SIGNIFICADO GLOBAL DE LA PROPORCIONALIDAD EN LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

MIGUEL ÁNGEL HURTADO MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
TUNJA
2019

SIGNIFICADO GLOBAL DE LA PROPORCIONALIDAD EN LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE LOS ESTUDIANTES DE GRADO SÉPTIMO

MIGUEL ÁNGEL HURTADO MARTÍNEZ

TRABAJO PARA OPTAR AL TÍTULO DE
MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

DIRECTORA
Dr. OMAIDA SEPÚLVEDA DELGADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
TUNJA
2019

Página de aceptación

Jurado

Jurado

Directora

Omaida Sepúlveda Delgado

Dedicatoria

A mi madre, Ana Consejo Martínez Hernández,
por ser mi primera y mejor maestra; porque
pacientemente ha sabido guiarme
con su ejemplo y sabiduría.

Agradecimientos

A Dios por orientar mis pasos a lo largo de este camino de formación profesional y personal, por darme serenidad al afrontar las dificultades de la vida, por permitir que cada día sea mejor persona.

A mis hermanas y hermanos: Karina, Marcela, Fabián, Javier y Edwin, por su cariño, comprensión y tolerancia, gracias por brindarme el amor de familia.

A la Doctora Omaida Sepúlveda Delgado, por aceptar ser mi directora, por su confianza y apoyo: gracias por permitirme aprender a su lado y por compartir conmigo su experiencia en el ejercicio de la actividad investigativa.

A mis profesores y amigos de la Maestría en Educación Matemática con quienes compartí conocimientos, para los cuales solo hay voces de agradecimiento por todas las experiencias vividas.

A mis estudiantes de la Institución Educativa donde me desempeño como docente, gracias porque sus preguntas, razonamientos y concepciones acerca de las matemáticas han hecho de mi profesión un proceso investigativo permanente.

Resumen

La presente tesis de maestría se enmarca en la línea de investigación del razonamiento proporcional de la Educación Matemática, y tiene como objetivo general: caracterizar los significados parciales de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad (RPP), emergentes de las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado séptimo, de una institución educativa de la ciudad de Tunja, al resolver situaciones problemas relacionadas con proporcionalidad directa. El marco teórico y metodológico desde el cual se desarrolla la investigación corresponde al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) y por tanto, en relación con sus planteamientos teóricos y metodológicos, el estudio se desarrolla bajo un enfoque de investigación cualitativa y a través de un diseño fenomenológico. Para el logro del objetivo de la investigación se reconstruye el significado global de los objetos RPP a través de un estudio histórico-epistemológico: en esta dirección, se realiza el análisis epistémico de seis problemas entendidos como fenómenos los cuales dieron paso al surgimiento de los significados parciales de los objetos RPP a través de la historia. Se continua con el diseño y análisis de dos situaciones de aprendizaje, aplicadas a los estudiantes de grado séptimo y finalmente, se caracterizan los significados parciales de los objetos RPP presentes en las prácticas matemáticas de los estudiantes a través del análisis cognitivo, siguiendo el marco teórico del EOS. Entre los principales resultados de la tesis se evidencia en las prácticas matemáticas de los estudiantes, la emergencia de cuatro significados parciales del objeto matemático razón, denominados: razón como relator, razón como operador, razón como correlator y razón como transformador; en relación a la proporción emergen tres significados parciales, denominados: proporción a través de razonamientos por analogía, proporción a través de razonamientos analíticos y proporción a través de la regla de tres, y en relación a la proporcionalidad emerge el significado parcial denominado: proporcionalidad – sistemas de cambio, este último significado permite unificar de forma sistemática los significados parciales de los objetos matemáticos razón y proporción.

Palabras Clave: significado, objetos matemáticos, sistemas de prácticas matemáticas, estudio histórico – epistemológico, razonamiento proporcional.

Índice de contenidos

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Introducción

Este estudio se realiza en la línea de investigación del razonamiento proporcional de la Educación Matemática, e informa sobre el proceso investigativo, el cual permitió dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los significados de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo de una institución educativa de la ciudad de Tunja del sector privado, al resolver situaciones problemas de proporcionalidad directa? En este sentido el marco teórico y metodológico que permitió el desarrollo del estudio corresponde al EOS (Enfoque Ontosemiótico) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos y por tanto, en relación con sus planteamientos teóricos y metodológicos, la investigación se desarrolló bajo un enfoque de investigación cualitativa.

El proceso investigativo reportado en la tesis, se estructura en siete capítulos: en el primer capítulo se presentan las problemáticas y dificultades asociadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad (RPP), resultado del estudio a investigaciones realizadas en Educación Matemática en la línea del razonamiento proporcional. Se dan a conocer los resultados de algunas investigaciones internacionales, nacionales, departamentales y locales, y se presenta la reflexión pedagógica de la práctica del autor de la tesis, en relación con la enseñanza de la proporcionalidad. Con base en la descripción de las problemáticas identificadas, se plantea la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos del estudio. En el segundo capítulo se dan a conocer las nociones teóricas y metodológicas del EOS que soportan el desarrollo del estudio. Se presentan las nociones de práctica matemática, institución, sistema de prácticas, objeto matemático, significados personales e institucionales, configuraciones de objetos primarios y análisis epistémico/cognitivo. Estas herramientas teóricas y metodológicas favorecen la caracterización de los significados parciales de los objetos RPP emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

El tercer capítulo presenta la metodología a través de la cual se desarrolló el estudio; se precisa el enfoque de la investigación, así como el diseño y las fases que se siguieron para alcanzar los objetivos específicos, el objetivo general, y por tanto el camino recorrido para dar respuesta a la pregunta de investigación. Desde esta panorámica metodológica se describe la unidad de análisis dele estudio, y de igual forma se establecen las categorías de análisis emergentes de las prácticas de los estudiantes. Finalmente, se dan a conocer las técnicas y herramientas usadas en la recolección y análisis de la información.

En el cuarto capítulo se dan a conocer nociones conceptuales como: razonamiento proporcional, funciones de la razón, razonamientos por analogía y razonamientos analíticos. Estas nociones conceptuales favorecen la caracterización de los significados parciales de los objetos RPP, emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes. En el quinto capítulo se presenta el estudio histórico-epistemológico de los objetos matemáticos RPP y el análisis epistémico a los problemas o fenómenos que dieron paso al surgimiento de los significados parciales de los objetos RPP. Finalmente, y como un resultado importante, se presenta la reconstrucción de los significados parciales de los objetos RPP sintetizados en una red conceptual denominada en el EOS: "Significado global de los objetos RPP".

En el sexto capítulo, se presenta el análisis epistémico y cognitivo de las prácticas matemáticas: institucionales y personales de los estudiantes de grado séptimo. En el análisis epistémico, se da a conocer el diseño de dos situaciones problemas propuestas y se analizan sus soluciones, desde la perspectiva del autor (solución institucional), a través de configuraciones epistémicas de objetos primarios propuestos en el marco teórico del EOS. El análisis epistémico se asume como un estudio a priori que permite prever posibles prácticas matemáticas de los estudiantes El análisis cognitivo refiere a la caracterización de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo al resolver las situaciones problemas, dicho análisis se realiza a través de configuraciones cognitivas que permiten analizar de forma sistemática la tipología de objetos primarios emergentes de estas prácticas. Por último, en el séptimo capítulo, se da respuesta a la pregunta de investigación, dando a conocer en qué medida se lograron los objetivos del estudio: en la misma dirección, se presentan las conclusiones con base en el análisis sistemático de los resultados obtenidos en cada una de las fases propuestas en el marco metodológico.

Capítulo 1. Marco de la investigación

Los grandes matemáticos siguieron el principio de "intuir"
antes que demostrar, y es cierto que casi todos los
descubrimientos fueron hechos de esta manera.
Edward Kasner (1878-1955)

En este capítulo se presentan las problemáticas y dificultades asociadas a los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad (RPP), resultado del análisis a investigaciones realizadas en Educación Matemática en la línea de investigación del razonamiento proporcional. Se dan a conocer los resultados de algunas investigaciones internacionales, nacionales, departamentales y locales, y se presenta la reflexión pedagógica de la práctica del autor de la tesis, en relación con la enseñanza de la proporcionalidad. Con base en la descripción de las problemáticas identificadas, se plantea la pregunta de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos del estudio. De igual forma, se dan a conocer los argumentos que dieron origen a la presente investigación, orientada a la reconstrucción de los significados de los objetos RPP a través de un estudio histórico-epistemológico resultado de consulta a fuentes bibliográficas y al análisis de las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado séptimo cuando solucionan situaciones problemas de proporcionalidad directa.

1.1 Descripción de la problemática de estudio

Los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad (RPP) han sido ampliamente investigados en el marco internacional de la Educación Matemática desde hace 60 años, permitiendo su comprensión desde diferentes perspectivas: epistemológicas, ontológicas, semiótico-cognitivas, antropológicas y didácticas entre otras, estas concepciones evidencian la importancia de estos objetos matemáticos como parte integral del desarrollo del pensamiento (matemático y lógico) en los diferentes niveles educativos (Obando, 2015). Esta importancia se ve reflejada en la relación que tienen dichos objetos con otras disciplinas: artes, física, química, economía, demografía entre otras, las cuales aportan al diseño de una gran variedad de situaciones prácticas cotidianas que dan sentido a estos objetos matemáticos. La importancia del estudio de la proporcionalidad en áreas científicas y en situaciones prácticas ha generado al interior de la Educación Matemática una línea de investigación denominada *razonamiento proporcional,* la cual ha dado aportes significativos para favorecer el desarrollo conceptual de los objetos matemáticos (Obando, Vasco y Arboleda, 2013).

Desde la concepción epistemológica, las investigaciones en la línea del razonamiento proporcional consideran relevante que el profesor de matemáticas comprenda como emerge y se desarrolla el conocimiento matemático en la historia de la humanidad, teniendo presente que esta comprensión le brinda un ambiente propicio para ampliar la visión usual sobre los objetos matemáticos y sobre las formas de pensar en matemáticas (Harel, Behr, Lesh, y Post, 1994; Hart, 1988; Lamon, 1994). Por otra parte, las investigaciones desde concepciones ontológicas han dado a conocer que el profesor debe interesarse por el significado de los objetos matemáticos que emergen de las prácticas de la humanidad al resolver problemas específicos, esta reflexión sobre los significados de los objetos le permitirá al profesor innovar en su práctica y proponer situaciones – problemas de aprendizaje interesantes a los estudiantes (Guacaneme, 2015).

En esta dirección, las investigaciones realizadas desde los enfoques semiótico – cognitivos han llevado a comprender hoy en día la forma como los estudiantes usan, representan y comprenden los objetos matemáticos al resolver problemas, además han permitido clasificar los razonamientos y niveles de conocimiento matemático en que pueden encontrarse los estudiantes cuando resuelven problemas de proporcionalidad (Kaput y West, 1994; Vergnaud, 1990). Investigaciones en la línea semiótico – cognitiva consideran "la comprensión como competencia y no tanto como proceso mental: se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas" (Godino, Batanero y Font, 2019, p. 6).

Las investigaciones realizadas desde los enfoques antropológicos, han dado a conocer que la enseñanza de los objetos razón y proporción centran su estudio en los ámbitos puramente numéricos, separándolos de las relaciones funcionales y de otras áreas del currículo en donde la proporcionalidad podría funcionar como una herramienta potente en la solución de problemas propuestos (Bolea, Bosch y Gascon, 2001). Las investigaciones realizadas desde enfoques didácticos, reconocen la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos RPP; dando a conocer que dichos procesos deben ser comprendidos desde distintas facetas: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica, donde el profesor es un mediador cultural que conoce a sus estudiantes y realiza la búsqueda, selección, adaptación y evaluación de buenas situaciones – problemas de tal forma que los estudiantes al resolverlas se apropien de los significados y objetos institucionales y pueden desarrollarse como personas (Godino, 2002).

Según Obando (2015), aunque los avances en las investigaciones internacionales desde diversos enfoques en Educación Matemática han sido significativos, también se reconoce que el impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional en las instituciones educativas en el contexto nacional no es del todo satisfactorio: al respecto Jiménez (2005), considera que es el profesor en su entorno escolar cotidiano quien debe problematizar su práctica pedagógica, que al ser contrastada y valorada con base en los resultados de la investigación en Educación Matemática y a través del diálogo con sus pares en comunidades de aprendizaje le permiten (re)significar su práctica y desarrollar competencias didáctico – matemáticas que favorezcan el desarrollo de aprendizajes significativos en los estudiantes y de esta forma puedan superar las problemáticas asociadas a la enseñanza y al aprendizaje del razonamiento proporcional.

Las problemáticas asociadas a la enseñanza de los objetos RPP son amplias y refieren principalmente a la metodología que usa el profesor para dar a conocer a los estudiantes dichos objetos, esta metodología depende del conocimiento didáctico – matemático que posee el profesor en relación con el razonamiento proporcional, las concepciones epistemológicas que tenga de las matemáticas, es decir, si las conciben como producto inmodificable, abstracto, estructurado y lógico en su forma y en su contenido, donde el estudiante tiene solo un papel de receptor de la información o más bien si concibe las matemáticas como construcción social y cultural donde se reconoce la emergencia empírica de los objetos matemáticos a través de prácticas o acciones de los estudiantes al resolver situaciones – problemas (Serrano y García, 1999; Sepúlveda, 2016; Godino, 2017).

Según García y Serrano (1999), la concepción epistemológica de las matemáticas como conceptos inmodificables y estructurados han generado problemáticas en la enseñanza de las matemáticas ya que la estructura lógica de la disciplina se asume exclusivamente como el mejor medio de la organización de los contenidos matemáticos, dando a conocer los contenidos de forma aislada, fragmentada y con pocas conexiones entre sí. Un ejemplo de este tipo de organización es la forma como tradicionalmente se presenta el estudio de la proporcionalidad en las instituciones educativas, en este sentido García y Serrano (1999) afirman:

> La razón y la proporción numérica se presentan como información aislada de la proporcionalidad entre magnitudes; sus relaciones con la multiplicación o con la función lineal no se establecen porque una y otra también se asumen como conocimientos independientes: en la multiplicación se enfatizan los algoritmos y en la función lineal el carácter de su ecuación y gráfica (p.42).

Desde la anterior perspectiva Sánchez (2013) da a conocer que, en el currículo de matemáticas de Colombia, los objetos razón, proporción y proporcionalidad son enseñados de forma desarticulada centrando su atención en lo algorítmico y privilegiando lo numérico, desconociendo o conectando débilmente estos objetos del conocimiento matemático con lo variacional, esta desarticulación ha llevado a que en las instituciones educativas se enseñe tradicionalmente la proporcionalidad de forma fragmentada, iniciando con la definición de razón como cociente indicado entre dos números enteros, y de la proporción como la igualdad de dos razones que sirve para hallar valores desconocidos a través de la propiedad fundamental de las proporciones "producto en cruz", para después, habiendo visto las propiedades de las proporciones, pasar a la regla de tres (simple directa, simple inversa o compuesta) y finalmente presentar tablas de valores que permiten organizar las cantidades de magnitudes correlacionadas de forma directa o inversa para ser graficadas en el plano cartesiano. La anterior perspectiva, donde se presentan los objetos matemáticos de forma desarticulada en el salón de clase, ha generado en el profesor una concepción centrada en instruir al estudiante en el conocimiento de hechos, notaciones, definiciones, y comprensiones operacionales (algoritmos propios de cada uno de los contenidos matemáticos), desconociendo los procesos heurísticos que han permitido la constitución de los objetos matemáticos, es decir, sin prestar atención al desarrollo de una comprensión conceptual relacionada de forma integral con el razonamiento proporcional.

Particularmente uno de los procedimientos que se enseñan en las instituciones educativas es el algoritmo de la regla de tres simple: en relación con este procedimiento, diversos investigadores han reconocido que la enseñanza de este algoritmo sin una base conceptual solida dificulta la comprensión significativa de los estudiantes (Lamon, 2007; Lesh, Post, y Berh, 1988). Al respecto, Hoffer (1988) señala: "La capacidad de realizar operaciones mecánicas con proporciones no necesariamente significa que los estudiantes entienden las ideas subyacentes al pensamiento proporcional (...) la capacidad de comprender firmemente la proporcionalidad es un punto decisivo en el desarrollo mental" (p. 293).

En la misma dirección, Mochón (2012) da a conocer que la enseñanza de la regla de tres como única estrategia para resolver problemas de proporcionalidad resulta insuficiente para que el alumno pueda desarrollar de manera completa una concepción sobre las ideas fundamentales de la proporcionalidad y sus diferentes enfoques, y saber cuándo aplicar correctamente este algoritmo, ya que la aplicación de esta regla sin una base sólida sobre las características de los problemas de proporcionalidad puede llevar frecuentemente a errores como la sobre generalización de la proporcionalidad. Según Obando (2018), cuando la enseñanza del algoritmo de la regla de tres se hace sin el reconocimiento de los fundamentos teóricos que le dan su sentido matemático, es una regla vacía, carente de significado que se aplica de forma indistinta a cualquier situación de cuatro términos, donde uno de ellos es desconocido, sin importar si las formas de covariación entre tales cantidades permite su aplicación: por tanto, siguiendo las ideas de Obando (2018) se hace fundamental ayudar al estudiante para que comprenda el método de la regla de tres, pero también su fundamento histórico – epistemológico.

En relación a la regla de tres Obando (2015) da a conocer que la forma como es presentado este algoritmo en las instituciones educativas, no permite que los estudiantes comprendan el fundamento conceptual de la razón y la proporción, el cual básicamente consiste en que los estudiantes comprendan la identidad en la medida relativa entre dos o más pares de cantidades, lo cual favorece el reconocimiento de los *razonamientos por analogía*, estos razonamientos consisten en determinar cómo se relacionan dos o más cantidades de magnitud de una misma magnitud para luego trasladar de forma análoga dicha relación a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades. Según Obando (2015) en este tipo de razonamiento esta la constitución empírica o heurística de ciertos conocimientos que son la base para los primeros aprendizajes sobre las proporciones, además, no solo son fundamentales para organizar una estrategia de solución, sino que son un conjunto de inferencias que se debe hacer sobre la base de otros tipos de conocimiento, incluso no matemáticos.

La problemática descrita en los anteriores párrafos referente a una concepción epistemológica de las matemáticas centrada en una enseñanza desarticulada de los objetos matemáticos y enfocada en las definiciones formales y algoritmos, no es ajena a las instituciones educativas del departamento de Boyacá; al respecto, Leguizamón, Patiño y Suárez (2015) dan a conocer que en algunas instituciones públicas y privadas de Tunja la metodología empleada por los profesores para enseñar las matemáticas consiste básicamente en enseñar los procesos mecánicos donde se privilegian los conceptos y las reglas como los procesos lógicos y de memorización. En relación a la metodología empleada por algunos profesores de matemáticas en la ciudad de Sogamoso se evidencia según Jiménez y Gutiérrez (2015) que los profesores siguen textualmente la secuencia que presentan los libros de texto; transcriben en el tablero los contenidos, continúan con la explicación de algunos ejemplos, luego preguntan a los estudiantes si tienen algunas dudas, y si hay dudas, vuelven a repetir la explicación, en este tipo de prácticas no hay espacio para confrontar interpretaciones, respuestas y soluciones, y por tanto escasea el tiempo para conjeturar y argumentar, y además se nota poca interacción social en las clases que permitan la negociación de significados.

En esta misma línea de investigación relacionada con las prácticas pedagógicas matemáticas de algunos profesores en la ciudad de Tunja, se observa, según Jiménez, Limas y Alarcón (2015) que las actividades realizadas por los profesores se caracterizan por la repetición de ejercicios a través de exposiciones magistrales y uso del libro como material curricular predominante, donde pareciera no interesar tanto la comprensión conceptual de los objetos enseñados sino los procedimientos, según Jiménez et al. (2015), si bien se percibe que los profesores tratan de poner relevancia y énfasis en situaciones de la vida cotidiana, las clases tienden a estar orientadas a la adquisición de conceptos y reglas.

En el caso específico de los objetos matemáticos razón y proporción Jiménez et al. (2015), dan a conocer que:

> Una profesora introduce el tema con un ejemplo de la vida cotidiana: la preparación del arroz (cantidad de agua para cierta cantidad de arroz), a lo cual los estudiantes muestran interés y participan, sin embargo, el profesor se adelanta a dar una definición relacionada con los objetos razón y proporción, lo que de alguna forma impide que el estudiante construya su propio concepto (p.9).

Particularmente, algunas de las problemáticas descritas en los anteriores párrafos se evidencian también en la institución educativa – IE donde labora el autor de la tesis, y donde se desarrolló el estudio investigativo. En este aspecto, el Índice Sintético de Calidad Educativa (ISCE, 2017) de la IE da a conocer el nivel de competencia alcanzado por los estudiantes, para este estudio se considera el año 2017 y sus resultados en las pruebas saber de matemáticas para los grados $3°, 5°\ y\ 9°$ como se observa en Tabla 1.1.

Tabla 1.1
Resultados pruebas saber – matemáticas $3°, 5°\ y\ 9°$, *(2017)*

Grados	3°	5°	9°
% de estudiantes por nivel de desempeño	Avanzado 95 %	Avanzado 92 %	Avanzado 93 %
	Satisfactorio 5 %	Satisfactorio 8 %	Satisfactorio 7 %
Nivel en las competencias evaluadas			
Razonamiento y argumentación	**Débil**	**Débil**	**Débil**
Comunicación, representación y modelación	Fuerte	Muy fuerte	Muy fuerte
Planteamiento y resolución de problemas.	Muy fuerte	Muy fuerte	Fuerte
Nivel en los componentes evaluados			
Numérico-variacional	Muy fuerte	**Débil**	**Débil**
Geométrico-métrico	Fuerte	Fuerte	Fuerte
Aleatorio	**Muy débil**	**Muy débil**	Fuerte

Fuente (Elaboración propia).

Según el ISCE aunque los estudiantes se encuentran en nivel avanzado en los grados $3°, 5°\ y\ 9°$ superando el 90% de desempeño en la prueba de matemáticas, se observa también que la competencia de razonamiento y argumentación en los tres grados presenta un nivel débil al igual que el componente numérico-variacional para los grados $5°\ y\ 9°$ y un nivel muy débil en el componente aleatorio para los grados $3°\ y\ 5°$. Estos resultados evidencian explícitamente la necesidad de fortalecer el razonamiento y la argumentación en los estudiantes, así como el componente numérico – variacional y aleatorio, particularmente el presente estudio se orientó en mayor medida en el desarrollo del razonamiento proporcional, la argumentación y el fortalecimiento del componente numérico – variacional.

Respecto al análisis de la problemática internacional, nacional, departamental y local presentada en los anteriores párrafos, el presente estudio surge específicamente de la reflexión pedagógica de la práctica del autor de la tesis, relacionada con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular del razonamiento proporcional. En esta dirección, el autor ha tenido la oportunidad de reflexionar en el hecho de "cómo los significados que se pretenden enseñar, en ocasiones no son comprendidos por los estudiantes", presentándose dificultades al momento de orientar la práctica docente.

Desde esta perspectiva, algunos estudiantes de grado 7° de la institución educativa focalizada, al momento de resolver problemas de proporcionalidad prefieren la implementación de cálculos rápidos como "la regla de tres simple o compuesta" sin evidenciar una comprensión de los procedimientos realizados y mucho menos la argumentación de los razonamientos. Además, en este contexto otros estudiantes cuestionan dichas reglas y prefieren usar técnicas como reducción a la unidad, uso de escalas (aprendidas en el área de dibujo técnico) o simplemente usar técnicas de tanteo, aproximaciones, multiplicaciones y divisiones para resolver los problemas de proporcionalidad. Se ha observado que los estudiantes al momento de resolver problemas de proporcionalidad directa o inversa no saben qué algoritmo usar, llevándolos a preguntar frecuentemente al profesor: "¿se debe multiplicar en equis?" (procedimiento que se acostumbra a usar en el salón de clase para resolver problemas de proporcionalidad directa) o "¿se debe multiplicar en línea recta?" (procedimiento que se acostumbra a usar en el salón de clase para resolver problemas de proporcionalidad inversa): estas preguntas planteadas por los estudiantes evidencian un bajo desarrollo del razonamiento proporcional, lo cual ha generado en el autor una reflexión de la práctica pedagógica que viene desarrollando hasta el momento. Para lograr superar las problemáticas asociadas a la enseñanza y al aprendizaje del razonamiento proporcional generadas por la concepción epistemológica de las matemáticas como conceptos inmodificables, y desarticulados; la investigación en Educación Matemática propone en la actualidad una concepción de las matemáticas como construcción social y cultural que reconoce la emergencia empírica de los objetos matemáticos a través de prácticas o acciones de los estudiantes al resolver situaciones – problemas. Desde la anterior perspectiva los objetos matemáticos emergen de prácticas sociales y culturales al resolver situaciones prácticas y científicas (Godino, 2017).

En esta dirección, Guacaneme (2015) considera necesario superar las problemáticas relacionadas con los proceso de enseñanza y aprendizaje del razonamiento proporcional estudiando las formas como emergen los significados de los objetos razón y proporción en distintos contextos históricos, culturales y sociales: esta reflexión sobre los significados de los objetos estudiados le permite al profesor innovar en su práctica y proponer situaciones problema de aprendizaje interesantes a los estudiantes , además el análisis de los objetos matemáticos a través de estudios histórico – epistemológicos le permiten al profesor llegar a comprender cómo la humanidad ha construido el conocimiento y la diversidad de significados atribuidos a la proporcionalidad en distintos contextos históricos y culturales. Según Obando et al. (2013) para superar las problemáticas descritas, es necesario además reestructurar la enseñanza escolar de la proporcionalidad de tal manera que se proponga a los estudiantes situaciones de modelación matemática, tanto lineales como no lineales, permitiéndoles desarrollar a la par de los conceptos, la capacidad para describir, interpretar, predecir y explicar situaciones de diferente tipo.

Con el objetivo de superar las dificultades asociadas al aprendizaje de los objetos razón y proporcionalidad, autores como Adjiage (2005), Adjiage y Pluvinage (2007), sugieren proponer a los estudiantes diferentes tipos de situaciones físico – empíricas (razones entre dos cantidades heterogéneas, medida, mezcla, frecuencia, dilataciones y cambio de unidad) a partir de marcos representacionales diversos: gráficos (lineales, bidimensionales) y notacionales (fracciones, decimales). Desde la anterior perspectiva se busca la integración al interior de, y entre, los marcos representacionales y situacionales para tener perspectivas más amplias con las cuales comprender los aspectos matemáticos relacionados con las razones (relación multiplicativa entre dos cantidades físicas), las proporciones y la proporcionalidad (relación lineal entre dos cantidades variables) (Obando, 2015).

Siguiendo un análisis a las anteriores perspectivas, se establece la necesidad de realizar una investigación que permita superar las problemáticas descritas y de igual forma a desarrollar la competencia didáctica – matemática del profesor. Para lograr estos fines, se propone en primer lugar reconstruir el significado global de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad a través de un estudio histórico – epistemológico que permita identificar fuentes fenomenológicas que den cuenta de los procesos heurísticos que han dado paso a la constitución de dichos objetos matemáticos , en segundo lugar, se propone analizar los significados parciales de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de un grado séptimo, al resolver situaciones problema de proporcionalidad, para llegar finalmente a presentar aportes relacionados con la reflexión para el autor, los estudiantes y la investigación en Educación Matemática en la línea del razonamiento proporcional.

De acuerdo con la descripción de la anterior problemática, se presenta a continuación la pregunta central de investigación:

1.2 Formulación del problema de investigación

¿Cuáles son los significados parciales de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo de una institución educativa de la ciudad de Tunja, al resolver situaciones problemas de proporcionalidad directa?

1.3 Objetivo general (OG)

Para lograra dar respuesta a la pregunta de investigación se plantea el siguiente objetivo general del estudio:

OG: Caracterizar los significados parciales de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad, emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo, al resolver situaciones problemas de proporcionalidad directa.

1.3.1 Objetivos específicos (OE)

En relación con la pregunta de investigación, y el objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos, los cuales orientan el desarrollo del estudio.

OE 1. Reconstruir el significado global de los objetos matemáticos razón y proporción, a través del estudio histórico-epistemológico, relacionado con las fuentes fenomenológicas que dieron paso al surgimiento de la proporcionalidad directa.

OE 2. Analizar los problemas-fenómenos identificadas en el estudio histórico-epistemológico, a través de configuraciones epistémicas que permitan caracterizar los significados parciales de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad.

OE 3. Diseñar e implementar situaciones de aprendizaje que promuevan la emergencia de significados parciales de los objetos: razón, proporción y proporcionalidad a través de prácticas matemáticas de los estudiantes.

OE 4. Analizar los significados parciales de los objetos: razón, proporción y proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes al solucionar las situaciones problemas propuestas.

1.4 Justificación

El estudio de los significados de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad (RPP) desde la caracterización de las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado séptimo, es pertinente en Educación Matemática porque permite hacer aportes significativos relacionados con los elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos usados por los estudiantes en las prácticas matemáticas al resolver situaciones problema sobre proporcionalidad. En esta dirección, la caracterización de los significados parciales de los objetos RPP a través de un estudio histórico – epistemológico es potencialmente significativo porque permite al profesor de matemáticas reflexionar sobre la forma como emergen y se formalizan los objetos matemáticos en los distintos contextos históricos, culturales y sociales. Desde esta panorámica, la presente investigación permite al investigador, no solo la innovación de su práctica, toma de mejores decisiones de enseñanza en las fases de diseño, implementación y evaluación, sino también permite llegar a comprender en parte, algunos de los significados de los objetos RPP y las representaciones que los estudiantes usan cuando resuelven situaciones problema.

El presente estudio se enmarca en la línea de investigación en Formación de Profesores, de la Maestría en Educación Matemática de la UPTC, y es pertinente con los objetivos propuestos por el programa académico, ya que permite proponer estrategias pedagógicas para el mejoramiento de la docencia, además de promover la investigación en educación matemática, y desarrollar competencias profesionales, lo anterior a través de la reflexión de la práctica docente, permitiendo mejorar el desempeño del profesor en la búsqueda de una mejor calidad en el desarrollo de los procesos de enseñanza de las matemáticas. El estudio tuvo el propósito de caracterizar los significados parciales de los objetos razón y proporción emergentes de las prácticas matemáticas de 28 estudiantes de grado séptimo de educación básica de la institución educativa focalizada, y buscó fortalecer las habilidades de razonamiento proporcional de los estudiantes, a través de la aplicación de dos situaciones de aprendizaje; de igual forma, los resultados y las conclusiones del estudio presentan aportes significativos que orientan la construcción del Proyecto Educativo de la institución.

