\,(x_1-y_1)(x_2-y_2) \mid x-y\mid^{-(N+2)}\right],
\end{aligned}
$$

y también,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{x_1x_3}(\mid x-y\mid) &= \frac{1}{\omega_N}(x_1-y_1)(-N) \mid x-y\mid^{-N-1} \frac{1}{2\mid x-y\mid}\; 2\,(x_3-y_3) \\
&= \frac{1}{\omega_N}\left[-N\,(x_1-y_1)(x_3-y_3) \mid x-y\mid^{-(N+2)}\right].
\end{aligned}
$$

Análogamente para la función Φ_{x_2},

$$
\begin{aligned}
\Phi_{x_2x_1}(\mid x-y\mid) &= \frac{1}{\omega_N}(x_2-y_2)(-N) \mid x-y\mid^{-N-1} \frac{1}{2\mid x-y\mid}\; 2\,(x_1-y_1) \\
&= \frac{1}{\omega_N}\left[-N\,(x_2-y_2)(x_1-y_1) \mid x-y\mid^{-(N+2)}\right] \\
\Phi_{x_2x_2}(\mid x-y\mid) &= \frac{1}{\omega_N}\Big(\mid x-y\mid^{-N} + (x_2-y_2)(-N) \mid x-y \mid^{-N-1} \\
&\quad \frac{1}{2\mid x-y\mid}\; 2\,(x_2-y_2)\Big) \\
&= \frac{1}{\omega_N}\left[\mid x-y\mid^{-N} - N\,(x_2-y_2)^2 \mid x-y\mid^{-N-2}\right] \\
&= \frac{1}{\omega_N} \mid x-y\mid^{-(N+2)} \left[\mid x-y\mid^2 - N\,(x_2-y_2)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\Phi_{x_2x_3}(\mid x-y\mid) &= \frac{1}{\omega_N}(x_2-y_2)(-N)\mid x-y\mid^{-N-1}\frac{1}{2\mid x-y\mid}\;2(x_3-y_3)\\ &= \frac{1}{\omega_N}\left[-N(x_2-y_2)(x_3-y_3)\mid x-y\mid^{-(N+2)}\right].\end{aligned}$$

En general las derivadas parciales de segundo orden de la función Φ se pueden escribir de la forma,

$$\Phi_{x_ix_j}(\mid x-y\mid)=\frac{1}{\omega_N}\left[\mid x-y\mid^2\;\delta_{ij}\,-\,N(x_i-y_i)(x_j-y_j)\right]\mid x-y\mid^{-(N+2)}, \qquad (2\text{-}18)$$

siendo δ_{ij} las *deltas de Kronecker*, es decir,

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0 & \text{para}\quad i\neq j,\\ 1 & \text{para}\quad i=j,\end{cases} \qquad (2\text{-}19)$$

con $i,\ j\ =\ 1,\ 2,\ ...,\ N$. Ahora bien, el vector de segundas derivadas parciales de la función Φ resulta ser,

$$\begin{aligned}\Phi_{x_ix_j}(\mid x-y\mid)= \;& \frac{1}{\omega_N}\mid x-y\mid^{-(N+2)}\;[\mid x-y\mid^2-N(x_1-y_1)^2\;,-N(x_1-y_1)\\ & (x_2-y_2),\ldots,-N(x_1-y_1)(x_N-y_N),\;-N(x_2-y_2)(x_1-y_1)\\ & ,\mid x-y\mid^2-N(x_2-y_2)^2,-N(x_2-y_2)(x_3-y_3),\ldots,\\ & -N(x_2-y_2)(x_N-y_N),\ldots,-N(x_N-y_N)(x_1-y_1),\ldots,\\ & -N(x_N-y_N)(x_{N-1}-y_{N-1}),\mid x-y\mid^2-N(x_N-y_N)^2],\end{aligned}$$

y su norma,

$$\begin{aligned}\mid\Phi_{x_ix_j}(\mid x-y\mid)\mid &= \frac{1}{\omega_N}\mid x-y\mid^{-(N+2)}\Big[\left(\mid x-y\mid^2-N(x_1-y_1)^2\right)^2+\ldots+\\ & \left(\mid x-y\mid^2-N(x_N-y_N)^2\right)^2+N^2(x_1-y_1)^2(x_2-y_2)^2\\ & +\ldots+N^2(x_1-y_1)^2(x_N-y_N)^2+N^2(x_2-y_2)^2(x_1-y_1)^2\\ & +N^2(x_2-y_2)^2(x_3-y_3)^2+\ldots+N^2(x_2-y_2)^2(x_N-y_N)^2\\ & +\ldots+N^2(x_N-y_N)^2(x_1-y_1)^2+\ldots+N^2(x_N-y_N)^2\\ & (x_{N-1}-y_{N-1})^2\Big]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Simplificando,

$$
\begin{aligned}
\mid \Phi_{x_i x_j}(\mid x-y \mid) \mid \;=\;& \frac{1}{\omega_N} \mid x-y \mid^{-(N+2)} \{\mid x-y \mid^4 -2N \mid x-y \mid^2 (x_1-y_1)^2 + \\
& N^2 (x_1-y_1)^4 + ...+ \mid x-y \mid^4 -2N \mid x-y \mid^2 (x_N-y_N)^2 \\
& + N^2 (x_2-y_2)^2 \,[\,(x_1-y_1)^2 + (x_3-y_3)^2 + ... + (x_N-y_N)^2\,] \\
& + ... + N^2 (x_N-y_N)^2 \,[\,(x_1-y_1)^2 + ... + (x_{N-1}-y_{N-1})^2\,]\,\}^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

entonces,

$$
\begin{aligned}
\mid \Phi_{x_i x_j}(\mid x-y \mid) \mid \;\leq\;& \frac{1}{\omega_N} \mid x-y \mid^{-(N+2)} \{N \mid x-y \mid^4 + N^2 (x_1-y_1)^2 \,[\,(x_1-y_1)^2 + ... \\
& + (x_N-y_N)^2\,] + N^2 (x_2-y_2)^2 \,[(x_1-y_1)^2 + ... + (x_N-y_N)^2\,] + \\
& ... + N^2 (x_N-y_N)^2 \,[\,(x_1-y_1)^2 + ... + (x_N-y_N)^2\,]\,\}^{\frac{1}{2}} ,
\end{aligned}
$$

ya que se sumaron N términos no negativos. Luego,

$$
\begin{aligned}
\mid \Phi_{x_i x_j}(\mid x-y \mid) \mid \;\leq\;& \frac{1}{\omega_N} \mid x-y \mid^{-(N+2)} [N \mid x-y \mid^4 + N^2 (x_1-y_1)^2 \mid x-y \mid^2 + \\
& N^2 (x_2-y_2)^2 \mid x-y \mid^2 + ... + N^2 (x_N-y_N)^2 \mid x-y \mid^2]^{\frac{1}{2}} \\
=\;& \frac{1}{\omega_N} \mid x-y \mid^{-(N+2)} \{N \mid x-y \mid^4 + N^2 \mid x-y \mid^2 \,[\,(x_1-y_1)^2 + \\
& (x_2-y_2)^2 + ... + (x_N-y_N)^2\,]\,\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Por tanto se obtiene,

$$
\begin{aligned}
\mid \Phi_{x_i x_j}(\mid x-y \mid) \mid \;\leq\;& \frac{1}{\omega_N} \mid x-y \mid^{-(N+2)} [N \mid x-y \mid^4 + N^2 \mid x-y \mid^2 \mid x-y \mid^2]^{\frac{1}{2}} \\
=\;& \frac{1}{\omega_N} \mid x-y \mid^{-(N+2)} (N + N^2)^{\frac{1}{2}} (\mid x-y \mid^4)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

o finalmente,

$$
\begin{aligned}
\mid \Phi_{x_i x_j}(\mid x-y \mid) \mid \;\leq\;& \frac{(N + N^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega_N} \mid x-y \mid^{-(N+2)} \mid x-y \mid^2 \\
=\;& \frac{(N + N^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega_N} \mid x-y \mid^{-N}.
\end{aligned}
$$

Haciendo $C_N = \sup \dfrac{(N + N^2)^{\frac{1}{2}}}{\omega_N}$ se sigue,

$$| \Phi_{x_i x_j}(| x - y |) | \leq C_N \; | x - y |^{-N} . \tag{2-20}$$

Las fórmulas (2-18) y (2-20) ponen de manifiesto que las derivadas parciales de segundo orden de la solución fundamental no son integrables. En efecto,

$$\int_{B_r(x)} \Phi_{x_i x_j}(| x-y |)\, dy = \int_{B_r(x)} \frac{1}{\omega_N} \left[| x - y |^{-N} \delta_{ij} - N \, | x - y |^{-(N+2)} (x_i - y_i)(x_j - y_j) \right] dy,$$

y tomando *coordenadas esféricas* con origen en el punto x resulta,

$$\int_{B_r(x)} \Phi_{x_i x_j}(| x - y |) \; dy = \frac{1}{\omega_N} \int_0^r \rho^{N-1} \int_{S^{N-1}} \frac{1}{\rho^N} \; [\, N \, (\omega_i \, \omega_j) \; - \; 1 \,] \; d\sigma(\omega) \; d\rho,$$

en consecuencia,

$$\int_{B_r(x)} \Phi_{x_i x_j}(| x - y |) \; dy \; = \; c_N \int_0^r \frac{d\rho}{\rho} \; = \; \infty, \tag{2-21}$$

es decir, la integral en una pequeña bola centrada en x no es finita.

2.3. Fórmula de representación de Green

Una propiedad importante de la *solución fundamental* se pone de manifiesto a continuación,[3] se trata de representar en forma integral, a partir de las fórmulas de Green y la solución fundamental, las funciones en $C^2(\Omega)$.

Teorema 2.3.1 ***Fórmula de representación de Green***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado. Sea y un punto de Ω. Si $\partial\Omega \in C^1$ entonces para cada función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ se verifica,

$$u(y) = \int_\Omega \Phi(|x - y|)\, \Delta u(x)\, dx - \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(|x - y|) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) \; - \; u(x) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x - y|) \right) d\sigma(x). \tag{2-22}$$

Prueba: Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, $y \in \Omega$ fijo y $\rho > 0$ lo suficientemente pequeño de modo que $B_\rho(y) \subset \Omega$. Se considera la solución fundamental definida por (2-13), que como se dijo antes, en el punto $x = y$ presenta singularidad. Para usar las fórmulas de Green es necesario aislar dicha singularidad en una pequeña bola entorno del punto singular.

[3] Para este apartado se consultaron las referencias (John 1978, Peral Alonso 2004, Malpica Vega y Lizarazo Gayón 2005)

Considérese $\Omega_\rho = \Omega - B_\rho(y)$. Aplicando la segunda fórmula de Green, teorema (1.2.12), a las funciones $u(x)$ y $\Phi(|\, x-y\,|)$ sobre Ω_ρ se deduce,

$$\int_{\Omega_\rho} (\Phi(|x-y|)\,\Delta u(x) - u(x)\,\Delta\Phi(|x-y|))\,dx = \int_{\partial\Omega_\rho} \left(\Phi(|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - u(x)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\right) d\sigma(x),$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior a $\partial\Omega_\rho$ y $d\sigma$ el elemento de área sobre $\partial\Omega_\rho$. Puesto que $\Phi(|x-y|)$ es armónica sobre Ω_ρ se obtiene,

$$\int_{\Omega_\rho} \Phi(|x-y|)\;\Delta u(x)\,dx = \int_{\partial\Omega_\rho} \left(\Phi(|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - u(x)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\right) d\sigma(x). \quad \text{(2-23)}$$

Se procede a evaluar límite cuando $\rho \to 0$; nótese que si $\rho \to 0$ entonces la medida de $B_\rho(y)$ tiende a cero y entonces el término de la izquierda en (2-23) verifica que ,

$$\lim_{\rho\to 0} \int_{\Omega_\rho} \Phi(|x-y|)\;\Delta u(x)\,dx = \int_{\Omega} \Phi(|x-y|)\;\Delta u(x)\,dx, \quad \text{(2-24)}$$

por tratarse de una función integrable. Ahora bien $\partial\Omega_\rho$ es la unión de la frontera de Ω con la esfera $S_\rho(y)$, luego el término de la derecha en (2-23) tiene un sumando que no depende del valor ρ:

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_\rho} \left[\Phi(|y-x|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - u(x)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\right] d\sigma(x) = &\int_{\partial\Omega} \left[\Phi(|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - u(x)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\right] d\sigma(x)\\ &+ \int_{S_\rho(y)} \left[\Phi(|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - u(x)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\right] d\sigma(x).\end{aligned}$$

Por consiguiente, si se hace tender ρ a cero sólo es necesario evaluar el límite en la integral sobre la esfera $S_\rho(y)$ obteniendo,

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0} \int_{S_\rho(y)} (\Phi\,|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - u(x)\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|y-x|))\,d\sigma(x) = \\ \lim_{\rho\to 0} \int_{S_\rho(y)} \Phi\,(|x-y|)\;\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\,d\sigma(x) - \lim_{\rho\to 0} \int_{S_\rho(y)} u(x)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\,d\sigma(x).\end{aligned} \quad \text{(2-25)}$$

Obsérvese que sobre $S_\rho(y)$,

$$\Phi(|x-y|) = \frac{-1}{(N-2)\,\omega_N\,\rho^{N-2}}, \quad \text{(2-26)}$$

es decir Φ es constante,

$$\int_{S_\rho(y)} (\Phi\,|x-y|\,)\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\,d\sigma(x) \;=\; \frac{1}{(N-2)\,\omega_N\,\rho^{N-2}}\int_{S_\rho(y)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\;\,d\sigma(x),$$

y aplicando (1-31) la expresión anterior se convierte en,

$$\int_{S_\rho(y)} (\Phi\,|x-y|)\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\,d\sigma(x) \;=\; \frac{1}{(N-2)\omega_N\,\rho^{N-2}}\int_{B_\rho(y)} \Delta\, u(x)\,dx. \tag{2-27}$$

Por conveniencia se opera en (2-27) del siguiente modo,

$$\int_{S_\rho(y)} (\Phi\,|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\,d\sigma(x) \;=\; \frac{1}{(N-2)\omega_N\,\rho^{N-2}}\ \frac{\omega_N}{N}\rho^N\left(\frac{N}{\omega_N\rho^N}\int_{B_\rho(y)} \Delta\, u(x)\,dx\right),$$

siendo $\dfrac{\omega_N}{N}\rho^N$ la medida de la bola $B_\rho(y)$. Cuando ρ tiende a cero,

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{S_\rho(y)} \Phi(|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\,d\sigma\,(x) \;=\; \lim_{\rho\to 0}\left[\frac{1}{(N-2)\,\omega_N\,\rho^{N-2}}\ \frac{\omega_N}{N}\,\rho^N\left(\frac{N}{\omega_N\rho^N}\int_{B_\rho(y)} \Delta u(x)\,dx\right)\right],$$

la continuidad de Δu permite deducir que,

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{S_\rho(y)} \Phi(|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\,d\sigma(x) \;=\frac{1}{(N-2)\,N}\left(\lim_{\rho\to 0}\ \ \rho^2\right)\left(\lim_{\rho\to 0}\ \frac{N}{\omega_N\,\rho^N}\int_{B_\rho(y)} \Delta u(x)\,dx\right),$$

es decir,

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{S_\rho(y)} (\Phi\,|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\;\,d\sigma(x) \;=\; 0. \tag{2-28}$$

Resta evaluar límite $\rho\to 0$ en el otro término de la ecuación (2-25). Puesto que,

$$\Phi\,(|x-y|) \;=\; \frac{-1}{(N-2)\,\omega_N\,|x-y|^{N-2}},$$

la derivada parcial de primer orden con respecto a cualquier componente, como se vio en (2-15), está dada por,

$$\Phi_{x_i}(|\,x-y\,|) \;=\; \frac{1}{\omega_N}\ |\,x-y\,|^{-N}\ (x_i-y_i),$$

y el vector gradiente, obtenido en la ecuación (2-17) por,

$$\nabla\,\Phi(|\,x-y\,|) \;=\; \frac{1}{\omega_N}\,\frac{(x-y)}{|x-y|^N}.$$

Ahora observése que la *normal exterior* a Ω_ρ en un punto de $S_\rho(y)$ está dada por la normal interior a $S_\rho(y)$ en dicho punto. Si $x \in S_\rho(y)$ la normal exterior unitaria a $\partial\Omega_\rho$ viene dada por,

$$\mathbf{n} = -\frac{x-y}{|x-y|}, \tag{2-29}$$

y entonces al aplicar (1-21) se obtiene,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|) &= \frac{1}{\omega_N}\frac{(x-y)}{|x-y|^N} \cdot -\frac{(x-y)}{|x-y|} \\
&= -\frac{1}{\omega_N}\frac{(x-y)}{|x-y|^N} \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|} \\
&= -\frac{1}{\omega_N}\frac{1}{|x-y|^N}\frac{1}{|x-y|}(x-y)\cdot(x-y)\,.
\end{aligned} \tag{2-30}$$

Sin embargo $(x-y)\cdot(x-y) = |x-y|^2$, luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|) &= -\frac{1}{\omega_N}\frac{1}{|x-y|^N}\;|x-y| \\
&= -\frac{1}{\omega_N\,|x-y|^{N-1}}.
\end{aligned} \tag{2-31}$$

Por la expresión (2-31) se sigue,

$$\begin{aligned}
\int_{S_\rho(y)} u(x)\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\,d\sigma(x) &= \int_{S_\rho(y)} u(x)\left(-\frac{1}{\omega_N\,|x-y|^{N-1}}\right)\,d\sigma(x) \\
&= -\int_{S_\rho(y)} u(x)\frac{1}{\omega_N\rho^{N-1}}\;d\sigma(x) \\
&= -\frac{1}{\omega_N\rho^{N-1}}\int_{S_\rho(y)} u(x)\;d\sigma(x),
\end{aligned}$$

y en consecuencia cuando $\rho \longrightarrow 0$ la continuidad de u y el teorema (1.2.7) permiten concluir que,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\omega_N\,\rho^{N-1}}\int_{S_\rho(y)} u(x)\;d\sigma(x) = u(y). \tag{2-32}$$

Para obtener (2-22) y en consecuencia haber demostrado el teorema basta tomar límites para $\rho \to 0$ en la ecuación (2-23) y utilizar los resultados obtenidos en (2-24), (2-28) y (2-32); esto permite concluir que,

$$\int_\Omega \Phi(|x-y|)\,\Delta u(x)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left[\Phi(|x-y|)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - u(x)\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\right]d\sigma(x) + u(y),$$

y por tanto,

$$u(y) = \int_\Omega \Phi(|x-y|)\,\Delta u(x)\,dx - \int_{\partial\Omega}\left(\Phi(|x-y|)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - u(x)\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\right)\,d\sigma(x),$$

quedando establecido el resultado. □

La igualdad (2-22) es la fórmula de representación. Dicha fórmula permite conocer una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ cuando $\partial\Omega \in C^1$, a partir de los valores de Δu en Ω y los de u y $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ en $\partial\Omega$. Sin embargo la citada fórmula no es totalmente satisfactoria, ya que en general, dadas f, g y h, no existe $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u = f$ en Ω, $u = g$ sobre $\partial\Omega$ y $\dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h$ en $\partial\Omega$. Pensar por ejemplo en el caso $f = g = 0$ y $h = 1$. Este inconveniente motiva la introducción del concepto de *función de Green*. El punto de partida para la noción de función de Green lo proporciona el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, acotado y no vacío tal que su frontera $\partial\Omega \in C^1$. Sea w una función $w : (x,y) \in \overline{\Omega} \times \Omega \to w(x,y) \in \mathbb{R}$ verificando,*

$$w(\cdot,y) \in C^2(\overline{\Omega}) \qquad y \qquad \Delta_x w(x,y) = 0 \quad \forall\,(x,y) \in \overline{\Omega} \times \Omega, \tag{2-33}$$

donde por Δ_x se denota el Laplaciano en la variable x. Sea $G = \Phi + w$, donde Φ es la solución fundamental. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ entonces para todo $y \in \Omega$,

$$u(y) = \int_\Omega G(x,y)\,\Delta u(x)\,dx + \int_{\partial\Omega}\left[u(x)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y) - G(x,y)\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x,y)\right]d\sigma(x). \tag{2-34}$$

Prueba: La fórmula (2-34) es consecuencia inmediata de sustituir en la expresión (2-22) la función $G = \Phi + w$. □

Definición 2.3.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto, acotado y no vacío. Sea el conjunto $A(\Omega) = \{(x,y) \in \overline{\Omega} \times \Omega : x \neq y\}$. Se llama función de Green para la ecuación de Laplace en Ω, a toda función,*

$$G : A(\Omega) \to \mathbb{R},$$

que esté definida de la forma $G = \Phi + w$, con w satisfaciendo las condiciones de la proposición (2.3.1) y tal que $G(x,y) = 0$ para cualquier pareja $(x,y) \in \partial\Omega \times \Omega$.

Lo que en realidad se desea es aplicar (2-34) para resolver el problema de Dirichlet,

$$(PDP) \qquad \begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(y) = g(y), & y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

en cuyo caso no se conoce el término en que aparece la derivada normal de u. La idea es utilizar la *función de Green*, su valor sobre $\partial\Omega$ y los datos de la función u dados en el problema (PDP). Con esto (2-34) se convierte en,

$$u(y) = \int_\Omega G(x,y)\,f(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y)\,d\sigma(x). \tag{2-35}$$

Bajo el requisito que u resuelva (PDP) y siempre que se pueda construir explícitamente una función de Green para un dominio Ω dado; entonces se puede representar a u por medio de la función de Green, la derivada normal de la función de Green y las funciones f y g. Por otra parte, si G es la función de Green en Ω y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es solución del problema (PDL) para una función $g \in C(\partial\Omega)$ dada, entonces a partir de (2-35) se tiene,

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} g(x)\, \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y)\, d\sigma(x). \tag{2-36}$$

Como se puede apreciar el problema radica en encontrar G. Ello puede lograrse de manera explícita para determinadas formas de Ω, al resolver el siguiente problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta_x w(x,y) = 0, & x \in \Omega, \\ w(x,y) = -\Phi(|x-y|), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2-37}$$

En el apartado siguiente se va a construir la *función de Green para una bola* de $\mathbb{R}^N$ y así la solución al problema de Dirichlet para dicha bola. Este resultado cobrará se utilizará al abordar el problema de Dirichlet en contextos más generales.

2.4. El problema de Dirichlet en una bola de $\mathbb{R}^N$. La fórmula integral de Poisson.

Cuando se plantea el problema de Dirichlet para la *ecuación de Laplace* en una bola abierta de centro en el origen y radio R,

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{si} \quad |x| < R\ , \\ u(x) = g(x), & \text{si} \quad |x| = R, \end{cases} \tag{2-38}$$

es posible construir una función de Green mediante el denominado método de reflexión.[4] Sea S_R la esfera de centro en el origen y radio R. Se considera la inversión o *transformación de Kelvin* en $\mathbb{R}^N - \{0\}$ con polo en el origen, es decir,

$$\hat{x} = \frac{R^2}{|\ x\ |^2}\, x. \tag{2-39}$$

La aplicación $x \to \hat{x}$ es la inversión a través de la esfera S_R, en efecto si $y \in S_R$ entonces $\hat{y} = y$, es decir la esfera S_R es el lugar geométrico de los puntos invariantes. Nótese que si $y \in S_R$ entonces,

$$|\ \hat{x} - y\ |^2 = \frac{R^4}{|\ x\ |^2} - 2\, R^2\, \frac{\langle\ x\ \cdot\ y\ \rangle}{|\ x\ |^2} + R^2,$$

[4]Los resultados que se verán en esta sección siguen la referencia John (1978). También puede consultarse Peral Alonso (2004), Gilbarg y Trudinger (2001).

y así,

$$\begin{aligned} \mid x \mid^2 \mid \hat{x} - y \mid^2 &= R^2 \left[\mid x \mid^2 \, - 2 \langle \, x \, , \, y \, \rangle \, + \, R^2 \right] \\ &= R^2 \, \mid x - y \mid^2, \end{aligned}$$

por consiguiente para $y \in S_R$ se satisface la relación fundamental,

$$\frac{\mid \hat{x} - y \mid}{\mid x - y \mid} = \frac{R}{\mid x \mid} \qquad \Longrightarrow \qquad \mid x - y \mid = \frac{\mid x \mid}{R} \mid \hat{x} - y \mid . \tag{2-40}$$

Considérese la solución fundamental definida para $x \neq y$ en el caso $N \geq 3$ mediante (2-13). Como consecuencia de (2-40) se tiene para los puntos $y \in S_R$,

$$\begin{aligned} \Phi(\mid x - y \mid) &= \Phi\left(\frac{\mid x \mid}{R} \mid \hat{x} - y \mid\right) \\ \Phi(\mid y \mid) &= \Phi(R), \end{aligned}$$

así pues, si se toma $w(x, y)$ definida para $x \in \overline{B}(0, R)$ mediante,

$$w(x, y) = \begin{cases} -\Phi\left(\dfrac{\mid x \mid}{R} \mid \hat{x} - y \mid\right), & x \neq 0, \\ -\Phi(R), & x = 0, \end{cases} \tag{2-41}$$

se observa de inmediato que la función w, al estar definida en términos de la *solución fundamental*, satisface las condiciones de la proposición (2.3.1) y $G = \Phi + w$, es decir; para $(x, y) \in A(B(0, R))$:

$$G(x, y) = \begin{cases} \Phi(\mid x - y \mid) - \Phi\left(\dfrac{\mid x \mid}{R} \mid \hat{x} - y \mid\right), & x \neq 0, \\ \Phi(\mid y \mid) - \Phi(R), & x = 0, \end{cases} \tag{2-42}$$

es la función de Green en $B(0, R)$. Sustituyendo Φ en esta última fórmula se sigue,

$$G(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N} \dfrac{1}{\mid x - y \mid^{N-2}} + \dfrac{1}{(N-2)\omega_N} \left(\dfrac{R}{\mid x \mid\mid \hat{x} - y \mid}\right)^{N-2}, & x \neq 0, \\ -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N} \dfrac{1}{\mid y \mid^{N-2}} + \dfrac{1}{(N-2)\omega_N} \dfrac{1}{R^{N-2}}, & x = 0, \end{cases}$$

luego,

$$G(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N} \left[\dfrac{1}{\mid x - y \mid^{N-2}} - \left(\dfrac{R}{\mid x \mid\mid \hat{x} - y \mid}\right)^{N-2}\right], & x \neq 0, \\ -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N} \left[\dfrac{1}{\mid y \mid^{N-2}} - \dfrac{1}{R^{N-2}}\right], & x = 0, \end{cases}$$

y reemplazando la definición de $\hat{x}$ se obtiene,

$$G(x,y) = -\frac{1}{(N-2)\omega_N}\begin{cases} \left[|x-y|^{2-N} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N}\left|\frac{R^2}{|x|^2}\ x - y\right|^{2-N}\right], & x \neq 0, \\ \left[|y|^{2-N} - R^{2-N}\right], & x = 0. \end{cases} \tag{2-43}$$

En seguida se obtiene el vector *gradiente* de la función de Green definida por (2-43) para los puntos $x \neq 0$. Al calcular las derivadas parciales de primer orden con respecto a y se obtiene,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) &= -\frac{1}{(N-2)\omega_N}\left[\frac{\partial}{\partial y_i}|x-y|^{2-N} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N}\frac{\partial}{\partial y_i}\left|\frac{R^2}{|x|^2}\ x - y\right|^{2-N}\right] \\ &= -\frac{1}{(N-2)\omega_N}\left\{\cdot\frac{\partial}{\partial y_i}\left((x_1-y_1)^2+...+(x_N-y_N)^2\right)^{\frac{2-N}{2}} - \right. \\ &\left.\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N}\frac{\partial}{\partial y_i}\left[\left(\frac{R^2}{|x|^2}\ x_1 - y_1)\right)^2 + ... + \left(\frac{R^2}{|x|^2}\ x_N - y_N\right)^2\right]^{\frac{2-N}{2}}\right\}\end{aligned}$$

para $i = 1,\ ...,\ N$. Entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = -\frac{1}{\omega_N}&\left\{\left[(x_1-y_1)^2+...+(x_N-y_N)^2\right]^{\frac{-N}{2}}(x_i-y_i) - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N}\right. \\ &\left.\left[\left(\frac{R^2}{|x|^2}\ x_1 - y_1\right)^2 + ... + \left(\frac{R^2}{|x|^2}\ x_N - y_N)\right)^2\right]^{\frac{-N}{2}}\left(\frac{R^2}{|x|^2}\ xi - y_i\right)\right\}\end{aligned}$$

lo que es equivalente a,

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = -\frac{1}{\omega_N}&\left\{\frac{(x_i-y_i)}{\left((x_1-y_1)^2+...+(x_N-y_N)^2\right)^{\frac{N}{2}}}\right\} \\ &-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N}\frac{\left(\frac{R^2}{|x|^2}\ x_i - y_i\right)}{\left[\left(\frac{R^2}{|x|^2}\ x_1 - y_1\right)^2 + ... + \left(\frac{R^2}{|x|^2}\ x_{_N} - y_{_N}\right)^2\right]^{\frac{N}{2}}},\end{aligned}$$

esto es,

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = -\frac{1}{\omega_N}\left\{\frac{(x_i-y_i)}{|x-y|^N} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N}\frac{\left(\frac{R^2}{|x|^2}\ x_i - y_i\right)}{\left|\frac{R^2}{|x|^2}\ x - y\right|^N}\right\}. \tag{2-44}$$

Ahora bien, el valor en $|y| = R$ se obtiene a partir de que $G(x,y) = 0$ en dichos puntos, es decir si $|y| = R$,

$$|x-y|^{2-N} = \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N} \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^{2-N}, \tag{2-45}$$

y al elevar la expresión anterior a $\frac{1}{2-N}$ se deduce para $|y| = R$ que,

$$\begin{aligned} |x-y| &= \left[\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N} \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^{2-N}\right]^{\frac{1}{2-N}} \\ &= \left[\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N}\right]^{\frac{1}{2-N}} \left(\left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^{2-N}\right)^{\frac{1}{2-N}} \end{aligned}$$

o finalmente,

$$|x-y| = \left(\frac{|x|}{R}\right) \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right| \quad \text{si} \quad |y| = R. \tag{2-46}$$

Si se reemplaza (2-46) en (2-44) como sigue,

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{-1}{\omega_N}\left\{\frac{(x_i - y_i)}{\left(\frac{|x|}{R}\right)^N \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^N} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N} \frac{\left(\frac{R^2}{|x|^2}x_i - y_i\right)}{\left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^N}\right\}, \tag{2-47}$$

al factorizar se obtiene,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) &= \frac{-1}{\omega_N \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^N}\left\{\frac{(x_i - y_i)}{\left(\frac{|x|}{R}\right)^N} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-N}\left(\frac{R^2}{|x|^2}x_i - y_i\right)\right\} \\ &= \frac{-1}{\omega_N \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^N}\left\{\frac{(x_i - y_i)}{\left(\frac{|x|}{R}\right)^N} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{N-2}\left(\frac{R^2}{|x|^2}\left(x_i - \frac{|x|^2}{R^2}y_i\right)\right)\right\} \\ &= \frac{-1}{\omega_N \left|\frac{R^2}{|x|^2}x - y\right|^N}\left\{\frac{(x_i - y_i)}{\left(\frac{|x|}{R}\right)^N} - \left(\frac{R}{|x|}\right)^{N}\left(x_i - \frac{|x|^2}{R^2}y_i\right)\right\}. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{-1}{\omega_N \left| \frac{R^2}{|x|^2}x - y \right|^N} \left\{ \frac{(x_i - y_i)}{\left(\frac{|x|}{R}\right)^N} - \frac{1}{\left(\frac{|x|}{R}\right)^N}\left(x_i - \frac{|x|^2}{R^2} y_i \right) \right\}$$

$$= \frac{-1}{\omega_N \left| \frac{R^2}{|x|^2}x - y \right|^N} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{|x|}{R}\right)^N} \left((x_i - y_i) - x_i + \left(\frac{|x|}{R}\right)^2 y_i \right) \right\}$$

$$= \frac{-1}{\omega_N \left| \frac{R^2}{|x|^2}x - y \right|^N} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{|x|}{R}\right)^N} \left[\left(\left(\frac{|x|}{R}\right)^2 - 1 \right) y_i \right] \right\},$$

es decir,

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{-1}{\omega_N \left(\frac{|x|}{R}\right)^N \left| \frac{R^2}{|x|^2}x - y \right|^N} \left\{ \left(\frac{|x|^2 - R^2}{R^2} \right) y_i \right\}. \tag{2-48}$$

Al reemplazar el resultado (2-46) se sigue para $i = 1, \ ..., \ N$ y $|y| = R$,

$$\frac{\partial G}{\partial y_i}(x,y) = \frac{-1}{\omega_N \ \ |x-y|^N} \left(\frac{|x|^2 - R^2}{R^2} \right) \ y_i,$$

y así,

$$\nabla_y G(x,y) = \frac{-1}{\omega_N \ \ |x-y|^N} \left(\frac{|x|^2 - R^2}{R^2} \right) (y_1, ..., y_N). \tag{2-49}$$

Por otra parte, el *vector normal exterior* a la superficie S_R designado por $\mathbf{n}_y$, está definido por,

$$\mathbf{n}_y = \left(\frac{y_1}{|y|}, \frac{y_2}{|y|}, ..., \frac{y_N}{|y|} \right) = \frac{y}{|y|} = \frac{y}{R},$$

pero en virtud de la ecuación (1-21) se tiene $\dfrac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x,y) = \nabla_y G(x,y) \cdot \mathbf{n}_y$, entonces,

$$\nabla_y G(x,y) \cdot \mathbf{n}_y = \left(\frac{-1}{\omega_N \ \ |x-y|^N} \ \frac{|x|^2 - R^2}{R^2} \right) (y_1, ..., y_N) \cdot \left(\frac{y_1}{R}, ..., \frac{y_N}{R} \right)$$

$$= \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_N \ \ |x-y|^N \ R^3} \ (y_1, ..., y_N) \cdot (y_1, ..., y_N).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\nabla_y G(x,y) \cdot \mathbf{n}_y &= \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_N \ \ |x-y|^N \ R^3} \ \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \\
&= \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_N \ \ |x-y|^N \, R^3} \quad R^2,
\end{aligned}$$

lo cual permite concluir que para $y \in S_R$ se satisface,

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\,\omega_N \ |x-y|^N}. \tag{2-50}$$

Definición 2.4.1 *Se denomina núcleo de Poisson en $B(0,R)$ a la función $H(x,y)$ definida para los puntos $y \in S_R$ mediante,*

$$H(x,y) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\,\omega_N \ |x-y|^N}. \qquad x \in B(0,R). \tag{2-51}$$

Por definición $H(x,y) > 0$ sobre $B(0,R)$. De otra parte, por la construcción hecha el *núcleo de Poisson* verifica la ecuación de Laplace en el interior de la bola de radio R. En efecto al derivar (2-51) se verifica para $i = 1, \ ..., \ N$;

$$H_{x_i}\,(x,y) = \frac{1}{R\,\omega_N}\left[\frac{-2\,x_i \ \mid x - y\mid^N \ - N\,(R^2 - \mid x\mid^2\,) \ \mid x - y\mid^{N-2} \ (x_i - y_i)}{\mid x - y\mid^{2N}}\right].$$

Derivando una vez más respecto a la variable x_i se sigue,

$$\begin{aligned}
H_{x_i x_i}\,(x,y) \ = \ & \frac{1}{R\,\omega_N \ \mid x - y\mid^{4N}}\Big\{\Big\{ \ -2 \ \mid x - y\mid^N \ - 2N\,x_i \ \mid x - y\mid^{N-2} \ (x_i - y_i) \\
& + \ 2N\,x_i \ \mid x - y\mid^{N-2} \ (x_i - y_i) \ - \ N\left(R^2 - \mid x\mid^2\right)\big[\,(N-2) \ \mid x - y\mid^{N-4} \\
& (x_i - y_i)^2 \ + \ \mid x - y\mid^{N-2} \ \big]\Big\} \ \mid x - y\mid^{2N} \ - \ \Big\{ \ -2\,x_i \ \mid x - y\mid^N \\
& - \ N\left(R^2 - \mid x\mid^2\,\right) \ \mid x - y\mid^{N-2} \ (\,x_i - y_i\,) \ \Big\} \\
& \big[\,2N \ \mid x - y\mid^{2N-2} \ (x_i - y_i)\,\big]\Big\},
\end{aligned}$$

y efectuando las operaciones,

$$H_{x_i x_i}(x,y) = \frac{1}{R\,\omega_N \mid x - y \mid^{4N}} \Big\{ 2N \left(R^2 - \mid x \mid^2\right) \mid x - y \mid^{2N+N-4} (x_i - y_i)^2$$

$$- N^2 \left(R^2 - \mid x \mid^2\right) \mid x - y \mid^{2N+N-4} (x_i - y_i)^2 - N \left(R^2 - \mid x \mid^2\right)$$

$$\mid x - y \mid^{2N+N-2} - 2 \mid x - y \mid^{2N+N} + 2N^2 \left(R^2 - \mid x \mid^2\right) \mid x - y \mid^{2N+N-4}$$

$$(x_i - y_i)^2 + 4N \mid x - y \mid^{2N+N-2} x_i(x_i - y_i) \Big\}.$$

Ahora bien, al sumar sobre i, desde uno hasta m, se deduce,

$$\Delta_x H(x,y) = \frac{1}{R\,\omega_N \mid x - y \mid^{4N}} \Bigg\{ 2N \left(R^2 - \mid x \mid^2\right) \mid x - y \mid^{2N+N-4} \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2$$

$$- N^2 \left(R^2 - \mid x \mid^2\right) \mid x - y \mid^{2N+N-4} \sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 - N^2 \left(R^2 - \mid x \mid^2\right)$$

$$\mid x - y \mid^{2N+N-2} - 2N \mid x - y \mid^{2N+N} + 2N^2 \left(R^2 - \mid x \mid^2\right) \mid x - y \mid^{2N+N-4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 + 4N \mid x - y \mid^{2N+N-2} \sum_{i=1}^{N} x_i(x_i - y_i) \Bigg\},$$

es decir,

$$\Delta_x H(x,y) = \frac{1}{R\,\omega_N \mid x - y \mid^{4N}} \Big\{ 2N \left(R^2 - \mid x \mid^2\right) \mid x - y \mid^{2N+N-2} - 2N \mid x - y \mid^{2N+N}$$

$$+ 4N \mid x - y \mid^{2N+N-2} \mid x \mid^2 - 4N \mid x - y \mid^{2N+N-2} \langle\, x \cdot y \,\rangle \Big\},$$

y entonces,

$$\Delta_x H(x,y) = \frac{1}{R\,\omega_N \mid x - y \mid^{4N}} \Big\{ 2N \mid x - y \mid^{2N+N-2}$$

$$\left[\mid x \mid^2 - 2 \langle\, x \cdot y \,\rangle + R^2 - \mid x - y \mid^2 \right] \Big\}.$$

Como $\mid y \mid = R$ de la última expresión se sigue,

$$\Delta_x H(x,y) = \frac{1}{R\,\omega_N \mid x - y \mid^{4N}} \Big\{ 2N \mid x - y \mid^{2N+N-2} \left[\mid x - y \mid^2 - \mid x - y \mid^2 \right] \Big\},$$

obteniendo,

$$\Delta_x \, H(x,y) \, = \, 0. \tag{2-52}$$

Otras propiedades del *núcleo de Poisson* que van a resultar de interés vienen dadas por el resultado siguiente.

Proposición 2.4.1 *El núcleo de Poisson* $H(x,y)$ *definido por* (2-51) *verifica:*

1. $H \in C^\infty$ *si* $\mid y \mid = R$ *y* $\mid x \mid < R$.
2. $\int_{|y|=R} H(x,y)\, d\sigma(x) = 1$.
3. *Si* $x_0 \in S_R$ *y* $\delta > 0$ *entonces*

$$\lim_{x\to x_0} H(x,y) = 0 \qquad \textit{uniformemente si} \ \mid y \,-\, x_0 \mid \geq \delta.$$

Prueba: La propiedad 1 se deduce al observar que $|x-y|$, bajo las hipótesis, es un valor positivo y además $|x-y|^{-N}$ se puede derivar infinitamente.

La igualdad en 2. no es más que (2-35) aplicada a $g(y)=1$. En efecto, aplicando la fórmula de representación integral (2-35) a $g(x)=1$ y a la función de Green definida por (2-43),

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{B(0,R)} G(x,y)\, f(x)\, dx + \int_{\partial B(0,R)} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(x,y)\, d\sigma\,(x) \\ &= \int_{B(0,R)} G(x,y)\, f(x)\, dx + \frac{1}{R\omega_N} \int_{\partial B(0,R)} \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N}\, d\sigma\,(x). \end{aligned}$$

Puesto que sobre $\partial B(0,R)$ se verifica $u(y)=g(y)=1$, con los datos del problema (2-38) se sigue,

$$\begin{aligned} 1 = u(y) &= \int_{B(0,R)} G(x,y)\, \Delta\, u(x)\, dx \, + \, \frac{1}{R\omega_N} \int_{\partial B(0,R)} \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N}\, d\sigma\,(x) \\ &= \frac{1}{R\omega_N} \int_{\partial B(0,R)} \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N}\, d\sigma\,(x). \end{aligned}$$

Finalmente dado x_0 un punto arbitrario de la esfera de radio R y $\delta > 0$ real, se define,

$$E_\delta = \{\, y \,:\, |y| = R, \ \ |y-x_0| > \delta \,\}\,. \tag{2-53}$$

Por la *desigualdad del triángulo* se deduce,

$$|y-x_0| = |y-x+x-x_0| \leq |x-y| + |x-x_0|\,,$$

luego,

$$|x-y| \geq |y-x_0| - |x-x_0|\,,$$

pero nótese que si $y \in E_\delta$ y $|x-x_0| < \dfrac{\delta}{2}$, se tiene,

$$|y-x_0| > \delta \quad \text{y} \quad -|x-x_0| > -\frac{\delta}{2},$$

entonces al sumar estas desigualdades resulta,

$$|y-x_0| - |x-x_0| > \frac{\delta}{2},$$

y en consecuencia,

$$|x-y| \geq |y-x_0| - |x-x_0| > \frac{\delta}{2}. \tag{2-54}$$

Ahora, como $|x-y| > \dfrac{\delta}{2}$ entonces,

$$H(x,y) = \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_N\ |x-y|^N} \leq \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_N\ (|y-x_0|-|x-x_0|)^N} \leq \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_N\ (\delta/2)^N},$$

deduciendo finalmente,

$$H(x,y) < \frac{2^N R}{\delta^N}. \tag{2-55}$$

Haciendo $\delta = 2\left(\dfrac{R}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{N}}$ en la definición de límite se llega a,

$$H(x,y) \leq \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad y \in E_\delta,$$

y esto evidentemente implica 3. $\square$

De acuerdo con la fórmula de representación (2-36) se enuncia el siguiente teorema. La prueba se basa en las propiedades del núcleo de Poisson.

Teorema 2.4.1 ***Fórmula integral de Poisson***
Sea g una función continua en la esfera S_R. Si se define,

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2-|x|^2}{R\omega_N} \displaystyle\int_{|y|=R} \frac{g(y)}{|x-y|^N}\, d\sigma(y), & si \quad |x|<R, \\ g(x), & si \quad |x| = R, \end{cases} \tag{2-56}$$

entonces u es continua en $\bar{B}(0,R)$ y $u \in C^\infty(B(0,R))$, siendo además solución del problema,

$$\begin{cases} \Delta\, u(x) = 0, & si \quad |x| < R, \\ u(x) = g(x), & si \quad |x| = R. \end{cases} \tag{2-57}$$

Prueba: Para observar que u definida por (2-56) es infinitamente diferenciable, basta observar que por la proposición 2.4.1,

$$\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_N\,|x-y|^N} \in C^\infty, \quad \text{si} \;\; |y|=R \quad \text{y} \;\; |x|<R, \tag{2-58}$$

y entonces se puede derivar bajo el signo integral en (2-56) de manera reiterada. Luego, al derivar la función u con respecto a x_i se obtiene,

$$\frac{\partial\, u(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R^2-|x|^2}{R\omega_N}\int_{|y|=R}\frac{g(y)}{|x-y|^N}\,d\sigma(y)\right)$$

$$= \frac{1}{R\omega_N}\int_{|y|=R} g(y)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N}\right)\,d\sigma\,(y).$$

Se puede concluir que la derivada parcial de cualquier orden con respecto a x_i existe y va a ser siempre una función continua para $|y|=R$ y $|x|<R$.