Específicamente, el estudio histórico-epistemológico de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad (RPP) dieron elementos para el diseño de dos situaciones problemas relacionadas con proporcionalidad, las cuales fueron aplicadas a los estudiantes de grado séptimo con el propósito de obtener información significativa para la caracterización de los significados parciales de los objetos RPP emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes; dichas prácticas matemáticas permitieron solucionar las situaciones problemas propuestas. El análisis de los significados parciales de los RPP se realizó desde el marco teórico y metodológico del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, el cual proporcionó herramientas teóricas y metodológicas para comprender las prácticas matemáticas de los estudiantes.

1.5 Delimitación de la investigación

El presente estudio, tuvo como propósito caracterizar los significados parciales de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad (RPP) mediante el análisis de las prácticas matemáticas realizadas por un grupo de 28 estudiantes de grado séptimo de educación básica de una institución educativa de la ciudad de Tunja, al resolver situaciones problema de proporcionalidad directa. Para tal fin, se diseñaron dos situaciones de aprendizaje que favorecieron la emergencia de algunos de los significados parciales de los objetos matemáticos RPP a través de prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes al solucionar las situaciones problemas propuestas. Las situaciones problemas fueron un medio de aprendizaje que permitieron generar gran actividad matemática en los estudiantes, emergiendo en sus prácticas matemáticas objetos primarios como: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos.

Por otra parte, en el presente estudio se analizaron los contextos históricos y epistemológicos presentes en la constitución de los significados parciales de los objetos RPP y elementos que fueron dando forma a las necesidades de las diferentes culturas para su constitución en la historia. El desarrollo del estudio histórico-epistemológico de los objetos matemáticos RPP, orientó el diseño de las situaciones de aprendizaje y el análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes, de donde emergen los significados parciales de los objetos RPP.

Capítulo 2. Marco teórico

Lo que llamamos "entender un lenguaje", es muchas veces de la misma especie
que la comprensión de un cálculo, al que llegamos cuando aprendemos
a conocer la historia de su origen o de su aplicación práctica. Y también
aquí aprendemos un simbolismo fácil y transparente,
en lugar de otro simbolismo, que no es extraño.
Ludwig Wittgenstein, Gramática filosófica
D'Amore (2006, p. 253)

En este capítulo se dan a conocer las nociones teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Se presentan las nociones de práctica matemática, institución, sistema de prácticas, objeto matemático, significados personales e institucionales, configuraciones de objetos primarios y análisis epistémicos/cognitivos. Estas herramientas teóricas y metodológicas del EOS permitieron la caracterización de los significados parciales de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad (RPP), emergentes de las practicas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo.

2.1 Enfoque Ontosemiótico (EOS)

El Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, se define como un sistema teórico inclusivo, abierto y dinámico de teorías en Educación Matemática, desarrollado por Godino y un grupo de colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013). Este enfoque se desarrolla desde una aproximación antropológica y Ontosemiótica que concede un papel central al lenguaje y a las formas como emergen los objetos matemáticos en contextos socioculturales específicos, donde se concede un papel importante a la comunicación e interpretación de los objetos matemáticos. Este enfoque teórico surge de la asimilación y acomodación de diversas teorías usadas en Educación matemática tales como, la Teoría de situaciones didácticas (TSD) (Brousseau, 1986; 1998), Teoría de los campos conceptuales (TCC) (Vergnaud, 1990), Teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

(Chevallard, 1992; 1999), Teoría de los registros de representación semiótica (TRRS) (Duval, 1995), entre otras, con el propósito de progresar en la construcción de un sistema conceptual que cuente con herramientas teóricas y metodológicas que hagan posibles los análisis didáctico-matemáticos de los proceso de enseñanza y aprendizaje y permitan la toma de decisiones instruccionales fundamentadas (Godino, 2017)

La incorporación de teorías en el EOS ha permitido comprender el conocimiento matemático desde un punto de vista antropológico y semiótico, considerando las matemáticas como actividad humana que adquieren significado mediante la acción de las personas ante situaciones problemas y que es dependiente de la cultura y el contexto social donde se presente (Radford, 1997). El estudio de asignar significado al conocimiento matemático es complejo y por tanto el EOS lo asume desde el análisis de distintos tipos de dimensiones que son estudiadas en las fases de diseño, implementación y evaluación en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; estas dimensiones o facetas corresponden a: la epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional y mediaciónal. En la Figura 2.1 se dan a conocer las facetas y niveles de análisis didáctico propuestos por el EOS los cuales permiten orientar la comprensión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos.

Figura 2.1. Facetas y niveles de análisis didáctico (Godino, 2013)

Las facetas no se consideran factores independientes, ya que se producen interacciones entre las mismas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos. En la Tabla 2.1 se describen dichas facetas.

Tabla 2.1

Descripción de las facetas presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje

FACETAS	REFIEREN A:
Epistémica	Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en el que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
Cognitiva	Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
Afectiva	Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
Interaccional	Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
Mediaciónal	Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
Ecológica	Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, etc. que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Fuente (Godino, 2017, p.4).

Para un análisis didáctico – matemático fino y detallado de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos se consideran en el EOS varias nociones teóricas y metodológicas que permiten caracterizar los procesos de enseñanza y aprendizaje tales como: práctica matemática, institución, sistema de prácticas matemáticas, objetos matemáticos, significados personales e institucionales, configuraciones de objetos matemáticos y análisis epistémicos/cognitivos. Las anteriores nociones teóricas y metodológicas son consideradas en el estudio y se describen en detalle.

2.2 Nociones teóricas del Enfoque Ontosemiótico (EOS)

A continuación, se presentan algunas nociones teóricas propuestas en el EOS, dichas nociones fueron usadas en el desarrollo del proceso investigativo para lograr caracterizar los significados parciales de los objetos RPP emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

2.2.1 Práctica Matemática

Corresponde a toda actuación o expresión (verbal, grafica, gestual, etc.) realizada por una persona o por un grupo de personas para resolver la situación – problema, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas. (Godino y Batanero, 1994, p. 334).

2.2.2 Institución

La institución se encuentra conformada por las personas que comparten una clase especifica de situaciones problemas. El compromiso compartido con las mismas problemáticas conlleva a la realización de prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución y a las normas implícitas que orientan y determinan la práctica. Las instituciones se conciben como “comunidades de prácticas” e incluyen, por tanto, las culturas, grupos, étnicos y contextos socioculturales. En este sentido, el concepto de “institución” y su importancia en el proceso de resolución de problemas matemáticos están íntimamente ligado con el concepto de comunidades de prácticas (Wenger, 1991). La institución es el sitio donde se realiza una práctica social que “enfatiza la dependencia relacional con el mundo, la actividad, el significado, la cognición, el aprendizaje y el saber” (Godino, 2017).

2.2.3 Sistema de prácticas matemáticas

Se relaciona con el conjunto de prácticas matemáticas realizadas en una institución y que disponen al individuo en un conjunto de formas de acción socialmente constituidas. En el estudio de las matemáticas, más que una práctica particular ante un problema concreto, interesa considerar los sistemas de prácticas (operativas y discursivas) puestas de manifiesto por las personas en su actuación ante diferentes tipos de situaciones problemáticas (Godino 1994). Los sistemas de prácticas son considerados como una de las posibles maneras de entender “el significado del objeto matemático” y son relativos a un contexto o marco institucional (o a una persona individual), además se encuentran ligados a la solución de cierta clase de situaciones – problemas. Los sistemas de prácticas se han categorizado en el EOS teniendo en cuenta diversos puntos de vista, el primero las prácticas personales y el segundo las prácticas institucionales.

2.2.4 Objeto matemático

Se entiende por objeto matemático alguno de los siguientes elementos: lenguaje, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos que emergen e intervienen en las prácticas matemáticas personales o institucionales y cuya finalidad es la resolución de una situación – problema (Godino1994;1998). Dichos objetos matemáticos o entidades primarias corresponden al; *Lenguaje:* que comprende, términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, etc., *Situaciones-problema:* aplicaciones extra – matemáticas, ejercicios, etc., *Conceptos:* entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición, *Proposiciones:* enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba, *Procedimientos:* técnicas de cálculo, operaciones, algoritmos, *Argumentos:* Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas. En el EOS los objetos matemáticos necesitan ser vistos como símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos, ligados a las actividades de resolución de problemas que efectúan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo.

El hecho de que en ciertas instituciones se realicen determinados tipos de prácticas, determina la emergencia progresiva de los objetos matemáticos y que su significado esté íntimamente relacionado con los problemas y la actividad realizada para su resolución. Por ello, “no se puede reducir el significado del objeto a su definición matemática” (D’Amore y Godino, 2007, p. 207). En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, etc.), que se evocan al hacer matemáticas y que se representan en forma textual, oral, gráfica e incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas, emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura (Godino, 2017).

2.2.5 Significados personales e institucionales de los objetos matemáticos

En el EOS, el significado de un objeto, se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones problema en las que dicho objeto interviene. De esta idea, surge que el significado de un objeto matemático puede ser visto desde dos perspectivas: significado personal y significado institucional del objeto matemático. Los significados personales, se refieren a las prácticas matemáticas realizadas por un individuo al resolver una situación – problema y los significados institucionales corresponden al conjunto de prácticas sociales realizadas por una comunidad de aprendizaje en la resolución del problema. En la Figura 2.2, se observa la relación entre significados personales e institucionales que se manifiestan en la resolución de las situaciones – problemas.

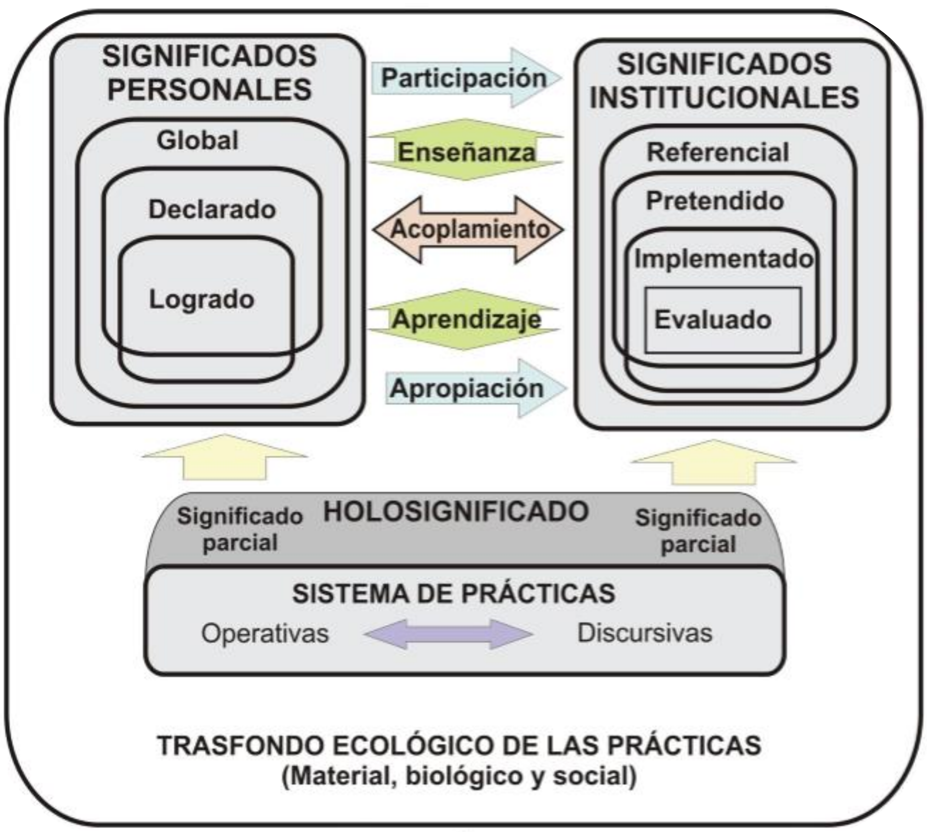


Figura 2.2. Significados como sistemas de prácticas (Godino, 2014, p.13)

En la Figura 2.2 se da conocer el conjunto de significados personales que se describen a continuación; *Global:* corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático, *Declarado:* da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional. *Logrado:* corresponde a las prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida.

En relación con los significados institucionales de la Figura 2.2, el EOS propone un conjunto de cuatro tipos de significados, que se describen a continuación; *Referencial:* Sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será una parte del significado holístico (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007) del objeto matemático. La determinación referencial del significado global exige de un estudio histórico – epistemológico sobre el origen y evolución del objeto considerado, así como la consideración de la diversidad de los contextos de uso en donde se manifiesta dicho objeto. *Pretendido:* sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio, *Implementado:* sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un proceso de estudio específico y *Evaluado:* el subsistema de prácticas utilizado por el docente para evaluar los aprendizajes.

Se resalta que la emergencia del objeto personal es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y del aprendizaje; mientras que la emergencia del objeto institucional es progresiva a lo largo del tiempo. En un momento dado es reconocido como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa sufre transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado (Pino-Fan,2013).

2.2.6 Configuraciones de objetos matemáticos

Las configuraciones corresponden a la relación entre los objetos matemáticos o entidades primarias: lenguaje, conceptos, proposiciones/propiedades, procedimientos, argumentos y situaciones – problema: se definen como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y de las relaciones que se establecen entre los mismos, como se observa en la Figura 2.3.

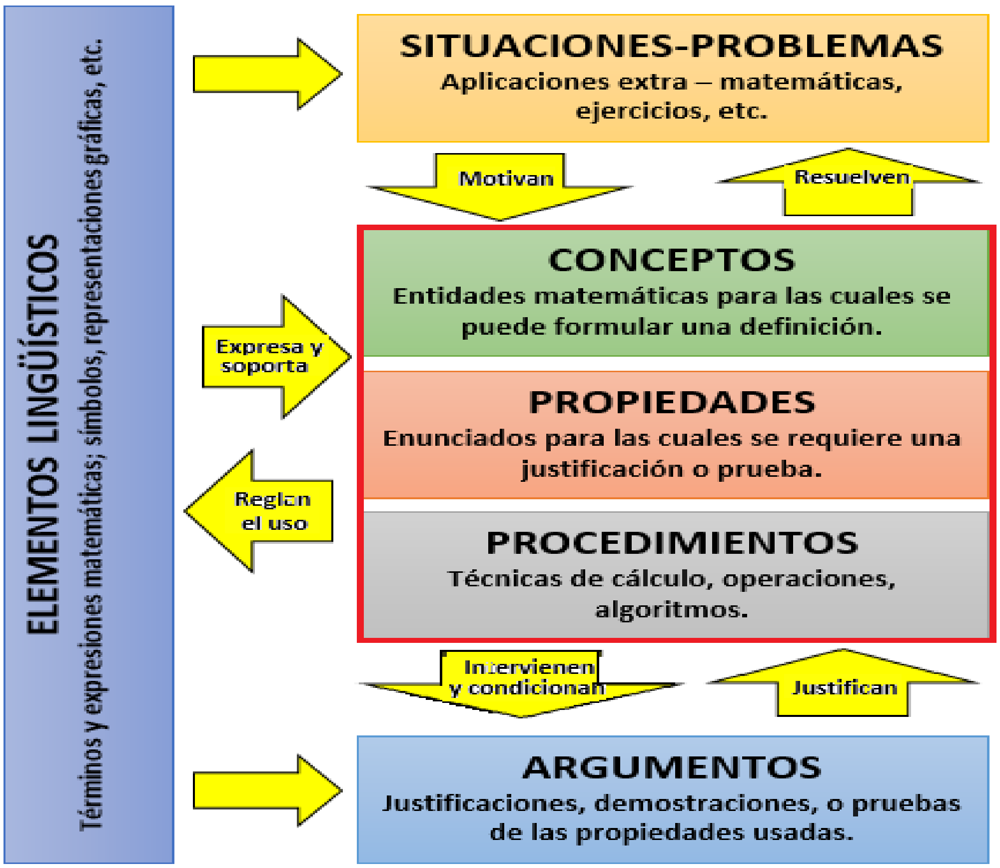


Figura 2.3. Componentes de una configuración epistémica/cognitiva (Font y Godino, 2006)

Las configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales), y se construyen a partir del planteamiento y resolución de una situación – problema, alrededor de la cual se construyen configuraciones epistémicas. La secuencia de estas configuraciones constituye finalmente el “sistema de prácticas matemáticas” que fijan el significado institucional y personal implementado para el objeto u objetos estudiados.

2.2.7 Análisis epistémicos y cognitivos

El *análisis epistémico* refiere a la caracterización de las configuraciones epistémicas (significados institucionales: humanidad - profesor), su secuenciación y articulación. Se trata de descomponer la configuración epistémica en categorías de análisis para caracterizar el tipo de actividad matemática que se implementa. Esto requiere identificar los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos. El análisis epistémico pone en interacción, objetos matemáticos que comprenden; lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos y situaciones problema, emergentes de sistemas de prácticas matemáticas desde el punto de vista institucional al resolver situaciones problema. El análisis epistémico tiene tres objetivos; el primero es explorar objetos y significados puestos en juego en la solución de un problema que se asume como un análisis de referencia, el segundo analizar conflictos de significado y predecir dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los estudiantes dan al problema, y el tercero, explorar como el uso de los objetos matemáticos favorece predecir e identificar conflictos potenciales.

El *análisis cognitivo* refiere a la caracterización de las configuraciones cognitivas (significados personales de los estudiantes), su secuenciación y articulación. Se trata de descomponer la configuración cognitiva en categorías de análisis para caracterizar el tipo de actividad matemática que implementan los estudiantes. Esto requiere identificar los objetos matemáticos puestos en juego, las relaciones entre ellos, los modos de organización en que se agrupan y las relaciones ecológicas que se establecen entre los mismos. El análisis cognitivo pone en interacción, objetos matemáticos que comprenden; lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos y situaciones problema, emergentes de sistemas de prácticas matemáticas desde el punto de vista de los estudiantes al resolver situaciones – problemas. El análisis cognitivo tiene dos objetivos; el primero es identificar prácticas matemáticas de los estudiantes y el segundo caracterizar objetos y significados emergentes de las practicas matemáticas de los estudiantes, el análisis cognitivo permite al profesor comprender de forma detallada y sistemática la forma como aprenden sus estudiantes y los razonamientos que usan al resolver situaciones – problemas.

2.2.8 Campos conceptuales

Para Vergnaud (1990) un campo conceptual es un conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar una serie de situaciones. Este conjunto de conceptos y de teoremas están presentes de manera informal y a nivel previo en los sujetos a través de lo que Vergnaud (1983) denominó teoremas y conceptos en acto o en acción, definidos como relaciones matemáticas que son tomadas en cuenta por los estudiantes al seleccionar una operación o una secuencia de operaciones para resolver un problema.

2.2.9 El campo conceptual de las estructuras multiplicativas

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas, según Vergnaud (1983, 1990, 1991, 1994, 2007) corresponde al conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones. Igualmente, lo considera, como el conjunto de conceptos (proporción simple y compuesta, función lineal, múltiplo, combinación lineal, fracción, divisor, razón, etc.) y teoremas (propiedades de isomorfismo de la función lineal y su generalización a las relaciones no enteras, propiedades que se refieren al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas, y algunas propiedades específicas de la bilinealidad) que permiten analizar estas situaciones.

Capítulo 3. Marco metodológico

Un planteamiento cualitativo es como "ingresar a un laberinto ".
Sabemos dónde comenzamos, pero no dónde habremos de terminar.
Entramos con convicción, pero sin un mapa detallado, preciso.
Y de algo tenemos certeza: deberemos mantener la mente
abierta y estar preparados para improvisar.
Sampieri (2014, p. 206).

Este capítulo presenta la metodología a través de la cual se desarrolló el estudio; se precisa el enfoque de la investigación, así como el diseño y las fases que se siguieron para alcanzar los objetivos específicos, el objetivo general, y el camino recorrido para lograr dar respuesta a la pregunta de investigación. Desde esta panorámica metodológica se describe la población de estudiantes con quienes se desarrolló el estudio, y las categorías de análisis emergentes de las practicas matemáticas de los estudiantes. Finalmente, se dan a conocer las técnicas y herramientas usadas en la recolección y análisis de la información; las cuales permitieron caracterizar los significados parciales de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad – RPP, emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes al solucionar 2 situaciones – problemas de proporcionalidad directa.

3.1 Enfoque de la investigación

La investigación realizada centró el interés en caracterizar los significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad - RPP emergentes de las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado séptimo, de una institución educativa de la ciudad de Tunja, al resolver dos situaciones – problemas relacionadas con proporcionalidad directa. El marco teórico y metodológico desde el cual se desarrolló la investigación corresponde al Enfoque Ontosemiótico – EOS del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (Godino, 2017) y por tanto, en relación con sus planteamientos teóricos y metodológicos, el estudio se realizó bajo un enfoque de investigación cualitativa a través de un diseño fenomenológico (Hernández y Mendoza, 2018).

Según Hernández y Mendoza (2018) el enfoque de investigación cualitativa permite al investigador: explorar, describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes en su ambiente natural y en relación con su contexto; desde esta panorámica la investigación cualitativa le sirve al profesor para comprender completamente el impacto que tiene su enseñanza en los estudiantes, profundizando en la forma como construyen sus conocimientos, en el uso y significados que les dan a los objetos matemáticos y en la forma como interpretan estos objetos. Al asumir el enfoque Ontosemiótico – EOS como marco teórico y metodológico para el desarrollo de la investigación, se debe considerar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que pueden ser comprendidos al articular coherentemente los enfoques epistémicos, cognitivos, socioculturales y pedagógicos con el objetivo de lograr diseños instruccionales idóneos (Godino, 2017). Las herramientas teóricas y metodológicas del EOS centran su interés en la comprensión de los significados personales e institucionales de los objetos matemáticos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas que realiza una persona o un grupo de personas al resolver situaciones – problemas en un contexto social y cultural específico.

3.2 Diseño y fases de la investigación

El proceso de investigación se desarrolló a través de un diseño fenomenológico. La fenomenología puede considerarse como una filosofía, aunque también un enfoque o un diseño de investigación (Hernández y Mendoza, 2018). El origen de la fenomenología remonta al matemático Edmund Husserl (1859-1938) y puede adquirir diversas variantes. Sin embargo, en este estudio la fenomenología es interpretada como un diseño de investigación que permite abordar de forma general el proceso investigativo (Creswell y Creswell, 2018; Adams y Van Manen, 2008). Según Hernández y Mendoza (2018) a través del diseño fenomenológico es posible explorar, describir y comprender lo que los individuos tienen en común de acuerdo con sus experiencias ante un determinado fenómeno. Según Marton (1986) la fenomenología permite investigar las formas cualitativas en donde las personas experimentan, conceptualizan perciben y comprenden varios aspectos del mundo y de los fenómenos que les rodean. “La fenomenología favorece identificar las concepciones e indaga sobre los significados subyacentes entre ellas” (Hernandes y Mendoza, 2018, p. 549). Además, Entwistle (1997) da a conocer que la fenomenología concibe el aprendizaje como una actividad relacional que se da por medio de una interacción entre los estudiantes, el contenido objeto de aprendizaje, y todo el ambiente de aprendizaje. Los resultados del análisis fenomenológico son categorías de descripción que emergen a través de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

En el diseño fenomenológico se concibe que el profesor investiga directamente en el salón de clase; observando y analizando la esencia de la experiencia compartida en las actuaciones escritas y orales de los estudiantes para crear un modelo basado en sus interpretaciones, además el profesor confía en su intuición para lograr aprender de los razonamientos de sus estudiantes. La exploración, descripción y reflexión de los significados de los objetos RPP a través del diseño fenomenológico le permiten al profesor desarrollar fundamentos teóricos y científicos para llegar a elaborar un modelo didáctico propio y con fundamento (Grupo Beta, 1990). Específicamente, el diseño fenomenológico que permitió el logro de los objetivos propuestos, se fundamentó en el desarrollo sistemático de cuatro fases, mediante las cuales se dio respuesta a la pregunta de investigación. Las fases y el diseño que siguió el estudio se presenta en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1

Fases y diseño de la investigación

FASES	DISEÑO
1. Estudio histórico –epistemológico de los objetos RPP.	Documental
2. Análisis epistémico de problemas - fenómenos.	Fenomenológico
3. Diseño, análisis e implementación de situaciones – problemas.	Fenomenológico
4. Análisis cognitivo de prácticas matemáticas.	Fenomenológico

Fuente (Elaboración propia).

La primera fase denominada *Estudio histórico –epistemológico de los objetos RPP* se realizó a través de un análisis documental, esta fase se desarrolló con base en la revisión sistemática de libros de historia de las matemáticas, tesis doctorales, tesis de maestría y artículos científicos relacionados con estudios históricos – epistemológicos, que dan cuenta de la evolución de los objetos *RPP* , la comprensión de estas fuentes documentales permitió identificar y analizar 6 períodos de la historia los cuales dan a conocer la génesis, desarrollo y constitución de los objetos RPP, estos períodos históricos se presentan en la Tabla 3.2.

Tabla 3.2

Períodos de la historia identificados en el estudio histórico – epistemológico

Período	Culturas y años analizados
1	Ideas de razón y proporción en la antigua babilonia (c. 3.000 a. C – c. 1600 a. C)
2	Ideas de razón y proporción en el periodo clásico griego (c. 600 a.C. – c. 300 a. C)
3	Ideas de razón y proporción en el periodo helenístico griego (c. 300 a.C. – c. 600 d. C)
4	Ideas de razón y proporción en la Cultura China (c. 300 a.C.- c. 300 d. C)
5	Ideas de razón y proporción en los hindúes, árabes y en los trabajos de Leonardo de Pisa (c. 300 a. C – c. 1300 d. C)
6	La función lineal como noción unificadora de la proporcionalidad en Europa (c. 1600 – c. 1800)

Fuente (Elaboración propia).

La segunda fase, denominada *análisis epistémico de problemas o fenómenos*, se realizó a través de la caracterización de seis problemas identificados en el estudio histórico – epistemológico: cada problema fue analizado a través de configuraciones epistémicas que permitieron comprender la tipología de objetos primario propuestos en el marco del EOS: situaciones – problemas, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos emergentes de las soluciones atribuidas al problema. Cada configuración epistémica tiene asociado un significado parcial de los objetos matemáticos RPP. Finalmente, se caracterizan los 6 significados parciales en una red conceptual denominada en el EOS: *Significado global de los objetos matemáticos.* En esta dirección, en la Tabla 3.3 se dan a conocer los problemas analizados y sus significados parciales asociados.

Tabla 3.3

Problemas – fenómenos analizados en el estudio histórico – epistemológico

Problemas – fenómenos	Configuraciones epistémicas (CE) y significados parciales asociados
P1. Compraventa de aceite en la antigua Babilonia (c. 1.600 a. C)	**CE1.** Razón como relator – transformador y proporción a través de comparación de áreas.
P2. Distancia de un barco a la orilla de la playa (c. 640 a.C. – c. 546 a.C.)	**CE2.** Razón como relator y proporción a través de razonamientos por analogía.
P3. Método de la antanairesis (c. 500 a.C. – c. 300 a.C.)	**CE3**. Razón y proporción a través de la antanairesis.
P4. Intercambio de millo descascarado a millo (c. 300 a. C- c. 300 d. C)	**CE4.** Razón como correlator – transformador y proporción a través de razonamientos analíticos.
P5. Compraventa de huevos aplicando la regla de tres (c. 1170 – c. 1250)	**CE5.** Razón y proporción a través de la regla de tres
P6. Caída libre de un cuerpo (c. 1600 – c. 1800)	**CE6.** Proporcionalidad – sistemas de cambio.

Fuente (Elaboración propia).

Del desarrollo de la primera y segunda fase, se logró la comprensión de la emergencia de los significados parciales de los objetos RPP, propuestos por los matemáticos a través de la historia, además se obtiene la información necesaria para diseñar las situaciones de aprendizaje y realizar con un fundamento teórico el análisis de los significados parciales emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

La tercera fase del estudio se denomina: *diseño, análisis e implementación de situaciones – problemas;* en esta fase se diseñan e implementan dos situaciones de aprendizaje con base en el análisis del significado global obtenido del estudio histórico –epistemológico de los objetos RPP: la primera situación tiene como título: *Construcción del modelo matemático que relaciona el radio* *y el perímetro del círculo* y la segunda situación tiene como título: *Construcción de nuevas magnitudes, el caso de la densidad poblacional*. La elección de los significados en esta fase se denomina en el EOS como: *significados pretendidos.* La implementación de las situaciones – problemas tuvo como propósito generar prácticas matemáticas en los estudiantes, buscando que se favoreciera la emergencia de la tipología de objetos primarios propuesta en el marco del EOS y con ellos la emergencia de significados parciales de los objetos RPP. En la Figura 3.1 se dan a conocer los *significados parciales* pretendidos para cada situación – problema.

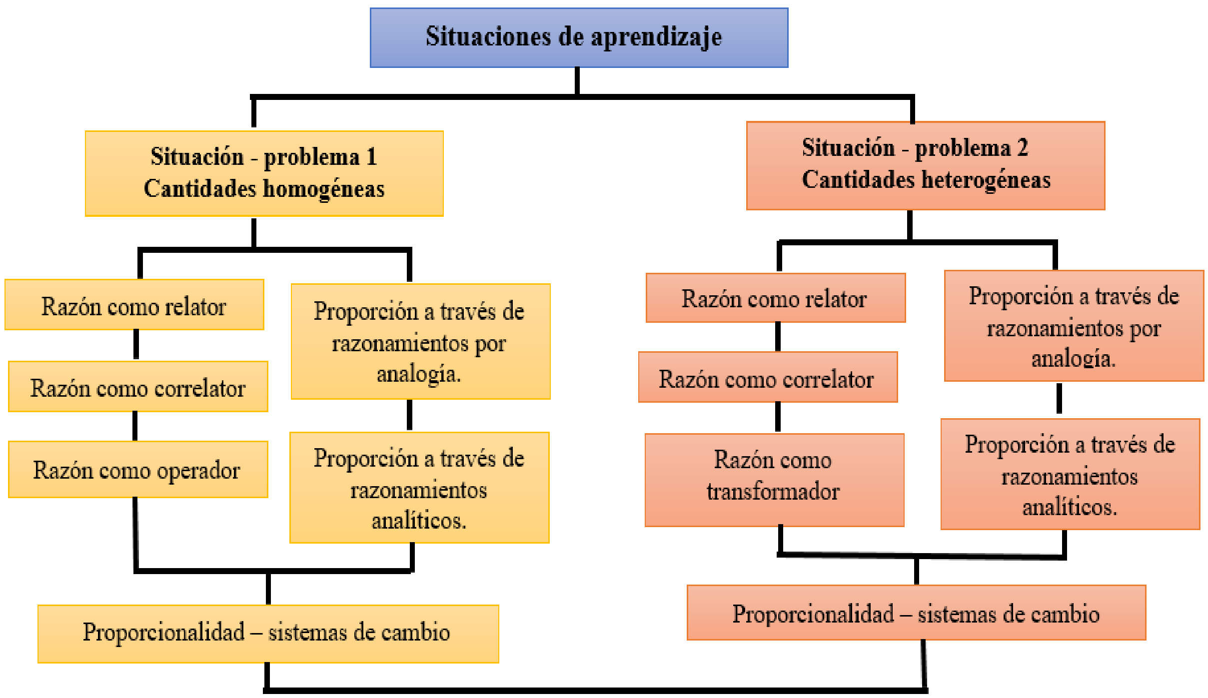


Figura 3.1. Relación entre las situaciones de aprendizaje y los significados parciales pretendidos (Elaboración propia).