Análogamente, para la derivada parcial de segundo orden de u con respecto a x_i se obtiene la expresión,

$$\frac{\partial^2\, u(x)}{\partial x_i^2} = \frac{1}{R\omega_N}\int_{|y|=R} g(y)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N}\right)\,d\sigma(y), \tag{2-59}$$

por consiguiente,

$$\Delta\, u(x) = \frac{1}{R\omega_N}\sum_{i=1}^{N}\int_{|y|=R} g(y)\,\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N}\right)\,d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{R\omega_N}\int_{|y|=R} g(y)\,\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N}\right)\,d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{R\omega_N}\int_{|y|=R} g(y)\,\Delta_x\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N}\right)\,d\sigma(y),$$

sin embargo por (2-52) el núcleo de Poisson verifica la ecuación de Laplace y entonces,

$$\Delta\, u(x) = \frac{1}{R\omega_N}\int_{|y|=R} g(y)\,\Delta_x\left(\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^N}\right)\,d\sigma\,(y) = 0. \tag{2-60}$$

Resta probar que (2-56) define una función continua sobre $\overline{B}(0,R)$. En concreto, lo que hace falta demostrar es que fijados $x_0 \in \partial B(0,R)$ y $\varepsilon>0$ existe un $\delta(\varepsilon)>0$ tal que,

$$\left|\int_{\partial B(0,R)} H(x,y)\,g(y)\,d\sigma\,(y) \,-\, g(x_0)\right| < \varepsilon, \tag{2-61}$$

para todo $x \in B(0,R)$ tal que $| x - x_0 | \leq \delta(\varepsilon)$. Como $g \in C(\partial B(0,R))$ existe $\delta_1 > 0$ tal que si $y \in \partial B(0,R)$ y $| y - x_0 | \leq \delta_1$ entonces,

$$| g(y) - g(x_0) | \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2-62}$$

Sea,

$$M = \max_{y \in \partial B(0,R)} | g(y) | .$$

Del apartado 3 de la proposición (2.4.1) se sabe que si $y \in E_{\delta_1}$ y $x \in B(0,R)$ verifica $| x - x_0 | \leq \delta_1$ entonces,

$$H(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{4M\omega_N R^{N-1}}. \quad . \tag{2-63}$$

Ahora, si $x \in B(0,R)$,

$$\int_{|y|=R} H(x,y)\, g(y)\, d\sigma(y) \; - \; g(x_0) \; = \int_{|y|=R} H(x,y) \; (g(y) \; - \; g(x_0))\; d\sigma(y),$$

esto en virtud de la proposición 2.4.1. Esta última integral se puede expresar como,

$$\begin{aligned} &\int_{|y|=R} H(x,y) \; (g(y) - g(x_0)) \; d\sigma(y) \\ &\qquad = \int_{|y|=R \; \cap \{|y-x_0|<\delta_1\}} H(x,y) \; (g(y) - g(x_0)) \; d\sigma(y) \; + \\ &\qquad\qquad \int_{|y|=R \cap |y-x_0| \geq \delta_1} H(x,y) \; (g(y) \; - \; g(x_0)) \; d\sigma(y), \end{aligned}$$

pero sustituyendo (2-62) y (2-63) se deduce,

$$\begin{aligned} &\int_{|y|=R} H(x,y) \; (g(y) \; - \; g(x_0)) \; d\sigma(y) \\ &\qquad \leq \; \frac{\varepsilon}{2} \int_{|y|=R \; \cap \{|y-x_0|<\delta_1\}} H(x,y) \; d\sigma(y) \; + \\ &\qquad\qquad \frac{\varepsilon}{4M\,\omega_N\,R^{N-1}} \int_{|y|=R \cap |y-x_0| \geq \delta_1} (g(y) \; - \; g(x_0)) \; d\sigma(y), \end{aligned}$$

con esto,

$$\begin{aligned} &\int_{|y|=R} H(x,y) \; (g(y) \; - \; g(x_0)) \; d\sigma(y) \\ &\qquad < \; \frac{\varepsilon}{2} \int_{|y|=R} H(x,y) \; d\sigma(y) \; + \; \frac{\varepsilon}{4M\,\omega_N\,R^{N-1}} \int_{|y|=R} 2M \; d\sigma(y). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_{|y|=R} H(x,y)\, (g(y) \; - \; g(x_0)) \; d\sigma(y) \; < \; \frac{\varepsilon}{2} \; (1) \; + \; \frac{2M\,\varepsilon}{4M\,\omega_N\,R^{N-1}} \; \omega_N\,R^{N-1},$$

es decir,

$$\int_{|y|=R} H(x,y)\,(\,g(y)\ -\ g(x_0)\,)\ d\sigma(y)\ <\ \varepsilon \qquad \text{si} \quad |\,x - x_0\,| \leq \delta_1. \tag{2-64}$$

La prueba se completa al tomar $\delta(\varepsilon) = \delta_1$. □

El teorema 2.4.1 constituye un resultado de existencia de solución para el problema (PDL) planteado en una bola abierta centrada en el origen. Como es natural, al trasladar el centro de la bola a un punto arbitrario de $\mathbb{R}^N$, el problema de Dirichlet (PDL) en dicha bola también se puede resolver. Para precisar, si $g \in C(\partial B(x_0, R))$ entonces la solución del problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta u = 0\ , & x\ \in\ B(x_0, R), \\ u(x) = g(x), & x\ \in\ \partial B(x_0, R), \end{cases} \tag{2-65}$$

está dada por,

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{R^2\ -\ |x\ -\ x_0|^2}{R\,\omega_N} \displaystyle\int_{\partial B(x_0,R)} \dfrac{g(y)}{|x-y|^N}\ d\sigma(y), & \text{si} \quad x\ \in\ B(x_0, R), \\ g(x), & \text{si} \quad |x\ -\ x_0| = R. \end{cases} \tag{2-66}$$

Ya demostrada la existencia de la solución de (2-38) el siguiente paso será probar que dicha solución es única y coincide con la *integral de Poisson* (2-56); esto será resuelto en el próximo capítulo luego de estudiar algunas propiedades de las funciones armónicas.

3 Funciones armónicas y subarmónicas. Propiedades

Los científicos estudian la naturaleza no porque sea útil, sino porque encuentran placer en ello, y encuentran placer porque es hermosa. Si no lo fuera no merecería la pena conocerla, y si la naturaleza no mereciera la pena, la vida tampoco.

H. Poincaré

Como se vio en el capítulo 2 la solución al problema de Dirichlet en general se reduce a calcular la función de Green y esto a encontrar una función armónica cuyo valor sobre la frontera del dominio sea equivalente al valor de la solución fundamental. En este capítulo[1] se estudian algunas propiedades de las funciones armónicas, en especial la propiedad del valor medio, el principio del máximo y algunos resultados respecto a convergencia de sucesiones de funciones armónicas. En la sección 3.3 se introduce la definición de función subarmónica; concepto que permitirá abordar el problema de Dirichlet en dominios generales.

[1] Como referencia de este capítulo pueden consultarse los textos Evans (2010), Peral Alonso (2004), John (1978), Axler et al. (2001).

3.1. Propiedad del valor medio

Definición 3.1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio, y un punto de Ω y $v \in C(\Omega)$. Se dice que la función v satisface la propiedad del valor medio en Ω si para cada real $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset \Omega$ se verifica,*

$$v(y) = \frac{1}{\omega_N\, r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} v(x)\, d\sigma(x). \tag{3-1}$$

El siguiente resultado asegura que las *funciones armónicas* verifican la propiedad del valor medio.

Teorema 3.1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio y $u \in C^2(\Omega)$. Sea $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset \Omega$. Si u es armónica en Ω entonces u cumple la propiedad del valor medio, es decir,*

$$u(y) = \frac{1}{\omega_N\, r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(x)\, d\sigma(x). \tag{3-2}$$

Prueba: Sea y un punto de Ω y $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset \Omega$. Al tomar la solución fundamental definida por (2-13) y aplicar la representación integral (2-22) sobre $B_r(y)$ se tiene,

$$u(y) = \int_{B_r(y)} \Phi(|x-y|)\,\Delta u(x)\, dx - \int_{\partial B_r(y)} \left(\Phi(|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) - u(x)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|) \right) d\sigma(x),$$

sin embargo u es armónica en Ω y en particular es armónica sobre $B_r(y)$, por consiguiente,

$$u(y) = \int_{\partial B_r(y)} u(x)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\, d\sigma(x) \;\; - \int_{\partial B_r(y)} \Phi(|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\, d\sigma(x).$$

Puesto que u es armónica la expresión (1-31) conduce a,

$$\int_{|x-y|=r} \frac{\partial u}{\partial n}(x)\, d\sigma(x) = 0,$$

además, sobre $\partial B_r(y)$ la función Φ es constante y por tanto,

$$\int_{\partial B_r(y)} \Phi(|x-y|)\,\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\, d\sigma(x) = 0,$$

lo que implica,

$$u(y) = \int_{|x-y|=r} u(x)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\, d\sigma(x). \tag{3-3}$$

Puesto que el *vector normal exterior* en un punto de $\partial\Omega$ es $\dfrac{x-y}{|x-y|}$, en un proceso análogo a como se obtuvo (2-31) se tendrá,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|) \;=\; \frac{1}{\omega_N\, |x-y|^{N-1}}, \tag{3-4}$$

y entonces,

$$\begin{aligned} u(y) &= \int_{|x-y|=r} u(x) \, \frac{1}{\omega_N \, |x-y|^{N-1}} \, d\sigma(x) \\ &= \frac{1}{\omega_N \, r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(x) \, d\sigma(x), \end{aligned}$$

quedando establecido el resultado. □

En términos generales la *propiedad del valor medio* garantiza que para una función armónica u en una bola cerrada contenida en el dominio Ω, el valor de dicha función en el centro de la bola es igual al promedio de sus valores sobre la superficie. El siguiente teorema afirma que el promedio puede de hecho tomarse sobre los valores de la función u en todos los puntos de la bola.

Teorema 3.1.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio y $u \in C^2(\Omega)$. Sea $r > 0$ tal que $B_r(y) \subset \Omega$. La función u cumple la propiedad del valor medio* (3-1) *si y sólo si,*

$$u(y) = \frac{N}{\omega_N \, r^N} \int_{|x-y|\leq r} u(x) \, d\sigma\,(x). \tag{3-5}$$

Prueba: $(\Rightarrow)$ Si u verifica la propiedad del valor medio (3-1) se sigue,

$$\omega_N \, \rho^{N-1} \, u(y) = \int_{|x-y|=\rho} u(x) \;\; d\sigma(x), \qquad 0 < \rho < r. \tag{3-6}$$

Al integrar en ambos miembros de la igualdad anterior con respecto a ρ,

$$\omega_N \int_0^r \rho^{N-1} \, u(y) \, d\rho = \int_0^r \int_{|x-y|=\rho} u(x) \, d\sigma(x) \, d\rho,$$

se obtiene,

$$\frac{\omega_N \, r^N}{N} u(y) = \int_{|x-y|\leq r} u(x) \;\; dx,$$

es decir,

$$u(y) = \frac{N}{\omega_N \, r^N} \int_{|x-y|\leq r} u(x) \, d\sigma(x), \tag{3-7}$$

llegando a la expresión (3-5).

$(\Leftarrow)$ Recíprocamente; supóngase que para toda bola $B_r(y)$ se satisface (3-5), esto es,

$$u(y) = \frac{N}{\omega_N \, r^N} \int_{|x-y|\leq r} u(x) \, d\sigma(x). \tag{3-8}$$

Utilizando la ecuación (1-30) para transformar a coordenadas esféricas centradas en el punto y,

$$u(y) = \frac{N}{\omega_N \, r^N} \int_0^r \rho^{N-1} \int_{S^{N-1}} u(y + \rho\omega) \, d\omega \, d\rho, \tag{3-9}$$

y derivando en ambos miembros de la ecuación anterior con respecto a r se obtiene,

$$0 = \frac{N}{\omega_N\, r^N}\, r^{N-1} \int_{S^{N-1}} u(y+\rho\omega)\, d\omega \;-\; \frac{N^2}{\omega_N\, r^{N+1}} \int_0^r \rho^{N-1} \int_{S^{N-1}} u(y+\rho\omega)\, d\omega\, d\rho,$$

en consecuencia,

$$\begin{aligned}\frac{N}{\omega_N\, r} \int_{S^{N-1}} u(y+\rho\omega)\, d\omega &= \frac{N^2}{\omega_N\, r^{N+1}} \int_0^r \rho^{N-1} \int_{S^{N-1}} u(y+\rho\omega)\, d\omega\, d\rho \\ &= \frac{N^2}{\omega_N\, r^{N+1}} \int_{|x-y|\le r} u(x)\; d\sigma(x).\end{aligned}$$

Al aplicar la hipótesis se sigue,

$$\begin{aligned}\frac{N}{\omega_N\, r} \int_{S^{N-1}} u(y+\rho\omega)\, d\omega &= \frac{N^2}{\omega_N\, r^{N+1}}\; \frac{\omega_N\, r^N}{N}\; u(y) \\ &= \frac{N}{r}\; u(y),\end{aligned}$$

al reescribirlo queda,

$$u(y) = \frac{1}{\omega_N} \int_{S^{N-1}} u(y+\rho\omega)\, d\omega, \tag{3-10}$$

o igualmente,

$$u(y) = \frac{1}{\omega_N\, r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(x)\, d\sigma(x), \tag{3-11}$$

como se deseaba. □

Definición 3.1.2 ***Núcleo regularizante***

i) *Se define $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ por,*

$$\eta(x) = \begin{cases} C\ exp\left(\dfrac{1}{|\ x^2\ | - 1}\right), & si \quad |\ x\ | < 1, \\ 0, & si \quad |\ x\ | \ge 1, \end{cases} \tag{3-12}$$

donde C es una constante que se selecciona de manera que $\int_{\mathbb{R}^N} \eta(x)\, dx = 1$. Esta función η se conoce con el nombre de núcleo regularizante estándar.

ii) *Para cada $\varepsilon > 0$ se define,*

$$\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\, \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \tag{3-13}$$

Las funciones η_ε satisfacen.

$$\int_{\mathbb{R}^N} \eta_\varepsilon(x)\, dx = 1, \qquad sop(\eta_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0), \tag{3-14}$$

además $\eta_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ para cada $\varepsilon > 0$.

Antes de considerar el *teorema de regularidad* de funciones armónicas es conveniente introducir una función que permitirá obtener aproximaciones suaves de otras funciones.

Definición 3.1.3 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es localmente integrable se define su suavizamiento,*

$$f^{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(x-y) f(y)\, dy = \int_{B_{\varepsilon}(0)} \eta_{\varepsilon}(y) f(x-y)\, dy, \tag{3-15}$$

para $x \in \Omega_{\varepsilon}$, donde $\Omega_{\varepsilon} = \{ x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \varepsilon \}$.

El interés de las definiciones (3.1.3) y (3.1.2) se verá a continuación. Fueron tomadas del texto *Partial Differential Equations* de Evans L. C. (Evans 2010).

Teorema 3.1.3 *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ función localmente integrable y f^{ε} su correspondiente función suavizamiento. Entonces,*

i) $f^{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Omega_{\varepsilon})$,

ii) $f^{\varepsilon} \to f$ *cuando* $\varepsilon \to 0$.

Prueba:

i) Sea $\varepsilon > 0$, $x \in \Omega$, $i = 1, 2, ..., N$ y $h > 0$ tan pequeño para que $x + he_i \in \Omega$. Nótese que por definición de η_{ε}.

$$\frac{f^{\varepsilon}(x+he_i) - f^{\varepsilon}(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(x+he_i - y)\; f(y)\; dy - \int_{\Omega} \eta_{\varepsilon}(x-y)\; f(y)\, dy\right]$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\Omega} \frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right] f(y)\, dy,$$

Como $\eta \in C^{\infty}(\Omega)$, al aplicar límite cuando $h \to 0$ se deduce,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{\varepsilon}(x+he_i) - f^{\varepsilon}(x)}{h} = \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\Omega}\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\eta\left(\frac{x+he_i-y}{\varepsilon}\right) - \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\right]\right) f(y)\, dy$$

$$\frac{\partial f^{\varepsilon}}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\varepsilon^N}\int_{\Omega}\frac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\, dy$$

$$= \int_{\Omega}\frac{\partial \eta_{\varepsilon}}{\partial x_i}(x-y)\; f(y)\, dy,$$

lo que muestra que las derivadas parciales de primer orden de la *función suavizamiento* siempre existen. Para probar que $D^{\alpha} f^{\varepsilon}$ existe para todo $x \in \Omega$ y cada multiíndice α, el argumento es similar y se basa en que $\eta_{\varepsilon} \in C^{\infty}(\Omega)$. Finalmente se puede concluir que,

$$D^{\alpha} f^{\varepsilon}(x) = \int_{\Omega} D^{\alpha}\eta_{\varepsilon}(x-y) f(y)\, dy, \tag{3-16}$$

para cada multiíndice α. Esto prueba i).

ii) Sea $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Por definición de η_ε se sigue,

$$\begin{aligned}
|\, f^\varepsilon(x) - f(x) \,| &= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\, f(y)\, dy - f(x) \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\, dy \right| \\
&= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\, [f(y) - f(x)]\, dy \right|,
\end{aligned}$$

y así,

$$\begin{aligned}
|\, f^\varepsilon(x) - f(x) \,| &\le \int_{B_\varepsilon(x)} |\, \eta_\varepsilon(x-y) \,|\ |\, f(x) - f(y) \,|\ dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{B_\varepsilon(x)} \left| \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \right|\ |\, f(x) - f(y) \,|\ dy \\
&\le C \int_{B_\varepsilon(x)} |\, f(x) - f(y) \,|\ dy.
\end{aligned}$$

Del teorema de *diferenciación de Lebesgue*, teorema 1.2.9, cuando $\varepsilon \to 0$ se cumple que,

$$\int_{B_\varepsilon(x)} |\, f(x) - f(y) \,|\ dy \quad \to \quad 0,$$

quedando demostrado ii) y culminando la prueba del teorema. □

Ahora si se cuenta con las herramientas suficientes para probar la *regularidad* de las funciones armónicas. Para este propósito se tiene:

Teorema 3.1.4 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio y $u \in C(\Omega)$. Si u verifica la propiedad del valor medio* (3-1) *para cada bola $B_r(x) \subset \Omega$ entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Prueba: Sea $x \in \Omega$, $\varepsilon > 0$ y η el núcleo regularizante estándar definido en (3-12). Como u es localmente integrable se considera su correspondiente función suavizamiento u^ε, definida de la forma (3-15) sobre el conjunto $\Omega_\varepsilon = \{\ x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\ \}$. Nótese que el teorema (3.1.3) asegura que $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ de modo que para probar la regularidad de u basta con demostrar que $u = u^\varepsilon$ sobre Ω_ε.

Si $x \in \Omega_\varepsilon$ y $0 < r < \varepsilon$ se tiene,

$$u^\varepsilon(x) = \int_{B_r(x)} \eta_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{B_r(x)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_{B_r(x)} \eta\left(\frac{|\, x-y \,|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy,$$

pues η es función radial, es decir $\eta(x-y) = \eta(|\, x-y \,|)$. Del teorema 1.2.8 se deduce,

$$u^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^\varepsilon \left(\int_{\partial B_r(x)} \eta\left(\frac{|\, x-y \,|}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy \right) dr$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \left(\int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dy \right) dr,$$

para $0 < r < \varepsilon$. Ahora bien, por hipótesis $d(x, \partial\Omega) > \varepsilon$, entonces $B_r(x) \subset \Omega$ y por consiguiente la propiedad del valor medio asegura que,

$$u^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^N} \int_0^\varepsilon \eta\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \; u(x)\, \omega_N\, r^{N-1} \; dr,$$

es decir,

$$u^\varepsilon(x) = u(x) \; \left(\omega_N \; \int_0^\varepsilon \eta_\varepsilon\,(r)\, r^{N-1}\, dr \right). \tag{3-17}$$

Como ω_N denota la medida de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^N$ y $0 < r < \varepsilon$, la expresión (3-17) se puede escribir como,

$$u^\varepsilon(x) = u(x) \; \int_0^\varepsilon \; r^{N-1} \int_{S^{N-1}} \; \eta_\varepsilon\,(r)\, d\sigma(\omega)\, dr, \tag{3-18}$$

luego,

$$u^\varepsilon(x) = u(x) \; \int_{B_\varepsilon(x)} \; \eta_\varepsilon(|\, x \; - \; y \,|)\, dx, \tag{3-19}$$

pero en virtud de la expresión (3-14) se concluye que $u^\varepsilon(x) = u(x)$, en consecuencia la función $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$, es decir $u \in C^\infty(\Omega)$. $\square$

Como consecuencia inmediata del teorema anterior se puede concluir que las *funciones armónicas* son infinitamente diferenciables, es decir que si $u \in C^2(\Omega)$ es armónica, necesariamente $u \in C^\infty(\Omega)$. El punto interesante es que la estructura algebraica de la *ecuación de Laplace* permite deducir analíticamente que todas las derivadas parciales de u existen, aún cuando no aparezcan en dicha ecuación.

Corolario 3.1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio y $u \in C^2(\Omega)$. Si la función u es armónica entonces $u \in C^\infty(\Omega)$.*

Prueba: Basta observar que al ser u armónica entonces en virtud del teorema (3.1.1), u verifica la propiedad del valor medio y a partir del teorema (3.1.4) la conclusión es inmediata. □

El uso adecuado de la *propiedad del valor medio* permite establecer la siguiente estimación conocida como *desigualdad de Harnack*.

Teorema 3.1.5 *Sea $u \in C^2(\Omega)$ una función armónica no negativa en Ω. Sea A un dominio acotado tal que $\overline{A} \subset \Omega$. Entonces existe una constante $C(N, A)$ tal que,*

$$\sup_{x \in A} \{u(x)\} \leq C \inf_{x \in A} \{u(x)\}. \tag{3-20}$$

Prueba: Sea x un punto de Ω y considérese $r > 0$ tal que $B_{4r}(x) \subset \Omega$. El factor 4 es elegido para poder asegurar que si $y, z \in B_r(x)$ entonces por la propiedad triangular se tiene $B_{3r}(y) \subset \Omega$, $B_{3r}(z) \subset \Omega$. Además, como se aprecia en la figura (**3-1**), se verifica,

$$B_r(y) \subset B_{2r}(x) \subset B_{3r}(z).$$

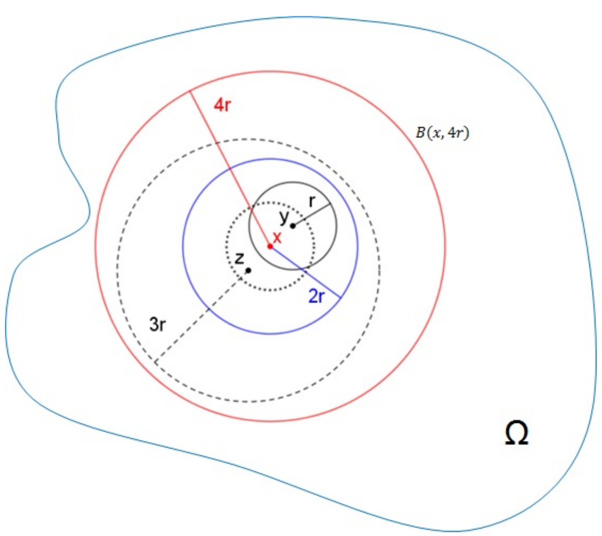

Figura 3-1: Desigualdad de Harnack.

Por hipótesis la función u es armónica y entonces el teorema 3.1.1 garantiza que u verifica la propiedad del valor medio. Se aplica la propiedad del valor medio sobre la bola cerrada, ecuación (3-5), de la manera siguiente:

$$u(y) = \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{B_r(y)} u(s)\, ds \leq \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{B_{2r}(x)} u(s)\, ds. \tag{3-21}$$

El signo de desigualdad se verifica puesto que $B_r(y) \subset B_{2r}(x)$ y la función u no toma valores negativos. Por su parte,

$$u(z) = \frac{N}{\omega_N\,(3r)^N} \int_{B_{3r}(z)} u(s)\,ds \;\geq\; \frac{N}{\omega_N\,(3r)^N} \int_{B_{2r}(x)} u(s)\,ds, \tag{3-22}$$

ya que $B_{2r}(x) \subset B_{3r}(z)$. Como las estimaciones (3-21) y (3-22) son válidas para cada punto $y,\, z \in B_r(x)$ es posible afirmar que,

$$\sup_{y \in B_r(x)} u(y) \;\leq\; \frac{N}{\omega_N\, r^N} \int_{B_{2r}(x)} u(s)\,ds, \tag{3-23}$$

y también,

$$\begin{aligned} \operatorname*{ínf}_{z \in B_r(x)} u(z) \;&\geq\; \frac{N}{\omega_N\,(3r)^N} \int_{B_{2r}(x)} u(s)\,ds \\ &= \frac{1}{3^N}\,\frac{N}{\omega_N\, r^N} \int_{B_{2r}(x)} u(s)\,ds, \end{aligned}$$

es decir,

$$\frac{N}{\omega_N\,(r)^N} \int_{B_{2r}(x)} u(s)\,ds \;\leq\; 3^N \operatorname*{ínf}_{z \in B_r(x)} u(z),$$

y en consecuencia,

$$\sup_{y \in B_r(x)} u(y) \;\leq\; 3^N \operatorname*{ínf}_{z \in B_r(x)} u(z). \tag{3-24}$$

Considérese un dominio acotado A tal que su clausura esté contenida en Ω, es decir $\bar{A}$ está acotado y en virtud de la proposición 1.1.4, $\bar{A}$ es un compacto de Ω. Sean $y,\, z \in \bar{A}$ puntos donde se alcanzan el máximo y el mínimo de la función u sobre dicho compacto respectivamente. Puesto que Ω es conexo, tales puntos se pueden unir por una curva contenida en $\bar{A}$, proposición 1.1.6. Tomando,

$$0 < 4r \leq \text{mín}\{\, |\, a - b\, | \;:\; a \in \bar{A}, \quad b \in \mathbb{R}^N - \Omega\,\}, \tag{3-25}$$

se puede afirmar que todas las bolas con centro en los puntos de la curva y radio $4r$ están contenidas en Ω, además al ser $\bar{A}$ compacto basta una cantidad finita m de tales bolas para cubrir la curva que une los puntos $y,\ z$. Entonces empezando por el punto del máximo y aplicando (3-24) de forma reiterada se obtiene,

$$\sup_{y \in \bar{A}} u(y) \;\leq\; 3^{N m} \operatorname*{ínf}_{z \in \bar{A}} u(z), \tag{3-26}$$

como se quería demostrar. □

3.2. Principio del máximo débil

Una de las herramientas importantes en la teoría de funciones armónicas, que en particular permite obtener la unicidad de solución clásica del problema (PDP), es el denominado *principio del máximo*. En concreto se tiene:

Teorema 3.2.1 ***Principio del máximo débil.***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *dominio acotado y* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*. Si* $\Delta u \geq 0$ *sobre* Ω *entonces el máximo de* u *se alcanza en la frontera* $\partial\Omega$*, es decir,*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) = \max_{y \in \partial\Omega} u(y). \tag{3-27}$$

Prueba: Puesto que $\partial\Omega \subset \overline{\Omega}$ siempre se verifica que,

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \geq \max_{y \in \partial \Omega} u(y), \tag{3-28}$$

entonces la prueba consiste en establecer la desigualdad en el otro sentido. Supóngase en primer lugar $\Delta u > 0$ en Ω. En tal caso, si no se satisface (3-27) existe un punto $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u > \max\limits_{\partial \Omega} u$. Nótese que si en el punto x_0 está el máximo de u, entonces ha de tenerse,

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(x_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}(x_0) \leq 0, \qquad k = 1,\ 2,\ ...,\ N; \tag{3-29}$$

luego $\Delta u(x_0) \leq 0$, en contradicción con la suposición de partida. En resumen si $\Delta u > 0$ en Ω entonces nesesariamente se satisface (3-27). Para el otro paso de la demostración se considera la función auxiliar $v(x) =| x |^2$. Como $\Delta u \geq 0$ en Ω entonces para cada $\varepsilon > 0$ se verifica $\Delta (u(x) + \varepsilon v(x)) > 0$ en Ω. Al aplicar el resultado obtenido con la hipótesis previa,

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} (u(x) + \varepsilon v(x)) = \max_{y \in \partial\Omega} (u(y) + \varepsilon v(y))$$

$$\leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y) + \varepsilon \max_{y \in \partial\Omega} v(y),$$

pero como v es no negativa, se satisface que para $\varepsilon > 0$,

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u \leq \max_{x \in \overline{\Omega}} (u(x) + \varepsilon v(x)),$$

y en consecuencia,

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y) + \varepsilon \max_{y \in \partial\Omega} v(y). \tag{3-30}$$

Aplicando límite cuando $\varepsilon \to 0$ en la desigualdad (3-30) se deduce que,

$$\max_{x \in ,\overline{\Omega}} u(x) \leq \max_{y \in \partial\Omega} u(y), \tag{3-31}$$

como se quería demostrar. $\square$

El teorema 3.2.1 sigue siendo válido si se reemplaza máximo por mínimo y en este caso es llamado *principio débil del mínimo*, esto se deduce al observarse que cuando u es armónica entonces $-u$ también lo es, y que además $\min u = \max\,(-u)$. Con esto, tomando la función $-u$ y aplicando la relación (3-27) se obtiene,

$$\min_{x\,\in\,\overline{\Omega}} u(x) \;=\; \min_{y\,\in\,\partial\Omega} u(y). \tag{3-32}$$

Como consecuencia inmediata del teorema 3.2.1 se obtienen los siguientes resultados.

Corolario 3.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado y $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$. Si $\Delta\, u = 0$ sobre Ω entonces,*

$$\min_{\partial\Omega} u \;\leq\; u(x) \;\leq\; \max_{\partial\Omega} u \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega}. \tag{3-33}$$

Prueba: Para establecer este resultado basta aplicar el *principio débil del máximo* y el principio débil del mínimo a la función armónica u. $\square$

Corolario 3.2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado. Sean $f \in C(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$. Entonces existe a lo más una solución $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ del problema de valor en la frontera,*

$$\begin{cases} \Delta\, u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ \;\; u(y) = g(y), & y \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3-34}$$

Prueba: Suponga que existen dos funciones $u_1,\ u_2$ que resuelven el problema (3-34). En tal caso la diferencia $v = u_1 - u_2$ resulta ser armónica sobre Ω, continua en $\overline{\Omega}$ y su valor sobre la frontera $\partial\Omega$ es nulo. Del corolario (3.2.1) se sigue que,

$$0 = \min_{y\,\in\,\partial\Omega} (\, g(y) \,-\, g(y)\,) \leq u_1\,(x) \,-\, u_2\,(x) \leq \max_{y\,\in\,\partial\Omega} (\, g(y) \,-\, g(y)\,) = 0, \qquad \forall\, x \,\in\, \overline{\Omega},$$

es decir $v = 0$ en todo el dominio Ω y en consecuencia $u_1 = u_2$. $\square$

El siguiente resultado es el recíproco del teorema 3.1.1 y caracteriza a las *funciones armónicas* por satisfacer la propiedad del valor medio.

Teorema 3.2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $u \in C(\Omega)$. Si u verifica la propiedad del valor medio sobre Ω entonces u es armónica en Ω.*

Prueba: Sea x_0 un punto de Ω y $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$. Puesto que $u \in C(\Omega)$ es posible plantear el problema,

$$\begin{cases} \Delta\, v(x) = 0, & \text{en} \quad |x - x_0| < r, \\ \;\; v(x) = u(x), & \text{en} \quad |x - x_0| = r. \end{cases} \tag{3-35}$$

Este problema tiene como solución la *integral de Poisson*, es decir v queda definida por (2-66), y es armónica sobre la bola $B_r(x_0)$. En este sentido y en virtud del teorema 3.1.1, la función v cumple la propiedad del valor medio en $|x-x_0|<r$. La hipótesis establece que u satisface la propiedad del valor medio sobre Ω; con esto la función $w=u-v$ también la verifica en $|x-x_0|<r$. Si $|x-x_0|=r$ se tiene $w(x)=0$ y aplicando el corolario 3.2.1 se deduce que,

$$0=\min_{|x-x_0|=r}\left(\, u(x)\ -\ v(x)\,\right)\leq\left(\, u(z)\ -\ v(z)\,\right)\leq\max_{|x-x_0|=r}(u(x)-v(x))=0, \tag{3-36}$$

para todo z verificando $|z-x_0|\leq r$. Por tanto $u(z)=v(z)$ sobre la bola $B_r(x_0)$ y como v es armónica en dicha bola, se concluye que la función u es también armónica sobre $B_r(x_0)$. En resumen, al tomar un punto arbitrario de Ω se demostró que la función u coincide con una función armónica en una bola entorno de dicho punto. El proceso puede repetirse para cualquier punto del dominio Ω y así concluir la demostración. □

3.3. Funciones subarmónicas y superarmónicas

Para resolver el problema de Dirichlet por el método de Perron se introducirán las *funciones subarmónicas* y su contraparte, las funciones superarmónicas. Estas funciones son versiones debilitadas de las funciones armónicas, pero aún así, gozan de algunas de las propiedades de las funciones armónicas. Es conveniente estudiarlas pues, como se verá más adelante, se pueden generar funciones armónicas a partir de funciones subarmónicas.

Definición 3.3.1 *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un dominio. Una función $u\in C(\Omega)$ es subarmónica en Ω si para cada punto $y\in\Omega$ existe $\rho_0>0$ tal que $\bar{B}_{\rho_0}(y)\subset\Omega$ y para todo $0<r\leq\rho_0$,*

$$u(y)\leq\frac{1}{\omega_N r^{N-1}}\int_{|x-y|=r} u(x)\, d\sigma(x). \tag{3-37}$$

En seguida se resalta una observación elemental que extiende los cálculos con respecto a la propiedad del valor medios de funciones armónicas hechos anteriormente.

Proposición 3.3.1 *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un dominio y $u\in C^2(\Omega)$ tal que $-\Delta\, u\leq 0$ sobre Ω. Sea $y\in\Omega$, fijo y $r>0$ tal que $\bar{B}_r(y)\subset\Omega$, entonces,*

$$u(y)\leq\frac{1}{\omega_N r^{N-1}}\int_{|x-y|=r} u(x)\, d\sigma(x). \tag{3-38}$$

Prueba: Sea $r>0$ de modo que para cada $0<\rho<r$, la bola cerrada de radio ρ y centro en el punto y verifique $\bar{B}_\rho(y)\subset\Omega$. Puesto que $\Delta\, u\geq 0$, al aplicar la ecuación (1-31) se obtiene,

$$\int_{|x-y|\leq\rho}\Delta\, u(x)\, dx=\int_{|x-y|=\rho}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}(x)\ d\sigma(x)\geq 0. \tag{3-39}$$

Siendo $\rho > 0$ y utilizando la parte b) del teorema 1.2.8 se deduce que,

$$\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\ d\sigma(x) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\int_{|x-y|\leq\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\ dx \right), \tag{3-40}$$

sin embargo, si se transforma a coordenadas esféricas centradas en y; del miembro de la derecha de la ecuación (3-40) se sigue,

$$\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\ d\sigma(x) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\int_0^\rho \rho^{N-1} \left[\int_{S^{N-1}} \frac{\partial u}{\partial \rho}(y + \rho\omega)\ d\sigma(\omega) \right]\ d\rho \right),$$

obteniendo,

$$\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\ d\sigma(x) = \rho^{N-1} \int_{S^{N-1}} \frac{\partial u}{\partial \rho}(y + \rho\omega)\ d\sigma(\omega). \tag{3-41}$$

Al retornar a la variable original en el miembro derecho de (3-41) se tiene,

$$\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\ d\sigma(x) = \rho^{N-1} \left[\rho^{1-N} \int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x)\ d\sigma(x) \right],$$

pero como u es continua se puede integrar bajo el signo de derivación y por tanto,

$$\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\ d\sigma(x) = \rho^{N-1} \left[\rho^{1-N} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{|x-y|=\rho} u(x)\ d\sigma(x) \right].$$

Resumiendo,

$$\int_{|x-y|\leq\rho} \Delta u(x)\ dx = \rho^{N-1} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho^{1-N} \int_{|x-y|=\rho} u(x)\ d\sigma(x) \right] \geq 0, \tag{3-42}$$

siendo $d\sigma(x)$ el elemento diferencial de área.

Para $0 < \rho \leq r$ se define la *función radial*,

$$F(\rho) = \rho^{1-N} \int_{|x-y|=\rho} u(x)\ d\sigma(x), \tag{3-43}$$

que resulta ser no decreciente pues, como se ve en la ecuación (3-42),

$$\frac{\partial F}{\partial \rho}(\rho) \geq 0, \tag{3-44}$$

es decir, si $0 < \rho < r$ entonces se verifica,

$$\rho^{1-N} \int_{|x-y|=\rho} u(x)\ d\sigma(x) \leq r^{1-N} \int_{|x-y|=r} u(x)\ d\sigma(x). \tag{3-45}$$

De otra parte, como ω_N, la medida de la esfera $S^{N-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^N : |x| = 1 \,\}$ es un real positivo, al dividir en la expresión (3-45) el sentido de la desigualdad no se altera, esto es,

$$\rho^{1-N} \frac{1}{\omega_N} \int_{|x-y|=\rho} u(x) \; d\sigma(x) \leq r^{1-N} \frac{1}{\omega_N} \int_{|x-y|=r} u(x) \; d\sigma(x),$$

entonces aplicando límite cuando $\rho \to 0$ en esta última expresión, el teorema 1.2.7 garantiza que,

$$u(y) = \lim_{\rho \to 0} \rho^{1-N} \frac{1}{\omega_N} \int_{|x-y|=\rho} u(x) \; d\sigma(x) \leq r^{1-N} \frac{1}{\omega_N} \int_{|x-y|=r} u(x) \; d\sigma(x). \tag{3-46}$$

lo que concluye la demostración. □

Ahora bien, cuando u verifica la propiedad (3-38) se observa de inmediato que para cada $0 < \rho < r$ se cumple,

$$u(y) \leq \frac{1}{\omega_N \; \rho^{N-1}} \int_{|x-y|=\rho} u(x) \; d\sigma(x),$$

luego,

$$\omega_N \; \rho^{N-1} \; u(y) \leq \int_{|x-y|=\rho} u(x) \; d\sigma(x). \tag{3-47}$$

Integrando con respecto a ρ el miembro izquierdo de la desigualdad (3-47) se obtiene,

$$\omega_N \; u(y) \int_0^r \rho^{N-1} \; d\,\rho = \frac{\omega_N \; r^N}{N} \; u(y), \tag{3-48}$$

y al integrar con respecto a ρ el otro miembro de (3-47) se obtiene,

$$\int_0^r \int_{|x-y|=\rho} u(x) \; d\,\sigma(x) \; d\rho = \int_{|x-y|\leq\rho} u(x) \; d\sigma(x). \tag{3-49}$$

es decir, (3-47) se convierte en,

$$\begin{aligned} \frac{\omega_N \; r^N}{N} \; u(y) &\leq \int_{|x-y|\leq\rho} u(x) \; d\sigma(x) \\ u(y) &\leq \frac{N}{\omega_N r^N} \int_{|x-y|\leq\rho} u(x) \; d\sigma(x). \end{aligned}$$

Con lo anterior la *desigualdad de la media*, ecuación (3-38), también es válida al evaluar la integral sobre todos los puntos de la bola, es decir,

$$u(y) \leq \frac{1}{\omega_N r^{N-1}} \int_{|x\,-\,y|\leq\rho} u(x) \; dx, \tag{3-50}$$

siempre que $B_r(y) \subset \Omega$. Si se compara la proposición 3.3.1 con lo visto de propiedades de funciones armónicas en la sección 3.1, se observa que:

i) Con la hipótesis $\Delta\, u = 0$ se tiene la igualdad en (3-38). En efecto si u es armónica satisface la *propiedad del valor medio.*

ii) Además, si en el teorema 3.1.1 se parte de la hipótesis $-\Delta\ u \leq 0$ se obtiene la desigualdad en el mismo sentido de (3-38). De (1-31) se infiere que,

$$\int_{|x\,-\,y|<r} \Phi(|\ x\ -\ y\ |)\ \Delta\, u(x)\ \ dx\ \geq \int_{|x\,-\,y|=r} \Phi(|\ x\ -\ y\ |)\, \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\ \ d\sigma(x), \qquad (3\text{-}51)$$

entonces la representación integral (2-22) se traduce en,

$$u(y)\ \leq \int_{|x-y|=r} u(x)\, \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(|x-y|)\ d\sigma(x), \qquad (3\text{-}52)$$

y siguiendo el mismo proceso visto en el teorema 3.1.1 se llega a la desigualdad (3-38).

Bajo la interpretación anterior, el signo menos que se puso al *Laplaciano* en la hipótesis de la proposición 3.3.1, es para resaltar que así, el operador de *Laplace* es monótono.

Se puede ver en la proposición 3.3.1 que toda función con segundas derivadas continuas y tal que $-\Delta\, u \leq 0$ es *subarmónica.* Sin embargo, la *desigualdad de la media* (3-37) y la condición de subarmonicidad, no son suficientes para poder obtener el recíproco, es decir, que una función u sea subarmónica no implica necesariamente que $-\Delta\, u \leq 0$, pues en general no se puede demostrar que sea de clase C^2.

El resultado siguiente extiende el principio del máximo a funciones subarmónicas. Considérese el conjunto de funciones subarmónicas sobre Ω, denotado por,

$$\Sigma(\Omega) = \{\ u\ \in\ C(\Omega)\ \mid\ u \text{ subarmónica}\}.$$

Teorema 3.3.1 ***Principio del máximo fuerte***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio.
1) Si $u\ \in\ \Sigma(\Omega)$ entonces u es constante, o bien,

$$u(x) < \sup_{\Omega}\ u, \qquad \textit{para todo } x\ \in\ \Omega. \qquad (3\text{-}53)$$

2) Si además Ω es acotado, entonces u es constante, o bien,

$$u(x) < \max_{\partial\Omega}\ u, \qquad \textit{para todo } x\ \in\ \Omega. \qquad (3\text{-}54)$$

Prueba:
1) Sea $M = \sup_{\Omega}\ u$. Si $M \to \infty$ la conclusión es trivial, ya que en cualquier caso $u(x) < M$. Supóngase $M < \infty$ y considérense los conjuntos,

$$\Omega_1 = \{\ x\ \in\ \Omega\ \mid\ u(x) = M\}, \qquad \Omega_2 = \{\ x\ \in\ \Omega\ \mid\ u(x) < M\ \}.$$

De aquí se deduce,

$$\begin{cases} \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset, \\ \Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega. \end{cases} \tag{3-55}$$

Se probará en primer lugar que Ω_2 es abierto. Sea $\rho > 0$ y $x_0 \in \Omega_2$, es decir $u(x_0) < M$. Puesto que u es continua en Ω existe una bola abierta $B_\rho(x_0)$ tal que $u(z) < M$ para todo $z \in B_\rho(x_0)$. Como $B_\rho(x_0) \subset \Omega_2$, esto permite concluir que Ω_2 es abierto.

De otra parte Ω_1 también es abierto. En efecto, como $u \in \Sigma(\Omega)$, si $y \in \Omega_1$ y $r_0 > 0$ es tal que $B_{r_0}(y) \subset \Omega$ entonces para $0 < r < r_0$ se verifica (3-37), esto es,

$$u(y) \leq \frac{1}{\omega_N \; r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(x) \;\; d\sigma(x). \tag{3-56}$$

De aquí se sigue,

$$0 \leq \left[\frac{1}{\omega_N \; r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(x) \;\; d\sigma(x) \right] - u(y)$$

$$= \frac{1}{\omega_N \; r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} (\; u(x) \; - \; u(y) \;) \;\; d\sigma(x),$$

puesto que se integra en la variable x. Ahora bien, $u(x) = M$ para los $x \in \Omega_1$, de modo que al reemplazar en la última expresión se deduce,

$$0 \leq \frac{1}{\omega_N \; r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} (\; u(x) \; - \; M \;) \;\; d\sigma(x), \tag{3-57}$$

pero por definición $u(x) - M \leq 0$, es decir para que la expresión (3-57) se verifique se requiere necesariamente $u(x) = M$ en la esfera $\mid x - y \mid= r$, para cada $0 < r < r_0$. En consecuencia, si $\mid x - y \mid< r_0$, $u(x) = M$, o de otra forma si $x \in B_{r_0}(y)$ entonces $u(x) = M$, es decir $B_{r_0}(y) \subset \Omega_1$ y por tanto Ω_1 es abierto.

La prueba del resultado termina cuando se demuestre que, o bien Ω_1, o bien Ω_2 es vacío. Por hipótesis Ω es conexo, luego por definición 1.1.25 la única partición en abiertos posible es la trivial. Dicho de otra forma, los únicos subconjuntos de Ω que son abiertos son el propio Ω y el conjunto vacío. Con base en éste argumento y la expresión (3-55) se concluye que alguno de los conjuntos, bien Ω_1, o bien Ω_2, debe ser vacío, como se quería demostrar.

2) Sea $M = \max_{\overline{\Omega}} \; u$. Del apartado 1) se sugiere que u es constante, o bien, $u(x) < M$ para todo $x \in \Omega$. En virtud del teorema 3.2.1 se sabe que M no se alcanza en Ω sino sobre su frontera, es decir $M = \max\limits_{\partial\Omega} u$ y se verifica la segunda alternativa de 2). $\square$

Una función u es armónica en Ω si u y $-u$ son subarmónicas sobre dicho dominio. En efecto, si u es subarmónica en Ω satisface la *desigualdad de la media*,

$$u(y) \leq \frac{1}{\omega_N \ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(x) \ d\sigma(x) \tag{3-58}$$

y si $-u$ es subarmónica se tiene,

$$u(y) \geq \frac{1}{\omega_N \ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(x) \ d\sigma(x)$$

en conclusión,

$$u(y) = \frac{1}{\omega_N \ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(x) \ d\sigma(x)$$

es decir, u satisface la *propiedad del valor medio* y por tanto, en virtud del teorema 3.2.2, u es armónica en Ω.