La Situación problema 1, tuvo como propósito identificar y caracterizar los significados parciales de los objetos RPP al comparar cantidades homogéneas en la construcción del modelo matemático que relaciona el perímetro y el diámetro del círculo. La Situación – problema 2, tenía como propósito identificar y caracterizar los significados parciales de los de los objetos RPP al comparar cantidades heterogéneas y completar una tabla y gráfica de proprocionalidad directa relacionada con la densidad (cantidad de árboles por hectárea). El diseño de las dos situaciones – problemas evidencia la relación directa con el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos: en este tipo de pensamiento matemático está la esencia de la proporcionalidad: la variación, la dependencia y la correspondencia que permiten la contextualización, comprensión y unificación de los objetos RPP (Fiol y Fortuny, 1990), las dos situaciones de aprendizaje favorecen la articulación de diversos registros de representación semiótica como de usos y sentidos atribuidos a los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad.

En esta fase se realizó un análisis epistémico a priori a cada situación problema en la que se caracterizaron los objetos matemáticos primarios: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos propuestos en el EOS que podían emerger de las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver las situaciones propuestas: el análisis a priori permitió prever algunos conflictos de aprendizaje que podían llegar a presentarse en los estudiantes al resolver las situaciones propuestas. Finalmente, en esta fase se implementaron las situaciones – problemas a los estudiantes, esta fase es denominada en el EOS como *significados implementados*. En esta fase se recolectó la información emergente del sistema de prácticas que realizaron los estudiantes al resolver las situaciones – problemas, a través de la observación participante del profesor en las clases, grabaciones de video, protocolos escritos de los estudiantes y grabaciones de audio que corresponden a entrevistas semiestructuradas que realizó el autor a los estudiantes para comprender de mejor forma sus producciones escritas.

Por último, la cuarta fase del estudio denominada *análisis cognitivo de prácticas matemáticas*, consistió en analizar las producciones y prácticas de los estudiantes: esta fase corresponde en el EOS a los *significados evaluados*. En la cuarta fase se realizaron configuraciones cognitivas que consistieron en caracterizar las producciones escritas y orales de los estudiantes: protocolos de solución a las situaciones – problemas, transcripción de grabaciones de audio relacionadas con diálogos profesor – alumno, y grabaciones de video, de estas fuentes de información se identificaron seis categorías de análisis denominadas en el EOS objetos primarios que corresponden a: situaciones – problemas, elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. En este sentido, se realizaron tres configuraciones cognitivas asociadas a las soluciones de la situación problema 1 y ocho configuraciones cognitivas asociadas a las soluciones de la situación problema 2, analizando las categorías identificadas. El análisis sistemático de las configuraciones cognitivas corresponde en el EOS a la síntesis de los *significados personales* (global, declarado y logrado) de los estudiantes (Godino, 2017), (ver, Capitulo 6). Esta fase permitió la exploración, descripción y caracterización de los significados de los objetos RPP desde los sistemas de prácticas matemáticas de los estudiantes.

En la Figura 3.2 se presenta una síntesis de las actividades realizadas en cada una de las fases del estudio y su relación con los objetivos específicos (OE) de la investigación, además cada fase evidencia la conexión con algunas de las nociones teóricas y metodológicas propuestas en el EOS (palabras y frases en cursiva y subrayadas), particularmente las relacionadas con los significados personales e institucionales presentes en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos matemáticos estudiados.

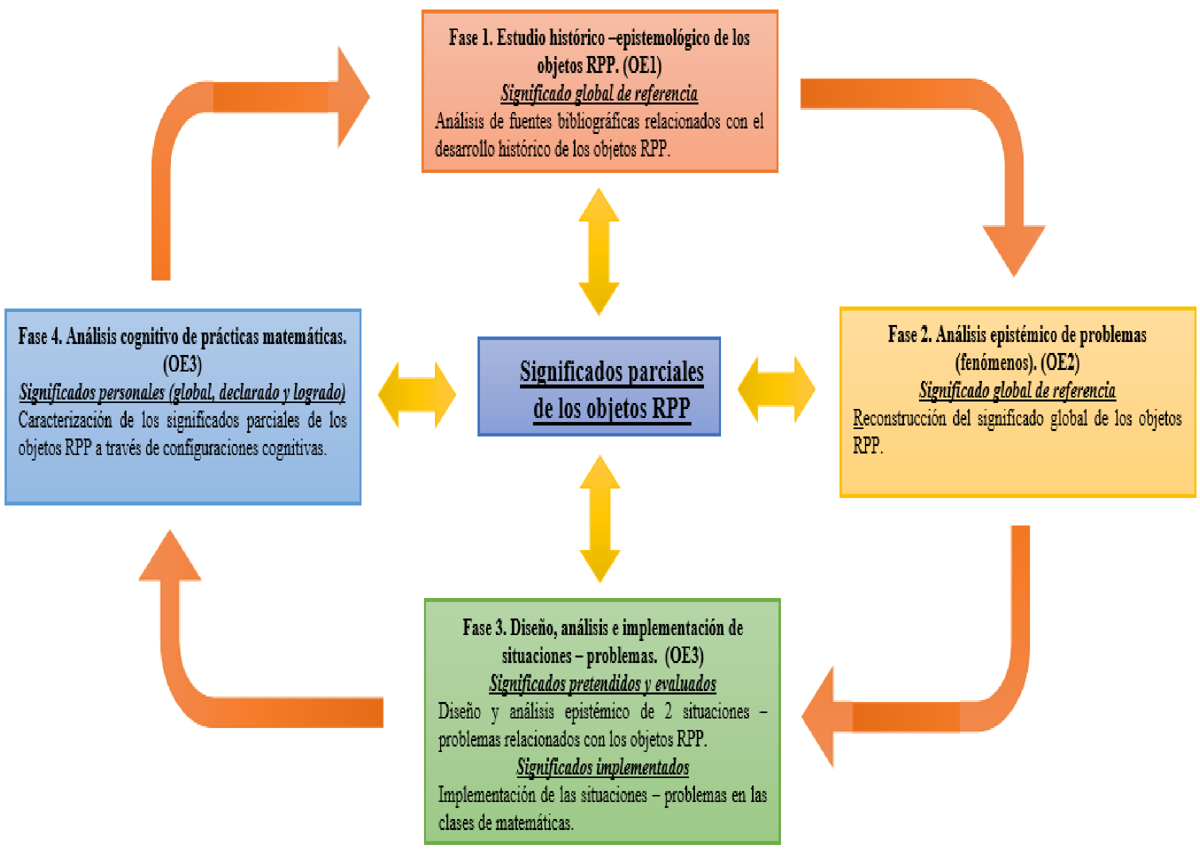


Figura 3.2. Fases de la investigación (Elaboración propia).

3.3 Relación entre las fases de la investigación y los objetivos específicos del estudio

De acuerdo con el marco teórico y metodológico del EOS que sustentan la investigación, se da a conocer la relación entre las fases del estudio y las actividades propuestas que permiten el logro de los objetivos planteados; el logro de los objetivos permitieron dar respuesta a la pregunta de investigación formulada en los siguientes términos: ¿Cuáles son los significados de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo de una institución educativa de la ciudad de Tunja, al resolver situaciones – problemas de proporcionalidad directa?

Fase 1: Estudio histórico – epistemológico de los objetos RPP

Actividades desarrolladas para el logro del objetivo específico 1 (OE 1)

OE 1. Recosntruir el significado global de los objetos matemáticos razón y proporción, a través del estudio histórico – epistemológico, relacionado con las fuentes fenomenológicas que dieron paso al surgimiento de la proporcionalidad directa.

- Análisis de libros de historia de las matemáticas, tesis doctorales, tesis de maestría y artículos científicos relacionados con la génesis, desarrollo y constitución de los objetos RPP.
- Identificación de seis periodos históricos de los cuales emergen problemas – fenómenos que dieron paso al surgimiento de los significados parciales de los objetos RPP.

Fase 2: Análisis epistémico de problemas - fenómenos

Actividades desarrolladas para el logro del objetivo específico 2 (OE 2)

OE 2. Analizar los problemas – fenómenos identificadas en el estudio histórico-epistemológico, a través de configuraciones epistémicas que permitan caracterizar los significados parciales de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad.

- Análisis de seis problemas relacionados con los significados parciales de los objetos RPP. Los fenómenos son identificados en distintos periodos históricos.
- Construcción de seis configuraciones epistémicas que permitieron caracterizar la tipología de objetos primarios propuestos en el EOS, estas configuraciones emergen de las soluciones a los problemas – fenómenos.
- Reconstrucción del significado global de los objetos RPP a través de la sistematización de seis Configuraciones epistémicas (ver Figura 5.19).

Fase 3: Diseño, análisis e implementación de situaciones – problemas

Actividades desarrolladas para el logro del objetivo específico 3 (OE 3)

OE 3. Diseñar e implementar situaciones de aprendizaje que promuevan la emergencia de significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad a través de prácticas matemáticas de los estudiantes.

- Diseño de dos situaciones de aprendizaje relacionadas con los significados parciales de los objetos RPP (ver Figura 3.1)
- Propuesta de solución a las situaciones de aprendizaje desde la perspectiva del autor.
- Análisis epistémico de la solución propuesta por el autor: esta solución institucional permite caracterizar la tipología de objetos primarios propuestos en el EOS y prever conflictos potenciales de aprendizaje.
- Implementación de las situaciones de aprendizaje a la población de estudio.

Fase 4: Análisis cognitivo de prácticas matemáticas.

Actividades desarrolladas para el logro del objetivo específico 4 (OE 4)

OE 4. Analizar los significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes al solucionar las situaciones- problemas propuestas.

- Análisis de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes al resolver las situaciones de aprendizaje. Las prácticas son analizadas a través de la tipología de objetos primarios propuestos en el EOS.
- Caracterización de los significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad emergentes de las practicas matemáticas de los estudiantes.
- Conclusiones generales del proceso investigativo desarrollado.

3.4 Unidad de análisis

La unidad de análisis refirió al sistema de prácticas matemáticas desplegado por un grupo de estudiantes de grado séptimo de una institución educativa de la ciudad de Tunja al resolver dos situaciones problemas relacionadas con proporcionalidad directa. La institución educativa es de carácter privado y ofrece una educación integral desde los niveles de preescolar, básica secundaria y media, formadora de alrededor de 900 estudiantes de la ciudad y de un estrato socioeconómico: tres, cuatro y cinco. La selección del grupo de estudiantes con quienes se realizó el estudio obedece a que el autor de la tesis se ha desempeñado como docente en la institución educativa desde hace diez años y motivado por las prácticas que manifiestan sus estudiantes al resolver problemas de proporcionalidad lo han llevado a problematizar su práctica docente. La institución educativa se caracteriza en el departamento de Boyacá por sus excelentes resultados en las pruebas saber de tercero, quinto, noveno y en el examen de estado que realiza el ICFES para el grado once, lo anterior debido a que en las clases se ha dado un énfasis en la comprensión lectora, el pensamiento crítico y la resolución de problemas. Particularmente se realizó el estudio con un grupo de 28 estudiantes de grado séptimo: 15 niños y 13 niñas, con edades entre los 11 y 13 años, donde el docente investigador es el titular, quien orienta la clase de matemáticas, las actividades implementadas con los estudiantes se realizaron en el primer semestre del año 2019 y se desarrollaron en cuatro sesiones de clase, cada una de 50 minutos de duración; en dichas sesiones se implementaron dos situaciones – problemas relacionadas con la proporcionalidad directa permitiendo observar la actividad matemática de los estudiantes y posteriormente caracterizar los sistemas de prácticas matemáticas desplegados por los estudiantes.

3.5 Fuentes de información

El propósito central de la investigación corresponde a caracterizar los significados parciales de los objetos RPP emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de un grado séptimo; con la pretensión de alcanzar el objetivo general del estudio, se tuvieron en cuenta varias fuentes de información: la primera, corresponde a los textos escritos en donde los estudiantes consignaban las soluciones a las preguntas planteadas en cada una de las situaciones propuestas: de las producciones escritas emergieron categorías de análisis: situaciones – problemas, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos denominado en el EOS objetos primarios. La segunda fuente de información corresponde a las grabaciones de audio, relacionadas con entrevistas semiestructuradas que realizó el profesor a los estudiantes para profundizar en los significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad – RPP usados por los estudiantes en los protocolos escritos: estos audios fueron transcritos y permitieron analizar los tipos de lenguaje natural y matemático usado por los estudiantes al referirse a los objetos RPP. Otras fuentes de información corresponden a las grabaciones de video y a la observación participante del autor de la tesis en las prácticas matemáticas de los estudiantes, que permitieron comprender las actuaciones y formas de interacción social y cultural en el aprendizaje de los objetos RPP. El análisis articulado de los textos escritos, grabaciones audiovisuales y observaciones permitió caracterizar los significados de los objetos RPP.

3.6 El trabajo del investigador

En este trabajo investigativo los roles del autor fueron evidenciados desde tres componentes: mediador en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos RPP, observador participante en las prácticas matemáticas de los estudiantes e investigador reflexivo de su práctica y la de los estudiantes. El rol de mediador se evidencia en el momento de la realización de un estudio histórico – epistemológico relacionado con la reconstrucción de los significados parciales de los objetos RPP el cual favoreció la reflexión didáctico – matemática del profesor en relación a la proporcionalidad y permitió el diseño de dos situaciones de aprendizaje, estas situaciones – problemas fueron aplicadas a los estudiantes quienes las resolvieron usando distintos objetos matemáticos y registros semióticos junto con sus representaciones, evidenciando sus conocimientos acerca de la proporcionalidad.

El rol de observador participante se dio en el trabajo de aula en las clases de matemáticas, en donde el autor observó las prácticas matemáticas desplegadas por los estudiantes al resolver las situaciones propuestas: el autor además daba explicaciones a los estudiantes, les hacía peguntas acerca de los procedimientos y estrategias que usaban para resolver las situaciones planteadas, y motivaba a los estudiantes para que trabajaran de forma cooperativa. Desde esta panorámica Russell (1995) considera que la observación participante requiere acercarse a las personas y lograr que se sientan lo suficientemente a gusto con la presencia del investigador de tal suerte que el investigador pueda observar y obtener información. Según Chaiklin (2011, p. 240) el investigador a través de la observación participante aprende de los estudiantes, comprende en su ambiente natural las prácticas matemáticas e incluso llega a transformarlas. Entre los instrumentos que utilizó el autor para apoyar la observación, están las conversaciones naturales, los audios de entrevistas semiestructuradas realizadas a los estudiantes, textos escritos de los estudiantes y grabaciones de video de las sesiones de clase. El rol reflexivo del investigador se da al momento de caracterizar los significados de los objetos razón, proporción y proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes, analizando y comprendiendo los objetos primarios: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos evidenciados en las producciones escritas y orales de los estudiantes. Por último, la reflexión de la práctica del autor en relación al proceso investigativo desarrollados se da cuando se identifican fortalezas y debilidades que permiten desarrollar competencias didáctico – matemáticas.

3.7 Técnicas y herramientas para la recolección y análisis de la información

En la Tabla 3.4, se presenta la relación entre las fases, técnicas y herramientas usadas en el estudio para la recolección y análisis de la información que permitieron caracterizar los significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo al solucionar dos situaciones de aprendizaje sobre proporcionalidad.

Tabla 3.4

Fases, técnicas y herramientas usadas en el estudio

Fases de la investigación	**Recolección de la información**		**Herramientas para el análisis de la información**
	Técnicas	**Herramientas**	
Estudio histórico – epistemológico de los objetos RPP	Análisis documental	Revisión sistemática de libros de historia de las matemáticas, tesis doctorales, tesis de maestría y artículos científicos relacionados con estudios históricos - epistemológicos de los objetos RPP.	Reconstrucción del significado global de los objetos razón, proporción y proporcionalidad a través de la red conceptual de configuraciones epistémicas propuesta en el EOS.
Análisis epistémico de problemas – fenómenos	Análisis epistémico	Identificación de problemas – fenómenos relacionados con los objetos RPP, emergentes en diversos periodos históricos.	Configuraciones epistémicas relacionadas con la tipología de objetos primarios propuestos en el EOS.
Diseño, análisis e implementación de situaciones – problemas	Intervención didáctica	Construcción de dos situaciones-problemas relacionadas con los significados parciales de los objetos RPP.	Configuraciones epistémicas de las soluciones propuestas por el autor a cada situación problema.
Análisis cognitivo de prácticas matemáticas.	Análisis Cognitivo	-Observación participante. -Protocolos escritos de los estudiantes que evidencian las soluciones a las situaciones - problemas. -Grabaciones de entrevistas semiestructuradas realizadas a los estudiantes. -Grabaciones de video de las clases en que se desarrollaron las situaciones problema.	Configuraciones cognitivas de objetos primarios y significados, emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes

Fuente (Elaboración propia).

3.8 Categorías de análisis

El análisis de las fuentes de información, como textos escritos de los estudiantes, entrevistas semiestructuradas realizadas por el profesor a los estudiantes, grabaciones de video y observación participante del autor del estudio, permitieron identificar categorías de análisis a saber: situaciones – problemas, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos denominados en el EOS como objetos primarios. Las categorías del estudio emergen de las prácticas matemáticas de los estudiantes, específicamente de las producciones escritas y orales al solucionar las situaciones de aprendizaje propuestas. El análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes a través de los objetos primarios (categorías) permitieron caracterizar los significados parciales de los objetos RPP, las categorías son sistematizadas a través de configuraciones cognitivas para tener un análisis más detallado de las prácticas de los estudiantes. La descripción de las categorías emergentes de las practicas matemáticas de los estudiantes se presentan en la Tabla 3.5:

Tabla 3.5

Categorías emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes

Categorías de análisis	**Descripción**
Situaciones – problemas	Aplicaciones extra – matemáticas, ejercicios, etc.
Elementos lingüísticos	Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, etc.
Conceptos	Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición.
Procedimientos	Técnicas de cálculo, operaciones, algoritmos.
Propiedades	Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba.
Argumentos	Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las propiedades usadas.

Fuente (Elaboración propia).

3.9 Triangulación y validación de la información

La caracterización de los significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad - RPP emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo se dio al analizar en forma conjunta y sistemática las diversas fuentes de información recolectadas a través de diferentes métodos en cada una de las fases del estudio. Desde esta panorámica, Cerda (2011) considera la triangulación como una técnica de investigación que consiste en ubicar en un triángulo las diversas miradas o datos de la investigación, para revisarlos desde los tres ángulos, en cada uno de los cuales se presenta una intersección que permite comprender las fuentes de información desde una perspectiva holística y completa. La triangulación forma parte de la validación en el análisis de la información, lo que significa que las múltiples fuentes de información se cruzan para contrastar y comprender los significados de los objetos RPP.

Teniendo en cuenta las anteriores perspectivas, en el presente estudio se dispuso de diferentes fuentes de información: textos escritos de los estudiantes, grabaciones de audio relacionadas con entrevistas semiestructuradas realizadas a los estudiantes durante el desarrollo de las situaciones problema y grabaciones de video de las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver las situaciones propuestas, además se consideró el estudio histórico – epistemológico como fuente valiosa de información que permitió comprender los significados de los objetos RPP. El proceso de triangulación de las fuentes de información se realizó inicialmente sobre las producciones escritas de los estudiantes, luego sobre las grabaciones de audio y finalmente sobre los videos. De esta forma las categorías de análisis evidenciadas en una de las fuentes se contrastaban con las categorías obtenidas en otra de las fuentes, lo que permitió una retroalimentación continua de una fuente de información sobre la otra.

Particularmente, los textos escritos de los estudiantes fueron digitalizados y caracterizados a través de la tipología de objetos primarios propuestos en el EOS, estas categoría fueron expresadas por los estudiantes desde distintas formas de representación: lenguaje verbal, lenguaje numérico, lenguaje simbólico y lenguaje gráfico, en este sentido, las grabaciones de audio referentes a entrevistas semiestructuradas realizadas a los estudiantes también fueron transcritas y permitieron analizar la tipología de objetos primarios (categorías) usadas por los estudiantes al referirse a los significados de los objetos RPP, finalmente el análisis de los videos de las clases y los resultados del estudio histórico – epistemológico permitieron profundizar en la comprensión de las fuentes de información.

Otra forma de validación de los datos del estudio se realizó a partir de la presentación de los avances parciales del proceso investigativo en seminarios internos en el programa de la Maestría en Educación Matemática de la UPTC, como en eventos de educación matemática de carácter internacional y nacional, la publicación en la revista: Acta Latinoamericana de Matemática Educativa volumen 32 del artículo titulado "Prácticas matemáticas en estudiantes de un grado séptimo al resolver un problema de proporcionalidad" donde se reportan los avances del proceso investigativo y la escritura del capítulo de libro titulado: Significado Global de la Proporcionalidad desde el Contexto Variacional y Espacial, incluido en la obra titulada "Aconteceres en el Aula de matemáticas" de la UPTC, donde se reportan avances de resultados obtenidos en el presente estudio.

Capítulo 4. Comprensión del razonamiento proporcional

La proporción es la justa y armoniosa relación
de una parte, con otras o con el todo.
Francis D.K Ching (1990)

El capítulo presenta nociones conceptuales sobre: razonamiento proporcional, funciones de la razón, razonamientos por analogía, razonamientos analíticos y la regla de tres. La comprensión de las anteriores nociones conceptuales por parte del autor favorece la caracterización de los significados parciales de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad, emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

4.1 Razonamiento proporcional

El razonamiento proporcional para Lamon (2005, 2007), es multifacético e integra diferentes componentes: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento "up and down" y "unitizing"). En la interpretación del número racional se consideran cinco subconstructos: razón, operador, parte – todo, medida y cociente. De acuerdo con Lamon (2005, 2007) las formas de razonar con estos subconstructos generan diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional. El razonamiento "up and down" implica una manera de razonar para resolver problemas cuando la unidad está implícita. El proceso de generar unidades contables ("unitizing") implica la construcción de una unidad de referencia a partir de la relación entre las cantidades y usar esta nueva unidad para contar. El pensamiento relacional describe la capacidad de analizar cambios en términos relativos al relacionar el número de partes en las que se divide un todo y el tamaño de cada parte en relación al total. La idea de covarianza tiene que ver con la manera en la que los estudiantes entienden que dos cantidades están relacionadas de tal manera que, cuando cambia una cantidad, la otra también cambia (covarianza) de una manera particular con respecto a la primera cantidad. A partir de esta caracterización del razonamiento proporcional propuesta por Lamon (2005, 2007), Pitta-Pantazi y Christou (2011) consideran que las tareas de determinar si los contextos son proporcionales o no y las tareas proporcionales de valor perdido pueden proporcionar información relevante sobre el conocimiento de matemáticas relativo al razonamiento proporcional puesto de manifiesto por los resolutores.

4.2 El objeto matemático razón

Según Obando (2018), en su forma más general, una razón entre dos cantidades es una nueva cantidad que surge de la comparación por cociente entre ellas, y por lo tanto expresa la medida relativa de una de ellas tomando la otra como unidad. Esto permite diferenciar la relación entre las cantidades de la razón como cuantificación objetivada de dicha relación. Por ejemplo, entre dos cantidades x e y en donde x es el doble de y, 2 objetiva la razón entre dichas cantidades, y la expresión "es el doble de" la relación entre ellas. Explícitamente, la razón implica una forma de cuantificación de la relación por cociente, entre dos cantidades y no como un cociente entre dos números. En este sentido, Obando (2015) indica la importancia de comprender la razón tanto como medida relativa si se define entre dos cantidades homogéneas, o como relativización a la unidad, si se define entre dos cantidades heterogéneas. Desde las anteriores nociones la razón cumple cuatro funciones con respecto a las cantidades sobre las cuales se define, estas cuatro funciones se sintetizan en la Figura 4.1.

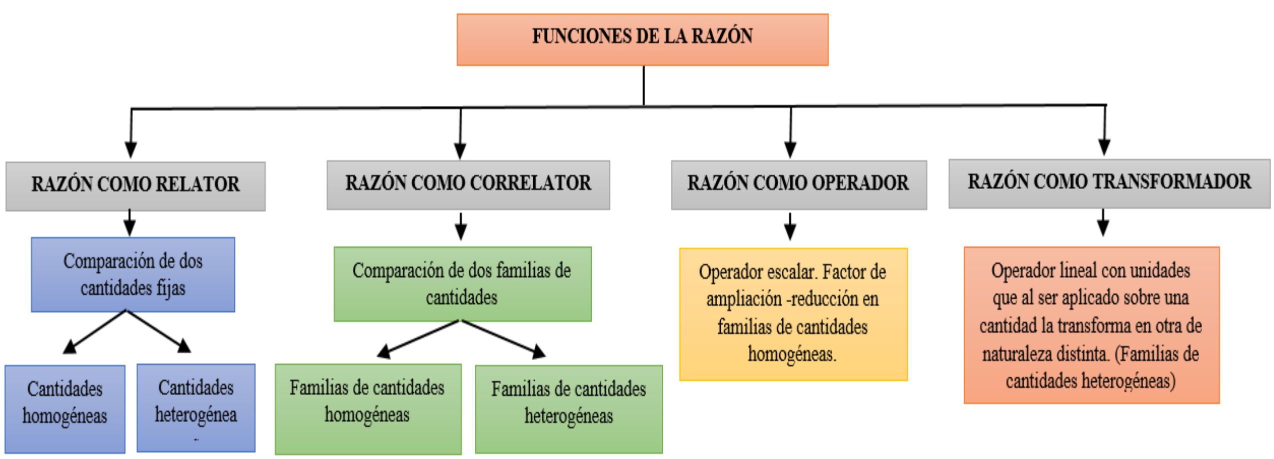


Figura 4.1. Roles o funciones de la razón (Elaboración propia).

4.2.1 La razón como relator/correlator

De acuerdo con la distinción anterior, la razón ya objetivada puede cumplir una función de cuantificar la relación por cociente en dos situaciones distintas, bien entre dos cantidades específicas (fijas), bien entre dos familias de cantidades. En el primer caso, la razón es un relator mientras que, en el segundo, la razón es un correlator (Vasco, 1994).

Razón como relator: Dadas dos magnitudes M_1 y M_2 y dos cantidades de magnitud a_1 y b_1 que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente, se determina una cantidad $p = R(a_1,\ b_1)$, entre las dos cantidades de magnitud dadas. Esta relación, R, es de carácter cuantitativo y se puede expresar como sigue:

$$\boldsymbol{R}: \boldsymbol{M_1} \times \boldsymbol{M_2} \rightarrow \boldsymbol{Q}$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1}) \rightarrow \frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{b_1}} = \boldsymbol{p} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{b_1})$$

Se debe tener en cuenta que si M_1 y M_2 son magnitudes homogéneas entonces p es una cantidad numérica que expresa la relación parte – todo entre las dos cantidades comparadas. En este caso Q es el conjunto de los números racionales o más generalmente, los reales. Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces p es una cantidad con unidades que expresa la cantidad de unidades de a_1 por cada unidad de b_1, en cuyo caso Q puede ser una nueva cantidad.

Razón como correlator: Si la razón objetiva la relación entre dos familias de cantidades, es una cantidad intensiva (correlator intensivo) que permite establecer una correspondencia uno a uno entre elementos de ambas familias, y define una proporcionalidad directa entre ellas. La razón se objetiva entonces en la constante de proporcionalidad la cual será adimensional si el correlator intensivo se define entre familias de cantidades de la misma naturaleza o tendrá dimensiones en caso que las familias sean de diferente naturaleza. El rol de la razón como correlator se hace explicita a partir de la noción de transformación lineal definida; como una función f de un espacio vectorial real M_1 en un espacio vectorial M_2 que asigna a cada vector a $\epsilon\ M_1$ un único vector a $f\ \epsilon\ M_2$ y que satisface las siguientes propiedades:

— Aditividad, $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$

— Homogeneidad con respecto a la multiplicación por un escalar, $f(\lambda a) = \lambda f(a),\ \lambda \boldsymbol{\epsilon}\ R$

$$\forall \boldsymbol{a} \,\boldsymbol{\epsilon}\, \boldsymbol{M_1}, \qquad \frac{\boldsymbol{f(a)}}{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{\alpha}, \qquad con\ \alpha: constante\ de\ proporcionalidad$$

Las anteriores propiedades pueden enunciarse así: dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal, a_1 una cantidad de magnitud de M_1 y b_1 una cantidad de magnitud de M_2 se cumple que:

Cuando la cantidad de magnitud a_1 aumenta al doble, al triple, ..., la cantidad de magnitud $b_1$aumenta al doble, al triple, ...

Cuando la cantidad a_1 disminuye a la mitad, a la tercera parte, ..., la cantidad $b_1$disminuye a la mitad, a la tercera parte, ...