Si se cambia el sentido de la desigualdad por $-\Delta u \geq 0$, con argumentos similares a los expuestos en la prueba de la proposición (3.3.1) se obtiene,

$$\int_{|x-y|\leq\rho} \Delta \ u(x) \ dx = \rho^{N-1} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\rho^{1-N} \int_{|x-y|=\rho} u(x) \ d\sigma(x) \right] \leq 0.$$

Nuevamente se define la función radial,

$$F(\rho) = \rho^{1-N} \int_{|x-y|=\rho} u(x) \ d\sigma(x) \tag{3-59}$$

que resulta ser no creciente. De este modo, si $0 < \rho < r$ entonces,

$$\rho^{1-N} \int_{|x-y|=\rho} u(x) \ d\sigma(x) \geq r^{1-N} \int_{|x-y|=\rho_0} u(x) \ d\sigma(x)$$

pero al operar por ω_N y aplicar límite cuando $\rho \to 0$ se obtiene,

$$u(y) = \lim_{\rho\to 0} \rho^{1-N} \frac{1}{\omega_N} \int_{|x-y|=\rho} u(x) \ d\sigma(x) \ \geq \ r^{1-N} \frac{1}{\omega_N} \int_{|x-y|=r} u(x) \ d\sigma(x), \tag{3-60}$$

para todo $\rho < r$ tal que $\bar{B}_\rho(y) \subset \Omega$; esto en virtud del teorema 1.2.7. Por consiguiente, si $r > 0$ es tal que $\bar{B}_r(y) \subset \Omega$ entonces,

$$u(y) \geq \frac{1}{\omega_N \ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(x) \ d\sigma(x). \tag{3-61}$$

Las funciones continuas que verifican la desigualdad (3-61) reciben un nombre propio.

Definición 3.3.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio. Una función $u \in C(\Omega)$ es superarmónica en Ω si para cada $y \in \Omega$ existe $\rho_0 > 0$ tal que $\bar{B}_{\rho_0}(y) \subset \Omega$ y para todo $0 < r \leq \rho_0$,*

$$u(y) \ \geq \ \frac{1}{\omega_N \ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(x)\, d\sigma(x). \tag{3-62}$$

Si se intercambia máximo por mínimo en el teorema 3.3.1, se obtiene el denominado *principio del mínimo fuerte*. La demostración de este resultado se basa en los mismos argumentos vistos en el teorema 3.3.1.

Teorema 3.3.2 ***Principio del mínimo fuerte***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio.
1) Si $u \in \Sigma(\Omega)$ entonces u es constante, o bien,

$$u(x) > \inf_{\Omega} \ u, \qquad \textit{para todo } x \in \Omega. \tag{3-63}$$

2) Si además Ω es acotado, entonces u es constante, o bien,

$$u(x) > \min_{\partial\Omega} \ u, \qquad \textit{para todo } x \in \Omega. \tag{3-64}$$

Antes de seguir se probará un resultado de comparación que es consecuencia inmediata del principio del máximo.

Teorema 3.3.3 ***Principio de comparación***
Sea Ω un dominio de $\mathbb{R}^N$ y sean $u_1,\ u_2 \in C^2(\Omega)$ verificando,

i) $\Delta\, u_1(x) \geq \Delta\, u_2(x)$ para $x \in \Omega$.

ii) $u_1(x) \leq u_2(x)$ para $x \in \partial\Omega$.

Entonces,

$$u_1(x) \leq u_2(x) \qquad \textit{para todo } x \textit{ en el dominio } \Omega.$$

Prueba: De la hipótesis i) $\Delta\, u_1(x) \ - \ \Delta\, u_2(x) \geq 0$ y como el operador Δ es lineal se obtiene $-\Delta\, (\ u_1 \ - \ u_2\ )(x) \leq 0$. Además $u_1,\ u_2 \in C^2(\Omega)$ y con esto, de acuerdo con la definición 3.3.1 y la proposición 3.3.1, se puede afirmar que la función $(\ u_1 \ - \ u_2\ )$ es subarmónica en Ω.

Por la hipótesis ii) $(\ u_1 \ - \ u_2\ )(x) \leq 0$ en $\partial\Omega$, de modo que,

$$\sup_{\partial\Omega}(u_1 \ - \ u_2\ )(x) \ \leq \ 0, \tag{3-65}$$

y aplicando el *principio del máximo*, teorema 3.3.1, es posible concluir que para $x \in \Omega$ se verifica $(\ u_1 \ - \ u_2\ )(x) \ \leq \ 0$ o de manera equivalente,

$$u_1(x) \ \leq \ u_2(x), \tag{3-66}$$

para todo x en el dominio Ω, quedando establecido. $\square$

El resultado que sigue pone de manifiesto la flexibilidad de cálculo que se obtiene usando *funciones subarmónicas*; es una clase cerrada frente a la operación de tomar máximo de una familia finita de funciones.

Lema 3.3.1 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio acotado y sean* $u_1,\ u_2,\ ...,\ u_k \in \Sigma(\Omega)$. *Entonces,*

$$v(x) = \text{máx}\ \{\ u_i(x)\ \mid\ i = 1,\ 2,\ ...,\ k\ \}, \tag{3-67}$$

es subarmónica en Ω.

Prueba: Por hipótesis las funciones $u_1,\ u_2,\ ...,\ u_k$ son subarmónicas y por consiguiente resultan continuas en Ω; esto permite observar que la función v, así definida, es continua en Ω.

Ahora bien, cada u_i, con $i = 1,\ 2,\ ...,\ k$, satisface la desigualdad de la media (3-37), de modo que para $y \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(y) \subset \Omega$ se verifica,

$$\begin{aligned} v(y) &= \text{máx}\ \{\ u_i(x)\ \mid\ i = 1,\ 2,\ ...,\ k\ \} \\ &\le \text{máx}\ \left[\ \frac{1}{\omega_N\ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u_i(x)\ \ d\sigma(x),\quad i = 1,\ 2,\ ...,\ k\ \right], \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} v(y) &\le \frac{1}{\omega_N\ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} \text{máx}\ \{u_i(x),\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ k\ \}\ \ d\sigma(x) \\ &= \frac{1}{\omega_N\ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} v(x)\ \ d\sigma(x). \end{aligned}$$

En conclusión la función v satisface la desigualdad de la media y en virtud de la definición 3.3.1 se deduce que v es subarmónica en Ω. $\square$

3.4. Propiedades de convergencia

En esta sección se establecen dos resultados de gran interés y que serán indispensables para asegurar la existencia de solución al problema de Dirichlet en dominios mas generales. En el primer caso se considera una sucesión uniformemente acotada de funciones continuas de valor real.

Teorema 3.4.1 ***Teorema de Ascoli-Arzelá***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *compacto. Sea* $\{f_n\} \subset C(\Omega)$ *sucesión de funciones continuas de valor real. Si* $\{f_n\}$ *es acotada uniformemente y equicontinua entonces existe una subsucesión* $\{f_{k_n}\} \subset C(\Omega)$ *que converge uniformemente a una función continua en* Ω*.*

Prueba: Puesto que $\{f_n\}$ es acotada uniformemente, por la definición 1.1.22 existe una constante $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \Omega$ se verifica $-M \leq f_n(x) \leq M$, es decir el conjunto formado por las imágenes de la sucesión es acotado en $\mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Por equicontinuidad, definición 1.1.23, para la sucesión $\{f_n\}$ existe $\delta > 0$ tal que si $x,\ y \in \Omega$ y $|x - y| < \delta$ se verifica,

$$| f_n(x) - f_n(y) | < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3-68}$$

Ahora bien, como Ω es compacto admite un *cubrimento finito*, es decir existe un número finito de puntos $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_k$ para los cuales la familia de bolas $\{B_\delta(x_i)\}$, $i = 1,\ ...,\ k$, forma un cubrimiento abierto de Ω. Nótese que para $1 \leq i \leq k$, $\{f_n(x_i)\}$ es una sucesión de números reales acotada, que en virtud del teorema de Bolzano - Weierstrass tiene una *subsucesión* $\{f^1_n(x_i)\}$ que converge. Por tanto, aplicando el criterio de Cauchy a dicha subsucesión se encuentra $H_1 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\left| f^1_n(x_i) - f^1_m(x_i) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\ n,\ m \geq H_1. \tag{3-69}$$

Análogamente, como $\{f^1_n(x_i)\}$ está acotada, por el teorema de Bolzano - Weierstrass existe $\{f^2_n(x_i)\}$, subsucesión de $\{f^1_n(x_i)\}$, tal que $\{f^2_n(x_i)\}$ es convergente. Al aplicar el criterio de Cauchy se encuentra $H_2 \in \mathbb{N}$ verificando,

$$\left| f^2_n(x_i) - f^2_m(x_i) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\ n,\ m \geq H_2. \tag{3-70}$$

Así por recurrencia se construye una subsucesión $\{f^k_n(x_i)\}$ de $\{f^{k-1}_n(x_i)\}$, de forma que,

$$\left| f^k_n(x_i) - f^k_m(x_i) \right| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \forall\ n,\ m \geq H_k. \tag{3-71}$$

Se tiene que,

$$\left| f^k_n(x) - f^k_m(x) \right| = \left| f^k_n(x) - f^k_n(x_i) + f^k_n(x_i) - f^k_m(x_i) + f^k_m(x_i) - f^k_m(x) \right|$$

$$\leq \left| f^k_n(x) - f^k_n(x_i) \right| + \left| f^k_n(x_i) - f^k_m(x_i) \right| + \left| f^k_m(x_i) - f^k_m(x) \right|.$$

Además, para cualquier $x \in \Omega$ existe i, con $1 \leq i \leq k$, tal que $|x - x_i| < \delta$ y entonces el primer y el tercer sumando se acotan por $\dfrac{\varepsilon}{3}$ en virtud de la *equicontinuidad* y el segundo por la construcción anterior. Entonces si $N = \text{máx}\ \{\ H_1,\ ...,\ H_k\ \}$ se deduce,

$$\left| f^k_n(x) - f^k_m(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \qquad \forall\ n,\ m \geq N; \tag{3-72}$$

lo cual implica,

$$\max_{x \in \Omega} \left| f_n^k(x) - f_m^k(x) \right| < \varepsilon \qquad \forall \ n, \ m \geq N. \tag{3-73}$$

Si se escoge la subsucesión $\{f_n^n\} \subset \{f_n^k\}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, se sigue,

$$\max_{x \in \Omega} | f_n^n(x) - f_m^n(x) | < \varepsilon \qquad \forall \ n, \ m \geq N; \tag{3-74}$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se deduce que la sucesión $\{f_n^n\}$ es uniformemente de Cauchy. Por supuesto cada f_n^n es continua en Ω, es decir $\{f_n^n\} \subset C(\Omega)$, pero como el espacio de funciones continuas $C(\Omega)$ es completo, proposición 1.1.5, se deduce que el límite cuando $n \to \infty$ de $\{f_n^n\}$ es una función continua, completando la prueba del teorema. □

Como ya se estableció, una función $u \in C(\Omega)$ es armónica si y solo si satisface la *propiedad del valor medio* para cada bola compactamente contenida en Ω. Como consecuencia se obtiene un resultado sobre convergencia de sucesiones de funciones armónicas.

Teorema 3.4.2 ***Teorema de Harnack***
Sea $\Omega \in \mathbb{R}^N$ un dominio acotado. Sea $\{u_n\}$, $u_n \in C(\overline{\Omega})$ para todo $n \in \mathbb{N}$; una sucesión de funciones armónicas. Si $\{u_n\}$ converge uniformemente a u en $\partial\Omega$ entonces $\{u_n\}$ converge uniformemete a una función armónica u sobre Ω.

Prueba: Sea y un punto en $\partial\Omega$ y $\varepsilon > 0$. Puesto que $\{u_n\}$ converge uniformemente en $\partial\Omega$, por el criterio de Cauchy para convergencia uniforme existe $N \in \mathbb{N}$ tal que,

$$\| u_n(y) - u_m(y) \|_{max} < \varepsilon \qquad \forall \ n, \ m \geq N; \tag{3-75}$$

es decir,

$$\max_{y \in \partial\Omega} |u_n(y) - u_m(y)| < \varepsilon \qquad \forall \ n, \ m \geq N. \tag{3-76}$$

Por hipótesis cada función u_n es armónica en Ω de modo que $(u_n - u_m)$ también resulta ser armónica y además $|u_n - u_m|$ es de igual modo armónica. En consecuencia la función $|u_n - u_m|$ satisface el principio del máximo, es decir,

$$\max_{x \in \Omega} | u_n(x) - u_m(x) | \leq \max_{y \in \partial\Omega} | u_n(y) - u_m(y) | < \varepsilon \qquad \forall \ n, \ m \geq N; \tag{3-77}$$

con esto, si $x \in \Omega$,

$$\| u_n(x) - u_m(x) \|_{max} < \varepsilon \qquad \forall \ n, \ m \geq N. \tag{3-78}$$

Entonces la sucesión $\{u_n\}$ es uniformemente de Cauchy en Ω y en consecuencia converge uniformemente a una función continua u. Resta probar que u es armónica en Ω.

Sea $x \in \Omega$ y $B_r(x) \subset \Omega$. Por hipótesis cada u_n es armónica, es decir satisface la propiedad del valor medio, teorema 3.1.1. Por consiguiente para $n \in \mathbb{N}$ se tiene,

$$u_n(x) = \frac{1}{\omega_N \ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u_n(y) \ d\sigma(y). \tag{3-79}$$

Puesto que cada u_n es continua, al aplicar límite al infinito en la expresión (3-79), se puede aplicar límite bajo el signo de integración y en consecuencia,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \ u_n(x) &= \frac{1}{\omega_N \ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} \lim_{n\to\infty} \ u_n(y) \ \ d\sigma(y) \\ u(x) &= \frac{1}{\omega_N \ r^{N-1}} \int_{|x-y|=r} u(y) \ d\sigma(y), \end{aligned}$$

con $n \in \mathbb{N}$. Es decir, la función u satisface la propiedad de la media en Ω y del teorema 3.2.2 se concluye que u es armónica sobre Ω. $\square$

4 Solución al problema de Dirichlet en dominios con frontera regular

Los urbanistas hacen canales, los arqueros tiran flechas, los carpinteros trabajan la madera, el hombre sabio se modeló a sí mismo

Siddharta Gautama

La importancia de las funciones subarmónicas es que, siendo una clase más amplia que las funciones armónicas, continúa verificándose el principio del máximo, como se ha demostrado en el teorema 3.3.1. Se verá en la siguiente sección el papel que juegan las funciones subarmónicas en la demostración de existencia de solución del problema de Dirichlet en un dominio Ω.

4.1. El método de Perron

El problema de Dirichlet que se desea resolver es,

$$\begin{cases} \Delta\, u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(y) = g(y), & y \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4-1}$$

Se utilizará la técnica conocida con el nombre de *construcción de Perron* de funciones subarmónicas, véase John (1978) y Peral Alonso (2004). La idea es adaptar progresivamente una sucesión de funciones en un dominio, hasta convertirla en una sucesión uniformemente convergente de funciones armónicas; al menos en una bola en torno de un punto de dicho dominio.

Supóngase una función v, subarmónica en Ω y continua sobre $\partial\Omega$, verificando $v(y) \leq g(y)$ para $y \in \partial\Omega$. Por ejemplo, si se supone Ω acotado, una tal función subarmónica v puede ser seleccionada restando una constante de forma que,

$$v(y) \leq \inf_{y \in \partial\Omega} g(y). \tag{4-2}$$

Lema 4.1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ es la solución del problema* (4-1) *y $v \in \Sigma(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisface $v(y) \leq g(y)$ para $y \in \partial\Omega$ entonces se verifica $v(x) \leq u(x)$ en todo punto $x \in \Omega$.*

Prueba: Por hipótesis u es armónica en Ω, y entonces verifica la propiedad del valor medio, teorema 3.1.1. Por su parte, la función v satisface la desigualdad de la media (3-37) ya que es subarmónica. Si se define sobre Ω, $w(x) = v(x) - u(x)$, entonces w verifica (3-37), y por tanto w es subarmónica en Ω, definición 3.3.1.

La función w así definida toma valores no positivos sobre $\partial\Omega$ y en consecuencia al aplicar el principio del máximo fuerte, teorema 3.3.1, resulta $w(x) \leq 0$ para $x \in \Omega$. Esto por definición implica $v(x) \leq u(x)$, quedando demostrado. □

Se puede decir de forma imprecisa, que de haber solución para el problema (4-1) debe ser la *función subarmónica máxima*, verificando $v(y) \leq g(y)$ sobre la frontera del dominio Ω. Estas son las ideas de Poincaré, desarrolladas y extendidas por Perron. A partir de aquí, esta sección se dedica a demostrar que esta conjetura es correcta bajo alguna hipótesis de regularidad de la frontera de Ω.

En primer lugar se establece una construcción que permite mejorar una función subarmónica al hacerla armónica en una pequeña bola entorno de un punto del dominio.

Definición 4.1.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado. Sea $x_0 \in \Omega$ y $\rho > 0$ tal que $\bar{B}_\rho(x_0) \subset \Omega$. Para $u \in C(\Omega)$ se define,*

$$u_{x_0\rho}(x) = \begin{cases} u(x), & \textit{si} \quad x \in \Omega - B_\rho(x_0), \\ \\ \textit{Solución al problema} & \\ \begin{cases} \Delta\, v(x) = 0, & \textit{si} \ \mid x - x_0 \mid < \rho, \\ \quad v(x) = u(x), & \textit{si} \ \mid x - x_0 \mid = \rho, \end{cases} & \textit{para } x \in B_\rho(x_0). \end{cases} \tag{4-3}$$

La construcción anterior sirve para hacer crecer las funciones subarmónicas, como pone de manifiesto el resultado que sigue, y por esa razón se le conoce como *levantamiento armónico.*

Lema 4.1.2 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio acotado,* $x_0 \in \Omega$ *y* $r > 0$ *tal que* $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. *Sea una función* $u \in \Sigma(\Omega)$. *Considérese* $u_{x_0 r}$ *definida por* (4-3), *entonces,*

i) $u(x) \leq u_{x_0 r}(x)$ *si* $x \in \Omega$,

ii) $u_{x_0 r} \in \Sigma(\Omega)$.

Prueba: Si $x \in \Omega - B_r(x_0)$ se tiene $u_{x_0 r} = u(x)$ y entonces se verifica el resultado. Ahora bien, por hipótesis u es subarmónica en Ω de modo que u verifica la *desigualdad de la media* (3-37), sobre $B_r(x_0)$. Además $u_{x_0 r}$ es armónica en $B_\rho(x_0)$ y así, en virtud del teorema 3.1.1, debe verificar la propiedad del valor medio (3-5). Por tanto la función $v = u - u_{x_0 r}$ verifica,

$$v(x_0) \leq \frac{1}{\omega_N \; r^{N-1}} \int_{|x-x_0|=r_0} v(x) \; d\sigma(x) \qquad \text{si} \quad 0 < r_0 \leq r,$$

y por definición 3.3.1, v es subarmónica. Ya que $u(x) - u_{x_0 r}(x) = 0$ si $\mid x - x_0 \mid = r$, al aplicar el principio del máximo, teorema 3.3.1, se deduce para $x \in B_r(x_0)$ que,

$$u(x) - u_{x_0 r}(x) \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad u(x) \leq u_{x_0 r}(x), \tag{4-4}$$

quedando demostrado i).

Para establecer ii) basta con demostrar que la función $u_{x_0 r}$ satisface (3-37) sobre la frontera de $B_r(x_0)$, ya que por definición $u_{x_0 r}$ es subarmónica en $\Omega - B_r(x_0)$ y armónica en $B_r(x_0)$. Si $\mid x - x_0 \mid = r$ entonces $u(x) = u_{x_0 r}(x)$ y como u es subarmónica se tiene,

$$u_{x_0 r}(x) = u(x) \leq \frac{1}{\omega_N \; r^{N-1}} \int_{|x-y|=\rho} u(y) \; d\sigma(y), \tag{4-5}$$

para ρ lo suficientemente pequeño. Del apartado i) se sigue,

$$u_{x_0 r}(x) = u(x) \leq \frac{1}{\omega_N \; r^{N-1}} \int_{|x-y|=\rho} u_{x_0 r}(y) \; d\sigma(y), \tag{4-6}$$

luego $u_{x_0 r}$ verifica la desigualdad de la media (3-37) en todo punto de Ω, y por la definición 3.3.1 se concluye que $u_{x_0 r}$ es subarmónica en Ω, completando la demostración. □

Si $g \in C(\partial\Omega)$, se denotará,

$$\Sigma_g(\overline{\Omega}) = \{ \, v \in \Sigma(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \;\; | \;\; \text{si} \;\; y \in \partial\Omega \quad v(y) \leq g(y) \, \}, \tag{4-7}$$

es decir, $\Sigma_g(\overline{\Omega})$ es el conjunto de funciones subarmónicas acotadas por g sobre $\partial\Omega$.

Si Ω es acotado, entonces el conjunto $\Sigma_g(\overline{\Omega})$ no es vacío ya que contiene a todas las funciones constantes menores que el mínimo de g sobre $\partial\Omega$. Esta observación dará sentido a la siguiente definición.

Definición 4.1.2 *La función* $\omega_g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *definida por,*

$$\omega_g(x) = \sup\{\, v(x) \mid v \in \Sigma_g(\overline{\Omega})\,\}, \tag{4-8}$$

es la función de Perron relativa a g.

La función ω_g satisface las siguientes propiedades.

- Si M es el valor supremo de la función g sobre $\partial\Omega$ y $v \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$, entonces por el principio del máximo se verifica para todo $x \in \Omega$,

  $$v(x) \le \max_{\partial\Omega} v \le \sup_{\partial\Omega} g = M,$$

  y por tanto,

  $$\omega_g(x) = \sup\{\, v(x) \mid v \in \Sigma_g(\overline{\Omega})\,\} \le M,$$

  para todo $x \in \overline{\Omega}$; es decir ω_g está bien definida.

- Si $x \in \partial\Omega$ entonces $\omega_g(x) \le g(x)$. En efecto si $v \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$ se tiene $v(x) \le g(x)$ sobre $\partial\Omega$ y así,

  $$\omega_g(x) = \sup\{\, v(x) \mid v \in \Sigma_g(\overline{\Omega})\,\} \le g(x),$$

  para $x \in \partial\Omega$.

- Si m es el valor ínfimo de la función g sobre $\partial\Omega$ entonces $m \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$ y en consecuencia $m \le \omega_g(x)$ para $x \in \overline{\Omega}$.

De acuerdo con la conjetura hecha anteriormente, la solución al problema de Dirichlet (4-1) debe venir dada por (4-8). La primera parte de esta conjetura es que la función ω_g es armónica; como se establece en el resultado siguiente.

Teorema 4.1.1 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio acotado. Si* $g \in C(\partial\Omega)$ *entonces la función* ω_g *definida por* (4-8), *es armónica en* Ω.