A partir de esta definición de transformación lineal y de la enunciación de sus propiedades se establece una relación con la proporcionalidad simple directa en el sentido que se cuenta con dos magnitudes y sus respectivas series de cantidades de magnitud que se correlacionan linealmente mediante una relación funcional de la forma $f: M_1 \to M_2$, $a_1 \mapsto f(a_1) = k \times a_1 = b_1$, donde k es la llamada constante de proporcionalidad y f es una función lineal que representa tal proporcionalidad. En síntesis, la razón como correlator expresa una propiedad invariante a dos series de cantidades de magnitud, que pueden poner en correspondencia uno a uno, y donde la razón es el operador lineal que permite definir la función que correlaciona ambos conjuntos, esto es, a través de la razón se puede establecer una correlación entre dos cantidades de magnitud. Dadas dos magnitudes M_1 y M_2 y dos series de cantidades de magnitud M_1; $A = \{a_i\ \epsilon\ M_1, i = 1,2, \dots, n\}$; $B = \{b_i\ \epsilon\ M_2, i = 1,2, \dots, n\}$ con A $\subseteq M_1$ y $B \subseteq M_2$, que cumplen con la condición que para todo $a_i\ \epsilon$ A existe un único $b_i\ \epsilon\ B$ tal que $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n} = p$ entonces existe una función F tal que:

$$\boldsymbol{F}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{a_1} \mapsto \boldsymbol{f(a_1)} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{b_1}$$

de donde se tiene que para todo $a_i\ \epsilon$ A y para todo $b_i\ \epsilon\ B$, $p = \frac{b_i}{a_i}$

4.2.2 La razón como operador/transformador

Además de la función de la razón en la doble situación relacional anterior, se distingue otro tipo de función que se presenta cuando dadas una cantidad y la razón de esta cantidad con otra cantidad desconocida, entonces la razón se aplica como operador sobre la cantidad conocida para calcular la cantidad desconocida.

Razón como operador: Sean M_1 y M_2 dos magnitudes y a_1 y b_1 dos cantidades de magnitud que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente luego existe una operación unaria, O, de la forma:

$$\boldsymbol{O}: \boldsymbol{M_1} \rightarrow \boldsymbol{M_2}$$
$$\boldsymbol{a_1} \rightarrow \boldsymbol{O}(\boldsymbol{a_1}) = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{b_1}$$

Si M_1 y M_2 son magnitudes homogéneas entonces p es una cantidad numérica que expresa un operador escalar (factor de ampliación o reducción) que, aplicado sobre la cantidad de magnitud a_1 produce la cantidad de magnitud b_1.

Razón como transformador: Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces la razón p es una cantidad con unidades que actúa como operador (transformador) que permite transformar la cantidad de magnitud a_1 en la cantidad de magnitud b_1. La razón como transformador es de especial interés en el caso de la comparación entre familias de cantidades que se correlacionan linealmente, en donde la razón es un transformador lineal que aplicado sobre cualquier cantidad de una de las familias produce la cantidad correspondiente en la otra familia.

4.3 El objeto matemático proporcionalidad

La proporcionalidad puede ser entendida como una forma de poner en correspondencia biunívoca dos familias de cantidades a partir de identificar una propiedad invariante a todas las parejas de cantidades correspondientes: conservar la misma relación por cociente. En el estudio de la proporcionalidad se hace explicito el uso de la proporción, la cual es ante todo analogía, identidad en la medida relativa entre dos o más pares de cantidades. Esta analogía también implica movimiento, que está en la base de los procedimientos (llamados por analogía) dadas las funciones de relator u operador de la razón. Al resolver situaciones de proporcionalidad es posible que se realicen razonamientos por analogía (análisis escalar), razonamientos analíticos (análisis funcional) o el uso de la cuarta proporcional (Sánchez, 2013). Estos tipos de razonamiento sirven como herramienta de análisis en la tarea de interpretar las respuestas de los estudiantes en ciertas situaciones de proporcionalidad, ya que cada uno encierra una estrategia específica de pensamiento matemático (Reyes, 2013, p. 29).

4.3.1 Razonamientos por analogía (análisis escalar)

Los razonamientos por analogía consisten en determinar cómo se relacionan dos o más cantidades de magnitud de una misma magnitud para luego trasladar de forma análoga dicha relación a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades. Los procedimientos usados al aplicar razonamientos por analogía son diversos en cuanto a su forma de expresión como de representación; en algunos casos pueden referir a analogías basadas en la conservación de la relación aditiva (suma), como se ejemplifica en las Figuras 4.2 y 4.3.

M_1	M_2
a_1	b_1
$a_1 + 1$	$b_1 + k$
$a_1 + 1 + 1$	$b_1 + k + k$
…	…

	Cantidad de esferos	Precio	
	1	\$ 800	
1 esfero, más 1 esfero ←	2	\$ 1600	→ \$ 800 más \$ 800
1 esfero, más 1 esfero, más 1 esfero ←	3	\$ 2400	→ \$ 800, más \$ 800, más \$ 800
	…	…	

Figura 4.2. Conservación de la suma: estrategia simple (Elaboración propia).

M_1	M_2
a_1	$f(a_1)$
a_2	$f(a_2)$
$a_1 + a_2$	$f(a_1) + f(a_2)$
…	…

	Ccantidad de esferos	Precio	
	4	\$ 3.200	
Se obtiene de sumar 3 veces 4 ←	12	\$ 9.600	→ Se obtiene de sumar 3 veces \$ 3.200
Se obtiene de sumar 4 y 12 ←	16	\$ 12.600	→ Se obtiene de sumar \$ 3.200 y \$ 9.600
	…	…	

Figura 4.3. Conservación de la suma: estrategia compuesta (Elaboración propia).

Y en otros casos los razonamientos por analogía pueden referir a la conservación de la medida relativa (razón), como se ejemplifica en la Figura 4.4.

M_1	M_2
a_1	$f(a_1)$
a_2	$f(a_2)$
λa_1	$\lambda f(a_1)$
…	…

	Cantidad de esferos	Precio	
	4	$\$ 3.200$	
Se obtiene de multiplicar 3 por 4	12	$\$ 9.600$	*Se obtiene de multiplicar 3 por $ 3.200*
Se obtiene de multiplicar 5 por 4	20	$\$ 16.000$	*Se obtiene de multiplicar 5 por $ 3.200*
	…	…	

Figura 4.4. Conservación de la medida relativa (Elaboración propia).

Los razonamientos por analogía están fundamentados en las dos primeras propiedades de la función lineal, lo cual permite la realización de procedimientos de gran utilidad en el tratamiento de las situaciones, ya que centran su estudio en los procesos de variación. Los razonamientos por analogía implican reconocer que dadas M_1 y M_2 dos magnitudes, a_1 y a_2 dos cantidades de magnitud de M_1, y b_1 una cantidad de magnitud de M_2; si $b_1 = a_1 + a_2$ y si $b_1 = \lambda a_1$ entonces $f(b_1) = f(a_1) + f(a_2)$ y $f(b_1) = \lambda f(a_1)$ respectivamente. En este caso λ es un número racional sin unidades, denominado factor escalar, el cual resulta del cociente entre cualesquiera dos cantidades de magnitud de una misma magnitud y puede ser interpretado como una razón.

4.3.2 Razonamientos analíticos (análisis funcional)

Los razonamientos analíticos son estrategias que consisten en comparar parejas de cantidades heterogéneas a través de la razón entre ellas, estos tipos de razonamientos, obligan a un cambio de foco en la manera como se comprenden las relaciones entre las cantidades involucradas en las situaciones problema y, a su vez, exigen de otras formas de acción ahora ligadas a la comparación de cantidades heterogéneas y al uso de instrumentos que permiten la comparación no solo de parejas de cantidades, sino de familias de parejas de cantidades, uno de los instrumentos que permiten la comparación son las tablas de valores en las que se establecen relaciones entre las cantidades de una de las columnas con respecto a las cantidades en la otra columna, como se ejemplifica en la Figura 4.5.

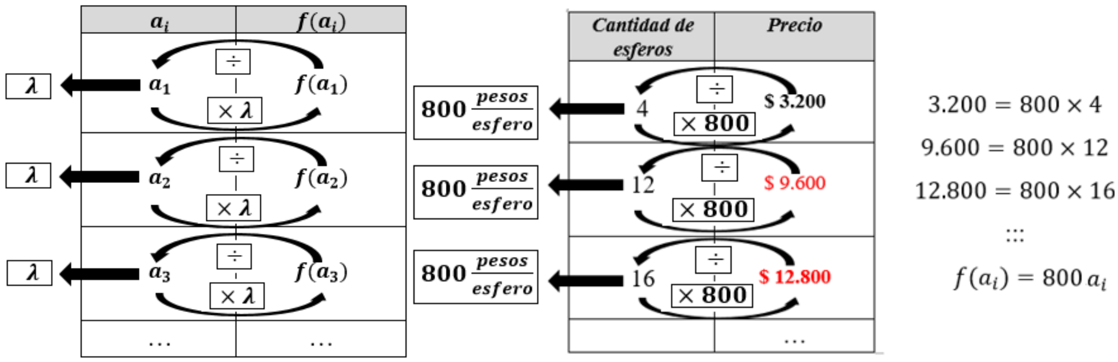


Figura 4.5. Razonamientos analíticos (Elaboración propia).

En los razonamientos analíticos se debe reconocer que para cualquier par de valores a_i, $f(a_i)$ se tiene que $f(a_i) = \lambda a_i$, donde λ es un número racional con unidades, llamado constante de proporcionalidad. En este caso se pretende establecer una relación funcional entre las cantidades de magnitud de una magnitud y su correspondiente valor en la otra magnitud.

4.3.3 La cuarta proporcional (regla de tres)

Generalmente se establece que la razón entre dos cantidades de magnitud es igual a la razón entre otras dos cantidades de magnitud, o más específicamente, se plantea una relación entre relaciones, ésta es una relación de equivalencia y ya no corresponde a una razón sino a una proporción. En la Figura 4.6 se ejemplifica el uso de la regla de tres:

M_1	M_2
a_1	b_1
a_2	b_2

Cantidad de esferos	*Precio*
4	$ 3.200
12	x

$$\frac{4}{3200} = \frac{12}{x}$$

Figura 4.6. Razonamiento a través de la regla de tres (Elaboración propia).

Formalmente, dadas M_1 y M_2 dos magnitudes relacionadas en un sistema lineal con a_1 y a_2, dos cantidades de magnitud de M_1 y b_1 y b_2, las cantidades de magnitud correspondientes en la magnitud M_2 se cumple que para estas cuatro cantidades de magnitud se verifica la siguiente relación: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

Capítulo 5. Primer resultado

Estudio histórico – epistemológico de la proporcionalidad

No les explico todo, para no privarlos del
placer de aprenderlo por sí mismos.
René Descartes (1596 – 1650)

En este capítulo se presenta la génesis de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad - RPP, así como el desarrollo y constitución que han tenido estos objetos en distintas épocas y culturas. El estudio histórico – epistemológico tiene por objetivo la caracterización de problemas fenómenos que fueron abordados en distintos periodos históricos y que dan origen a la emergencia y evolución de los significados parciales de los objetos matemáticos RPP. La reconstrucción del significado global de los objetos RPP, a través del estudio histórico – epistemológico, favorece el diseño de las situaciones de aprendizaje propuestas a los estudiantes y además permite fundamentar teóricamente el análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

5.1 Estructura del estudio histórico – epistemológico

El estudio histórico – epistemológico de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad está fundamentado en seis grandes períodos: 1) Ideas de razón y proporción en la antigua babilonia (c. 3000 a. C – c. 1600 a. C); 2) Ideas de razón y proporción en la Grecia clásica (c. 600 a.C. – c. 300 a. C); 3) Ideas de razón y proporción en la Grecia helenística (c. 300 a.C. – c. 600 d. C); 4) Ideas de razón y proporción en la Cultura China (c. 300 a.C.- c. 300 d. C); 5) Ideas de razón y proporción en los hindúes, árabes y en los trabajos de Leonardo de Pisa (c. 300 a. C – c. 1300) y 6) La función lineal como noción unificadora de la proporcionalidad en Europa (c. 1600 – c. 1800).

En cada período se identifican problemas – fenómenos que dieron paso al surgimiento de los objetos RPP y se analizan a través de configuraciones epistémicas que caracterizan de forma sistemática los siguientes objetos primarios: situaciones – problemas, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos, estos objetos son considerados emergentes de las prácticas matemáticas que dieron solución a los problemas identificados. El estudio de cada periodo de la historia permitió identificar seis situaciones problema cuyas soluciones dieron paso a la emergencia de seis significados parciales de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad, estos significados fueron analizados a través de las siguientes configuraciones epistémicas: 1) Razón como relator/transformador y proporción a través de comparación de áreas (CE1); 2) Razón como relator/operador y proporción a través de razonamientos por analogía (CE2); 3) Razón y proporción a través de la antanairesis (CE3); 4) Razón como correlator/ transformador y proporción a través de razonamientos analíticos (CE4); 5) Razón y proporción a través de la regla de tres (CE5) y 6) proporcionalidad – sistemas de cambio (CE6).

A continuación, se presenta el estudio histórico – epistemológico de los objetos RPP con base en los seis periodos descritos.

5.2 Período 1. Razón y proporción en Babilonia (c. 3.000 a. C – c. 1600 a. C)

Los objetos del conocimiento matemático: razón, proporción y proporcionalidad son constructos culturales y sociales que emergen del sistema de prácticas matemáticas de los pueblos y diferentes culturas al resolver una gran diversidad de problemas cotidianos y de la ciencia. Los objetos razón y proporción tuvieron posiblemente su origen en el conjunto de necesidades humanas en cada una de las culturas: babilónica, egipcia, griega china, árabe, India etc., aproximadamente entre los años 3.000 a.C. al 600 d.C.), al resolver problemas prácticos relacionados con la agrimensura, las construcciones, las transacciones comerciales, la mecánica, la astronomía, y la distribución de diferentes tipos de bienes y servicios como: impuestos, labores y alimentos, etc. Según Obando (2015) los sistemas de medidas (peso, capacidad, longitud, etc.) y la necesidad de trabajar con ellos en distintas actividades humanas, dieron origen a algunas ideas de razón y proporción tanto en las culturas occidentales como orientales.

Según Friberg (2007) en la antigua Babilonia (c. 3.000 a. C – c. 1600 a. C) existían diferentes sistemas de medidas (para medir pesos, longitudes, capacidad, áreas, volúmenes), todas con la característica común que se adaptaban al sistema de numeración sexagesimal, de forma que las diferentes unidades del sistema fueran un múltiplo sexagesimal de una unidad básica, lo cual les permitía hacer cálculos con dichas medidas con el apoyo del sistema de numeración: la medida de una cantidad en el sistema tradicional se convertía al sistema sexagesimal, se hacían los respectivos cálculos en el sistema de numeración, y luego se hacia la respectiva equivalencia al sistema de medidas: como ayuda para la realización de estos cálculos, los Babilonios disponían de tablas que expresaban la equivalencia entre las unidades de medida y su respectiva notación sexagesimal y esto para todos los sistemas de medida (Obando, 2015).

La Figura 5.1 muestra el caso de un sistema de medidas de capacidad con las que se efectuaba la medida de la cantidad de aceite: la unidad principal de medida era 1 sila, (aproximadamente un litro), y por tanto, las restantes unidades correspondían a $1\,gin = \frac{1}{60}\,sila$; $1 bán = 10\,silas$; $1\,bang = 60\,silas$; $1\,gur = 300\,silas$.

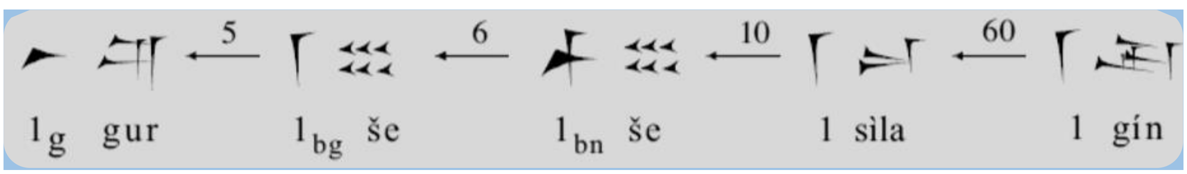


Figura 5.1. Sistemas de medidas de capacidad en babilonia al final del milenio 4 a. C (Friberg, 2007, p. 102)

Para escribir las cantidades entre $1\ y\ 19\ gin$, se usaban los números usuales, pero para $20, 30, 40\ y\ 50\ gin$, se usaban fracciones de $sila$ (1/3, 1/2, 2/3, y 5/6, de $sila$ respectivamente). En la tabla 5.1, se muestra el caso de un sistema de medidas de peso con características similares al sistema de medidas de capacidad, este consta de 4 unidades: $se, gin, ma.na\ y\ g$ù, y sus equivalencias son: $1\,gin = 180\,se$, $1\,ma.na = 60\,gin$ y $1\,g$ù $= 60\,ma.na$. En este caso, $1\,ma.na$ es la unidad, y al igual que en otros sistemas de medida, existían tablas de equivalencias entre las diferentes unidades de medida y la notación sexagesimal.

Tabla 5.1

Sistema de medidas de masa en babilonia al final del milenio 4 a. C

Unidades de peso		
Se		Grano de cebada o de maíz (aproximadamente 45mg)
gin o ciclo		Aproximadamente 8 gr.
ma.na o mina		Aproximadamente 500 gr.
Gù o talento		Aproximadamente 30 kg.

Fuente (Adaptado de Friberg, 2007, pp. 111-114).

Como da a conocer Obando (2015) en ambos sistemas de medidas, hay dos hechos importantes de resaltar: el primero el uso de unas pocas fracciones para expresar las medidas en las diferentes unidades, y el diseño del sistema de unidades en función del sistema de numeración sexagesimal, lo que les permitía expresar todas las medidas en función de una unidad, facilitando que las operaciones con las cantidades se pudieran realizar con las reglas propias del sistema de numeración: esto quizás sea la razón por la cual los babilonios no desarrollaron reglas para operar con las fracciones, pues su sistema de numeración les permitía expresar fracciones de la unidad, y los sistemas de medida para las diferentes magnitudes estaban diseñados para que las medidas resultantes se pudieran expresar fácilmente en su sistema de notación numérico. Los babilonios al contar con tablas de equivalencia de las diferentes unidades de medida al sistema de numeración sexagesimal, evidenciaron un conocimiento de la fracción de la unidad en una medida como expresión cuantitativa (continua y discreta) con la cual se podía operar a través de su sistema de numeración.

5.2.1 Problema 1. Compraventa de aceite en Babilonia (c. 1.600 a. C)

Se presenta un problema de compraventa de aceite relacionado con unidades de capacidad (*gur, pi, bán, silà*), con las que se medía la cantidad de aceite, y unidades de peso (*shekel, mina*), con las que se medía la cantidad de gramos de plata para pagar el aceite. El problema y la solución fue tomado de Puig (2009) y se referencia en la tablilla Babilónica TMS

XIII (Textos Matemáticos de Susa), lo que indica que procede de esa zona del actual Irán, como se da a conocer en la Figura 5.2.

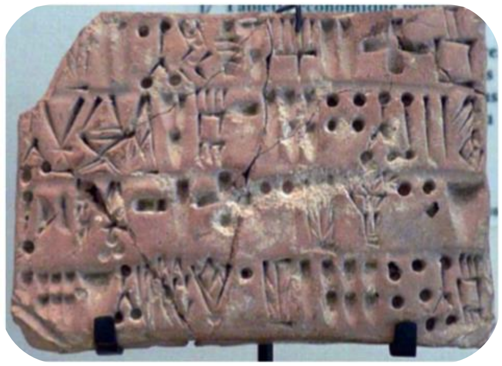


Figura 5.2. Texto matemático de Susa, tablilla protoelamita (Puig, 2009, p. 94)

La traducción del problema al castellano se presenta en la tabla 5.2.

Tabla 5.2

Problema de prácticas comerciales en la antigua Babilonia

Traducción al castellano	Traducción dejando los números expresados en el sistema sexagesimal	Traducción dejando los números expresados en el sistema decimal
2 gur 2 pi 5 bán de aceite he comprado. De la compra de 1 shekel de plata, 4 silà, de cada (shekel), de aceite he separado. 2/3 mina de plata como beneficio he visto. ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido?	12`50 litros de aceite he comprado. De la compra de 1 gramo de plata, 4 litros, de cada (gramo), de aceite he separado. 40 gramos de plata como beneficio he visto. ¿Con qué equivalencia he comprado y con qué equivalencia he vendido?	Un comerciante compra 770 litros de aceite. Los vende dando 4 litros menos de los que ha recibido en la compra, por cada gramo de plata. Obtiene un beneficio de 40 gramos de plata. Averiguar a cuántos litros por gramo de plata compró el aceite y a cuántos litros por gramo de plata lo vendió.

Fuente (Puig, 2009, p. 93).

El problema de prácticas comerciales en la antigua Babilonia, hace referencia a una situación de compraventa de 770 litros de aceite por parte de un comerciante, quien obtiene un beneficio de 40 gramos de plata al dar en la venta 4 litros de aceite menos de los recibidos en la compra. En el problema se desconocen a simple vista dos datos: el primero son los litros de aceite por gramo de plata recibidos en la compra y el segundo los litros de aceite por gramo de plata dados en la venta, además se desconoce un tercer dato y refiere al beneficio de los 40 gramos de plata expresados en litros de aceite. Desde la perspectiva del autor de la tesis, una forma de comprender y resolver el problema es usando el método de ensayo y error: podemos suponer el precio unitario de la compra y obtener el precio unitario de la venta; si suponemos que el precio unitario de la compra es de $\frac{11 \text{ litros de aceite}}{1 \text{ gramo de plata}}$, entonces por 770 lt el comerciante pagaría $\frac{770 \text{ lt}}{11 \text{ lt/gr}} = 70 \text{ gramos de plata}$, ahora , según los datos del problema el precio unitario de la venta seria $\frac{7 \text{ liros de aceite}}{1 \text{ gramo de plata}}$, de esta forma por 770 lt recibiría $\frac{770 \text{ lt}}{11 \text{ lt/gr}} = 110 \text{ gramos de plata}$, de lo anterior el beneficio o ganancia seria $110 \text{ gr} - 70 \text{ gr} = 40 \text{ gramos de plata}$. Los procesos realizados con el método de ensayo y error son coherentes con los datos del problema y se puede concluir que el comerciante compró a $\frac{11 \text{ litros de aceite}}{1 \text{ gramo de plata}}$ y los vendió a $\frac{7 \text{ litros de aceite}}{1 \text{ gramo de plata}}$, además el benéfico de $40 \text{ gamos de plata}$ expresado en litros de aceite seria $\frac{4 \text{ litros}}{1 \text{ gramo de plata}} \times 70 \text{ gramos de plata} = 280 \text{ litros de aceite}$.

5.2.2 Prácticas matemáticas asociadas a la solución del problema 1

Solución al problema de Compraventa de aceite en Babilonia (c. 1.600 a. C)

Se presenta a continuación la traducción realizada por Puig (2009) de la solución del problema hallada en la tablilla Babilónica TMS XIII.

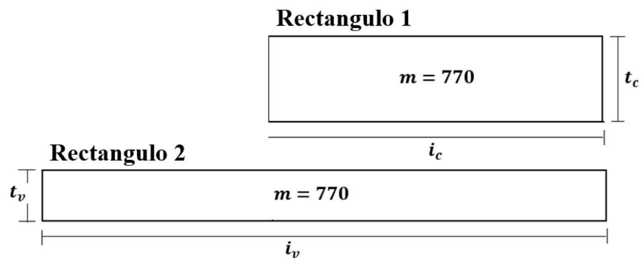
Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 40 gramos.
Inverso de 40, 1´30´´, ves.
1´30´´ por 4 multiplica, 6´, ves.
6´ por 12`50, el aceite, multiplica, 1`17 ves.
½ de 4 rompe, 2, ves.
2 cuadra, 4, ves.
4 a 1`17 añade, 1`21, ves.
¿Cuál es el lado igual? 9 es el lado igual.
9 el equivalente coloca.
½ de 4, que has separado, rompe, 2, ves. 2 al primer 9 añade, 11, ves.
Del segundo quítalo, 7, ves.
11 litros cada gramo has comprado, 7 litros cada gramo has vendido.
¿Plata equivalente a qué? ¿Qué a 11 litros [por gramo] puedo poner que 12`50 de aceite me dé?
1´10 coloco 1´10 gramos de plata.
¿Por 7 litros cada gramo de plata que vendes de aceite, los 40 gramos de plata a qué equivalen?
40 por 7 multiplica. 4`40, ves, 4`40 de aceite. (p.97)

Según Yuste (2013), en la solución de los problemas Babilónicos no aparecen deducciones, razonamientos ni demostraciones, sino el enunciado de un ejercicio y una serie de cálculos que, tomados conjuntamente, permitían obtener la solución final. En el procedimiento de solución se repite continuamente la palabra “ves”, se puede pensar que la tablilla recoge los pasos de la solución del problema, y que las acciones correspondientes se estaban haciendo dibujando en el suelo. La palabra “ves” posiblemente es usada para indicar que se vea lo que está resultando de las acciones (Puig,2009).

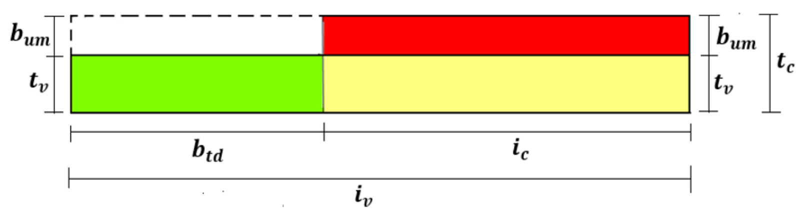
Para comprender la solución del problema de compraventa de aceite Puig (2009) resalta que los cálculos deben ser interpretados desde un contexto geométrico que consiste en la composición de figuras planas, y en su inmediata descomposición en superficies equivalentes, este método fue conocido por los griegos con el nombre de Gnomon (relación entre rectángulos superpuestos). Así, aunque en los textos, aparentemente se describe un algoritmo aritmético, en realidad los números y las operaciones indicadas aluden a la construcción de rectángulos y cuadrados donde el cálculo de las raíces cuadradas era el modo de averiguar la medida de sus lados. Según Yuste (2013), en ocasiones las soluciones de los ejercicios propuestos en la antigua Babilonia concluían con una expresión que coincidía exactamente con el algoritmo que resuelve las ecuaciones de segundo grado y que hoy en día se conoce con el nombre del método de “completar el cuadrado”. Se presenta a continuación, una hipótesis del sistema de prácticas que pudo haber usado el matemático Babilónico para justificar los cálculos hallados en la tablilla babilónica.

Solución geométrica del problema de compraventa de aceite

Para justificar los cálculos hallados en la tablilla el matemático Babilónico dibuja dos rectángulos de igual área, el primero relaciona los gramos de plata dados en la compra $(\boldsymbol{i_c})$, los litros de aceite por gramo de plata recibidos en la compra $(\boldsymbol{t_c})$, y los litros de aceite comprados $(\boldsymbol{m})$. El segundo relaciona los gramos de plata recibidos en la venta $(\boldsymbol{i_v})$, los litros de aceite por gramo de plata dados en la venta $(\boldsymbol{t_v})$, y los litros de aceite vendidos $(\boldsymbol{m})$, como se muestra en la imagen:



Continúan superponiendo los rectángulos y además se quita la superficie de color amarillo obteniendo dos nuevos rectángulos que tienen igual área; uno es de color verde y otro de color rojo, como se muestra en la imagen:



Al tener estos rectángulos la misma área, los dos rectángulos superpuestos forman la figura que en la matemática griega se conocía con el nombre de gnomon, y el gnomon es completado rellenando la esquina para formar un rectángulo más grande, a partir de los lados y áreas de los nuevos rectángulos surgen otros datos que permiten avanzar en la solución del problema, estos son: beneficio unitario, expresado en litros por gramo de plata b_{um} y beneficio total, expresado en gramos de plata b_{td}.

A partir de la construcción del gnomon se obtienen rectángulos semejantes que permiten establecer las siguientes relaciones $\frac{b_{um}}{b_{td}} = \frac{t_v}{i_c} = \frac{t_c}{i_v}$. Estas relaciones dan sentido a los cálculos que realiza el matemático babilónico para dar solución al problema, en la primera parte de la solución se encuentran los siguientes cálculos:

Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 40 gramos.
Inverso de 40, 1´30´´, ves.

En estos cálculos se evidencia una división expresada por $\frac{b_{um}}{b_{td}} = \frac{4}{40}$, pero la división en la matemática babilónica era una operación difícil, por lo que se realizaba buscando el inverso del divisor en una tabla de inversos, y multiplicando por él, para dividir 4 entre 40, primero se calculaba el inverso de 40 y luego se multiplicaba por 4. A continuación se presentan estas operaciones pasando primero las cantidades del sistema sexagesimal al decimal para una mejor comprensión:

$$1'30'' = \frac{1}{60} + \frac{30}{3600} = \frac{1}{60} + \frac{1}{120} = \frac{3}{120} = \frac{1}{40} \text{ (inverso de 40)}$$

Luego el matemático babilónico, multiplica el valor que ha obtenido por la cantidad de aceite comprada y vendida, designada por m. Esto se interpreta en la solución como:

1´30´´ por 4 multiplica, 6´, ves.

$$1'30'' \times 4 = \frac{1}{40} \times 4 = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

$$6' = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

A continuación, el matemático babilónico multiplica el valor que ha obtenido por la cantidad de aceite comprada y vendida, m.

6´ por 12`50, el aceite, multiplica, 1`17, ves.

Para justificar estos cálculos usa la relación $\frac{b_{td}}{b_{um}} = \frac{m}{t_v t_c}$ que se obtiene del análisis de los rectángulos, y despejando $t_v t_c$, se obtiene:

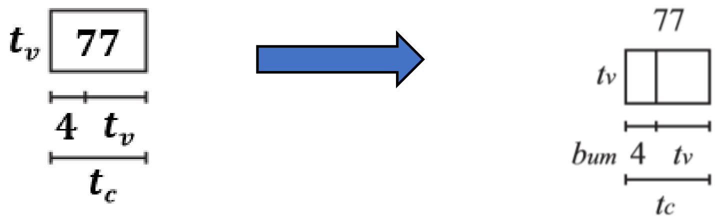
$$t_v t_c = \frac{b_{um}}{b_{td}} \times m = 6' \times 12'50 = 1'17$$

Ahora expresando las unidades en el sistema decimal, se obtiene:

$$t_v t_c = \frac{b_{um}}{b_{td}} \times m = \frac{4}{40} \times 770 = 77,$$

ya que , $12'50 = 12 \times 60 + 50 = 770$ y $1'17 = 1 \times 60 + 17 = 77$.