Prueba: Sean

$$m = \min_{x \in \partial\Omega} g(x) \quad \text{y} \quad M = \max_{x \in \partial\Omega} g(x). \tag{4-9}$$

Puesto que $\Sigma_g(\overline{\Omega})$ es no vacío, considérense las funciones $v_1^*,\ v_2^*,\ \ldots \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$. Fijado $x_0 \in \Omega$ se define la sucesión $\{\bar{v}_n(x_0)\}$ mediante,

$$\bar{v}_n(x_0) = \max\{\, v_1^*(x_0),\ v_2^*(x_0),\ \ldots,\ v_n^*(x_0)\,\}. \tag{4-10}$$

Las funciones $v_1^*,\ v_2^*,\ ...,\ v_n^*$ están acotadas superiormente por la función g sobre $\partial\Omega$ y por consiguiente para cada $n \in \mathbb{N}$, $\bar{v}_n$ también estará acotada por g sobre $\partial\Omega$. En particular se verifica,

$$\bar{v}_n(x_0) \ \leq \ M, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4-11}$$

Del lema 3.3.1 se sigue que cada función $\bar{v}_n$ es subarmónica; esto y los comentarios previos aseguran que para $n \in \mathbb{N}$, $\bar{v}_n \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$. Por la forma en que se definió $\bar{v}_n(x_0)$ se infiere que,

$$\bar{v}_{k+1}(x_0) \geq \bar{v}_k(x_0) \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}, \tag{4-12}$$

es decir la sucesión $\{\bar{v}_n(x_0)\}$ es creciente y, como se vio en (4-11), acotada superiormente; por consiguiente converge al valor supremo, esto es,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\ \bar{v}_n(x_0) \ &= \sup\ \{\ \bar{v}_n(x_0)\ \} \\ &= \omega_g(x_0). \end{aligned} \tag{4-13}$$

Ahora bien, si se define la sucesión $v_n(x_0) = \max\{\,\bar{v}_n(x_0),\ m\,\}$, se puede afirmar, en virtud del lema 3.3.1, que cada v_n es una función subarmónica. Además cada v_n está acotada por g sobre $\partial\Omega$, es decir para cada $n \in \mathbb{N}$ las funciones $v_n \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$. Como consecuencia del principio del máximo, teorema 3.3.1, se verifica,

$$m \leq \ v_n \ \leq M, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}. \tag{4-14}$$

Por definición, la sucesión $\{v_n(x_0)\}$ resulta ser creciente (ya que $\{\bar{v}_n(x_0)\}$ lo es) y por (4-14) es acotada superiormente, en consecuencia también converge, obteniendo,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\ v_n(x_0) &= \sup\ \{\ v_n(x_0)\ \} \\ &= \omega_g(x_0). \end{aligned}$$

En efecto, si $\omega_g(x_0) = m$ se requiere necesariamente que para todo natural $v_n(x_0) = m$ y el resultado es obvio. Si $\omega_g(x_0) > m$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_0$ se cumple $v_n(x_0) > m$ y entonces $v_n(x_0) = \bar{v}_n(x_0)$ a partir del natural N_0. La igualdad (4-13) permite obtener el resultado.

Sea $r > 0$ tal que $\bar{B}_r(x_0) \subset \Omega$. Considérese para cada $n \in \mathbb{N}$ la correspondiente función *levantamiento armónico*, definida de la forma (4-3):

$$V_n(x) = (v_n)_{x_0 r}(x) = \begin{cases} v_n(x), & si \quad x \in \Omega - B_r(x_0), \\ \\ \text{Solución al problema} & \\ \begin{cases} \Delta\ u(x) = 0, & \text{si} \quad |\ x - x_0\ | < r, \\ \quad u(x) = v_n(x), & \text{si} \quad |\ x - x_0\ | = r, \end{cases} & \text{para} \ \ x \in B_r(x_0). \end{cases}$$

En otros términos, cada función V_n es la solución al problema,

$$\begin{cases} \Delta\, V_n(x) = 0, & \text{si } \; x \in B_r(x_0) \\ V_n(x) = v_n(x), & \text{si } \; x \in \Omega - B_r(x_0). \end{cases} \tag{4-15}$$

En virtud de lo probado en el lemma 4.1.2 se sigue para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{ll} v_n(x) \leq V_n(x), & x \in \Omega, \\ V_n \in \Sigma(\Omega), & \end{array} \tag{4-16}$$

y además por continuidad se verifica,

$$v_n(x) = V_n(x), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{4-17}$$

lo que implica directamente,

$$V_n(x) \leq g(x), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{4-18}$$

ya que $v_n \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$. Finalmente se puede afirmar que para todo n natural, $V_n \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$. En resumen para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \Omega$:

i) $m \leq V_n(x) \leq M$

ii) $V_n \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$

iii) $V_n(x) \leq \omega_g(x)$

iv) V_n es armónica en $B_r(x_0)$

v) Dado que,

$$v_n(x_0) \leq V_n(x_0) \leq \sup\{\, V_n(x_0)\,\} = \omega_g(x_0), \tag{4-19}$$

aplicando límite a esta desigualdad y empleando el teorema de compresión se obtiene,

$$\lim_{n\to\infty} V_n(x_0) = \omega_g(x_0). \tag{4-20}$$

Como se puede observar, se ha construido una sucesión de funciones $\{V_n\}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $V_n \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$, además V_n es armónica sobre la bola $B_r(x_0)$. Si se fija $\rho < r$; en la bola $\bar{B}_\rho(x_0)$ la sucesión $\{\, V_n\,\}$ es *uniformemente acotada* y *equicontinua*; en efecto:

- Del resumen se tiene $m \leq V_n(x) \leq M$ para $x \in \Omega$ y en particular para $x \in \bar{B}_\rho(x_0)$, por tanto existe alguna constante $C > 0$ tal que,

$$|\ V_n(x)\ | \leq C, \quad \text{para todo } \; n \in \mathbb{N},$$

  es decir la sucesión $\{\, V_n\,\}$ es uniformemente acotada, definición 1.1.22.

- Como cada V_n es continua en $\bar{B}_\rho(x_0)$, la proposición 1.1.2 garantiza que para $\varepsilon > 0$ y $x \in \bar{B}_\rho(x_0)$,

$$| V_n(x) - V_n(x_0) | < \varepsilon, \qquad n \in \mathbb{N},$$

es decir la sucesión $\{V_n\}$ es equicontinua, definición 1.1.23.

Verificándose estas dos condiciones, el teorema de Ascoli Arzelá, teorema 3.4.1, provee una subsucesión $\{V_{k_n}\}$ que converge uniformemente en $\bar{B}_\rho(x_0)$. Sin embargo, $\{V_{k_n}\}$ es una sucesión de funciones armónicas y entonces el teorema 3.4.2, teorema de Harnack, asegura que $\{V_{k_n}\}$ converge uniformemente a una función armónica en $\bar{B}_\rho(x_0)$. En consecuencia si $x \in \bar{B}_\rho(x_0)$ y,

$$u(x) = \lim_{n\to\infty} V_{k_n}(x), \tag{4-21}$$

límite uniforme, entonces u es armónica en $B_\rho(x_0)$. Del resumen también se deduce que para $x \in \Omega$ se verifica $V_{k_n}(x) \le \omega_g(x)$ y por tanto,

$$u(x) \le \omega_g(x), \qquad x \in \bar{B}_\rho(x_0), \tag{4-22}$$

pero además,

$$\lim_{n\to\infty} V_{k_n}(x_0) = \lim_{n\to\infty} V_n(x_0) = \omega_g(x_0), \tag{4-23}$$

es decir, $u(x_0) = \omega_g(x_0)$. La idea es probar que $\omega_g = u$ en una bola en torno de cada punto de Ω. De la desigualdad (4-22) se tiene que la función u no puede ser mayor que ω_g, por consiguiente resta probar que u no es menor que ω_g. Se supondrá lo contrario.

Supóngase que existe algún punto $y \in \bar{B}_\rho(x_0) - \{x_0\}$ tal que,

$$u(y) < \omega_g(y),$$

esto implica, por definición de ω_g, que debe existir alguna función v^* tal que,

$$u(y) < v^*(y). \tag{4-24}$$

Para los $x \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$ se considera la sucesión,

$$w_n(x) = \max \{ v^*(x), V_{k_n}(x) \}. \tag{4-25}$$

Es evidente que $w_n(x) \ge V_{k_n}(x)$ sobre Ω. Sea $W_n = (w_n)_{x_0\rho}$ el correspondiente levantamiento armónico; es decir, la solución al problema,

$$\begin{cases} \Delta W_n(x) = 0, & \text{si } x \in B_\rho(x_0), \\ W_n(x) = w_n(x), & \text{si } x \in \Omega - B_\rho(x_0). \end{cases} \tag{4-26}$$

Análogo al proceso realizado anteriormente se tendrá para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \Omega$,

i) $m \le W_n(x) \le M$

ii) W_n es armónica en $B_\rho(x_0)$

iii) $W_n(x) \leq \omega_g(x)$

iv) $W_n \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$

v) Dado que
$$w_n(x_0) \leq W_n(x_0) \leq \sup \{ W_n(x_0) \} = \omega_g(x_0),$$
aplicando límite se deduce,
$$\lim_{n\to\infty} W_n(x_0) = \omega_g(x_0).$$

La sucesión $\{ W_n \}$ es uniformemente acotada y equicontinua sobre $\bar{B}_\rho(x_0)$ y por el teorema de Ascoli-Arzelá existe una subsucesión $\{ W_{k_n} \}$ uniformemente convergente en $\bar{B}_\rho(x_0)$. Como $\{ W_{k_n} \}$ es una sucesión de funciones armónicas, el teorema de Harnack asegura que $\{ W_{k_n} \}$ converge uniformemente a una función armónica en $\bar{B}_\rho(x_0)$. Por tanto, si $x \in \bar{B}_\rho(x_0)$ y,
$$\bar{w}(x) = \lim_{n\to\infty} W_{k_n}(x), \tag{4-27}$$
límite uniforme, entonces $\bar{w}$ es armónica en $B_\rho(x_0)$. De los comentarios precedentes se tiene,
$$u(x) \leq \bar{w}(x) \leq \omega_g(x), \qquad x \in \bar{B}_\rho(x_0). \tag{4-28}$$
De esta manera se han construido dos funciones u, $\bar{w}$ continuas en $\bar{B}_\rho(x_0)$ y armónicas sobre $B_\rho(x_0)$ tales que,
$$\begin{aligned} u(x) &\leq \bar{w}(x), \qquad x \in \bar{B}_\rho(x_0), \\ u(x_0) &= \bar{w}(x_0), \end{aligned} \tag{4-29}$$
y por el principio del máximo, teorema 3.3.1, necesariamente se debe verificar,
$$u(x) = \bar{w}(x), \qquad x \in B_\rho(x_0). \tag{4-30}$$
En resumen, si se supone (4-24), $u(y) < v^*(y)$, por construcción se deduce $u(y) < \bar{w}(y)$ contradiciendo la ecuación (4-30). En conclusión no existe ningún punto $y \in B_\rho(x_0)$ tal que $u(y) < \omega_g(y)$; con esto es posible afirmar que $u = \omega_g$ sobre la bola abierta $B_\rho(x_0)$, pero como u es armónica en dicha bola, se concluye que la función ω_g es armónica en una vecindad del punto x_0. Si se realiza el mismo proceso en cada punto se deduce que ω_g es armónica en Ω, como se quería demostrar. □

Con el teorema anterior se ha asociado a cada función $g \in \partial\Omega$ una función ω_g armónica en Ω. En lo que sigue se demostrará la segunda parte de la conjetura, es decir que ω_g verifica el dato en la frontera de Ω. Antes de esto es necesario imponer una condición sobre la geometría de la frontera que permitirá obtener dicho resultado.

Perron observó que la condición geométrica debe ser aquella que permita construir una *barrera*, es decir una función subarmónica y continua en $\overline{\Omega}$ satisfaciendo ciertas propiedades locales que se precisan en la siguiente definición.

Definición 4.1.3 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *dominio acotado y sea* $z \in \partial\Omega$. *Se dice que una función* $b_z(x)$ *es una barrera en* z *si,*

$$\begin{cases} 1) \quad b_z \in \Sigma(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \\ 2) \quad b_z(z) = 0, \quad b_z(x) < 0, \quad x \in \partial\Omega \quad x \neq z. \end{cases} \tag{4-31}$$

A los puntos $z \in \partial\Omega$ *que admiten una barrera se les llama puntos regulares.*

En seguida se demuestra el resultado que culmina la prueba de existencia de solución para el problema de Dirichlet bajo la hipótesis de existencia de barreras.

Teorema 4.1.2 *Sea* Ω *un dominio acotado en* $\mathbb{R}^N$ *y sea* $z \in \partial\Omega$ *un punto regular. Si se toma* $g \in C(\partial\Omega)$ *y* ω_g *es la función armónica definida por* (4-8), *entonces para* $x \in \Omega$,

$$\lim_{x\to z} \omega_g(x) = g(z). \tag{4-32}$$

Prueba: Sea $\varepsilon > 0$. Como la función g es continua en la frontera de Ω existe $\delta > 0$ tal que si $| x - z | < \delta$, $x \in \partial\Omega$, entonces,

$$| g(x) - g(z) | < \varepsilon. \tag{4-33}$$

Descomponiendo la desigualdad anterior se tiene,

$$(A) \qquad g(x) > g(z) - \varepsilon \qquad \text{y} \qquad (B) \qquad g(x) < g(z) + \varepsilon.$$

Puesto que $z \in \partial\Omega$ es un punto regular, se admite una función barrera $b_z(x)$. Para $x \in \partial\Omega$ se define,

$$M_b = \max_{|x-z|\geq\delta} b_z(x) \qquad \text{y} \qquad M = \max | g(x) |$$

de lo cual se observa que $M \geq 0$ y además $M_b < 0$, por definición de función barrera. De esta manera es posible elegir $k > 0$ tal que,

$$k\, M_b \leq -M,$$

y por consiguiente para $x \in \partial\Omega$ tal que $| x - z | \geq \delta$ se verifica,

$$k\, b_z(x) \leq -M. \tag{4-34}$$

Se probará en primer lugar que para los puntos $x \in \Omega$,

$$\liminf_{x\to z} \omega_g(x) \geq g(z), \qquad \text{límite inferior.} \tag{4-35}$$

Para tal propósito se considera la función,

$$u_1(x) = g(z) - \varepsilon + k\, b_z(x).$$

Nótese que $u_1 \in C(\overline{\Omega})$ y además como la función $b_z(x)$ es subarmónica, u_1 resulta ser también subarmónica. Por definición de *función barrera* se deduce $u_1(z) = g(z) - \varepsilon$ y para $x \in \partial\Omega$ con $x \neq z$,

$$u_1(x) \leq g(z) - \varepsilon. \tag{4-36}$$

De este modo si $x \in \partial\Omega$ y $|x - z| < \delta$, las ecuaciones (A) y (4-36) permiten observar que $u_1(x) < g(x)$. Por otra parte cuando $|x - z| \geq \delta$ se tiene,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= g(z) - \varepsilon + k\, b_z(x) & \\ &\leq g(z) - \varepsilon - M, & \text{en virtud de (4-34)} \\ &\leq g(x), & \text{por la ecuación } (A). \end{aligned}$$

Bajo los argumentos anteriores se puede asegurar que,

$$u_1(x) \leq g(x), \qquad x \in \partial\Omega, \tag{4-37}$$

es decir $u_1 \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$. La definición de ω_g permite afirmar que $u_1(x) \leq \omega_g(x)$, y por consiguiente,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to z} u_1(x) &\leq \liminf_{x\to z} \omega_g(x) \\ g(z) - \varepsilon &\leq \liminf_{x\to z} \omega_g(x). \end{aligned} \tag{4-38}$$

Puesto que $\varepsilon > 0$ es arbitrario se deduce (4-35).
Resta probar la otra desigualdad, es decir para $x \in \Omega$,

$$\limsup_{x\to z} \omega_g(x) \leq g(z), \qquad \text{límite superior.} \tag{4-39}$$

Se considera la función superarmónica,

$$u_2(x) = g(z) + \varepsilon - k\, b_z(x),$$

que por definición de función barrera satisface $u_2(z) = g(z) + \varepsilon$ y además para $x \neq z$,

$$u_2(x) \geq g(z) + \varepsilon. \tag{4-40}$$

Ahora bien, si $x \in \partial\Omega$ y $|x - z| < \delta$ de (B) y (4-40) se sugiere $g(x) < u_2(x)$. Por su parte, cuando $|x - z| \geq \delta$ se verifica,

$$\begin{aligned} u_2(x) &= g(z) + \varepsilon - k\, b_z(x), & \text{por (4-34) se sigue} \\ &\geq g(z) + \varepsilon + M, & \text{pero } M \geq 0 \text{ y entonces} \\ &\geq g(x), & \text{en virtud de la ecuación } (B). \end{aligned}$$

Por tanto es posible asegurar que $u_2(x) \geq g(x)$ para $x \in \partial\Omega$, es decir, para los puntos de la frontera del dominio se cumple $-u_2(x) \leq -g(x)$. Considérese una función v, con $v \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$. De esta forma la función $v - u_2$ es subarmónica en Ω y además $v - u_2 \leq 0$ sobre $\partial\Omega$. Al aplicar el *principio del máximo*, teorema 3.3.1, a la función $v - u_2$ se obtiene $v \leq u_2$ en todo punto de Ω, esto para cualquier $v \in \Sigma_g(\overline{\Omega})$.

Entonces para $x \in \Omega$, $\omega_g(x) \leq u_2(x)$ y en consecuencia,

$$\omega_g(x) \leq g(z) + \varepsilon - k\, b_z(x), \tag{4-41}$$

luego al aplicar límite superior se obtiene,

$$\limsup_{x \to z} \omega_g(x) \leq g(z) + \varepsilon. \tag{4-42}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario se obtiene la desigualdad (4-39). Finalmente relacionando (4-35) y (4-39) se concluye la prueba del teorema. □

Como resumen de lo anterior se tiene el siguiente teorema.

Teorema 4.1.3 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado. El problema de Dirichlet* (4-1) *admite solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ para cada $g \in C(\partial\Omega)$ si y sólo si todo punto $z \in \partial\Omega$ es un punto regular.*

Prueba: $(\Rightarrow)$ Por hipótesis para cada $g \in C(\partial\Omega)$ el problema (4-1) tiene solución clásica $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Para $z \in \partial\Omega$ se considera la función $g(x) = -\mid x - z \mid$, y en concreto el problema,

$$\begin{cases} \Delta\, u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = -\mid x - z \mid, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4-43}$$

La solución del problema anterior es una barrera en z, en efecto $g(x) = -\mid x - z \mid$ verifica las condiciones de la definición 4.1.3. Entonces si el problema (4-1) es soluble en sentido clásico, todo punto de la frontera de Ω es regular.

$(\Leftarrow)$ Recíprocamente si todo punto $z \in \partial\Omega$ es un *punto regular*, en el sentido de la definición 4.1.3, los teoremas 4.1.1 y 4.1.2 establecen la existencia de solución para el problema (4-1), cualquiera que sea $g \in C(\partial\Omega)$. □

En conclusión, la existencia de la función w verificando las condiciones de la proposición 2.3.1 queda establecida, por lo cual, al menos teóricamente, la fórmula de representación de Green (2-35) está bien fundamentada. Se obtiene la siguiente consecuencia del teorema (4.1.3).

Corolario 4.1.1 *Si Ω es un dominio tal que los puntos de su frontera son regulares, entonces existe la función de Green en el sentido de la definición 2.3.1. Además G es única.*

Prueba: Basta observar que para cada $x \in \Omega$, por el teorema 4.1.3, el problema,

$$\begin{cases} \Delta_x w(x,y) = 0, & x \in \Omega, \\ w(x,y) = -\Phi(|x-y|), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4-44}$$

tiene solución. La función de Green se tiene entonces como,

$$G(x,y) = \Phi(|x - y|) + w(x,y), \qquad (x, y) \in \Omega \times \overline{\Omega}.$$

La unicidad de la función de Green se deduce del corolario 3.2.2. □

4.2. La ecuación de Poisson

Esta sección se ocupa en estudiar[1] la ecuación no homogénea para el Laplaciano, conocida como ecuación de Poisson. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado y supóngase que la frontera de Ω tiene todos los puntos regulares en el sentido de la definición 4.1.3. Sean las funciones $f \in C(\Omega)$ y $g \in C(\partial\Omega)$ fijas y considérese el problema,

$$\begin{cases} \Delta v(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ v(x) = g(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4-45}$$

El estudio realizado en la sección 4.1 garantiza la existencia de una solución w del problema,

$$\begin{cases} \Delta w(x) = 0, & x \in \Omega, \\ w(x) = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4-46}$$

por tanto basta con resolver el problema,

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{4-47}$$

ya que por linealidad la solución de (4-45) será $v(x) = w(x) + u(x)$, es decir la suma de las soluciones de (4-46) y (4-47). El corolario (4.1.1) provee la función de Green para el problema (4-45); y la fórmula de representación (2-35) para una función $u \in C^2(\Omega)$ que valga cero sobre la frontera $\partial\Omega$ se convierte en,

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)\, f(y)\, dy, \tag{4-48}$$

de manera que dicha función u es la candidata a ser solución del problema (4-47). Surge el interrogante en cuanto a las condiciones de regularidad que debe verificar f para que la función u, definida por (4-48), sea de clase $C^2(\Omega)$.

[1] En está sección se siguen las referencias Peral Alonso (2004), Gilbarg y Trudinger (2001).

4.2.1. Regularidad del segundo miembro

En el propósito de establecer las condiciones suficientes de regularidad, resulta de interés presentar el siguiente teorema; en él se da un criterio sobre eliminación de singularidades de funciones armónicas.

Teorema 4.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y x_0 un punto sobre Ω. Sea u : $\Omega \to \mathbb{R}$ tal que u es armónica en $\Omega - \{x_0\}$. Si*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{\Phi(\mid x - x_0 \mid)} = 0, \tag{4-49}$$

siendo $\Phi(\mid x - x_0 \mid)$ definida en (2-13), entonces:

i) Existe un número real A tal que $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = A$.

ii) La función que resulta de extender u a x_0 con el valor A, es armónica en Ω.

Prueba:
i) Sea $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega$ y considérese $u_1 \in C^2(B_r(x_0))$ solución del problema de Dirichlet,

$$\begin{cases} \Delta u_1(x) = 0, & x \in B_r(x_0), \\ u_1 = u(x), & \mid x - x_0 \mid = r. \end{cases} \tag{4-50}$$

Al definir $w(x) = u(x) - u_1(x)$, la hipótesis permite inferir que la función w es armónica en $B_r(x_0) - \{x_0\}$. Por definición de Φ, la ecuación (4-49) se traduce en,

$$(N-2)\,\omega_N \lim_{x \to x_0} u(x) \ \mid x \ \ x_0 \mid^{N-2} = 0,$$

y entonces al tomar,

$$\tau(x) = w(x) \ \mid x - x_0 \mid^{N-2},$$

se observa que,

$$\lim_{x \to x_0} \tau(x) = \lim_{x \to x_0} u(x) \ \mid x - x_0 \mid^{N-2} - \lim_{x \to x_0} u_1(x) \ \mid x - x_0 \mid^{N-2} = 0. \tag{4-51}$$

Para $\varepsilon > 0$ se define,

$$z_1(x) = \frac{\varepsilon}{\mid x - x_0 \mid^{N-2}} + w(x), \qquad z_2(x) = \frac{\varepsilon}{\mid x - x_0 \mid^{N-2}} - w(x),$$

es decir,

$$z_1(x) = \frac{\varepsilon + w(x) \ \mid x - x_0 \mid^{N-2}}{\mid x - x_0 \mid^{N-2}}, \qquad z_2(x) = \frac{\varepsilon - w(x) \ \mid x - x_0 \mid^{N-2}}{\mid x - x_0 \mid^{N-2}},$$

pero en virtud de la ecuación (4-51) se puede afirmar que al elegir $\rho > 0$ suficientemente pequeño se garantiza que $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ en $| x - x_0 |= \rho$. Nótese que z_1 y z_2 son armónicas en $B_r(x_0)$; además cuando $| x - x_0 |= r$,

$$z_1 = z_2 = \frac{\varepsilon}{r^{N-2}} > 0,$$

de modo que al aplicar el corolario 3.2.1 a z_1, z_2 sobre la región $\rho \leq | x - x_0 | \leq r$, se deduce que $z_1(x) \geq 0$ y $z_2(x) \geq 0$. Con esto,

$$\frac{\varepsilon}{| x - x_0 |^{N-2}} + w(x) \geq 0, \qquad \frac{\varepsilon}{| x - x_0 |^{N-2}} - w(x) \geq 0,$$

y se puede concluir que para cada $\varepsilon > 0$,

$$| w(x) | \leq \frac{\varepsilon}{| x - x_0 |^{N-2}}, \qquad \rho \leq | x - x_0 | \leq r. \tag{4-52}$$

El argumento anterior es válido para cualquier valor ρ tan cercano a cero como se quiera, es decir que se pueden abarcar todos los puntos $x \neq x_0$. Ahora bien, como ε es arbitrario, la ecuación (4-52) conduce a $w(x) = 0$ cuando $x \neq 0$. Esta ultima afirmación implica necesariamente,

$$u(x) = u_1(x),$$

para todo $x \neq x_0$, es decir que u coincide con la función u_1 sobre $B_r(x_0) - \{x_0\}$, por tanto definiendo $A = u_1(x_0)$ se obtiene $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = A$.

ii) Si $u(x_0) = A$ entonces u es igual a la función armónica u_1 sobre la bola $B_r(x_0)$ y la conclusión es inmediata. □

Se puede resumir el resultado anterior diciendo que si una función es armónica en un abierto menos un punto, su singularidad tiene que ser al menos equivalente a la de la *solución fundamental* Φ. El teorema 4.2.1 da un criterio que permitirá establecer la regularidad que debe verificar la función f. Para que la función u, dada por (4-48), tenga derivadas continuas no basta con suponer que f sea sólo continua, a tal efecto se presenta a continuación un contraejemplo que demuestra la afirmación anterior. El ejemplo fue tomado del libro *Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales* de V. P. Mijailov, (Mijailov 1982, pág. 270).

Sea $B(0, 1/2)$ la bola de radio $1/2$ y centro en el origen de $\mathbb{R}^N$. Se designa por $| x |$ la norma euclídea de x y por x_1, x_2 sus dos primeras coordenadas. Sea la función,

$$u(x) = \begin{cases} (x_1^2 - x_2^2)\,(- ln \ | x |)^{\frac{1}{2}}\,, & 0 < | x | < \dfrac{1}{2}, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{4-53}$$

La función u es continua en $B(0,1/2)$ e infinitamente diferenciable fuera del origen. Derivando respecto a x_1 se obtiene para $x \neq 0$:

$$u_{x_1}(x) = 2x_1 (-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\,x_1^2 \frac{1}{(-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{-\,x_1}{\mid x \mid}\right) - \frac{1}{2}\,x_2^2 \frac{1}{(-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{-\,x_1}{\mid x \mid}\right)$$

$$= 2x_1 (\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}} - \frac{x_1^3}{2\,\mid x \mid\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_1\,x_2^2}{2\,\mid x \mid\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}},$$

y la derivada parcial de segundo orden respecto a x_1 resulta ser,

$$u_{x_1 x_1}(x) = 2\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}} - \frac{5x_1^2}{2\,\mid x \mid^2\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x_1^4}{4\,\mid x \mid^4\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{x_1^4}{\mid x \mid^4\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_2^2}{2\,\mid x \mid^2\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_1^2\,x_2^2}{4\,\mid x \mid^4\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{x_1^2\,x_2^2}{\mid x \mid^4\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}}.$$

En la última ecuación se puede observar que,

$$\lim_{|x|\to 0} u_{x_1 x_1}(x) = \infty,$$

es decir, la función u no es de clase dos en $x = 0$. Ahora bien, si se calcula la derivada de primer orden respecto a x_2 se tiene para $x \neq 0$,

$$u_{x_2}(x) = x_1^2 \frac{1}{2\,(-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{-\,x_2}{\mid x \mid^2}\right) - 2x_2\,(-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}} - x_2^2 \frac{1}{2\,(-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{-\,x_2}{\mid x \mid^2}\right)$$

$$= -\,2x_2 (\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}} + \frac{x_2^3}{2\,\mid x \mid^2\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x_1^2\,x_2}{2\,\mid x \mid^2\,(\,-\,ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}},$$

y derivando una vez más respecto a x_2 se sigue,

$$u_{x_2x_2}(x) = -2\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}} - \frac{x_1^2}{2\,|\,x\,|^2\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_2^4}{4\,|\,x\,|^4\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{3}{2}}}$$

$$- \frac{x_2^4}{|\,x\,|^4\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{5\,x_2^2}{2\,|\,x\,|^2\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}} - \frac{x_1^2\,x_2^2}{4\,|\,x\,|^4\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{3}{2}}}$$

$$+ \frac{x_1^2\,x_2^2}{|\,x\,|^4\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}}.$$

Entonces al sumar las derivadas parciales de segundo orden de la función u respecto x_1 y x_2 resulta,

$$u_{x_1x_1}(x) + u_{x_2x_2}(x) = \frac{-3\,x_1^2}{|\,x\,|^2\,(-ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_2^4 - x_1^4}{4\,|\,x\,|^4\,(-ln\,|\,x\,|)^{\frac{3}{2}}} - \frac{(x_2^2 - x_1^2)}{|\,x\,|^4\,(-ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}}$$

$$+ \frac{3\,x_2^2}{|\,x\,|^2\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2\,|\,x\,|^2}\left[\frac{6}{(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_2^2 + x_1^2}{2\,|\,x\,|^2\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\,(x_2^2 + x_1^2)}{|\,x\,|^2\,(-ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

Calculando la derivada parcial de primer orden de la función u definida por (4-53), respecto a la variable x_3 se obtiene,

$$u_{x_3}(x) = \left(x_1^2 - x_2^2\right)\left[\frac{1}{2\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}}\;\frac{-\,x_3}{|\,x\,|^2}\right]$$
$$= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\left(\frac{x_3}{|\,x\,|^2\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

y de manera general para $i = 3,\ 4,\ ...,\ N$;

$$u_{x_i}(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2}\left(\frac{x_i}{|\,x\,|^2\,(-\,ln\,|\,x\,|)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Entonces si se calcula la derivada de segundo orden respecto a x_3 se sigue,

$$u_{x_3x_3}(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2 \mid x \mid^4 \ (- ln \mid x \mid)} \Bigg\{ \mid x \mid^2 (- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}} - x_3 \Bigg[\frac{1}{2 \ (- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\frac{- x_3}{\mid x \mid^2} \right) \mid x \mid^2 - 2x_3^2 \ (- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}} \Bigg] \Bigg\}$$

$$= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2 \mid x \mid^2} \left[\frac{1}{(- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_3^2}{2 \mid x \mid^2 \ (- ln \mid x \mid)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2 \, x_3^2}{\mid x \mid^2 \ (- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

o de manera general para $i = 3, 4, ..., N$;

$$u_{x_ix_i}(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2 \mid x \mid^2} \left[\frac{1}{(- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_i^2}{2 \mid x \mid^2 \ (- ln \mid x \mid)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2 \, x_i^2}{\mid x \mid^2 \ (- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Por consiguiente al sumar las derivadas parciales de segundo orden de la función u se sigue,

$$\Delta \, u(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2 \mid x \mid^2} \left[\frac{N+4}{(- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_1^2 + ... + x_N^2}{2 \mid x \mid^2 \ (- ln \mid x \mid)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2 \ (x_1^2 + ... + x_{N^2})}{\mid x \mid^2 \ (- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} \right]$$

$$= \frac{x_2^2 - x_1^2}{2 \mid x \mid^2} \left[\frac{N+2}{(- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2 \ (- ln \mid x \mid)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Si se toma,

$$\hat{F}(x) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2 \mid x \mid^2} \left[\frac{N+2}{(- ln \mid x \mid)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2 \ (- ln \mid x \mid)^{\frac{3}{2}}} \right],$$

se observa que,

$$\lim_{|x| \to 0} \hat{F}(x) = 0,$$

y entonces definiendo,

$$f(x) = \begin{cases} \hat{F}(x), & 0 < \mid x \mid < \dfrac{1}{2}, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

se sabe que u verifica $\Delta \, u(x) = f(x)$ con $f \in C(B(0, 1/2))$ y u no siendo de clase dos. Es decir, u resuelve el problema,

$$\begin{cases} \Delta \, u(x) = f(x), & x \in B(0, 1/2), \\ u(x) = (x_1^2 - x_2^2) \, (ln \, 2 \,)^{\frac{1}{2}} \, , & \mid x \mid = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{4-54}$$

Para concluir con el ejemplo es necesario demostrar que no existe ninguna solución del problema (4-54) que sea de clase dos; para ello se emplea el resultado en el teorema 4.2.1. Supóngase que el problema (4-54) tiene solución clásica $v(x)$, entonces la función $w(x) = u(x) - v(x)$ es armónica en $B(0, 1/2) - \{0\}$ y continua en toda la bola $B(0, 1/2)$. Por el teorema 4.2.1 la función w podría extenderse a una función armónica en $B(0, 1/2)$, en particular a una función de C^2 y como v también es de clase C^2, se concluiría que $u \in C^2$ generando una contradicción.

En resumen se ha demostrado que el problema (4-54) es un ejemplo de problema de Dirichlet para la *ecuación de Poisson* con segundo miembro continuo que no tiene solución de clase dos. No obstante la función verifica la ecuación punto a punto, y es solución en un sentido débil.

Con todo lo anterior, para resolver el problema (4-1) se hace preciso tomar f en una clase más restringida que las funciones continuas; se requerirá que f verifique la *condición de Holder* que se define a continuación.

Definición 4.2.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\alpha \in (\,0, 1\,]$. Se dice que f satisface una condición de Holder de orden α si para cada punto $x \in \Omega$ y cada bola $B_r(x) \subset \Omega$ existe $K > 0$ tal que,*

$$| \, f(x) - f(y) \, | \leq K \; | \, x - y \, |^{\alpha} \qquad y \in B_r(x), \quad x \neq y. \tag{4-55}$$

Se observa que toda función que verifique una condición de Holder es continua.

4.2.2. Existencia de solución clásica

Ya establecida la condición de regularidad para f se ha de probar ahora, que para la función u definida por (4-48) se verifica,

$$\Delta \, u(x) \; = \; \Delta \int_{\Omega} G(x, y) \, f(y) \, dy \; = f(x), \tag{4-56}$$

pero obsérvese que como $G(x, y) \; = \; \Phi(| \, x \; - \; y \, |) \; + \; w(x, y)$,

$$\Delta \, u(x) \; = \; \Delta \int_{\Omega} \Phi(| \, x \; - \; y \, |) \, f(y) \, dy \;\; + \;\; \int_{\Omega} \Delta_x \, w(x, y) \, f(y) \, dy \;\; = \;\; f(x),$$

con w satisfaciendo las condiciones de la proposición 2.3.1, entonces probar (4-56) es lo mismo que establecer,

$$\Delta \, u(x) \; = \; \Delta \int_{\Omega} \Phi(| \, x \; - \; y \, |) \, f(y) \, dy \;\; = \;\; f(x). \tag{4-57}$$

Para tal propósito se toma,

$$w(x) \;=\; \int_\Omega \varPhi(\mid x \;-\; y \mid) \, f(y)\; dy, \tag{4-58}$$

y se probará, en primer lugar, que tal función tiene derivadas parciales de primer orden continuas sobre Ω.

Proposición 4.2.1 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio acotado y* $f \in C^\alpha(\Omega)$*. La función* w *dada por* (4-58) *satisface* $w \in C^1(\Omega)$ *con,*

$$\nabla\, w(x) \;=\; \int_\Omega \nabla_x\, \varPhi(\mid x \;-\; y \mid) \, f(y)\; dy, \qquad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4-59}$$

Prueba: En la ecuación (2-17) se afirma que las derivadas parciales de primer orden de la solución fundamental están acotadas, por consiguiente es posible definir la función,

$$g_i(x) \;=\; \int_\Omega \varPhi_{x_i}(\mid x \;-\; y \mid) \, f(y)\; dy. \tag{4-60}$$

Se pretende establecer que para los $x \in \Omega$ se verifica $w_{x_i}(x) = g_i(x)$, sin embargo al no estar en las hipótesis de regularidad de los teoremas habituales de cálculo se procede por regularización de la singularidad de $\varPhi$. Se considera el *núcleo regularizante* η definido en (3-12) pero eligiendo la constante C de forma que,

$$\begin{cases} i) & 0 \;\le\; \eta_\varepsilon(x) \;\le\; 1, \\ ii) & 0 \;\le\; \eta_{x_i}(x) \;\le\; 1, \end{cases} \tag{4-61}$$

y se define para $\varepsilon > 0$,

$$w^\varepsilon(x) \;=\; \int_\Omega f(y)\, \varPhi(\mid x \;-\; y \mid)\; \eta_\varepsilon(\mid x \;-\; y \mid)\; dy. \tag{4-62}$$

Del teorema 3.1.3 se sabe que $w^\varepsilon(x) \to w(x)$ uniformemente en Ω cuando $\varepsilon \to 0$. Este mismo teorema garantiza que para $\varepsilon > 0$, $w^\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, entonces en particular se tiene $w^\varepsilon \in C^1(\Omega)$, podiendo aplicar los teoremas clásicos de derivación bajo el signo de integración.

Sea x un punto de Ω y $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

$$\big| g_i(x) \;-\; w^\varepsilon_{x_i}(x) \big| \;=\; \Bigg| \int_{|x \,-\, y| \le \varepsilon} \varPhi_{x_i}(\mid x \;-\; y \mid) \, f(y)\; dy$$

$$- \int_{|x \,-\, y| \le \varepsilon} f(y) \Big[\, \varPhi_{x_i}(\mid x \;-\; y \mid)\; \eta_\varepsilon(\mid x \;-\; y \mid) + \;\varPhi(\mid x \;-\; y \mid)\; \eta_{\varepsilon\, x_i}(\mid x \;-\; y \mid) \Big]\; dy \;\Bigg|$$

o reescribiendo,

$$|g_i(x) \;-\; w^{\varepsilon}_{xi}(x)| \;=\; \left| \int_{|x\;-\;y|\leq\varepsilon} f(y)\; \Big[\varPhi_{x_i}(|\;x\;-\;y\;|)\,(1\;-\;\eta_\varepsilon(|\;x\;-\;y\;|)) \right.$$

$$\left. -\,\varPhi(|\;x\;-\;y\;|)\,\eta_{\varepsilon\,x_i}(|\;x\;-\;y\;|) \Big]\; dy\; \right|.$$

De las condiciones (4-61) se sigue,

$$\left|g_i(x)\;-\;w^{\varepsilon}_{x_i}(x)\right| \leq \left|\int_{|x\,-\,y|\leq\varepsilon} f(y)\;\Big[\varPhi_{x_i}(|\;x\;-\;y\;|)\;-\;\varPhi(|\;x\;-\;y\;|)\,\eta_{\varepsilon\,x_i}(|\;x\;-\;y\;|)\Big]\;dy\right|,$$

pero al reemplazar la definición de η_ε y aplicar la desigualdad triangular de la norma,

$$\left|g_i(x)\;-\;w^{\varepsilon}_{x_i}(x)\right| \;\leq\; \int_{|x\;-\;y|\leq\varepsilon} |f(y)| \;\Big[\;|\;\varPhi_{x_i}(|\;x\;-\;y\;|)\;|\;+\;\frac{1}{\varepsilon^N}\,|\;\varPhi(|\;x\;-\;y\;|)\;|$$

$$\left|\;\eta_{x_i}\left(\frac{|\;x\;-\;y\;|}{\varepsilon}\right)\;\right|\;\Big]\;dy,$$

entonces al tomar $M = \sup\limits_{y\,\in\,\Omega} |f(y)|$, y utilizar la condición ii) de (4-61), se observa que,

$$|g_i(x)\;-\;w^{\varepsilon}_{xi}(x)|\;\leq\;M\int_{|x\;-\;y|\leq\varepsilon}\Big[\;|\;\varPhi_{x_i}(|\;x\;-\;y\;|)\;|\;+\;\frac{1}{\varepsilon^N}\;|\;\varPhi(|\;x\;-\;y\;|)\;|\;\Big]\;dy. \quad (4\text{-}63)$$

En virtud de la ecuación (2-17) y la definición de la solución fundamental $\varPhi$ se tiene que,

$$|\;\varPhi_{x_i}(|\;x\;-\;y\;|)\;|\;+\;\frac{1}{\varepsilon^N}\;|\varPhi(|\;x\;-\;y\;|)\;|\;=\;\frac{1}{\omega_N\;|\;x\;-\;y\;|^{N-1}}\;+\;\frac{1}{\varepsilon^N}\,\frac{1}{(N-2)\,\omega_N\;|\;x\;-\;y\;|^{N-2}}$$

$$<\;\frac{1}{\omega_N\;|\;x\;-\;y\;|^{N-1}}\;+\;\frac{1}{\varepsilon^N}\;\frac{\varepsilon}{\omega_N\;|\;x\;-\;y\;|^{N-1}}$$

$$<\;\frac{1}{\omega_N\;|\;x\;-\;y\;|^{N-1}}\;\;\frac{2}{\varepsilon^{N-1}}$$

para $0\;<\;\varepsilon\;<\;1$. Luego, si

$$K = \sup_{x\,\in\,\Omega}\frac{2}{|\;x\;-\;y\;|^{N-1}}, \qquad x \neq y,$$

la ecuación (4-63) se convierte en,

$$\begin{aligned}
\left|g_i(x) \; - \; w^{\varepsilon}_{x_i}(x)\right| \; &< \; M \; K \, \frac{1}{\omega_N \; \varepsilon^{N-1}} \int_{|x \, - \, y| \le \varepsilon} \; dy \\
&= \; M \; K \, \frac{1}{\omega_N \; \varepsilon^{N-1}} \; \left(\frac{\omega_N}{N}\right) \, \varepsilon^N \\
&= \; M \; C_N \; \varepsilon,
\end{aligned}$$

siendo $C_N = \dfrac{K}{N}$. Se concluye que cuando ε tiende a cero, $w^{\varepsilon}_{x_i} \to g_i(x)$ uniformemente en Ω, es decir $w \in C^1(\Omega)$ y sus derivadas parciales de primer orden estan dadas por (4-60), quedando establecido el resultado. $\square$

El siguiente paso en la prueba de existencia de *solución clásica* será demostrar que la función w verifica el dato del problema (4-47).

Teorema 4.2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y $f \in C^{\alpha}(\Omega)$. La función w dada por (4-58) pertenece a $C^2(\Omega)$ y satisface sobre Ω, $\Delta\, w(x) \; = \; f(x)$.*

Prueba: Sea $R > 0$ lo suficientemente grande de modo que la bola B_R contenga al dominio Ω, $\Omega \subset B_R$. La función f se extiende por cero a toda la bola B_R y con esto,

$$w(x) \; = \; \int_{\Omega} \Phi(|\, x \; - \; y\,|)\, f(y) \; dy \;\; = \;\; \int_{B_R} \Phi(|\, x \; - \; y\,|)\, f(y) \; dy,$$

para $x \in \Omega$. Se considera la regularización,

$$w^{\varepsilon}_i(x) \; = \; \int_{\Omega} f(y) \; \Phi_{x_i}(|\, x \; - \; y\,|) \; \eta_{\varepsilon}(|\, x \; - \; y\,|) \; dy, \tag{4-64}$$

η verificando las condiciones (4-61). Del teorema 3.1.3 se sabe que cuando $\varepsilon \to 0$ la función w^{ε}_i converge uniformemente a w_{x_i}, además $w^{\varepsilon}_i \in C^{\infty}(\Omega)$, luego es correcto derivar bajo el signo de integración en (4-64).

Entonces fijado $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w^{\varepsilon}_i}{\partial x_j(x)} \; &= \; \int_{B_R} \; f(y) \, \frac{\partial}{\partial \, x_j} \Big(\; \Phi_{x_i}(|\, x \; - \; y\,|) \, \eta_{\varepsilon}(|\, x \; - \; y\,|) \Big) \;\; dy \\
&= \; \int_{B_R} \, \frac{\partial}{\partial \, x_j} \Big(\; \Phi_{x_i}(|\, x \; - \; y\,|) \, \eta_{\varepsilon}(|\, x \; - \; y\,|) \Big) \; (\; f(y) \; - \; f(x) \;) \; dy \; + \\
& \quad f(x) \, \int_{B_R} \, \frac{\partial}{\partial \, x_j} \Big(\; \Phi_{x_i}(|\, x \; - \; y\,|) \, \eta_{\varepsilon}(|\, x \; - \; y\,|) \Big) \; dy.
\end{aligned}$$

Del teorema 1.2.10 se sigue que,

$$\frac{\partial w_i^\varepsilon}{\partial x_j(x)} = \int_{B_R} \frac{\partial}{\partial\, x_j}\Big(\ \Phi_{x_i}(|\ x\ -\ y\ |)\, \eta_\varepsilon(|\ x\ -\ y\ |)\Big)\ (\ f(y)\ -\ f(x)\ )\ dy\ +$$

$$f(x) \int_{\partial B_R} \Big(\ \Phi_{x_i}(|\ x\ -\ y\ |)\, \eta_\varepsilon(|\ x\ -\ y\ |)\Big)\ \mathbf{n}_j(y)\ \ dy$$

siendo $\mathbf{n}_i(y)$ la i-ésima componente del *vector normal exterior* en el punto y. Se define,

$$g_{ij}(x) = \int_{B_R} \Phi_{x_i\, x_j}(|\ x\ -\ y\ |)\ (\ f(y)\ -\ f(x)\ )\ dy\ +\ f(x) \int_{\partial B_R} \Phi_{x_i}(|\ x\ -\ y\ |)\, \mathbf{n}_j(y)\, dy,$$

función que está bien definida ya que, aunque la integral de las segundas derivadas de la solución fundamental diverge, como se vio en (2-21); éste inconveniente es compensado por la regularidad de f.