Luego se dibuja un rectángulo de lados t_vy t_c , semejante al rectángulo 2 , de área igual a 77 , esto se puede hacer ya que: $\frac{b_{um}}{b_{td}} = \frac{t_c}{i_v} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$, es decir se busca un rectángulo semejante al rectángulo 2 cuya área sea $\frac{1}{10}$ de 770, como se muestra en la imagen:



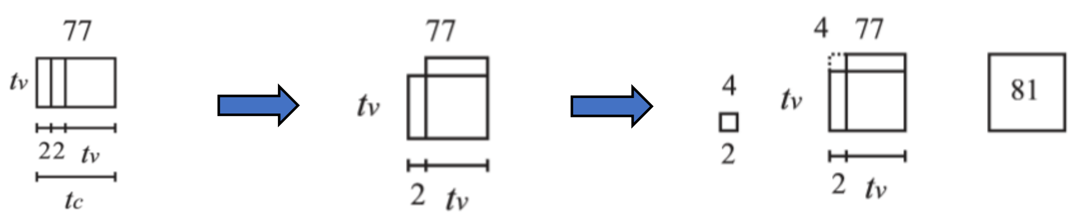
½ de 4 rompe, 2, ves.

Ahora se debe encontrar el largo y el ancho del nuevo rectángulo, del que se conoce su área y la diferencia entre el largo y el ancho, para esto el matemático babilónico usa el "método akadio" el cual es el precursor del método de completar cuadrados, como se muestra en la secuencia de dibujos:

Se divide el rectángulo pequeño en dos rectángulos iguales:

Se desplaza uno de los rectángulos pequeños para formar un gnomon:

Se calcula lo que hace falta para completar el cuadrado:



2 cuadra, 4, ves.

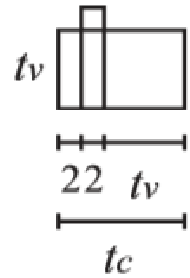
4 a 1`17 añade, 1`21, ves.

En el sistema decimal se tiene que: $1'21 = 60 + 21 = 81$, luego $4 + 1'17$ se convierte en $4 + 77 = 81$. Al realizar las anteriores operaciones sobre las figuras se obtiene un cuadrado de lado $2 + t_v$, cuya área es 81, lo que equivale a resolver la ecuación $(x + 2)^2 = 81$, ahora el matemático Babilónico se pregunta:

¿Cuál es el lado igual? 9 es el lado igual.

½ de 4, que has separado, rompe, 2, ves.

Y para justificar los cálculos reacomoda los rectángulos para obtener el largo y el ancho del rectángulo inicial, como se muestra en la imagen:



2 al primero añade, 11, ves.$(t_c = 11)$

Del segundo quítalo, 7, ves. $(t_v = 7)$

Luego se deduce que la base del rectángulo es 11 y la altura 7 y concluye que:

11 litros cada gramo has comprado, 7 litros cada gramo has vendido.

Luego de calcular t_c y t_v el matemático babilónico se pregunta por los gramos de plata dados en la compra:

¿Plata equivalente a qué? ¿Qué a 11 litros [por gramo] puedo poner que 12`50 de aceite me dé?

Mediante la relación $i_c \times t_c = m = 770 = 12'50$, se calculan los gramos de plata dados en la compra:

$$i_c = \frac{770}{t_c} = \frac{770}{11} = 70$$

1´10 coloco 1´10 gramos de plata.

Al pasar del sistema sexagesimal al decimal se observa la equivalencia:

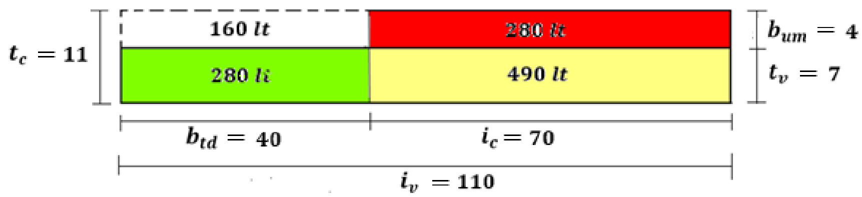
1`10 = 1 × 60 + 10 = 70

Finalmente, en la solución, el matemático Babilónico se interesa por el beneficio total de $40\ gr$ de plata expresados en litros de aceite:

¿Por 7 litros cada gramo de plata que vendes de aceite, los 40 gramos de plata a qué equivalen?

40 por 7 multiplica. 4`40, ves, 4`40 de aceite.

Los cálculos efectuados se justifican desde el gnomon, específicamente en el área del rectángulo verde: $40 \times 7 = b_{td} \times t_v$, además como el resultado queda expresado en el sistema sexagesimal, su equivalente en decimal será 4`40 = 4 × 60 + 40 = 240 + 40 = 280, como se muestra en la imagen:



Como síntesis de los datos, relaciones y cálculos realizados desde la interpretación del rectángulo grande, se puede decir que el matemático Babilónico daba gran importancia al beneficio expresado en litros de aceite (rectángulos verde o rojo), a la cantidad de mercancía con que recuperaba la inversión (rectángulo amarillo) y al beneficio total expresado en mercancía por $40\ gr$ de plata (rectángulo blanco).

5.2.3 Configuración epistémica asociada a la solución del Problema 1

Configuración epistémica 1 (CE1). Razón como relator – transformador y proporción a través de comparación de áreas

A continuación, se caracterizan los significados asociados a los objetos razón y proporción presentes en la solución geométrica del problema de compraventa de aceite de la antigua babilonia. El análisis de las practicas matemáticas y los significados parciales de los objetos razón y proporción se realiza a través de una configuración epistémica con la cual se caracterizan elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos denominados en el EOS como objetos primarios.

Elementos lingüísticos. Algunos elementos del lenguaje como *palabras o términos* emergentes de los procedimientos realizados para resolver el problema de compraventa de aceite son: precio unitario, beneficio unitario, beneficio total, tasa de venta, tasa de compra, importe de la venta, importe de la compra, división, inverso, semejante, relación, área, lados, equivalente, romper, cuadrar, añadir, gnomon. Estas palabras o términos dan significado a los procedimientos realizados por el matemático babilónico para comunicar y resolver el problema, particularmente permiten establecer relaciones entre cantidad de aceite comprada y vendida; gramos de plata dados en la compra y litros de aceite recibidos en la compra; gramos de plata recibidos en la venta y litros de aceite dados en la venta por gramo de plata.

Se considera que el *término* “precio unitario en la compraventa” expresado en litros de aceite por gramo de plata (lt/gr) es el que permite dar sentido a los cálculos realizados en la tablilla porque según el contexto del problema está relacionado con el significado de la riqueza en la antigua Babilonia. Según Puig (2009), el sentido de la riqueza no solo estaba en el beneficio expresado en los gramos de plata sino también en su equivalente en litros de aceite los cuales en la repetición de las transacciones comerciales permitían acumular la mercancía y no solamente la plata. Los Babilonios en las transacciones comerciales daban gran importancia tanto al beneficio expresado en litros de aceite como al beneficio expresado en gramos de plata, es de resaltar que en babilonia no había dinero, ya que eran las mercancías como el grano, la plata y otros metales los que se usaban como medio de cambio: estas mercancías tenían un valor de uso y se medían con las unidades corrientes de peso.

De manera particular la circulación de aceite en la antigua Babilonia se concebía en la idea de dar en la venta menos litros por la misma cantidad de gramos de plata. Puig (2009) llama al precio unitario en la compraventa “precio inverso” dado que en Babilonia este precio unitario no era expresado en gramos de plata por litros de aceite (gr/lt) sino en litros de aceite por gramos de plata (lt/gr), para mayor comprensión de este precio inverso: si las transacciones comerciales en el contexto Colombiano se realizaran con la misma idea de riqueza de los Babilonios no se hablaría de que el aceite está a 2 pesos el litro sino de que con un peso se puede comprar medio litro de aceite. Este “precio inverso”, que Hoyrup (2002) prefiere llamar rate o tasa, se expresaría en $(lt/\$)$ y no en $(\$/lt)$ como se hace hoy día.

Las *notaciones o símbolos* usados en la solución del problema refieren a unidades de capacidad $(gur, pi, bán, silà)$, con las que se medía la cantidad de aceite, y unidades de peso $(shekel, mina)$, con las que se medía la cantidad de gramos de plata para pagar el aceite. Høyrup representa los números en el sistema sexagesimal indicando mediante el signo ` la posición 60, y por el signo `` la posición 60^2, de modo que, por ejemplo 70’5 lo escribe 1` 10 30´.

En la hipótesis de solución geométrica se usan las *abreviaciones:* $m,\ i_v$, $t_v\ i_c,\ t_{c,}$ b_{um} y b_{td}, estas *notaciones o símbolos*, fundamentan el significado de las relaciones entre los datos conocidos y desconocidos del problema y que hoy día podríamos llamar razones y proporciones. Las relaciones entre los datos del problema emergen al realizar comparaciones entre lados y áreas de rectángulos que al ser sobrepuestos permiten establecer comparaciones entre rectángulos semejantes. Si se usa el lenguaje algebraico actual las relaciones entre los datos del problemas estarían representadas por los siguientes símbolos: $\frac{b_{um}}{b_{td}} = \frac{t_v}{i_c} = \frac{t_c}{i_v}$

En la solución geométrica del problema se evidencian *representaciones gráficas* (lados, áreas, rectángulos y cuadrados) que son usados para establecer relaciones entre los datos conocidos y desconocidos del problema ya que en la antigua Babilonia no se disponía del lenguaje del algebra simbólica , particularmente se evidencia la construcción de dos rectángulos de igual área que representan los litros de aceite comprados y vendidos, los cuales se superponen, cortan, comparan, estiran y encogen para comparar lados y áreas de rectángulos semejantes que resultan de estas operaciones , los que permiten dar solución al problema. Se evidencia además la representación gráfica a través del “método akadio” conocido hoy día como “método de completar el cuadrado” el cual es usado por el matemático Babilónico para hallar la cantidad de litros de aceite comprados por gramo de plata y la cantidad de litros de aceite vendidos por gramo de plata. Además, se evidencia que la construcción del gnomon permite dar un sentido geométrico a los procedimientos hallados en la tablilla Babilónica.

Los ***conceptos,*** corresponden a entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal, pero lo trasciende en la medida en que se concibe como una expresión del concepto integrada más a las reglas gramaticales sobre el uso del lenguaje. A continuación, se describen algunos conceptos identificados en la solución geométrica del problema de prácticas comerciales de la antigua babilonia con los significados asociados:

Beneficio unitario: ganancia en la compraventa de aceite, se expresaba en litros de aceite por gramos de plata (lt/gr). En la antigua Babilonia, el beneficio de la compraventa se concebía como: dar menos litros de aceite en la venta por la misma cantidad de plata dada en la compra.
Relaciones: comparaciones establecidas entre lados y áreas de rectángulos al ser sobrepuestos, cortados, comparados, estirados y encogidos.
Equivalente: término usado para indicar una relación de igualdad, también conocido como paraplerómata.
Paraplerómata: indicaba la igualdad de áreas de dos rectángulos en un gnomon.
Rectángulo semejante*:* transformación que se obtiene de otro rectángulo al ser estirado o encogido de acuerdo a unas relaciones entre lados y áreas específicas.
Tasa de compra: litros de aceite recibidos en la compra por gramo de plata.
Tasa de venta: litros de aceite dados en la venta por gramo de plata.
Importe de la compra*:* gramos de plata dados en la compra por litro de aceite.
Importe de la venta*:* gramos de plata recibidos en la venta por litro de aceite.
Beneficio total: ganancia total obtenida en la venta, se expresa en gramos de plata o en litros de aceite.

En cuanto a los ***procedimientos,*** estos se refieren a técnicas, a algoritmos y a operaciones. A continuación, se describen algunos procedimientos con sus significados asociados:

División: operación difícil en la matemática babilónica; se realizaba buscando el inverso del divisor en una tabla de inversos y multiplicando por él, para dividir 4 entre 40, primero se calcula el inverso de 40 y luego se multiplica por 4.
Precio unitario: indica la operación de compraventa, que actualmente concebimos como una razón entre una cantidad de dinero y una cantidad del objeto que se intercambia. En la antigua babilonia la idea era no cuánto cuesta una unidad de medida de la magnitud (o la cantidad) del objeto que se intercambia, sino cuánto se obtiene en la compraventa por una unidad monetaria (litros/gramo de plata).
Gnomon: significo al principio, en Babilonia, una varilla vertical cuya sombra marcaba la hora. En la época de Pitágoras significaba una escuadra de carpintero, y esta es la forma del gnomon anterior. También significaba lo que queda de un cuadrado al cortar otro cuadrado más pequeño

de una de sus esquinas, y más tarde, con Euclides, significo lo que queda de un paralelogramo al cortar otro más pequeño de una de sus esquinas, siempre que este fuera semejante al primero.

Método akadio: precursor del método de completar cuadrados y que el matemático babilónico realiza cortando, desplazando y pegando rectángulos para resolver ecuaciones de segundo grado.

Transformación: refiere a superponer, cortar, comparar, estirar o encoger rectángulos para establecer relaciones entre lados y áreas de nuevos rectángulos.

Colocar: refiere a comparar datos del problema. (Tú coloca 4 litros de aceite y coloca el beneficio 40 gramos).

Romper: sinónimo usado para indicar la división de un lado o área. (½ de 4 rompe, 2).

Añadir: expresión usada en el método akadio para sumar áreas. (4 a 1`17 añade, 1`21).

Proceso de Generalización: según Yuste (2013) aunque en los textos, aparentemente se describe un algoritmo aritmético, en realidad los números y las operaciones indicadas aluden a la construcción de rectángulos y cuadrados y el cálculo de las raíces cuadradas era el modo de averiguar la medida de sus lados, además la generalización se evidencia al momento de reducir el problema a un método para el que se tiene un algoritmo de solución, que hoy en día se conoce con el nombre del método de "completar el cuadrado".

Las ***propiedades,*** emergentes de la solución propuesta por el matemático babilónico, se refieren a enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba A continuación, se describen algunas propiedades con sus significados asociados:

- Al superponer adecuadamente dos rectángulos de igual área y quitar un área en común a los dos rectángulos, entonces las áreas resultantes son equivalentes.
- Los rectángulos construidos a partir del método gnomon son semejantes.
- Si se conoce el área y la diferencia entre el largo y el ancho de un rectángulo entonces, se puede hallar el largo y el ancho del rectángulo usando el método akadio.
- La construcción del gnomon en la solución de un problema de compraventa de aceite permite determinar el beneficio expresado en litros de aceite, la cantidad de mercancía con que recuperaba la inversión y el beneficio total expresado en mercancía por gramos de plata.

- Multiplicando los gramos de plata dados en la compra (i_c) por los litros de aceite por gramo de plata recibidos en la compra (t_c) se obtienen los litros de aceite comprados (m).
- Multiplicando los gramos de plata recibidos en la venta (i_v) por los litros de aceite por gramo de plata dados en la venta (t_v) se obtienen los litros de aceite vendidos .

Los ***argumentos*** evidenciados en la solución del problema, se refieren a justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas. A continuación, se describen algunos argumentos:

Argumento 1: Si superponemos los dos rectángulos de manera que en sus lados se representen las relaciones $i_v = b_{td} + i_c$ y $t_c = b_{um} + t_v$, los rectángulos coloreados de rojo y verde tienen la misma área , ya que ambos se han obtenido de los anteriores quitándoles el rectángulo de lados i_c y t_v, y por tanto $b_{td} \times t_v = b_{um} \times i_c$, o, expresado como una proporción, $\frac{b_{um}}{b_{td}} = \frac{t_v}{i_c}$. Al tener esos rectángulos la misma área, los dos rectángulos superpuestos forman el gnomon el cual se puede completar rellenando la esquina para formar un rectángulo más grande, en la que los rectángulos en torno a la diagonal son semejantes y semejantes al rectángulo grande, y los otros dos rectángulos tienen la misma área y se conocen con el nombre de paraplerómata. Al completar la figura del gnomon, se ve que t_c e i_v están también en la misma razón, de modo que $\frac{b_{um}}{b_{td}} = \frac{t_v}{i_c} = \frac{t_c}{i_v}$.

Argumento 2*:* la solución del problema se reduce a usar el método akadio, que consiste en hallar el largo $(\mathrm{t_c})$ y el ancho $(\mathrm{t_v})$ de un rectángulo del que se conoce su área y la diferencia entre el largo y el ancho, el rectángulo de lados $\mathrm{t_c}$ y $\mathrm{t_v}$ se puede construir ya que se establece un cambio de escala mediante las relaciones de proporcionalidad $\frac{b_{um}}{b_{td}} = \frac{t_v}{i_c} = \frac{t_c}{i_v}$, además el área del rectángulo se halla mediante la relación $\frac{b_{um}}{b_{td}} = \frac{t_v \times t_c}{m}$, obtenida de la construcción del gnomon.

5.3 Razón y proporción en Grecia (c. 600 a.C. – c. 600 d.C.)

Período clásico y helenístico (c. 600 a.C. – c. 600 d.C.)

Según Obando (2015), el estudio de las razones en el contexto matemático griego se localiza en la rama de las matemáticas que estudian las cantidades relativas, es decir, las cantidades en sus relaciones mutuas de unas a otras. Según Kline (1972), en Grecia los objetos matemáticos razón y proporción tuvieron un desarrollo axiomático deductivo que permitió a los griegos hacer generalizaciones y comprender fenómenos de la naturaleza como la óptica, la mecánica, la arquitectura y la astronomía. Según Kline (1972), las ideas de razón y proporción se desarrollaron en dos periodos; el primero corresponde al clásico (c. 600 a.C. - c. 300 a. C) del que sobresalen los trabajos realizados en la escuela Jónica fundada por Tales de Mileto (c. 640 a.C. – c. 546 a.C.), la escuela de Pitágoras (c. 585 a.C. – c. 500 a.C.) y los trabajos de Eudoxo (c. 408 a.C. – c. 355 a.C.) relacionados con la teoría de la proporción.

El segundo periodo corresponde al Alejandrino o Helenístico (c.300 a.C. - c. 600 d. C) del que sobresalen los trabajos realizados por Euclides (c. 325 a.C. – c. 265 a. C.), en su obra *los Elementos;* donde se sistematizan y perfeccionan las producciones realizadas por los matemáticos clásicos, además en este periodo sobresalen trabajos realizados por Apolonio (c. 262 a.C. – c. 190 a. C.), relacionados con secciones cónicas y trabajos realizados por Eratóstenes (c. 276 a.C. – c. 194 a.C.), relacionados con el cálculo de la circunferencia de la tierra.

5.3.1 Período 2. Razón - proporción en la Grecia clásica (c. 600 a.C. – c. 300 a. C)

Ideas de razón y proporción en la escuela Jónica (c. 640 a.C. – c. 546 a.C.)

La escuela Jónica fue fundada por Tales de Mileto (c. 640 a.C. – c. 546 a.C.), y pertenecieron a ella matemáticos, filósofos y astrónomos como Anaximandro (c. 610 a.C. – c. 546 a.C.), Anaxímenes (c. 585 a.C. – c. 524 a.C.) y Pitágoras (c. 585 a.C. – c. 500 a.C.), los aportes de esta escuela y en particular de Tales, están relacionados con el método deductivo usado para demostrar teoremas de la geometría de los ángulos, las rectas, y las superficies que las determinan, los métodos deductivos transformaron el estudio de la geometría: los objetos matemáticos ya no eran tratados de forma empírica sino a través de axiomas, (Guacaneme, 2015). Desde la anterior panorámica a Tales se le atribuyen los siguientes teoremas:

— El círculo se biseca por su diámetro.
— Los ángulos de la base de un triángulo con dos lados iguales son iguales.
— Los ángulos opuestos de líneas rectas que se intersectan, son iguales.
— ***Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los triángulos son congruentes.***
— El ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto. Esta afirmación es considerada como uno de los mayores logros geométricos de Tales.
— La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos.

Según Diógenes, Laertes, Plinio y Plutarco citados por Kline (1972), el teorema 4 fue el que permitió a Tales deducir la altura de la pirámide de Keops en Egipto. En relación al problema de la altura de la pirámide de Keops, Heath (1920) aclara que hacia el año 600 a.C. Tales había llegado a establecer este teorema que le permitía determinar distancias inaccesibles. El problema de la altura de la pirámide se presenta a continuación en forma de leyenda, Agüero (2010):

> En cierta ocasión, Tales estaba visitando la Gran Pirámide en Egipto. Los egipcios hablaban de ella con orgullo por el impresionante desarrollo matemático que representaba. Durante la visita de Tales, uno de los presentes preguntó cuál era la altura de la Gran Pirámide. En ese momento los egipcios no pudieron dar una respuesta ya que la pirámide era muy alta y si se soltaba una cuerda desde la punta hasta el suelo, lo que se estaría midiendo no sería la altura. Tales, ante tal interrogante y como buen amante de la solución de problemas, también quiso conocer la respuesta. (p. 3)

Según Deulofeu y Figueiras (2002. p 17), para dar solución al problema, Tales esperó el momento del día en que la sombra de un palo midiera la misma longitud que el palo mismo, y luego por congruencia de triángulos estimó que en dicho momento la sombra de la pirámide también sería igual a la altura de la misma. En la imagen 5.3 se representa la longitud de la altura del palo (A), la longitud de la sombra del palo (B), la longitud de la altura de la pirámide (C) y la longitud de la sombra de la piramide (D).

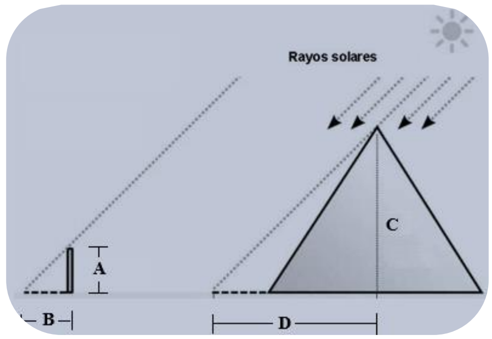


Figura 5.3. Representación geométrica de los datos del problema (Elaboración propia)

El método usado por Tales, consistió en comprar las cantidades homogéneas presentes en el problema. Para conseguir la altura de la pirámide solo se necesitaba conocer la distancia entre el punto de la sombra, que correspondía al vértice de la pirámide y el centro de la base de la pirámide el cual era de fácil acceso. Es importante observar, que para haber establecido la proporcionalidad de segmentos y la congruencia de triángulos, Tales tenía que suponer que los rayos del sol llegaban a la tierra de forma paralela, esta deducción se fundamentó posiblemente en la hipótesis, representada en la figura 5.4: si se considera el Sol muy cercano a la tierra (posición 1), los rayos no pueden llegar a la tierra de forma paralela, sin embargo, si se considera una posición del sol cada vez mal lejana, se observa como sus rayos, cerca de la superficie de la tierra, se aproximan cada vez más a rectas paralelas.

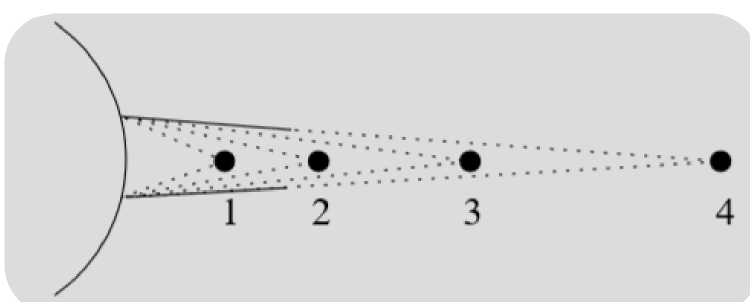


Figura 5.4. Deducción grafica sobre el paralelismo de los rayos del sol (Deulofeu y Figueiras, 2002. p 27)

A partir de la anterior hipótesis Tales concluía que la distancia a la que se encuentra la Tierra del Sol era lo suficientemente grande para deducir que los rayos llegan paralelos a la superficie de la tierra, y por tanto los triángulos rectángulos usados en los cálculos eran congruentes (Deulofeu y Figueiras, 2002).

5.3.1.1 Problema 2. Distancia de un barco a la orilla de la playa (c. 640 a.C. – c. 546 a.C.)

A Tales, también se le atribuye haber resuelto el problema de la distancia a la que se encontraba un barco a la orilla de la playa; el problema según Deulofeu y Figueiras (2002) es el siguiente:

> Determinar la distancia en línea recta que hay del punto (A) al apunto (B). En el punto (A) se encuentra un observador (Tales) en la playa , y en el punto (B) se encuentra un barco ubicado en el mar. (p. 19)

5.3.1.2 Prácticas matemáticas asociadas a la solución del problema 2

A continuación, se da a conocer la secuencia de prácticas matemáticas que uso tales para solucionar el problema.

> La hipótesis de solución propuesta por Tales consistía en ubicar en el punto (A) una estaca y luego caminar a lo largo de la orilla de la playa manteniéndose en perpendicular a la línea (AB), luego se debía elegir un punto (C) en el camino y colocar allí una segunda estaca, lo suficientemente alta para que pudiera ser observada claramente a una larga distancia, se debía continuar alejando por la misma línea hasta recorrer la misma distancia que separa los puntos (A) y (C), hasta llegar al punto (D) donde se ubicaba una tercera estaca. A continuación, se debía girar 90° y alejarse de la orilla, hasta llegar a un punto (E), que permitiera alinear los puntos (C) y (B). Este sería el final del recorrido, ya que la distancia a la que se encuentra el barco (AB) es la misma que se ha recorrido en este último trayecto (DE). La idea que uso Tales consistía en que los ángulos opuestos por el vértice son iguales, y cuando dos triángulos tienen dos ángulos iguales y un lado también igual, entonces los triángulos relacionados son

---

congruentes, en notación moderna se tendrá que: Si $\measuredangle ECD \cong \measuredangle BCA$ y $AC \cong DC$ entonces $\triangle ABC \cong \triangle DBC$. En la figura 5.5, se presenta la representación gráfica de la solución. (Deulofeu y Figueiras, 2002, p30)

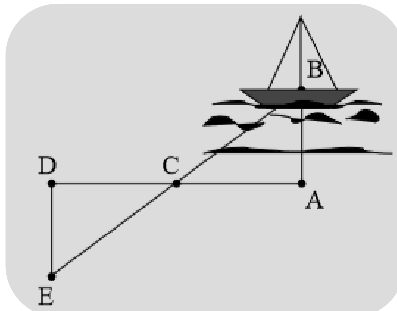


Figura 5.5. Representación gráfica del problema (Deulofeu y Figueiras, 2002)

5.3.1.3 Configuración epistémica asociada a la solución del problema 2

Configuración epistémica 2 (CE2). Razón como relator y proporción a través de razonamientos por analogía

A continuación, se caracterizan los significados asociados a los objetos razón y proporción presentes en las prácticas matemáticas para hallar la distancia a la que se encentra un barco a la orilla de la playa. El análisis de las prácticas matemáticas y los significados parciales de los objetos razón y proporción se realiza a través de una configuración epistémica con la cual se caracterizan elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos denominados en el EOS como objetos primarios.

La solución propuesta para hallar la distancia a la que se encuentra un barco de un observador en la playa, da a conocer un *procedimiento* deductivo propio de los griegos, y particularmente de la escuela Jónica fundada por Tales (c. 640 a.C. – c. 546 a.C.). Al respecto Kline (1972), da a conocer que los métodos deductivos transformaron el estudio de la geometría: los objetos matemáticos ya no eran tratados de forma empírica sino a través de axiomas. En la hipótesis de solución dada por Deulofeu y Figueiras (2002), se observa el uso del *teorema* 4 atribuido a Tales:

si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los triángulos son congruentes (Heath, 1920), del uso de este *teorema* se infiere que los matemáticos de la época *argumentaban* sus conjeturas mediante un *lenguaje* retórico y bajo *razonamientos* geométricos fundamentados en fenómenos de la naturaleza, y a través del *lenguaje retórico*, eran usados *conceptos* como: congruente, triangulo, ángulo, lado y ángulos opuestos por el vértice. Según Deulofeu y Figueiras (2002. p 17), el *método*, usado por Tales, consistió en comprar las cantidades homogéneas presentes en el problema: distancia DE en relación con la distancia AB y distancia AC en relación a la distancia DC. En este tipo de procedimiento emerge implícitamente un *razonamiento por analogía,* que consistía en trasladar la relación que se establecía entre las distancias horizontales (AC: DC) a las distancias verticales (AB: DE), dicha relación entre magnitudes homogéneas era realizada bajo el *argumento* de la congruencia de ángulos: $\measuredangle ECD \cong \measuredangle BCA$.

Con base en la Teoría de Eudoxo, se observa la imposibilidad de considerar en la solución de Tales, la proporción como una igualdad de fracciones en el sentido operativo del término, es decir, si la razón entre AC y DC es la misma que la razón entre AB y DE (en el sentido de Eudoxo), no se sigue de aquí directamente que el producto $AC \times DE$ sea igual al producto $AB \times DC$ por otra parte, como las cantidades involucradas en la solución del problema eran del mismo tipo (distancias) , entonces es posible deducir que la proporción alterna se satisface (es decir que la razón de AC y AB sea la misma que la razón de DC y DE. La proporción es, por tanto, una comparación entre dos diferentes razones dadas y un esquema operacional entre cuatro cantidades numéricas, Corry (s.f.).

El *Teorema* 4 planteado por Tales además de estar fundamentado en la congruencia de ángulos, tenía implícitamente el fundamento de la comparación de pares de magnitudes homogéneas (proporción); es de mencionar que la proporción en el contexto griego significaba similitud en el *logos,* es decir, conservar la misma relación cuantitativa, y esta aplicaba tanto para las relaciones aditivas (exceder o ser excedido) que generaban las proporciones aritméticas, y las relaciones por medida relativa que generaban las proporciones geométricas, la proporción en el contexto griego también refería a la comparación de cantidades que están en la misma razón (Obando, 2015).

La razón y proporción en la escuela pitagórica (c. 585 a. C – c. 400 a. C)

Para los pitagóricos, los números eran únicamente los números enteros y una razón entre dos números no era una fracción y, por lo tanto, otro tipo de número como en la época moderna. Las fracciones concretas, utilizadas para expresar partes de una unidad monetaria o de una medida, se utilizaban evidentemente en el comercio, pero tales usos comerciales de la aritmética quedaban fuera del marco de la matemática griega propiamente dicha. Por lo tanto, los pitagóricos se vieron desagradablemente sorprendidos por el descubrimiento de que algunas razones, por ejemplo, la razón de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles a un cateto o, lo que es lo mismo, de la diagonal al lado de un cuadrado, no podían expresarse por medio de números enteros. Dado que los pitagóricos se habían dedicado a estudiar las ternas de números enteros que podían ser lados de un triángulo rectángulo, lo más probable es que descubrieran estas nuevas razones en el nuevo contexto. En este sentido, llamaron razones conmensurables a las que se podían expresar por medio de números enteros, lo que significaba que las dos cantidades venían medidas por una unidad común, y a las que no eran expresables de esta manera, razones inconmensurables; por lo tanto, lo que nosotros expresamos de la forma $\frac{\sqrt{2}}{2}$ es una razón inconmensurable (Kline, 1972).

Una razón entre magnitudes inconmensurables se denominaba $\alpha\lambda o\gamma o\varsigma$ (alogos o inexpresable), aunque también se utilizaba el término $\alpha\varrho\varrho\eta\tau o\varsigma$ (arretos o que no tiene razón). El descubrimiento de las razones inconmensurables se atribuye a Hipaso de Metaponto (siglo V a.C.), quien fue castigado por los pitagóricos por haber introducido en el universo un elemento que negaba la teoría pitagórica de que todos los fenómenos del universo se podían reducir a números enteros y sus razones.

La demostración dada por los pitagóricos de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ con 1 (uno), procedía, según Aristóteles, por *reducción al absurdo*, es decir, por el método de demostración indirecta. Concretamente, la demostración mostraba que si la hipotenusa fuera conmensurable con el cateto, entonces el mismo número tendría que ser a la vez par e impar de la manera siguiente: sea la razón de la hipotenusa al cateto en un triángulo rectángulo isósceles $\frac{\alpha}{\beta}$ y consideremos expresada esta razón mediante los números más pequeños posibles. Entonces $\alpha^2 = 2\beta^2$ por el teorema de Pitágoras, y dado α^2 par, α debe serlo también, puesto que el cuadrado de cualquier número impar es impar. Ahora bien, la razón $\frac{\alpha}{\beta}$ estaba expresada en sus términos mínimos, luego β tiene que ser impar; como α es par, sea $\alpha = 2\gamma$, luego $\alpha^2 = 4\gamma^2 = 2\beta^2$, luego $\beta^2 = 2\gamma^2$, es decir, β^2 par y β también par. Pero β era impar y por lo anterior hemos llegado a una contradicción. Esta demostración, que es la misma, que la demostración moderna de la irracionalidad de $\sqrt{2}$ aparecia incluida en antiguas ediciones de los *Elementos* de Euclides (Kline, 1972)

En la matemática moderna las razones inconmensurables se expresan por medio de números irracionales, pero los pitagóricos nunca habrían aceptado tales números. Los babilonios trabajaron, de hecho, con tales números mediante aproximaciones, aunque probablemente no sabían que tales aproximaciones sexagesimales fraccionarias nunca podían ser exactas, así como tampoco los egipcios llegaron a reconocer el carácter distinto de los irracionales. Los pitagóricos, al menos, reconocieron que las razones inconmensurables son de un tipo completamente diferente de las conmensurables.

Este descubrimiento planteó un problema central en la matemática griega. Hasta este momento los pitagóricos habían identificado número y geometría, pero la existencia de razones inconmensurables destruía esta identificación. No cesaron de considerar todo tipo de longitudes, áreas, y razones en geometría, pero se restringieron a considerar razones numéricas únicamente para el caso conmensurable. La teoría de proporciones para razones inconmensurables y para todo tipo de magnitudes se debe a Eudoxo. Hay algunos otros resultados geométricos descubiertos también por los pitagóricos, por ejemplo, estudiaron los números primos, las progresiones y ciertos tipos de razones y proporciones que encerraban para ellos una belleza especial. Así, si p y q son dos números, la media aritmética A es $\frac{(p+q)}{2}$, la media geométrica G es $\sqrt{pq}$, y la media armónica H, que es el reciproco de la media aritmética de $\frac{1}{p}$ y $\frac{1}{q}$, es $\frac{2pq}{(p+q)}$. Ahora bien, como puede comprobarse fácilmente, G es la media geométrica de A y H. La proporción $\frac{A}{G} = \frac{G}{H}$ recibió el nombre proporción perfecta, y la igualdad $\frac{p}{\frac{(p+q)}{2}} = \frac{\frac{2pq}{(p+q)}}{q}$, recibió el nombre de proporción musical.

5.3.1.4 Antanairesis una idea de razón/proporción en Grecia (c. 500 a.C. – c. 300 a.C.)

El método de antanairesis o antiphairesis conocido como método de restas sucesivas o algoritmo de la sustracción de Euclides, fue utilizado por los matemáticos griegos entre los siglos V y III a.C. (Fowler, 1999), para hallar la medida común de una pareja de magnitudes del mismo tipo y la proporción de estos (Guacaneme, 2015). Según Filep (2003) la antanairesis pudo ser una teoría de la proporción atribuida a los matemáticos griegos clásicos y la génesis de la definición de razón y proporción de Eudoxo.

5.3.1.5 Problema 3. Método de la antanairesis (c. 500 a.C. – c. 300 a.C.)

Para comprender la definición de razón y de proporción, desde el método de la antanairesis, Hernández (2000), presenta el siguiente problema:

> ¿Cuál es la relación del tamaño entre un cúmulo de sesenta piedras, y un cúmulo de veintiséis piedras? (p.24)

5.3.1.6 Prácticas matemáticas asociadas a la solución del problema 3

Las prácticas matemáticas para solucionar el problema son dadas a conocer por Hernández (2000), a través del siguiente diálogo, que se supone sostendrían Sócrates y un esclavo:

> Sócrates: Dime esclavo, ¿Cuál es la relación de tamaño entre un cúmulo de sesenta piedras y un cúmulo de veintiséis piedras?
>
> Esclavo: ¿Quiere decir el número de veces que el pequeño está en el grande?
>
> Sócrates: Exacto
>
> Esclavo: Está más de dos veces, pero menos de tres
>
> Sócrates: ¿Puedes ser más preciso?

Esclavo: Está un par de veces con ocho piedras sobrantes.

Sócrates: Estas ocho piedras no están relacionadas con alguna otra cosa.

Esclavo: Omití decir que estas están en relación con el otro montón de veintiséis piedras.

Sócrates: Explícame

Esclavo: Dame un momento. Puedo describir las relaciones en la misma vía. Es decir, dos veces en el primer paso, y luego dirás la relación entre las ocho piedras y las veintiséis piedras.

Sócrates: Continua

Esclavo: Nuevamente, este debe ser el número de veces que el pequeño está en el grande: esta es tres veces; y entonces la relación entre dos piedras y ocho piedras, la cual es cuatro veces exactamente.

Sócrates: Has extraído la relación expresada por: primer paso, dos; segundo paso, tres veces; tercer paso, cuatro veces exactamente. El nombre técnico para esto es una razón. (pp.24 - 25)

5.3.1.7 Configuración epistémica asociada a solución del Problema 3

Configuración epistémica 3 (CE3): Razón y proporción a través de la antanairesis

El problema corresponde a comparar el tamaño de dos magnitudes homogéneas: 60 piedras a 26 piedras, a través de *procedimientos* como la diferencia (o resta sucesiva) de las magnitudes o de sus residuos. Según Guacaneme (2015), si dos parejas de magnitudes tienen la misma antanairesis, entonces se puede concluir que estas guardan la misma razón, es decir, son proporcionales. En el *lenguaje* natural usado en el diálogo se observan *expresiones* como: relación de tamaño y número de veces que el pequeño está en el grande, estas *expresiones* objetivan el significado de la razón que era entendido en el contexto griego como un *concepto* relacionado íntimamente con un *proceso* de medida que podía establecerse únicamente entre magnitudes homogéneas (Oller, 2012).

La *representación simbólica* del procedimiento de restas sucesivas usado en la solución de comparación de cantidades homogéneas desde la perspectiva del autor de la tesis es la siguiente:

$(60{,}26) \rightarrow (34{,}26) \rightarrow (8{,}26)$	Se realizan dos (2) restas sucesivas.
$(26{,}8) \rightarrow (18{,}8) \rightarrow (10{,}8) \rightarrow (2{,}8)$	Se invierten los valores obtenidos en la última resta, obteniendo tres (3) restas sucesivas.
$(8{,}2) \rightarrow (6{,}2) \rightarrow (4{,}2) \rightarrow (2{,}2) \rightarrow (0{,}2)$	Se invierten los valores obtenidos en la última resta, obteniendo cuatro (4) restas sucesivas.

Se concluye que la relación de tamaño entre 60 piedras y 26 piedras es $[2{,}3{,}4]$, se observa en la interpretación simbólica que lo importante de la *antanairesis* es el *proceso* en sí y no los números que aparecen durante el mismo. Según Oller (2012), esta *definición* de razón mediante la antanairesis refuerza claramente el carácter no numérico del *concepto* junto con su íntima relación con un *proceso de medida*, a la vez que aclara el motivo por el cual solo se consideran razones entre magnitudes homogéneas. Según Oller (2012) en el caso de números, además, es importante indicar que el *proceso* siempre termina en un número finito de pasos debido a la existencia del máximo común divisor. Sin embargo, al aplicar el proceso a magnitudes esto no tiene por qué suceder; por ejemplo, si d y l denotan respectivamente la diagonal y el lado de un cuadrado se tiene:

$$(d, l) \rightarrow (d - l, l)$$
$$(l, d - l) \rightarrow (2l - d, d - l) = (D, L)$$

Y el *proceso* se repetirá a partir de aquí indefinidamente, pero periódicamente, puesto que $D = 2l - d$ y $L = d - l$ son nuevamente diagonal y lado de un cuadrado. En definitiva se tiene que la razón $d\colon l$ vendría dada por la sucesión infinita y periódica $\{1{,}2{,}2, \dots\}$. Debe resaltarse el hecho de que todas las operaciones realizadas durante este *proceso* de antanairesis puede llevarse a cabo con regla y compás al estilo griego. Para ejemplificar el *proceso* de antanairesis Guacaneme (2015), ilustra el proceso de resta sucesiva para dos magnitudes. Así, supóngase que se quiere obtener la antanairesis de dos magnitudes homogéneas A y B, con B menor que A. Para ello se resta B de A tantas veces como sea posible, quedando eventualmente un residuo R_1 menor que B; se registra el número n_1 de veces que B se pudo restar de A. En seguida se repite el proceso para las magnitudes B y R_1, obteniéndose un número n_2 (que representa el número de veces que R_1 se restó de B) y posiblemente un residuo R_2, menor que R_1. El proceso se puede repetir, bien hasta que no exista residuo o bien de manera infinita; en el primer caso se dispondrá de una m-upla de valores $[n_1,\ n_2,\ \ldots\ ,\ n_m]$, en tanto que en el segundo se tendrá una sucesión infinita de dichos valores $[n_1,\ n_2,\ \ldots\ ,\ n_m,\ \ldots]$. La Figura 5.6 ilustra la anterior descripción para dos segmentos, obteniéndose la tripla [3,2,2] como resultado de la antanairesis, o si se prefiere, obteniéndose la antanairesis [3,2,2].

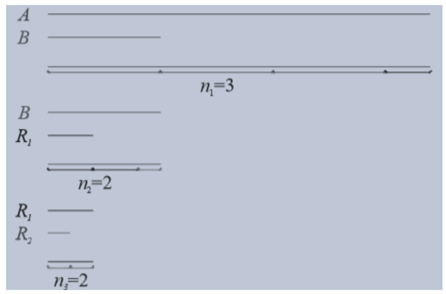


Figura 5.6. Antanairesis [3,2,2] de dos segmentos (Guacaneme, 2015, p. 3)

Ahora bien, en la Figura 5.7 se reconoce que la antanairesis [3,2,2] surge de aplicar la resta sucesiva al caso de los dos círculos C y D. La figura presenta una versión particular del *Teorema de Pitágoras*, donde se emplea como *algoritmo geométrico* para realizar las diferencias, ubicando en la hipotenusa el minuendo, en uno de los catetos el sustraendo y obteniendo consecuentemente en el otro cateto el residuo. Hay que anotar que a pesar de que al hacer la diferencia entre T_1 y T_2 solo se pueda realizar una construcción (la que aparece al final de la figura 5.7), el proceso de antanairesis incluye luego la resta entre T_2 y T_2, la cual obviamente no se puede dibujar, pero sí se debe contar, de allí que $n_3 = 2$.

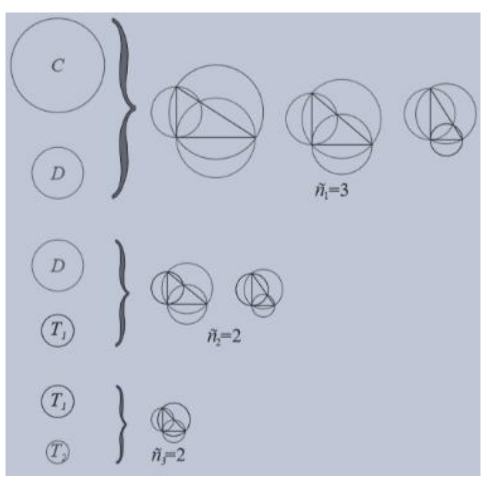


Figura 5.7. Antanairesis [3,2,2] de dos círculos (Guacaneme, 2015, p. 4)

Comparando los resultados de la antanairesis de la pareja de segmentos A y B y la de la pareja de círculos C y D, y advirtiendo que estas son iguales, se concluye que estas cuatro magnitudes (A, B, C, D) son proporcionales, o dicho de otro modo que A y B guarda la misma razón que C y D, como se muestra en la Figura 5.8.

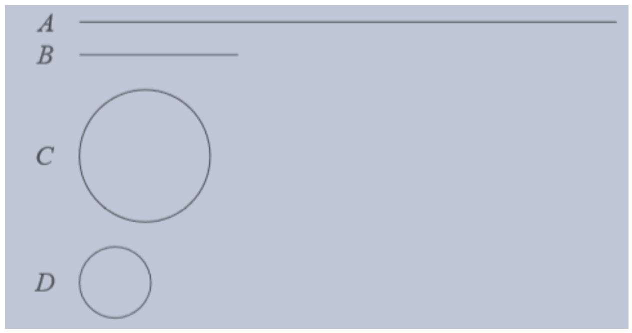


Figura 5.8. Cuatro magnitudes proporcionales (Guacaneme, 2015, p. 4).

Lo anterior permite advertir que la antanairesis, entendida como resultado, captura la razón entre las dos magnitudes (o si se prefiere la relación entre los dos tamaños de las magnitudes en cuestión) a través de un *proceso aditivo* (o mejor, sustractivo) y que, por tanto, constituye el criterio para establecer la proporción (o igualdad de razón) entre dos o más parejas de magnitudes.

Por último, se evidencia en los libros V, VI y VII que la razón tenía sentido únicamente entre magnitudes homogéneas, mientras el producto de magnitudes carecía de sentido. Según Oller (2012) estos dos hechos hacen prácticamente inaplicable la teoría a las situaciones prácticas en las que debería aplicarse. La teoría de la proporción en Grecia solo considero razones internas; por ejemplo, entre tiempos o entre distancias y nunca entre distancias y tiempos, es decir no se consideraron razones externas, que si serian tratadas en algunas culturas Orientales y en particular en la cultura China (Freudenthal, 1983).

La teoría de Eudoxo como solución a la crisis de las razones inconmensurables (c. 390 a.C. – c. 337 a.C.)

Eudoxo (c. 390 a.C. – c. 337 a.C.), es considerado uno de los matemáticos más importantes de la academia Platónica en la Grecia clásica, una de sus contribuciones más importantes a la matemática fue desarrollar una teoría de las proporciones. Según González (2008), la teoría de proporciones de Eudoxo tiene su génesis mediante tres Tratados que se desarrollaron en los Elementos de Euclides: *una definición:* igualdad de razones (Definición V.5. 2), u*n axioma:* axioma de Eudoxo-Arquímedes o axioma de continuidad (Definición V.4. 3) y u*n método:* el Método de Exhaución (Proposición X.1).

En la época clásica de los griegos fueron descubiertos un número cada vez mayor de razones inconmensurables como: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{17}$ que dificultó la comprensión del número, es así como Eudoxo introduce la idea de magnitud continúa, que permitía comprender las razones conmensurables e inconmensurables, desde el tratamiento de las magnitudes: segmentos rectilíneos, ángulos, áreas, volúmenes, tiempo, etc., a las cuales no se les asignaba ningún valor cuantitativo y podían variar de una manera continua. Eudoxo, definía una razón de magnitudes y a partir de ella una proporción, es decir una igualdad de dos razones, que cubría los casos de razones conmensurables e inconmensurables. Lo que consiguió Eudoxo fue evitar los números irracionales entendidos como números, es decir, evitó darle valores numéricos a las longitudes de segmentos, tamaños de ángulos y otras magnitudes, así como a las razones de magnitudes, (Kline, 1972).

Para entender la definición de Eudoxo de la proporción, usualmente suele traducirse a la notación algebraica moderna, así: $a: b = c: d$ si para todo par de enteros m, n se tiene que $ma > nc$. Dicha definición se estableció de forma que pudiera ser aplicable a parejas de segmentos, entre dos áreas o, inclusive, entre dos volúmenes. La teoría de la proporción permitió a los matemáticos griegos hacer grandes progresos en Geometría, suministrando los fundamentos lógicos necesarios para las razones inconmensurables, pero también tuvo varias consecuencias negativas las cuales forzaron una nítida separación entre número y geometría, dado que únicamente la Geometría podía manejar las razones inconmensurables, otras consecuencias positivas consistieron en que los matemáticos de la época se convirtieran en geómetras, y desarrollaran ideas como x^2 y x^3, entendidas como área de un cuadrado y volumen de un cubo respectivamente, que aún permanecen en la matemática (Kline, 1972).

Una última consecuencia inmediata de la definición de Eudoxo es la imposibilidad de considerar la proporción como una igualdad de fracciones en el sentido operativo del término. Es decir si la razón entre a y b es la misma que la razón entre c y d (en el sentido de Eudoxo), no se sigue de aquí directamente que el producto ad sea igual al producto bc, ni que la razón entre a y c sea la misma que la razón entre b y d. De hecho, en el caso general estas últimas razones ni siquiera estarán definidas del todo. Pues si el par a, b es, por ejemplo, un par de líneas, mientras que el par c, d es un par de áreas, no es posible formar la razón a, c al no ser éstas magnitudes homogéneas. En caso de que las cuatro cantidades que forman la proporción sean todas del mismo tipo, sí es posible deducir que la proporción alterna se satisface: es decir, que la razón de a y b sea la misma que la razón de b y d. La proporción es, por tanto, una comparación entre dos diferentes razones dadas y un esquema operacional entre cuatro cantidades numéricas (Kline, 1972).

La solución de Eudoxo al tratamiento de las magnitudes inconmensurables o los números irracionales invirtió, de hecho, el punto de vista de la matemática griega anterior. Los pitagóricos primitivos habían puesto ciertamente el énfasis en el número como concepto fundamental, y Arquitas de Tarento, Maestro de Eudoxo, afirmaba que solo la aritmética y no la geometría podía dar demostraciones satisfactorias. Sin embargo, al volver a la Geometría para manejar los números irracionales, los griegos abandonaron el álgebra y los números irracionales, transformando la mayor parte del álgebra en Geometría. Según Kline (1972) la representación geométrica de los irracionales y de las operaciones con ellos no era práctica, por ejemplo la expresión $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ tenía sentido en el contexto geométrico y era entendida como el área de un rectángulo, pero si se necesita saber el producto para determinar la cantidad de tapete para cubrir el suelo, esta expresión no tenía un valor numérico. El pensamiento matemático se vio así separado de las necesidades prácticas, y los matemáticos no encontraron motivación para mejorar las técnicas aritméticas y algebraicas.

Aunque los griegos dedicaron sus mayores esfuerzos en matemáticas a la geometría, no hay que olvidar que los números enteros y las razones entre ellos, siguieron siendo conceptos perfectamente aceptables. Este campo de la matemática, aparece organizado en los libros VII, VIII y IX de los Elementos de Euclides; y actualmente es conocida como teoría de números o estudio de las propiedades de los enteros. Cuando las barreras entre las clases cultivadas y los esclavos se hicieron menos estrictas en el periodo alejandrino (c. 300 a.C. – c. 600 d.C.) y los hombres cultos se interesaron por los asuntos prácticos, el énfasis se desplazó al conocimiento cuantitativo y al desarrollo de la aritmética y el álgebra. Además, de la teoría de la proporción, Eudoxo también desarrollo el método griego para hallar áreas y volúmenes de figuras curvilíneas llamado "método de exhaución", con el demostró que las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios, que los volúmenes de dos esferas son entre sí, como los cubos de sus radios, que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma con la misma base y altura, y que el volumen de un cono es un tercio del cilindro correspondiente (Kline, 1972).

Según Kline (1972) las obras de Eudoxo establecieron sin duda la organización deductiva de las proporciones sobre la base de unos axiomas explícitos. Dado que Eudoxo abordo la tarea de construir la base lógica para las razones conmensurables e inconmensurables, es lo más verosímil que viera la necesidad de formular axiomas y deducir consecuencias una por una de manera que no se cometieran errores con estas magnitudes extrañas y conflictivas. Esta necesidad de manejar razones inconmensurables vino también a reforzar, sin duda, la decisión anterior de apoyar exclusivamente en el razonamiento deductivo a las demostraciones. Como los griegos, buscaban verdades y habían decidido utilizar las demostraciones deductivas, tenían que basarse en axiomas que fueran ellos mismos verdaderos, y encontraron en efecto afirmaciones cuya veracidad era evidente para ellos, aunque las justificaciones dadas para aceptar los axiomas como verdades indiscutibles fueran diversas.

5.4 Periodo 3: Ideas de razón y proporción en el periodo helenístico griego (c. 300 a.C. – c. 600 d. C)

La teoría de la proporción en "Los Elementos" de Euclides (c. 325 a.C. – c. 265 a.C.)

Uno de los conceptos de razón tiene su origen en la matemática griega y particularmente en los libros V, VI y VII de *Los Elementos* de Euclides (c. 325 a.C. – c. 265 a.C.). Según Kline (1972), el libro V estudia las razones conmensurables e inconmensurables desde magnitudes geométricas, el Libro VI aplica la teoría desarrollada en el Libro V al estudio de la semejanza de figuras rectilíneas, particularmente a los triángulos, en ellos se destaca el teorema de la bisectriz y la generalización del teorema de Pitágoras, en el Libro VII, se estudia la teoría de números: propiedades de los números enteros y razones entre números enteros. Según Oller (2013), en los libros V, VI y VII, Euclides configuró una teoría de las proporciones que permitió, a los matemáticos griegos comprender las razones conmensurables e inconmensurables homogéneas desde razonamientos geométricos deductivos.

Razón y proporción en el Libro V de Los Elementos (c. 325 a.C. – c. 265 a.C.)

En el Libro V, Euclides fundamentó su teoría de la proporción con base en los trabajos desarrollados por Eudoxo (c. 390 a.C. – c. 337 a.C.) en este libro se presenta la idea de razón como *medida relativa* de una magnitud A con respecto a una magnitud B y se define la proporción. En este libro se presentan las Definiciones 3 y 5 relacionadas con los objetos razón y proporción, según (Guacaneme, 2015), estas definiciones han sido las más estudiadas en los trabajos históricos y epistemológicos relacionados con la teoría de la proporción. A continuación, se presentan las definiciones 3 y 5:

> Definición 3: Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas (Puertas, 1994, p. 9).
> Definición 5: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente (Puertas, 1994, pp. 11-12).

Según Guacaneme (2015) las anteriores definiciones pueden ser interpretadas discursiva o simbólicamente, entre otras opciones. A continuación, se dan a conocer las interpretaciones realizadas por Obando (2015), de forma discursiva-simbólica y otra realizada por Guacaneme (2015), asociada a la expresión gráfica, estas interpretaciones muestran dos perspectivas distintas que amplían los significados de los objetos razón y proporción.

Para comprender las ideas de razón expuestas en la Definición 3 de *Los Elementos*, Obando (2015) da a conocer que la palabra *razón*, proviene del latín *ratio* que fue la traducción latina de la palabra griega *logos* cuyo significado más habitual era la forma como comprendemos algo, la intelección sobre algo, pero también hacía referencia al razonamiento mental o al discurso producido sobre algo y expresado en palabras. En el contexto matemático griego, *logos* igualmente era usada para referir la relación mutua entre dos cantidades. Según Heath (1994), en sus comentarios explicativos a la definición 3 del libro V de los elementos, el tipo de relación que expresa *logos* con respecto a las dos cantidades dadas, es en términos de *medida relativa* de una cantidad con respecto a la otra.

Según Obando (2015) el *logos* en el contexto matemático griego además era entendido como una expresión que permitía cuantificar la relación entre dos cantidades homogéneas, donde ser múltiplo o submúltiplo definía géneros de relaciones y ser doble, triple, cuádruple, mitad, tercio, cuarto, etc., definía diferentes especies, a las especies pertenecían infinitas parejas de números que estaban en el mismo logos. Las especies se presentan en parejas de números que se relacionan mutuamente: dadas dos cantidades A y B se tiene la posibilidad de definir dos formas de razón; $A:B$ o $B:A$, es decir si la cantidad A es el doble de B entonces dado que B esta contenido dos veces en A, se tiene que B es la mitad de A. En cada especie existía una pareja de números que hoy día es denominada representante de clase, esta pareja de números se considera como generadora de infinitas parejas de números que tienen el mismo *logos*, por ejemplo, la razón 2 a 1 se puede tomar como la generadora de todas las demás razones que componen la especie dobles, y todas las demás parejas de números de esta especie se pueden ordenar de manera creciente de acuerdo a la serie de los números pares. Las infinitas parejas de números forman familias con igual logos (serie de razones).

Según Obando (2015) en la definición V se hace explícita la expresión equimúltiplos para determinar cuándo cuatro magnitudes están en una misma proporción. Esto es: si A, B, C y D son las cuatro magnitudes, de las cuales se quiere saber si están o no en la misma proporción (es decir, determinar si la razón de las magnitudes A a B es la misma de las magnitudes C a D) se debe verificar (en notación moderna): $\forall\ n,m \in N\ ,\ si\ nA > mB,\ o,\ nA = mB, o\ nA < mB$, entonces, respectivamente, $nC > mD\ ,\ o,\ nC = mD\ ,\ o, nC < mD$. Dicho de otra forma, si dadas las magnitudes A, B, y sus respectivos múltiplos $A,\ 2A,\ 3A, \ldots$ y $B,\ 2B,\ 3B, \ldots$ organizados de acuerdo un orden determinado por su tamaño, al igual que las magnitudes C y D, con sus respectivos múltiplos $C,\ 2C,\ 3C, \ldots$ y $D,\ 2D,\ 3D, \ldots$ entonces la ley de distribución de los múltiplos de A con respecto a los de B, debe ser exactamente igual que la ley de distribución de los múltiplos de C con respecto a los de D.

De esta forma, el concepto de equimúltiplo presente en la Definición 5 del libro V estaría entregando una técnica operatoria es decir para definir cuándo cuatro magnitudes comparadas dos a dos son o no proporcionales se debían comparar las medidas relativas y determinar si eran iguales o distintas (Acerbi, 2003), En conclusión, la proporción en el contexto griego significaba similitud en el *logos*, es decir, conservar la misma relación cuantitativa, y esta aplicaba tanto para las relaciones aditivas (exceder o ser excedido) que generaban las proporciones aritméticas, y las relaciones por medida relativa que generaban las proporciones geométricas, la proporción en el contexto griego también refería a la comparación de cantidades que están en la misma razón.

Para comprender la razón (Definición 3) y la proporción (Definición 5) Guacaneme (2015), da conocer la siguiente interpretación gráfica:

Sean A, B, C y D cuatro magnitudes geométricas homogéneas dos a dos (dos segmentos y dos cuadrados), como se presentan en la Figura 5.9:

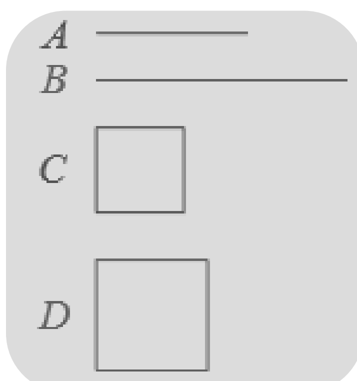


Figura 5. 9. Cuatro magnitudes geométricas homogéneas dos a dos (Guacaneme, 2015, p. 6).

Se deben construir los “múltiplos” de cada una de las magnitudes, pero no a través de una multiplicación entre magnitudes geométricas ni a través de un producto por un escalar (lo cual corresponde a lecturas y notaciones modernas), sino por medio de la suma de la magnitud con ella misma. Para el caso de los segmentos la construcción de la suma es elemental; la suma de los cuadrados se puede realizar mediante construcciones geométricas en donde se interpreta el Teorema de Pitágoras como un algoritmo para sumar cuadrados construidos sobre los catetos y el construido sobre la hipotenusa como su suma.

Se identifica con un subíndice el número de veces que cada magnitud se suma a sí misma, de esta forma para el caso del segmento A se tendría $A_0 = A, A_1 = A + A,$ y en general A_n indicaría el segmento resultante de sumar el segmento A (a sí mismo) n – veces, además para el caso del cuadrado C se tendría $C_0 = C,\ C_1 = C + C$, y en general C_n indicaría el área resultante de sumar el área C (a sí misma) n – veces. La Figura 5.10 muestra el resultado de las sumas para los segmentos y la Figura 5.11 muestra los resultados de las sumas para los cuadrados.

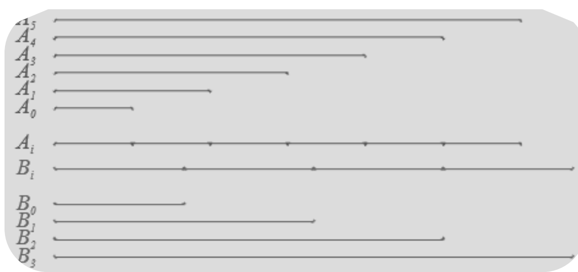


Figura 5.10. Segmentos resultantes de sumar los segmentos A o B a sí mismos (Guacaneme, 2015, p. 7).

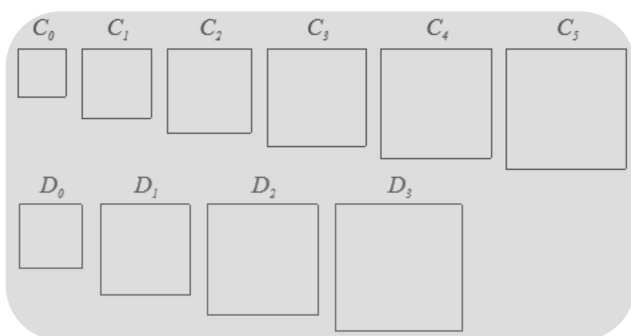


Figura 5.11. Cuadrados resultantes de sumar los cuadrados C o D a sí mismos (Guacaneme, 2015, p. 7).