Sea x un punto de Ω y $\varepsilon > 0$ tal que $\bar{B}_\varepsilon(x) \subset \Omega$. Se observa que,

$$\left|\ g_{ij}(x)\ -\ \frac{\partial w_i^\varepsilon}{\partial x_j}(x)\ \right| = \left|\ \int_{|x\ -\ y| \le \varepsilon} \Phi_{x_i\, x_j}(|\ x\ -\ y\ |)\ \ (\ f(y)\ -\ f(x)\ )\ dy\right.$$

$$\left. -\ \int_{|x\ -\ y| \le \varepsilon} \frac{\partial}{\partial\, x_j}\Big(\ \Phi_{x_i}(|\ x\ -\ y\ |)\, \eta_\varepsilon(|\ x\ -\ y\ |)\Big)\ (\ f(y)\ -\ f(x)\ )\ dy\right|,$$

y al desarrollar las derivadas,

$$\left|\ g_{ij}(x)\ -\ \frac{\partial w_i^\varepsilon}{\partial x_j}(x)\ \right| = \left|\ \int_{|x\ -\ y| \le \varepsilon} \Phi_{x_i\, x_j}(|\ x\ -\ y\ |)\ \ (\ f(y)\ -\ f(x)\ )\ dy\right.$$

$$-\ \int_{|x\ -\ y| \le \varepsilon} \Big(\ \Phi_{x_i\, x_j}(|\ x\ -\ y\ |)\, \eta_\varepsilon(|\ x\ -\ y\ |) + \Phi_{x_i}(|\ x\ -\ y\ |)\, \eta_{\varepsilon\, x_i}(|\ x\ -\ y\ |)\Big)$$

$$\left.(\ f(y)\ -\ f(x)\ )\ dy\ \right|,$$

es decir,

$$\left|\ g_{ij}(x)\ -\ \frac{\partial w_i^\varepsilon}{\partial x_j}(x)\ \right| = \left|\ \int_{|x\ -\ y| \le \varepsilon} (f(y) - f(x))\ \Big[\Phi_{x_i x_i}(|\ x\ -\ y\ |)\,(1\ -\ \eta_\varepsilon(|\ x\ -\ y\ |))\right.$$

$$\left. -\,\Phi_{x_i}(|\ x\ -\ y\ |)\, \eta_{\varepsilon\, x_i}(|\ x\ -\ y\ |)\Big]\ dy\ \right|,$$

Por las condiciones de la función η se sigue,

$$\left| g_{ij}(x) - \frac{\partial w_i^\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| \leq \left| \int_{|x-y|\leq\varepsilon} (f(y) - f(x)) \left[\Phi_{x_i x_j}(|x - y|) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \Phi_{x_i}(|x - y|)\, \eta_{\varepsilon\, x_i}(|x - y|) \right] dy \right|,$$

pero aplicando propiedades de la norma y reemplazando la definición de η_ε,

$$\left| g_{ij}(x) - \frac{\partial w_i^\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| \leq \int_{|x-y|\leq\varepsilon} |f(y) - f(x)| \left[\, |\Phi_{x_i\, x_j}(|x - y|)| \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\varepsilon^N} \, |\Phi_{x_i}(|x - y|)| \right] dy.$$

Ahora bien, por la *condición de Holder* (4-55) se deduce,

$$\left| g_{ij}(x) - \frac{\partial w_i^\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| \leq K \int_{|x-y|\leq\varepsilon} \left[\left| \Phi_{x_i\, x_j}(|x - y|) \right| + \frac{1}{\varepsilon^N} \left| \Phi_{x_i}(|x - y|) \right| \right] |x - y|^\alpha \, dy.$$

y en virtud de las ecuaciones (2-20) y (2-17) se tiene,

$$|\Phi_{x_i x_i}(|x - y|)| + \frac{1}{\varepsilon^N} |\Phi_{x_i}(|x - y|)| < \frac{C_N}{|x - y|^N} + \frac{1}{\varepsilon^N} \frac{1}{\omega_N \, |x - y|^{N-1}}$$

$$< \frac{C_N}{|x - y|^N} \frac{2}{\varepsilon^{N-1}},$$

para $0 < \varepsilon < 1$. Entonces,

$$\left| g_{ij}(x) - \frac{\partial w_i^\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| < K \int_{|x-y|\leq\varepsilon} \frac{2\, C_N \, |x - y|^\alpha}{|x - y|^N} \, \frac{1}{\varepsilon^{N-1}} \, dy,$$

y al tomar,

$$M = \sup_{x \in \Omega} \frac{2\, \omega_N \, C_N \, |x - y|^\alpha}{|x - y|^N},$$

se deduce que,

$$\left| g_{ij}(x) - \frac{\partial w_i^\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| < K \, M \, \varepsilon,$$

es decir, w_i^ε converge uniformemente a g_{ij} cuando $\varepsilon \to 0$. En consecuencia $w \in C^2(\Omega)$, siendo sus segundas derivadas dadas por,

$$w_{x_i x_j}(x) = \int_{B_R} \Phi_{x_i\, x_i}(|x - y|) \, (f(y) - f(x)) \, dy + f(x) \int_{\partial B_R} \Phi_{x_i}(|x - y|) \, \mathbf{n}_j(y) \, dy.$$

En consecuencia al calcular el Laplaciano de la función w se sigue,

$$\Delta\, w(x) \;=\; \int_{B_R} \sum_{i=1}^{N} \Phi_{x_i\, x_i}(|\, x \;-\; y\,|) \;\; (\, f(y) \;-\; f(x)\,)\;\, dy$$

$$+\;\; f(x) \int_{\partial B_R} \sum_{i=1}^{N} \Phi_{x_i}(|\, x \;-\; y\,|)\;\; \mathbf{n}_i(y)\;\; dy,$$

y sustituyendo las derivadas de primer orden de la solución fundamental dadas por (2-15) se obtiene,

$$\Delta\, w(x) \;=\; \int_{B_R} \Delta_x\, \Phi_{x_i\, x_i}(|\, x \;-\; y\,|) \;\; (\, f(y) \;-\; f(x)\,)\;\, dy$$

$$+\;\; f(x)\;\, \frac{1}{\omega_N\; R^{N-1}} \;\int_{\partial B_R} \;\sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i \;-\; y_i)}{|\; x \;-\; y\;|}\;\; \mathbf{n}_i(y)\;\; dy,$$

lo cual implica,

$$\Delta\, w(x) \;=\; \int_{B_R} \Delta_x\, \Phi_{x_i\, x_i}(|\, x \,-\, y\,|)\;\, (\, f(y) \,-\, f(x)\,)\; dy \,+\, f(x)\, \frac{1}{\omega_N\, R^{N-1}} \int_{\partial B_R} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{n}_i^2(y)\, dy,$$

ya que el vector normal exterior en el punto y es $\mathbf{n} \;=\; \dfrac{(x_i \;-\; y_i)}{|\; x \;-\; y\;|}$. Como la solución fundamental es armónica fuera de la singularidad y el vector $\mathbf{n}$ tiene norma uno, se deduce que,

$$\Delta\, w(x) \;=\; f(x)\;\; \frac{1}{\omega_N\; R^{N-1}} \int_{\partial B_R} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{n}_i^2(y)\; dy \;\;=\; f(x),$$

como se deseaba. □

Como consecuencia del teorema 4.1.3 y del teorema 4.2.2 se puede formular el siguiente resultado.

Teorema 4.2.3 *Sea Ω dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ tal que cada punto de la frontera $\partial\Omega$ es regular. Si $f \;\in\; C^{\alpha}(\Omega)$ y $g \;\in\; C(\partial\Omega)$ entonces el problema* (4-45) *tiene una única solución*

$$v \;\in\; C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$

Prueba: Basta tomar como solución la suma de las soluciones de (4-46) y (4-47). □

El paso siguiente será presentar desde el punto de vista geométrico el concepto de punto regular.

4.3. Criterios geométricos de solubilidad

El teorema 4.1.3 reduce el problema de Dirichlet a estudiar el comportamiento local de la frontera del dominio. En este sentido resulta de interés conocer criterios geométricos que permitan establecer cuando los puntos de la frontera de un dominio acotado son regulares. De referencia de este parágrafo se toma Axler et al. (2001) y Miersemann (2012).

4.3.1. Condición de esfera exterior

Definición 4.3.1 ***Condición de esfera exterior***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado y sea $\xi \in \partial\Omega$. Se dice que Ω satisface la condición de esfera exterior en el punto ξ si existe $B_r(x_\xi)$ tal que,

$$\overline{\Omega} \cap \bar{B}_r(x_\xi) = \{\xi\}. \tag{4-65}$$

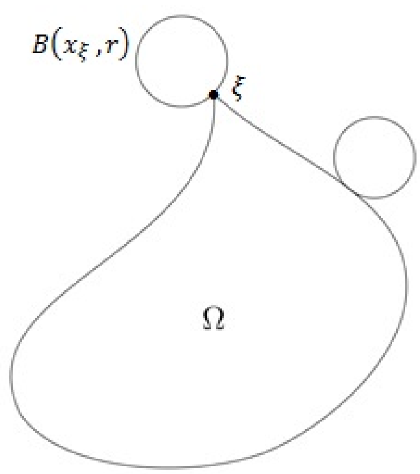

Figura 4-1: Condición de esfera exterior.

En otras palabras, si Ω satisface la condición de esfera exterior en el punto ξ entonces tal punto pertenece a una bola cerrada contenida en el complemento de Ω. Una interpretación gráfica de esta condición se presenta en la figura **4-1**. El resultado siguiente prueba que el problema de Dirichlet es soluble para dominios acotados que satisfacen la condición de esfera exterior en los puntos de su frontera.

Teorema 4.3.1 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado y sea $\xi \in \partial\Omega$. Si Ω verifica la condición de esfera exterior en ξ entonces este punto es regular.*

Prueba: Por hipótesis existe una bola cerrada $\bar{B}_r(x_\xi)$ en el complemento de Ω verificando $\overline{\Omega} \cap \bar{B}_r(x_\xi) = \{\xi\}$. Se define la función,

$$b_\xi(x) = \begin{cases} ln(r) - ln \mid x - x_\xi \mid, & si \quad N = 2, \\ \dfrac{1}{\mid x - x_\xi \mid^{N-2}} - \dfrac{1}{r^{N-2}}, & si \quad N > 2. \end{cases}$$

Se observa que $b_\xi(\xi) = 0$ pues $\mid \xi - x_\xi \mid = r$; además para los puntos $x \in \partial\Omega$ con $x \neq \xi$, se verifica $\mid x - x_\xi \mid > r$ y entonces $b_\xi(x) < 0$. La continuidad de la función b_ξ sobre Ω se deduce de su misma definición y la condición de subarmonicidad es una consecuencia inmediata de la definición de la solución fundamental (2-13). Con estos argumentos se concluye que b_ξ verifica las condiciones de la definición 4.1.3, es decir ξ es un punto regular. □

4.3.2. Condición de cono exterior

Definición 4.3.2 ***Condición de cono exterior***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ dominio acotado y sea $\xi \in \partial\Omega$. Se dice que Ω satisface una condición de cono exterior en ξ, si existe un cono exterior K con vértice ξ, es decir $\overline{\Omega} \cap \overline{K} = \{\xi\}$.

Se considera en el caso $N = 2$, un ejemplo de dominio que verifica la condición de cono exterior en el origen, y se verá que es posible construir una función barrera en dicho punto. Como ilustración gráfica de la condición véase la figura **4-2**.

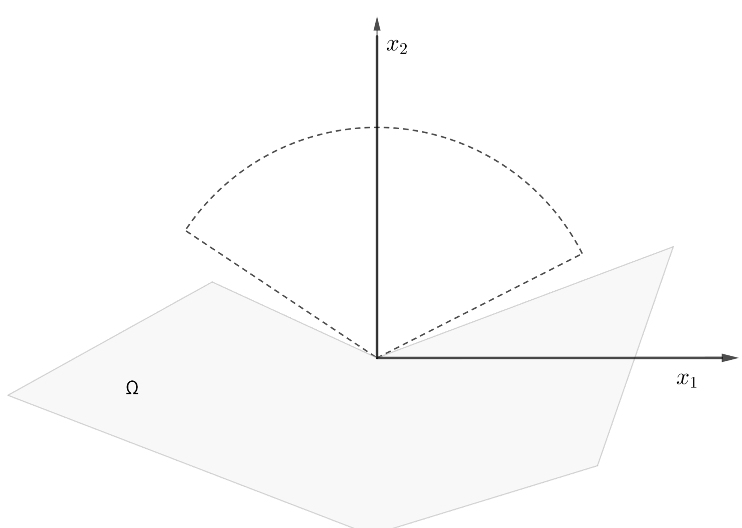

Figura 4-2: Condición de cono exterior en $\mathbb{R}^2$.

En seguida se calcula la ecuación de Laplace en coordenadas polares (r, θ). Puesto que,

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \tan\theta = \frac{x_2}{x_1},$$

$$x_1 = r\cos\theta, \qquad x_2 = r \operatorname{sen}\theta,$$

al derivar la igualdad $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ con respecto a x_1 y a x_2 se obtiene,

$$2r\,\frac{\partial\, r}{\partial\, x_1} = 2\,x_1 \qquad \text{de donde} \qquad \frac{\partial\, r}{\partial\, x_1} = \cos\theta,$$

$$2r\,\frac{\partial\, r}{\partial\, x_2} = 2\,x_2 \qquad \text{de donde} \qquad \frac{\partial\, r}{\partial\, x_2} = \operatorname{sen}\theta,$$

y derivando la igualdad $\tan\theta = \dfrac{x_2}{x_1}$ con respecto a ambas variables se tiene,

$$\sec^2\,\theta\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\, x_1} = -\,\frac{x_2}{x_1^2} \qquad \text{entonces} \qquad \frac{\partial\,\theta}{\partial\, x_1} = -\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{r},$$

$$\sec^2\,\theta\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\, x_2} = \frac{1}{x_1} \qquad \text{entonces} \qquad \frac{\partial\,\theta}{\partial\, x_2} = \frac{\cos\theta}{r}.$$

Sea w función de x_1, x_2. Entonces,

$$\frac{\partial\, w}{\partial\, x_1} = \frac{\partial\, w}{\partial\, r}\,\frac{\partial\, r}{\partial\, x_1} + \frac{\partial\, w}{\partial\,\theta}\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\, x_1} = \cos\theta\,\frac{\partial\, w}{\partial\, r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta}. \tag{4-66}$$

La segunda derivada con respecto a x_1 resulta ser,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} &= \frac{\partial}{\partial\, r}\left(\cos\theta\,\frac{\partial\, w}{\partial\, r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta}\right)\frac{\partial\, r}{\partial\, x_1} + \frac{\partial}{\partial\,\theta}\left(\cos\theta\,\frac{\partial\, w}{\partial\, r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta}\right)\frac{\partial\,\theta}{\partial\, x_1} \\
&= \frac{\partial}{\partial\, r}\left(\cos\theta\frac{\partial\, w}{\partial\, r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial\,\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial\, w}{\partial\, r} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta}\right)\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) \\
&= \left(\cos\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^2}\,\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial^2\, w}{\partial\, r\,\partial\,\theta}\right)\cos\theta \\
&\quad + \left(-\operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial\, w}{\partial\, r} + \cos\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial\,\theta\,\partial\, r} - \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\,\theta^2}\right)\left(-\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}\right) \\
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial\, r^2} + \frac{\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta} - \frac{\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{r}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\, r\partial\,\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\,\frac{\partial\, w}{\partial\, r} \\
&\quad - \frac{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{r}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\,\theta\,\partial r} + \frac{\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\,\theta^2} \\
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial\, r^2} + 2\frac{\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta} - 2\frac{\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{r}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\, r\,\partial\,\theta} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\frac{\partial\, w}{\partial\, r} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\,\theta^2}.
\end{aligned}$$

Realizando cálculos análogos para x_2, se deduce,

$$\frac{\partial\, w}{\partial\, x_2} = \frac{\partial\, w}{\partial\, r}\,\frac{\partial\, r}{\partial\, x_2} + \frac{\partial\, w}{\partial\,\theta}\,\frac{\partial\,\theta}{\partial\, x_2} = \operatorname{sen}\theta\,\frac{\partial\, w}{\partial\, r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial\, w}{\partial\,\theta}, \tag{4-67}$$

y se concluye que,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = \operatorname{sen}^2\theta\, \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - 2\,\frac{\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{r^2}\,\frac{\partial w}{\partial \theta} + 2\,\frac{\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta}{r}\,\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial \theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}.$$

Sumando,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} &= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \operatorname{sen}^2\theta\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\\ &\quad + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r},\end{aligned}$$

se llega a la expresión,

$$\Delta\, w(r,\theta) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r}. \tag{4-68}$$

Por lo tanto, si se considera la función,

$$w(r,\theta) = r^\lambda \cos(\mu\,\theta),$$

donde λ, μ son constantes positivas y $r = |x|$; de (4-68) se sigue,

$$\begin{aligned}\Delta\, w(r,\theta) &= \lambda\,(\lambda-1)\,r^{\lambda-2}\cos\mu\theta - \frac{1}{r^2}\,\mu^2\,\cos\mu\theta + \frac{1}{r}\,\lambda\,(\lambda-1)\,\cos\mu\theta\\ &= r^{\lambda-2}\,\left(\lambda^2-\mu^2\right)\,\cos\mu\theta.\end{aligned}$$

Nótese que $\Delta\, w \geq 0$ sobre Ω si $\mu \geq \lambda$ y $\frac{\pi}{2} < |\mu\theta| < \frac{3\pi}{2}$, para todo θ que verifique $\alpha < \theta < 2\pi - \alpha$, $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$; en consecuencia se puede afirmar que la función w es subarmónica en Ω, proposición 3.3.1.

Además $w(0) = 0$ pues $r = |x|$, y $w < 0$ ya que $\frac{\pi}{2} < |\mu\theta| < \frac{3\pi}{2}$, esto permite concluir que la función w verifica las condiciones de la definición 4.1.3, es decir, w es una barrera en el origen, o $x = 0$ es un punto regular.

Los resultados estudiados en este capítulo muestran que para resolver el problema (4-45) se requiere la existencia de solución al problema de Dirichlet en una bola, el principio del máximo fuerte y algunas estimaciones de las derivadas de la solución fundamental; en este sentido queda probado que existe la solución del problema de Dirichlet planteado en un dominio Ω con frontera regular, además del corolario 3.2.2 se sabe que la solución es única.

5 Conclusiones

1. Las propiedades de las funciones armónicas y la solución del problema de Dirichlet en una bola de $\mathbb{R}^N$, además del principio del máximo permiten resolver el problema de Dirichlet en dominios con frontera regular mediante el método de Perron.

2. Demostrando la existencia de la función de Green en dominios generales es posible aplicarla para encontrar la solución de la ecuación de Poisson.

3. Una condición necesaria y suficiente para que exista solución clásica del problema de Dirichlet en dominios generales es que los puntos de la frontera admitan una función barrera; en este sentido el problema se remite a estudiar el comportamiento local de la frontera.

4. A través de criterios geométricos de solubilidad se establece cuando los puntos de la frontera de un dominio acotado son regulares.

5. El estudio realizado enriquece la formación profesional y afianza tanto la capacidad analítica como las habilidades matemáticas; lo que conlleva a generar interés por estudiar problemas más avanzados.

Referencias Bibliográficas

Apostol, T. (1998). *Cálculo con funciones de varias variables y álgebra líneal, con aplicaciones a las ecuaciones diferenciales y a las probabilidades.* Vol. II. Bogotá, Colombia: Reverté.

Axler, S., Bourdon, P. y Ramey, W. (2001). *Harmonic Fuction Theory.* New York, USA: Springer - Verlag.

Churchill, R. V. y Ward Brown, J. (1992). *Variable compleja y aplicaciones.* Madrid, España: McGraw Hill.

Evans, L. C. (2010). *Partial Differential Equations.* Providence, USA: American Mathematical Society.

Fernández Bonder, J. (2015). "Partial differential equations". *Departamento de Matemáticas. Universidad de Buenos Aires* .

Gilbarg, D. y Trudinger, N. S. (2001). *Elliptic Partial Differential Equations of second order.* New York, USA: Springer - Verlag.

Grossman, S. I. (2008). *Álgebra líneal.* Madrid, España: McGraw Hill.

John, F. (1978). *Partial Differential Equations.* New York, USA: Springer-Verlag.

Kreyszing, E. (1989). *Introductory Fuctional Analysis with Applications.* New York, USA: John Wiley & Sons.

Malpica Vega, A. F. y Lizarazo Gayón, P. A. (2005). *Estudio de la ecuación de Laplace. El problema de Dirichlet.* (Trabajo de pregrado). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Marsden, J. E. y Tromba, A. J. (1991). *Cálculo Vectorial.* Wilmington, USA: Addison-Wesley Iberoamericana.

Miersemann, E. (2012). "Linear elliptic equations of second order". *Lecture Notes-Department of Mathematics, Leipzig University* pp. 7–43.

Mijailov, V. P. (1982). *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.* Moscu, Rusia: Mir.

Mora, W. y Borbón, A. (2014). *Edición de textos científicos LATEX 2014*. Revista digital Matemática. Educación e Internet, Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Munkres, J. R. (1997). *Analysis on manifolds*. Redwood city, USA: Addison-Wesley.

Peral Alonso, I. (2004). *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales*. New York, USA: Addison-Wesley.

Royden, H. L. y Fitzpatrick, P. M. (2010). *Real Analysis*. Londres, Reino Unido: Pearson Education.

Rubiano, G. N. (2002). *Topología General*. Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Simmons, G. F. (1993). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. Madrid, España: McGraw Hill.

Stein, E. M. y Shakarchi, R. (2003). *Fourier Analysis an Introduction*. Princenton, USA: Princeton University Press.

Strauss, W. A. (2008). *Partial Diferential Equations. An Introduction*. New York, USA: John Wiley & Sons.

Lista de símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\mathbb{R}^N$	Espacio euclideano N-dimensional
$B_r(x_0)$	Bola abierta
S^{N-1}	Esfera unitaria
$\emptyset$	Conjunto vacío
Ω	Subconjunto de $\mathbb{R}^N$
$\overline{\Omega}$	Adherencia de Ω
$\partial\Omega$	Frontera de Ω
$\langle \cdot \rangle$	Producto punto
$\lvert \cdot \rvert$	Norma euclídea
f	Función
ln	Logaritmo natural
lím	Límite
$C(\Omega)$	Funciones continuas en Ω
$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$	Derivada parcial con respecto a x_i
∇	Vector gradiente
Δ	Laplaciano
$C^1(\Omega)$	Funciones con derivadas de primer orden continuas en Ω
$C^\infty(\Omega)$	Funciones infinitemente diferenciables sobre Ω
$\mathbf{n}$	Vector normal exterior
$\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$	Derivada direccional en la dirección de $\mathbf{n}$
ω_N	Área de superficie de la esfera unitaria
$d\sigma(x)$	Elemento diferencial de superficie
Φ	Solución fundamental
$G(x,y)$	Función de Green
$\dfrac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}$	Núcleo de Poisson
máx	Máximo
mín	Mínimo
$\Sigma(\Omega)$	Funciones subarmónicas en Ω
$C^\alpha(\Omega)$	Funciones Holderianas en Ω.