Un método para determinar si las magnitudes A, B, C y D son proporcionales, es establecer si satisfacen las condiciones de la Definición 5: según Guacaneme (2015), esto se puede hacer comparando cada uno de los múltiplos de A con cada uno de los de B, a la vez que se compara el mismo múltiplo de C con el homólogo de D, y se verifica si el resultado de la comparación coincide. Se puede reconocer que A_3 es mayor que B_0 y B_1 pero menor que B_2 y B_3, a la vez que C_3 es mayor que D_0 y D_1 pero menor que D_2 y D_3.

Otro método para determinar si las magnitudes A, B, C y D son proporcionales es el propuesto por De Morgan (1836) y retomada también por Fine (1917) el cual consiste en ordenar de manera sucesiva y en un solo grupo los múltiplos de A y B, así como también ordenar en otro grupo los múltiplos de C y D; luego se revisa si los órdenes en ambos grupos coinciden. La Figura 5.12 muestra los dos grupos de múltiplos representados geométricamente.

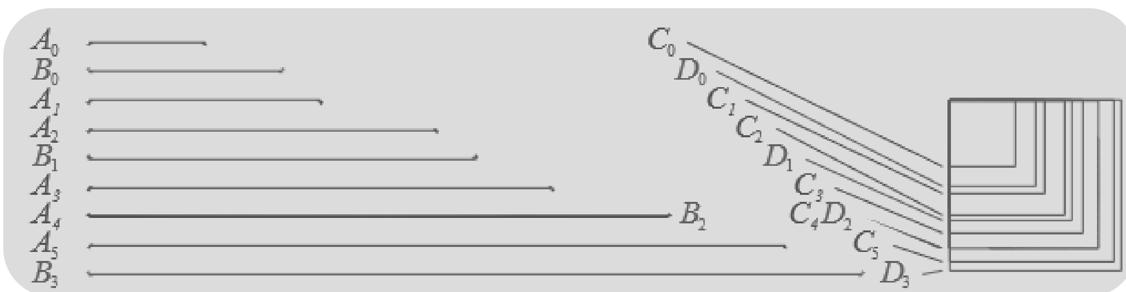


Figura 5.12. Grupos de múltiplos de las parejas de magnitudes homogéneas (Guacaneme, 2015, p. 8).

En la Figura 5.12 se observa que el orden en que se distribuyen los múltiplos de A y B es el mismo en que lo hacen los de C y D, y simbólicamente estaría representado por los siguientes grupos de ordenes:

A_0,	B_0,	A_1,	A_2,	B_1,	A_3,	$A_4=B_2$,	A_5,	B_3
C_0,	D_0,	C_1,	C_2,	D_1,	C_3,	$C_4=D_2$,	C_5,	D_3

La anterior interpretación gráfica permite analizar que al "ejecutar" la Definición 5, más que comparar las razones entre cada par de magnitudes para establecer si guardan o no la misma razón, lo que se hace es comparar los órdenes relativos de los múltiplos de las magnitudes en cuestión: actividad que comporta exclusivamente la realización de sumas y la comparación (u ordenación) de los resultados de las mismas.

Proporcionalidad geométrica y semejanza de figuras en el Libro VI de los Elementos

El Libro VI, trata las figuras semejantes y aplica la teoría de las proporciones del Libro V a la geometría plana, en este libro se establecen los resultados fundamentales de la semejanza de triángulos y los criterios de semejanza, además estos resultados son extendidos, en algunos casos, a figuras rectilíneas más generales, como son los polígonos. También, se presenta la construcción de la tercera, la cuarta y la media proporcional, relacionando esta última con la solución geométrica de las ecuaciones de segundo grado. Además, se evidencia la demostración del hoy conocido como teorema de la bisectriz y la generalización del teorema de Pitágoras (Hernández, 2017).

Según Guacaneme (2012), en el Libro VI se usan tres tipos de palabras: las que se refieren a los objetos geométricos (triángulo, paralelogramo, figura rectilínea, ángulo, recta, recta finita, lado, altura), las que se refieren a las relaciones entre la cantidad de magnitud de los objetos o las relaciones entre estas (razón, proporción), y las que se refieren a la relación entre dos o más objetos (altura, perpendicular, paralela, semejanza). Desde este punto de vista, la semejanza se clasifica en un tipo de palabra diferente a aquel en el que se clasifican los términos “razón” y “proporción”, asociados directamente con la proporcionalidad geométrica. La semejanza se asocia entonces a una relación entre objetos, en tanto que la razón se asocia a una relación entre propiedades de los objetos. Específicamente, la semejanza alude a una relación entre dos figuras rectilíneas (polígonos), en tanto que la proporcionalidad geométrica se refiere a las proporciones que se pueden establecer entre las cantidades de magnitud de los objetos geométricos. A continuación, se presenta las definiciones 1, 3 y 4 contenidas en el Libro VI, y la interpretación realizada por algunos autores para cada una de ellas:

> Definición 1: Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales (Puertas, 1994, p. 28).

Según Guacaneme (2012), en esta definición Euclides establece la semejanza únicamente como una característica de dos o más figuras rectilíneas (polígonos), pero no establece semejanza entre figuras no rectilíneas; la proporcionalidad geométrica se da entre al menos tres objetos geométricos, o más precisamente, entre al menos tres cantidades de magnitudes homogéneas.

Definición 3: Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es el segmento mayor como él (segmento) mayor es al menor (Puertas, 1994, p. 28)

La interpretación algebraica para esta definición según Hernández (2017) consiste en trazar un segmento AB como se muestra en la Figura 5.13:

Figura 5.13. Representación del segmento AB (Hernández, 2017).

Se debe conseguir en el segmento AB determinar un punto C de modo que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$ de esta forma se dirá que el punto C corta el segmento AB en extrema y media razón. La determinación de este punto lleva a resolver una ecuación de segundo grado. En efecto, si $AB = m$ y $AC = x$, por definición se cumple que: $\frac{m}{x} = \frac{x}{m-x}$. Esto es, $x^2 + mx - m^2 = 0$, cuya solución es: $AC = x = \frac{(\sqrt{5}-1)m}{2}$, $CB = \frac{(3-\sqrt{5})m}{2}$, $AB = m$. Para un segmento de longitud 2, se tendrá que $AC = \sqrt{5} - 1 \; y \; CB = 3 - \sqrt{5}$

Según kline (1972) la expresión $\sqrt{AC \cdot CB}$ puede interpretarse como la altura de un triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia como se muestra en la figura 5.14.

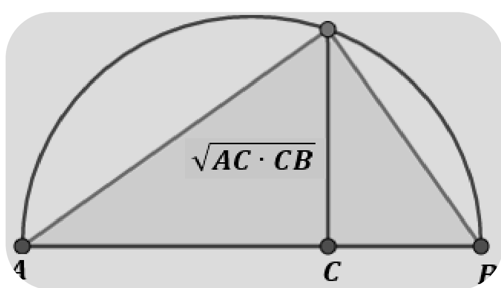


Figura 5.14. Aplicación de la media proporcional (Adaptado de Kline, 1972, p.110)

Según Guacaneme (2012), esta definición contempla una alusión a la proporcionalidad geométrica como se evidencia en la interpretación gráfica de Hernández (2017) y Kline (1972), pero no a una semejanza, esto se presenta debido a que la semejanza se da entre figuras rectilíneas (polígonos) y no entre segmentos.

> Definición 4. En toda figura, la altura es la perpendicular trazada desde el vértice hasta la base. (Puertas, 1994, p. 28).

Según Guacaneme (2012), a través de esta definición se caracteriza un segmento que puede no hacer parte integral de la figura rectilínea en cuestión, sino que puede construirse como una parte no esencial de la figura. Esta definición no alude ni a la proporcionalidad geométrica, ni a la semejanza. Además, según Hernández (2017), los criterios de semejanza de triángulos como los conocemos hoy día son fundamentados en las proposiciones 4, 5 6 y 7 del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides. En la Tabla 5.3 se relacionan las proporciones 4, 5, 6 y 7 y las definiciones modernas de los criterios de semejanza:

Tabla 5.3
Relación entre las proposiciones 4,5,6 y 7 del Libro VI y los criterios de semejanza

Proposiciones en el libro VI	Definición de los criterios de semejanza
Proposición 4. En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden a los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden a los ángulos iguales son correspondientes.	*Criterio ángulo-ángulo (Criterio AA).* Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales. Si tienen dos ángulos iguales, los restantes también son iguales.
Proposición 5. Si dos triángulos tienen los lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos los cuales subtienden a los lados correspondientes.	Criterio lado-lado-lado (Criterio LLL). Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados respectivamente proporcionales.
Proposición 6. Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro, y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.	*Criterio lado-ángulo-lado (Criterio LAL).* Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales e iguales los ángulos comprendidos entre ellos.

Proposición 7. Si dos triángulos tienen un ángulo igual el uno del otro y tienen proporcionales los lados que comprenden a los otros ángulos, y tienen los ángulos que quedan de manera aparejada menores o no menores a un ángulo recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales	Criterio ángulo-lado-lado (Criterio ALL). Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados de los otros ángulos son proporcionales.

Fuente (Elaboración propia).

Razón y proporción en el Libro VII de Los Elementos (c. 325 a.C. – c. 265 a.C.)

En los libros VII, VIII y IX Euclides estudia la teoría de números, es decir, las propiedades de los números enteros y las razones entre números enteros. Según Kline (1972) en estos libros Euclides presenta los números como segmentos de recta y el producto de dos números como un rectángulo, pero sus argumentos no dependen de la geometría sino de pruebas verbales en relación a la forma simbólica actual. Según Oller (2012), Euclides da a conocer en el libro VII las teorías desarrolladas antes de Eudoxo, en gran parte pitagórica y que sustentaban sus estudios únicamente en números enteros y razones conmensurables. Muchas de las definiciones y teoremas, en particular los que refieren a proporciones, repiten lo expuesto en el libro V, es decir, Euclides separa número (teoría pre-eudoxiana) y magnitud (teoría eudoxiana), según Kline (1972), esta separación posiblemente se debe a que Euclides consideraba que la teoría de números podía construirse sobre fundamentos más simples que la de las magnitudes.

Aunque Euclides separa número y magnitud, expone algunos teoremas que los relacionan, es el caso de la Proposición 5 del Libro X, en donde establece que la razón entre dos magnitudes conmensurables es la misma que la existente entre dos números enteros. En el Libro VII de *Los Elementos,* se presentan las proposiciones 1 y 2 que permiten comprender el denominado algoritmo de Euclides y que según Guacaneme (2012), da nuevas ideas sobre los objetos matemáticos razón y proporción. A continuación, se presentan dichas proposiciones.

> Proposición 1. Dados dos números desiguales y restando sucesivamente el menor del mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.

> Proposición 2. Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima. (Puertas, 1994, p.28)

Según Kline (1972), las proposiciones 1 y 2 exponen el proceso mediante el que se obtiene la mayor medida (divisor) común de dos números. Euclides lo describe diciendo que si A y B son los números y $B < A$, debe restarse B de A el número de veces necesario para obtener un número C menor que B. A continuacion, restar C de B tantas veces como sea preciso hasta obtener un número menor que C, y así sucesivamente. Si A y B son primos entre sí se llega a 1 como último resto, y 1 es el máximo común divisor. Si A y B no son primos entre sí se llega en alguna etapa a una división inexacta, y el último divisor será el mayor común. Según Guacaneme (2012), el método descrito por Kline (1972), es denominado algoritmo de la sustracción de Euclides, el cual permite entender la razón y la proporción desde un tratamiento que no alude estrictamente a esquemas multiplicativos y que más bien involucran la adición o diferencia de las magnitudes geométricas implicadas y un pensamiento correlacional entre ellas.

5.5 Período 4. Razón y proporción en China (c. 300 a.C.- c. 300 d. C)

La cultura China tuvo importantes desarrollos que permitieron la comprensión de algunas ideas de los objetos matemáticos razón y proporción. Según Obando (2015) las ideas de razón y proporción en la cultura China emergieron desde un enfoque práctico relacionado con actividades comerciales, donde eran usadas de manera sistemática las constantes de proporcionalidad, en forma de factores de conversión, tasas de intercambio entre productos, costo unitario de un producto, cálculo de áreas (aproximación del número π) etc.

Según Oller (2013) en la cultura China además del enfoque práctico emergieron algunos intentos de fundamentación teórica para los objetos razón y proporción, proponiendo métodos generales o de justificación de dichos métodos, esta búsqueda de métodos generales según Chenmla (2005) “son el testimonio de otro origen (distinto del griego) del concepto de demostración matemática” (p. 124). Los métodos generales de fundamentación matemática fueron estudiados por Lui Hui; un matemático chino del siglo III d.C., quien acompaño la edición de los *nueve capítulos*, un texto clásico del siglo II a.C., que da muestra del tipo de problemas que se estudiaban en la cultura china.

El concepto central que Liu Hui estudia en el texto de los *Nueve Capítulos,* sobre proporcionalidad es el de *lii,* que se traduce al inglés como *rate,* o *proportional value.* Lui Hui define *lii* como "un conjunto de números correlacionados" es decir, si se dispone de varias magnitudes directamente proporcionales una *lii* es un conjunto de valores de dichas magnitudes, además enumera algunas propiedades y operaciones entre ellas, a saber: "Las lii pueden convertirse unas a otras. Si hay fracciones en una lii, esta puede convertirse en otra en enteros multiplicando por un número adecuado. Las lii se pueden simplificar reduciéndolas usando el común denominador" (Kangsshen, 1999, p.80).

Las propiedades y operaciones descritas podían ser usadas en la proporcionalidad directa entre las magnitudes consideradas. Según Kangsshen (1999) en el contexto chino, la razón entre dos magnitudes era interpretada como su *lii* cuando una de ella tomaba el valor 1. Según Oller (2013), el concepto de *lii* era aplicado frecuentemente a situaciones mercantiles, ya que en este concepto no existe obstáculo para relacionar directamente pares de magnitudes diferentes, a través del concepto de *lii* no era necesario recurrir al uso explícito de una teoría de razones y proporciones como si se hizo en el contexto griego.

El texto de los nueve capítulos muestra que los matemáticos chinos usaban de manera sistemática las constantes de proporcionalidad, por ejemplo, en la forma de factores de conversión, tasas de intercambio entre productos, costo unitario de un producto, etc. El Capítulo 2 (dedicado a situaciones de proporcionalidad) inicia con una tabla titulada "reglas de intercambio de arroz y millo", en donde se presentan diferentes tipos de estos productos y las tasas de intercambio de unos por otros, como se observa en la Figura 5.15.

millet rate	50	cooked imperial millet	42
hulled millet	30	soya beans	45
milled millet	27	small beans	45
highly milled millet	24	sesame seed	45
imperial millet	21	wheat	45
fine crushed wheat	13 ½	paddy	60
coarse crushed wheat	54	fermented beans	63
cooked hulled millet	75	porridge	90
cooked milled millet	54	cooked soya beans	103 ½
cooked highly milled millet	48	malt	175

Figura 5.15. Tabla de intercambio de arroz y millo (Obando, 2015, p. 137).

En palabras de Lui Hui, esta tabla presenta tasas de intercambio que están en proporción y que se pueden convertir mutuamente entre ellas, tomando los valores apropiados. En la tabla de la Figura 5.15, a cada tipo de producto se le asigna un número entero que se interpreta como un valor relativo con respecto al resto de productos. Por ejemplo, los dos primeros productos de la primera columna tienen valores de 50 y 30, lo que significa que la razón del millo al millo descascarado es de 5 a 3, es decir, que 5 unidades de millo valen lo mismo que 3 unidades de millo descascarado, “Tasa” aquí puede significar más bien valor relativo entre dos productos. La normalización (la comparación entre los valores relativos asignados a dos productos) refiere la cantidad del otro, esto es, la razón entre los dos valores correspondientes. Específicamente, el texto de los nueve capítulos está escrito en forma de preguntas y respuestas, contiene un total de doscientos cuarenta y seis problemas y está dividido en nueve capítulos. Por una parte, el Libro se puede ver simplemente como una colección de ejercicios resueltos, y por otra, se puede usar como manual para resolver problemas prácticos del mismo tipo que los que aparecen en él, ya que cada tipo de ejercicios se resuelve con un método determinado.

5.5.1 Problema 4: Intercambio de millo descascarado a millo (c. 300 a. C- c. 300 d. C)

La tabla de la Figura 5.15 era utilizada para resolver problemas de intercambio de arroz y millo, en estos tipos de problemas eran usadas unidades de volúmenes de granos y líquidos, cuyas unidades más frecuentes eran : $sheng \rightarrow \times 10 \rightarrow dou \rightarrow \times 10 \rightarrow shi$. De forma que: $1\ shi = 10\ dou$, $1\ dou = 10\ sheng$. (El duo equivalía aproximadamente a 2 litros, el shi a 20 litros y el $sheng$ equivia a $\frac{1}{5}$ de litro de grano o líquido). A continuación, se presenta el problema 2.2 relacionado en Oller (2012).

> Sean ahora 15 dou $5\frac{2}{5}$ sheng de millo descascarado que se desea cambiar por millo. Encontrar la cantidad. (p.44)

5.5.2 Prácticas matemáticas asociadas a la solución del problema 4

Las prácticas matemáticas para solucionar el problema de intercambio son dadas a conocer por Dauben (2007) basada en la edición realizada por Liu Hui hacia el siglo tercero d.C.

> La regla para realizar tales intercambios dice: "tome el número dado y multiplíquelo por la rata buscada. [este producto] es el dividendo. La rata dada es el divisor. Divida" (p. 241).

$$15 \text{ dou } 5\frac{2}{5} \text{ sheng } \rightarrow 155\frac{2}{5} \text{ sheng} \rightarrow \frac{777}{5} \text{ sheng}$$

$$\left(\frac{777}{5} \times 50\right) \div 30 \rightarrow (7.770 \div 30) \rightarrow 259 \text{ sheng} \rightarrow 25 \text{ dou } 9 \text{ sheng}$$

5.5.3 Configuración epistémica asociada a la solución del problema 4

Configuración epistémica 4 (CE4): Razón como correlator – transformador y proporción a través de razonamientos analíticos

La *situación – problema* consiste en intercambiar $\frac{777}{5}$ $sheng$ de millo descascarado por cierta cantidad de millo (en el intercambio se debe recibir más millo que millo descascarado) , para dar respuesta a la situación planteada se propone una *regla* o *procedimiento* que consiste básicamente en buscar en la tabla de la figura 5.15 la razón del millo al millo descascarado (o del millo descascarado al millo) los dos primeros productos de la primera columna tienen valores de 50 y 30, lo que significa que la razón del millo al millo descascarado es de 5 a 3, es decir, que 5 unidades de millo valen lo mismo que 3 unidades de millo descascarado, por tanto es válido *argumentar* que este último producto (millo descascarado) es más valioso. Con base en los anteriores *argumentos* y *procedimientos* se infiere que el *método* expresado en la solución implica comprender el *concepto* “tasa de intercambio” entre dos productos dados (lo que modernamente se llama precio por unidad), y con base en esta razón, dada la cantidad de uno de los productos, determinar a qué cantidad del otro producto equivale.

Según Obando (2015) los *procedimientos* usados en la solución muestran la conciencia de la existencia del concepto de razón constante (la relación entre las tasas) que permite calcular la cantidad desconocida que es equivalente a la cantidad dada. El *lenguaje* natural usado en la explicación, indica el conocimiento de tres cantidades y el desconocimiento de una cuarta cantidad (millo), esta cuarta cantidad puede ser calculada a través de la siguiente *expresión:* $(a \cdot b) \div c$, donde a corresponde a la tasa o cantidad que se debe buscar en la tabla de la figura 5.15, es decir (50), la letra b corresponde a la cantidad que se desea cambiar ($\frac{777}{5}\ sheng$), y la letra c indica la tasa correspondiente de la cantidad que se desea cambiar es decir (30). Finalmente, al sustituir los valores indicados en la formula se obtiene la *expresión:* $\frac{\frac{777}{5} \times 50}{30} = 259\ sheng$, de la cual se concluye que en el intercambio de $15\ dou\ \ 5\frac{2}{5}\ sheng$ de millo descascarado se obtienen $25\ dou$ $9\ sheng$ de millo.

5.6 Período 5: Razón y proporción, cruce de culturas (c. 300 a. C – c. 1300 d. C)

5.6.1 Razón y proporción en los hindúes (c. 300 a.C. – 300 d. C)

El método hindú para hallar cantidades relacionadas proporcionalmente, es semejante al método chino, pero con diferencias significativas (Obando 2015). Generalmente, conservó la siguiente estructura: se dispone de tres cantidades, una primera, llamada la cantidad dada, o el argumento; una segunda, llamada el producto, lo producido por el argumento, y una tercera, llamada la cantidad demandada o deseada, y de la cual se debe calcular el producido. La regla dice que la primera y tercera, que por lo general son de la misma naturaleza, se ponen en primer y último lugar respectivamente, y la segunda, de naturaleza diferente, se pone en el medio de las otras dos, y la cantidad buscada se obtiene al multiplicar la última con la segunda, y dividir este resultado por la primera.

Según Obando (2015) en los trabajos de Bhascara (1817), Bhaskaracarya (2001), y Brahmegupta (1817), se puede ver que las palabras más generalizadas al resolver problemas de proprocionalidad eran pramana (argumento) y phala (fruto), que son usadas para referir por lo general a la cantidad de un producto y su valor o la materia prima y la cantidad de producto manufacturado, de los anteriores análisis se conjetura, que, en general, se trata de dos cantidades relacionadas una con la otra de tal forma que el valor de la una depende de la cantidad presente en la otra, y en cierta forma, los dos valores dados, que se corresponden uno al otro, establecen la regla de equivalencia, de intercambio entre estas dos cantidades. La conciencia de la existencia de esta dependencia de una cantidad con respecto a la otra se puede ver en el Lilavati de Baskhara, donde se lee posterior al enunciado de la regla, la siguiente aclaración “si, en una situación dada, la cantidad que se desea calcular se incrementa (respectivamente decrece) con el incremento de la cantidad demandada (respectivamente decrece), entonces la simple regla de tres es aplicada por un adepto a las matemáticas (Bhaskaracarya, 2001, p. 78).

La regla hindú a diferencia de la versión china, pone énfasis en una organización espacial de los términos, a manera de mnemotécnica para recordar el orden en el cual realizar los cálculos y, al menos de manera explícita, no parece dar relevancia a la razón constante (el valor por unidad) que pone en relación las dos cantidades dadas, como sí se hace evidente en el caso de la aplicación del método chino. En la versión del método hindú para resolver problemas de proporcionalidad, si bien se puede decir que había un reconocimiento del proceso de dependencia de la cantidades involucradas en la situación (que se podría denominar como un reconocimiento de la covariación positiva o negativa en uno u otro caso), a partir del cual se tomaba la decisión de aplicar el orden directo o inverso de las operaciones implicadas en la situación de proporcionalidad, el énfasis estaba en la organización espacial (distribución horizontal) de las tres cantidades involucradas en la situación, y no en el reconocimiento de la razón constante (en proporción directa o inversa) que correlaciona las dos magnitudes involucradas en la situación.

5.6.2 Leonardo de Pisa y el trabajo de los árabes: La regla de Tres (c. 800 – c. 1300)

La regla de tres como técnica bien establecida y escrita metódicamente concluye su desarrollo en occidente en la plena edad media y seguramente como fruto de interacciones entre el mundo árabe y el europeo occidental (Oller 2012), esta regla surgió en situaciones prácticas como intercambio de tipos de cereal y transacciones e intercambios. En esta época Fibonnacci (c. 1170 – 1250) escribe el texto Liber Abacci (Leonardo (de pisa), 1202-2003), muy usado y que hizo época, y que consistía en una traducción libre de materiales árabes y griegos al latín, en este texto Fibonnacci aborda el tema de proporcionalidad, particularmente en el capítulo 8 da a conocer los aspectos relativos a la regla de tres (simple, inversa y compuesta). En las primeras líneas del capítulo 8 se lee:

> (…) cuatro números proporcionales siempre se encuentran en todas las negociaciones de los cuales tres son conocidos y uno efectivamente desconocido; el primero de los tres conocidos es el número de cualquier mercancía que se quiere vender, número de unidades, de peso, de medida… [después de dar una serie de ejemplos sobre los tipos de cantidades que pueden expresarse como este primer número continua]. El segundo es el precio de la venta de este primer número … [igualmente da ejemplos de cantidades que pueden representar este segundo número]… El tercer número es alguna cantidad del mismo tipo de mercancía que se desea vender, para la cual se desconoce el precio, a saber, la cuarta cantidad: y este entonces debe ser alguna cantidad de la misma especie que el segundo número… [es decir, es el precio de venta de la segunda cantidad de mercancía]… Por lo tanto, como el número desconocido se puede encontrar a partir de los conocidos, nosotros enseñamos para todas esas situaciones una regla general, a saber… [continua con la descripción verbal de la forma de distribución espacial de las cuatro cantidades en una tabla de dos por dos, tal como lo hacemos hoy en día (ver figura 516), haciendo énfasis en que las cantidades que quedan en la misma columna deben ser de la misma naturaleza (cualidad o cantidad).]… Así escritas [las cantidades] es evidente que dos de los números escritos son siempre opuestos por la diagonal, y si uno se multiplica por el otro, y el producto de la multiplicación es dividido por el tercer número restante, entonces la cuarta cantidad desconocida, puede ser efectivamente encontrada. (Leonardo (de Pisa), 1202/2003, pp. 127-128).

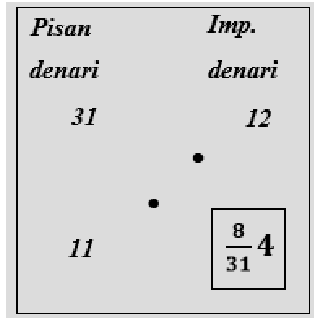


Figura 5.16. Regla de tres (Leonardo de Pisa, 1202/1872, p. 104).

El algoritmo presentado se basa, entonces, en la figura que se obtiene de distribuir las cantidades de acuerdo a las instrucciones dadas. Esta forma de representación espacial de las cantidades es utilizada sistemáticamente en todos los ejemplos (más de cuarenta páginas) en los que explica el funcionamiento de la regla de tres para diferentes sistemas monetarios, diferentes sistemas de pesos y medidas, y para diferentes tipos de números: enteros y fraccionarios. Según Obando (2015) se pueden hacer tres comentarios con relación a lo expuesto por Fibonnaci: (a) la forma de interpretar las cantidades es similar a la que presentaron los matemáticos hindúes: la primera es una causa, la segunda un efecto, la tercera es otra causa, y la cuarta su efecto. De estas cuatro, tres son conocidas y una es la que se debe buscar. Además, tal como lo hicieron los matemáticos árabes, reconoce que las cuatro cantidades pertenecen a dos tipos de magnitudes, y la forma de organización espacial de las cuatro cantidades obedece a este reconocimiento de la naturaleza de tales cantidades.

Pero lo más importante es el énfasis de Leonardo por hacer manifiesta no solo la relación de dependencia de las cantidades dadas, sino por afirmar que las cuatro cantidades son proporcionales entre sí. (b) La forma de organización de las cantidades introduce una técnica innovadora: la organización espacial en una tabla de doble entrada, lo cual no solo permite identificar con precisión la naturaleza de cada una de las cantidades involucradas (como se dice modernamente, identifica los dos espacios de medida de las cantidades involucradas), sino que la cantidad desconocida es representada en el esquema por un cuadro vacío el cual se llena después de realizar los cálculos (en este punto hay una diferencia fundamental con la regla de tres heredada de los hindúes). Por la forma de organización de las cantidades en una tabla de dos columnas, Leonardo fácilmente muestra que no importa cuál de las cantidades sea la desconocida, ya que siempre la multiplicación de las dos cantidades conocidas en extremos opuestos de la diagonal, dividido por la otra cantidad, da como resultado la cuarta cantidad. (c) Finalmente, el algoritmo introducido, similar al que utilizamos hoy en día, se basa en la figura que se obtiene de la representación espacial de las cantidades, y en ese sentido descarga la mente de una serie de consideraciones necesarias para tener éxito en la utilización de la regla de tres, heredada de los indo-árabes, en donde la distribución de las cantidades se hacía linealmente.

5.6.2.1 Problema 5. Compraventa de huevos (c. 1170 – c. 1250)

Se presenta a continuación un problema relacionado con la compraventa de huevos y el beneficio obtenido, este problema se da a conocer en Oller (2012) y su solución permite comprender el uso de los objetos razón y proporción desde un contexto comercial.

> Un hombre compra 7 huevos por un denario y vende 5 huevos por un denario y su beneficio es de 19 denarios; se pretende averiguar cuánto invierte en huevos. (p. 59).

5.6.2.2 Prácticas matemáticas asociadas a la solución del Problema 5

Según Oller (2012), para solucionar el problema no existe una regla concreta, por tanto, para resolverlo se debía aplicar el ingenio y finalmente la regla de tres. A continuación, se da a conocer el posible razonamiento usado por Fibonacci en el texto Liber Abacci para solucionar el problema de los huevos.

> Si se invierten 5 denarios, entonces el hombre compra 35 huevos que venderá por 7 y el beneficio será de 2 denarios Así que todo se reduce a, sabiendo esto, hallar los denarios invertidos para que el beneficio sean los 19 denarios buscados (Oller, 2012, p. 60).

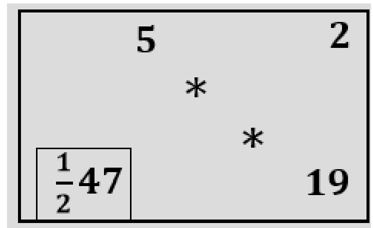


Figura 5.17. Regla de tres para el problema de los huevos (Oller, 2012, p. 60).

5.6.2.3 Configuración epistémica asociada a la solución del Problema 5

Configuración epistémica 5 (CE5): Razón y proporción a través de la regla de tres

La *situación – problema,* consiste en determinar el número de denarios que se deben invertir en la compra de cierta cantidad de huevos para que luego de venderlos genere un beneficio de 19 denarios. En el *procedimiento* usado por Fibonacci, se determina inicialmente la cantidad de huevos que pueden comprarse con 5 denarios, esto es 35 (pudo elegir otra cantidad, pero esta es la más sencilla, el mínimo común múltiplo de 5 y 7), estos 35 huevos al ser vendidos producen un beneficio de 7 denarios, por tanto, se puede *argumentar* que por cada 5 denarios invertidos en la compra se obtiene un beneficio de 2 denarios en la venta.

En la *situación – problema,* se reconoce el uso de dos cantidades que son proporcionales: inversión y beneficio y a través de su relación se establece una comparación entre cuatro expresiones donde una es desconocida, a saber: 5 huevos es a 2 denarios, como x huevos es a 19 denarios, de esta relación de razones emergen dos *propiedades* de la proporcionalidad: (a) Si el número de alguna cantidad de inversión es al número de la cantidad del beneficio, entonces cualquier otra cantidad de la misma inversión es al número de su beneficio,(b) Si cualquier cantidad de inversión es a cualquier cantidad de la misma inversión, entonces el beneficio de una es al beneficio de la otra.

Las anteriores *propiedades* son *representadas* por Fibonacci, mediante una organización espacial de cantidades en una tabla como se evidencia en la figura 5.17, esta representación tabular en el lenguaje simbólico actual estaría dado por la expresión $\frac{5}{x} = \frac{2}{19}$, donde 5 es la primera cantidad, x la segunda cantidad, 2 la tercera cantidad y 19 la cuarta cantidad, esta representación simbólica objetiva el uso de la igualdad de dos razones tanto homogéneas como heterogéneas que son el fundamento epistemológico de la *expresión* “el producto de extremos es igual al producto de medios” usada con mucha frecuencia por los profesores de matemáticas para enseñar “la propiedad fundamental de las proporciones”.

Con base en la proporcionalidad establecida entre las cantidades (inversión – beneficio) y la organización espacial de las mismas es posible establecer que si desconoce la segundad cantidad x entonces esta es el resultado de la primera cantidad multiplicada por la cuarta y dividida por la segunda, permitiendo deducir que se deben invertir $47\frac{1}{2}$ denarios en la compra de huevos para obtener un beneficio de 19 denarios. Según Obando (2015), la forma en que Fibonacci resolvía las situaciones – problemas estaban siempre argumentados en la comparación de cantidades homogéneas y heterogéneas, en tanto que las cuatro cantidades involucradas son proporcionales entre sí (bien sea, comparando las dos parejas de cantidades homogéneas, o comparando las dos parejas de cantidades heterogéneas), lo que le permite aplicar los *teoremas* de las proporciones ya demostrados para la aritmética y la geometría (se refiere a los libros V y VII de los Elementos).

Según Obando (2015), se tiene, entonces, a partir del trabajo de Leonardo, ahora sí, lo que se podría llamar la versión moderna de la regla de tres: una forma de *representación espacial* de las cantidades, organizadas en dos columnas según la naturaleza de las cantidades, con un *algoritmo* igual al que conocemos hoy en día, basado en dicha organización espacial, pero a la vez, el reconocimiento de que este *algoritmo* funciona bien en todos los casos posibles en virtud de que las cuatro cantidades involucradas son proporcionales entre sí.

Sin embargo, aún no se puede hablar de proporcionalidad en el sentido moderno. La regla de tres, con toda la justificación teórica que ahora posee, precisamente tiene el poder de permitir el tratamiento de situaciones de proporcionalidad directa, sin la necesidad de reconocer de manera explícita la función lineal que modela este tipo de situaciones, en tanto el reconocimiento de la proporción entre las cuatro cantidades permite operar con ellas sin que sea necesario hacer explicita la constante de proporcionalidad, la cual permite precisamente el proceso contrario: tratar situaciones de proporcionalidad, sin que sea necesario reconocer explícitamente la proporción entre las cantidades involucradas como fue el caso de los babilonios (c. 3000 a. C – 1600 a. C.).

Con la anterior caracterización se observa que la regla de tres es una forma de tratar con problemas de proporcionalidad directa, cuando las cantidades involucradas son homogéneas. La razón constante que define las tasas de intercambio de cantidades de un tipo en cantidades del otro, es una especie de transformador lineal que, aplicado sobre una cantidad produce la otra. En las técnicas a partir de las cuales se resolvían este tipo de problemas en la antigua China (c. 300 a. C – c. 300 d. C.) o Babilonia (c. 3000 a. C – c. 1600 a. C.), esta función de la razón como regla de intercambio, como transformador lineal era más explícita que en las versiones mnemotécnicas de la regla de tres que heredamos de los hindúes. Pero esto no quiere decir que en la regla de tres no esté como fondo conceptual la razón como transformador, baste para ello, ver las extensas explicaciones que da Fibonacci mostrando que el soporte conceptual del método de la regla de tres está en la teoría de razones y proporciones de los libros V y VII de los Elementos de Euclides) (Obando, 2015).

5.7 Período 6. La proporcionalidad en Europa (c. 1600 – c. 1800)

La función lineal como noción unificadora de la proporcionalidad

Los objetos matemáticos estudiados adquieren un significado unificado con la noción de función lineal. Esta noción es un modelo que sintetiza diversos lenguajes, situaciones, expresiones y fenómenos. La función lineal puede considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de la proporcionalidad. “La función lineal representa la estructura de la proporcionalidad, sirve para visualizar los diferentes estados de variación, es decir expresa su comportamiento cualitativo” (Fiol y Fortuny 1990, p. 83).

La proporcionalidad entre dos magnitudes puede interpretarse bajo el concepto de función como una cantidad variable que depende de otra cantidad variable. Esta definición del concepto función fue dada en 1749 por Leonhart Euler, en ella están implícitos los tres aspectos que caracterizan a la noción de función: variación, dependencia, y correspondencia. En este sentido se pone de manifiesto, la esencia del concepto de proporcionalidad como correspondencia específica entre cantidades conservándose invariante la noción de razón (Fiol y Fortuny 1990, p. 83).

El concepto de función emerge del estudio de los fenómenos de la naturaleza a través de trabajos deductivos, matemáticos y experimentales como los realizados por Copérnico (1473 – 1543), Galileo Galilei (1564-1642), Kepler (1571 – 1630), Huygens (1629 – 1695), Descartes (1596 – 1650), Newton, (1643 – 1727), Leibniz (1646 – 1716) entre otros, estos personajes de la historia redefinieron los objetivos de la actividad científica de los griegos y medievales. Descartes, estaba convencido de que todos los fenómenos podían ser descritos matemáticamente a través de las propiedades fundamentales de la materia: forma, extensión y movimiento, por su parte Galileo como Huygens y Newton consideraban que, aunque la observación y la experimentación de los fenómenos era necesaria, la parte matemática deductiva tenía una importancia mayor que la experimental, esta forma de pensar dio paso a un método científico, que rompió radicalmente con lo especulativo y lo místico a favor de una visión de la naturaleza mecánica y matemática (Kline, 1972).

Galileo, como Descartes, estaba convencido de que la naturaleza estaba diseñada matemáticamente y que podía ser explicada a través de lenguaje de los símbolos: triángulos, circunferencias, y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender lo que sucede en la naturaleza, Galileo propuso el empleo de los experimentos para comprobar las conclusiones de sus razonamientos, así como para obtener principios básicos, aunque muchos de los llamados experimentos de Galileo eran en realidad experimentos mentales, es decir, confiaba en la experiencia común para imaginar lo que ocurriría si se realizará un experimento.

Galileo introdujo afirmaciones cuantitativas ya no tanto cualitativas como lo habían hecho los aristotélicos y el mismo Kepler, por ejemplo, dio a conocer la afirmación de que la velocidad (en pies por segundo) con la que cae una bola es 32 veces el número de segundos que ha estado cayendo o, en símbolos, $v = 32t$. Esta es una afirmación cuantitativa acerca de cómo cae una bola, mas no explicativa, pero si permitía describir el cambio de la velocidad con el tiempo. Galileo, estudio un conjunto de conceptos nuevos, los cuales además eran medibles, de modo que podían relacionarse mediante fórmulas, algunos de ellos son: distancia, tiempo, velocidad, aceleración, fuerza, masa y peso (Kline, 1972).

Los estudios cuantitativos del movimiento realizados por Galileo dieron a las matemáticas un concepto fundamental, que fue central en prácticamente todo el trabajo de los siguientes doscientos años: el concepto de función o relación entre variables. Esta nueva noción de función se encuentra en el libro *Dos nuevas ciencias* escrito por Galileo en el que se fundó la mecánica moderna. Galileo expreso sus relaciones funcionales en palabras y en lenguaje de las proporciones. Así, en su trabajo sobre la resistencia de materiales, afirma: “las áreas de dos cilindros de volúmenes iguales, despreciando las bases, están una con respecto a otra en una razón que es la raíz cuadrada de la razón de sus longitudes”. En otra parte “los volúmenes de cilindros rectos cuyas superficies curvas son iguales son inversamente proporcionales a sus alturas” (Kline, 1972, p. 430-443).

En su trabajo sobre el movimiento establece, por ejemplo, que “los espacios descritos por un cuerpo que cae desde el reposo con un movimiento uniformemente acelerado están, unos con respecto a otros, en relación de los cuadrados de los intervalos de tiempo empleados en atravesar estas distancias”. “los tiempos de descenso a lo largo de planos inclinados de la misma altura, pero de diferentes pendientes, están unos con respecto a los otros en la relación de las longitudes de estos planos” (Kline, 1972, p. 430-443). Este lenguaje muestra claramente el uso de variables y funciones. Como el simbolismo del algebra se estaba extendiendo en ese momento la afirmación de Galileo sobre los espacios descritos por un cuerpo que cae pronto se escribió como $s = kt^2$ y su afirmación sobre los tiempos de descenso como $t = kl$. En relación al lenguaje matemático, la palabra función fue usada por Leibniz (1714) en su libro *Historia* para significar cantidades que dependen de una variable, introduciendo además la palabra constante, variable y parámetro esta última utilizada en conexión con una familia de curvas, la notación $f(x)$ fue introducida por Euler (1734), y Leibniz (1714) propuso usar las expresiones x^1, x^2 para funciones de x, utilizando el superíndice cuando se tratara con varias funciones. “El concepto de función se convertiría finalmente en el centro de las matemáticas que daría origen al cálculo diferencial e integral” (Kline, 1972, p. 443-449).

5.7.1 Problema 6: Caída libre de un cuerpo (c. 1600 – c. 1800)

Gran parte de los conocimientos que si tienen sobre la física de los cuerpos en caída libre se deben a Galileo Galilei (1564-1642), él fue el primero en deducir que, en ausencia de fricción, todos los cuerpos, grandes o pequeños, pesados o ligeros, caen a la tierra con la misma aceleración. Antes de la época de Galileo, las personas seguían las enseñanzas de Aristóteles, según las cuales los objetos pesados caían proporcionalmente más rápidos que los ligeros. La explicación clásica de la paradoja radica en el hecho de que los cuerpos pesados son proporcionadamente más difíciles de ser acelerados. Esta resistencia al cambio de movimiento es una propiedad de los cuerpos llamada *inercia*. “Por tanto, en el vacío, una pluma y una bola de acero caerán al mismo tiempo porque el efecto inercial mayor de la bola de acero se compensa exactamente con su mayor peso” (Tippens 2011, p. 121)

A continuación, se presenta un problema relacionado con la caída de una pelota, este problema se encuentra en el libro *Física, conceptos y aplicaciones* de Tippens (2011) y su solución permite comprender la relación de proporcionalidad directa entre la velocidad y el tiempo al caer una pelota que se encuentra en reposo.

Una pelota de hule se deja caer del reposo. Encuentre su velocidad y su posición después de 1, 2, 3 y 4 segundos (p. 122).

5.7.2 Prácticas matemáticas asociadas a la solución del Problema 6

La solución que se presenta a continuación es dada a conocer por Tippens (2011), en ella se desprecia totalmente los efectos de la fricción debida al aire. Desde esta perspectiva, la aceleración gravitacional corresponde a un movimiento uniformemente acelerado. Dicha aceleración es de 32.17 ft/s^2, aproximadamente 9.80 m/s^2 y se representa con g. Además, todos los parámetros se miden hacia abajo, por tanto, es practico elegir la dirección descendente como positiva, de forma que aquéllos parámetros resulten positivos.

La velocidad hacia abajo en función del tiempo es $v_f = v_0 + gt$, donde $v_0 = 0$.

$$v_f = v_0 + gt = 0 + gt$$
$$= (9.80\ m/s^2)t$$

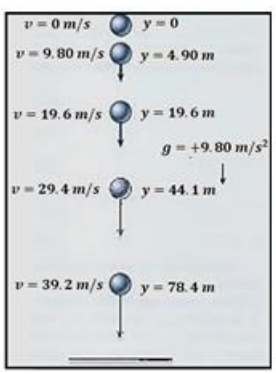
Después de 1 s tenemos: $v_f = (9.80\ m/s^2)\ (1\ s) = 9.80\ m/s)$. Con las sustituciones para $t = 1, 2, 3, 4$ s se obtienen velocidades finales de 19.6, 29.4 y $39.2\ m/s$, respectivamente.

El desplazamiento en función del tiempo se calcula a partir de la ecuación $y = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$. Como la velocidad inicial es 0 escribimos $y = v_0t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$.

Después del tiempo de $1\ s$, el desplazamiento descendente será $y = \frac{1}{2}(9.80\ m/s^2)\ (1\ s)^2 = 4.90\ m$.

Cálculos semejantes para $t = 2, 3$ y 4 producen desplazamientos de $19.6, 44.1$ y 78.4 m respectivamente.

La velocidad y posición de la pelota después de 1, 2, 3 y 4 s, se representan en la figura 5.18. (Tippens 2011, p. 122)



Tiempo t, s	Velocidad al final del tiempo t, m/s	Desplazamiento al final del tiempo t, m
0	0	0
1	9.80	4.90
2	19.6	19.6
3	29.4	44.1
4	39.2	78.4

Figura 5.18. Velocidades y desplazamientos de una pelota arrojada desde el reposo (Tippens 2011, p. 122).

5.7.3 Configuración epistémica asociada a la solución del Problema 6

Configuración epistémica 6 (CE6): Proporcionalidad – sistemas de cambio

La *situación-problema* refiere en notación moderna a los *procedimientos, conceptos, propiedades* y *argumentos* que usó Galileo para establecer la siguiente afirmación: "los espacios descritos por un cuerpo que cae desde el reposo con un movimiento uniformemente acelerado están, unos con respecto a otros, en la relación de los cuadrados de los intervalos de tiempo empleados en atravesar esas distancias" (Kline 1972, pp. 446-447). Particularmente, el *problema* propuesto por Tippens (2011), corresponde a determinar la velocidad y la posición de una pelota de hule que se deja caer del reposo después de 1, 2, 3 y 4 segundos. En la solución se observa el uso de cinco *conceptos* generales presentes en el movimiento uniformemente acelerado, a saber: velocidad inicial (v_0), velocidad final (v_f), aceleración $g = +9.80\,m/s^2$, tiempo (t) y desplazamiento (y), es de mencionar que en los problemas de aceleración uniforme; tanto el desplazamiento, la velocidad y la aceleración, son interdependientes, y el signo de cada uno se determina por criterios distintos, es decir, el signo de la velocidad se determina por la dirección del movimiento mientras que el signo del desplazamiento depende de la ubicación o la posición del objeto y el signo de la aceleración queda determinado por la fuerza que hace que la velocidad cambie.

En la *situación-problema* se observa que la velocidad hacia abajo depende del tiempo y que la velocidad inicial de la pelota al caer es cero, por tanto, la *expresión* que permite hallar la velocidad en 1, 2, 3 y 4 segundos este dada por $v_f = gt$, en esta *expresión matemática* es objetivado el *concepto* aceleración gravitacional el cual corresponde a un movimiento uniformemente acelerado; dicha aceleración es aproximadamente $9.80\ \mathrm{m/s^2}$ y se representa con la letra g. Esta cantidad física permite correlacionar de forma directamente proporcional a la velocidad final de la pelota y al tiempo, y actúa como un *transformar lineal* que al ser aplicado a distintas cantidades de tiempo $\mathrm{t} = 1, 2, 3, 4\ \mathrm{s}$ permite obtener distintas velocidades finales: $0,\ 9.80,\ 19.6,\ 29.4$ y $39.2\ \mathrm{m/s}$, respectivamente. Según Fiol y Fortuny (1990, p. 83-84) en este tipo de situaciones – problemas están implícitos los tres *conceptos* que caracterizan la noción de función: variación, dependencia y correspondencia. En este sentido se pone de manifiesto, la esencia del *concepto* de proporcionalidad como correspondencia específica, entre cantidades conservándose invariante la noción de razón (aceleración gravitacional). Los valores correlacionados a través de la *expresión* $v_f = gt$ generan pares de números (t, v_f) que al ser ubicados en un plano cartesiano permiten obtener una línea recta que pasa por el punto de coordenadas $(0, 0)$. En la solución se observa que el desplazamiento de la pelota esta correlacionado con el tiempo, dicha correlación es representada simbólicamente con la *expresión matemática* $y = \frac{1}{2}gt^2$, donde al sustituir t por $1, 2, 3, 4$ segundos se obtienen los desplazamientos $0, 4.90, 19.6, 44.1,$ y 78.4 metros respectivamente.

5.8 Significado global de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad

La identificación, caracterización y análisis de los sistemas de prácticas que permitieron dar solución a los problemas – fenómenos, emergentes de situaciones cotidianas y científicas de la humanidad, en diversas etapas históricas, han permitido reconstruir el significado global de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad. Cada sistema de prácticas tiene vinculada una configuración epistémica que está compuesta de la tipología de objetos primarios propuesta en el EOS: situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos.

La herramienta configuración epistémica proporcionada por el EOS ha permitido caracterizar de forma sistemática los significados parciales de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad. Cada una de las configuraciones epistémicas lleva asociado un significado parcial; en el presente estudio se identificaron seis configuraciones epistémicas para los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad: 1) Razón como relator – transformador y proporción a través de comparación de áreas (CE1); 2) Razón como relator –operador y proporción a través de razonamientos por analogía (CE2); 3) Razón y proporción a través de la antanairesis (CE3); 4) Razón como correlator – transformador y proporción a través de razonamientos analíticos (CE4); 5) Razón y proporción a través de la regla de tres (CE5) y 6) Proporcionalidad – sistemas de cambio (CE6).

El esquema de la Figura 5.19 da a conocer los significados parciales identificados, cada uno de ellos asociado a su respectiva configuración epistémica. De igual forma, dicho esquema muestra la relación entre algunas configuraciones de acuerdo a su nivel de generalización, así como la ubicación de la configuración en una línea de tiempo de acuerdo con su desarrollo histórico. El esquema de la Figura 5.19 muestra algunas conexiones entre configuraciones. Estas conexiones, representadas por una línea discontinua, indican que con los elementos de dicha configuración es posible resolver algunas situaciones – problemas de otra configuración. Particularmente, la sexta configuración epistémica (CE6), es intensiva por sus conexiones a otros sistemas de prácticas indistintamente del tiempo histórico en que se encuentran, dado que con los elementos de (CE6), se pueden resolver algún tipo de problemas de los sistemas de prácticas que llevan asociadas las configuraciones CE2, CE4 y CE5, respectivamente. Por otra parte, el esquema de la Figura 5.19, da a conocer la evolución, respecto de los elementos y características, de las configuraciones epistémicas y, por ende, de los diversos significados de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad a través del tiempo.

Lo anterior se indica con conexiones de líneas continuas. Esta evolución da a conocer que una nueva configuración, toma elementos de una configuración establecida, dando paso a la nueva configuración. En el presente estudio, son las configuraciones CE2 y CE4 las que toman algunos elementos establecidos en la primera configuración CE1, y la configuración CE5 retoma elementos establecidos en las configuraciones CE2 y CE4, para activar nuevos elementos en dichas nuevas configuraciones, indistintamente de que estas configuraciones estén establecidas en la misma etapa histórica.

El análisis sistemático de las seis configuraciones epistémicas obtenidas a través del estudio histórico – epistemológico es lo que conforma la reconstrucción del significado global de los objetos matemáticos: razón, proporción y proporcionalidad y es dado a conocer en el esquema de la Figura 5.19.

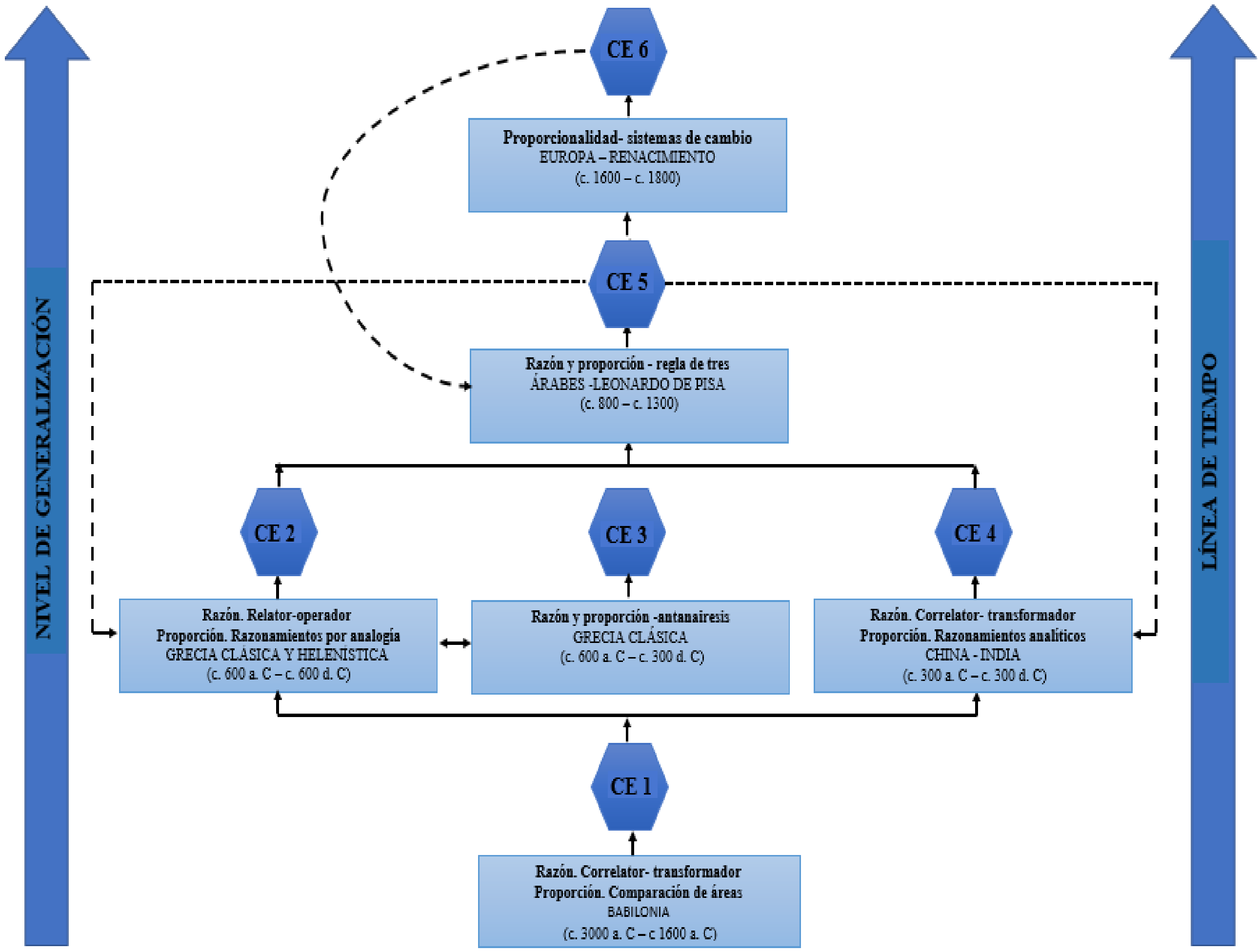


Figura 5.19. Significado global de los objetos: razón, proporción y proporcionalidad (Elaboración propia).

Capítulo 6. Segundo resultado
Análisis epistémico y cognitivo de prácticas matemáticas

Si el maestro enseña al estudiante el resultado,
el estudiante no lo establece por sí mismo
y entonces no aprende matemáticas;
el estudiante no lo hace suyo (no lo posee).
Brousseau (1976)

Este capítulo presenta el análisis epistémico y cognitivo de las prácticas matemáticas: institucionales y personales asociadas a dos situaciones problema. En el análisis epistémico se presenta el diseño de dos situaciones de aprendizaje y se analizan sus soluciones desde la perspectiva del autor (solución institucional) a través de configuraciones epistémicas de objetos primarios propuestos en el EOS. El análisis epistémico se asume como un estudio a priori que permite prever posibles prácticas matemáticas de los estudiantes. El análisis cognitivo refiere a la caracterización de las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver las situaciones de aprendizaje. La caracterización de los significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad se realiza a través de configuraciones cognitivas que permiten analizar la tipología de objetos primarios propuestos en el EOS.

6.1 Análisis epistémico de la Situación – problema 1

La situación problema 1 tuvo como objetivo promover prácticas matemáticas en los estudiantes de grado séptimo que permitieran emerger significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad – RPP. En el diseño de la situación se consideran tres preguntas relevantes, cada pregunta con un propósito específico; la Pregunta 1 pretendió indagar por los conocimientos de los estudiantes en relación al significado geométrico de pi (π) como razón; la Pregunta 2 pretendió indagar por los conocimientos de los estudiantes cuando construyen una expresión algebraica para relacionar el perímetro y el diámetro del círculo, y finalmente, la Pregunta 3, pretendió indagar por el uso que dan los estudiantes a los objetos RPP al argumentar la forma de construir una tabla y una gráfica que relaciona el perímetro y el radio del círculo. A continuación, se presenta la Situación Problema 1.

6.1.1 Situación de aprendizaje 1

Situación – problema 1. Construcción del Modelo Matemático que relaciona el radio y el perímetro del círculo

Medir el contorno y el diámetro de cinco objetos que tengan forma circular (CD, moneda, tapa, balde, plato, etc.). De acuerdo a la información obtenida de los objetos circulares completar la tabla y contestar las preguntas 1 a 3.

Objeto circular	Medida del contorno o perímetro	Medida del diámetro	Razón entre el perímetro y el diámetro

Preguntas.

1. ¿Existe alguna relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular? ¿Si, no, por qué?
2. ¿Se puede hallar el perímetro de cualquier objeto circular conociendo la medida de su diámetro? Justificar la respuesta.
3. Completar la tabla según los radios indicados, luego realizar una gráfica que relacione los datos. ¿Qué puedes concluir de la gráfica?

$\boldsymbol{Radio\ (cm)}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{Perimetro\ (cm)}$						

6.1.2 Solución institucional asociada a la situación de aprendizaje 1

Para solucionar la pregunta 1 ¿Existe alguna relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular? ¿Si, no, por qué?, el autor propone la siguiente secuencia de prácticas matemáticas.

Solución Institucional. Se completa la tabla propuesta en el problema con los perímetros y las medidas de los diámetros de cinco objetos circulares como se muestra a continuación:

Tabla 6.1
Perímetros y diámetros de objetos circulares, situación – problema 1

Objeto circular	Perímetro	Medida del diámetro	Razón entre el perímetro y el diámetro
Boca de Vaso plástico	23,6 cm	7,3 cm	3,2328767123…
Tapa de gaseosa	8,9 cm	2,8 cm	3,17857142286…
Moneda de $100	6,6 cm	2cm	3,3
CD	39,1 cm	11,9 cm	3,2857142857…
Boca de una caneca de basura	92 cm	30 cm	3,06666666666…

Fuente (Elaboración propia).

Al analizar los datos obtenidos de la tabla es posible concluir que, si existe relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular, porque:

La razón entre el perímetro (P) y el diámetro (D) de un círculo es igual a pi (π). Simbólicamente: $\frac{P}{D} = \pi$.

El perímetro (P) del circulo es pi (π) veces el diámetro (D). Simbólicamente: $P = D \cdot \pi$

La razón entre el perímetro y el número π es igual al diámetro . Simbólicamente es: $\frac{P}{\pi} = D$.

Prácticas matemáticas asociadas a la solución de la Pregunta 2

¿Se puede hallar el perímetro de cualquier objeto circular conociendo la medida de su diámetro? ¿Si, no, por qué?

Solución institucional. Sí, multiplicando la medida del diámetro por pi ($\boldsymbol{\pi}$). Simbólicamente: $\mathrm{P} = \mathrm{D} \cdot \pi$

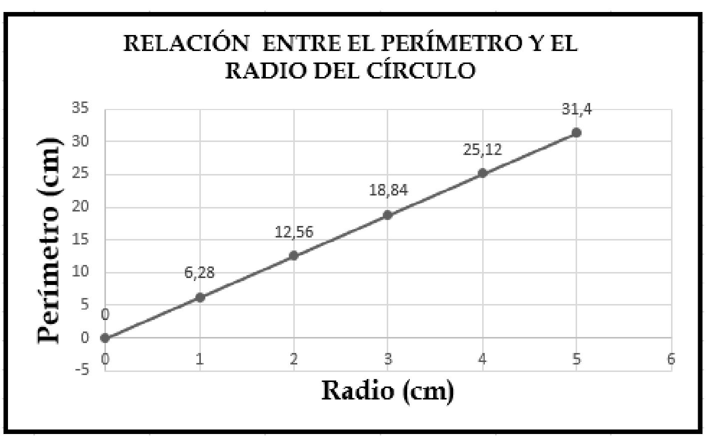
Prácticas matemáticas asociadas a la solución de la pregunta 3

Completar la tabla según los radios indicados, luego realizar una gráfica que relacione los datos. ¿Qué puedes concluir de la gráfica?

Solución institucional. La tabla se completa al multiplicar el diámetro (dos veces el radio) por pi (π), los perímetros aproximados se obtiene al multiplicar el diámetro por 3,14 (valor aproximado de pi (π)).

$\boldsymbol{Radio\ (cm)}$	0	1	2	3	4	5
$\boldsymbol{Perímetro\ (cm)}$	0	$2\pi \approx 6{,}28$	$4\pi \approx 12{,}56$	$6\pi \approx 18{,}84$	$8\pi \approx 25{,}12$	$10\pi \approx 31{,}4$

Gráfica que relaciona los datos de la tabla:



Conclusión: la gráfica corresponde a una función lineal o de proporcionalidad directa de la forma $P(r) = 2\pi \cdot r$, la expresión "r" representa valores que pueden asignarse al radio de diferentes círculos (variable independiente), la expresión $P(r)$ indica que el perímetro depende del radio (variable dependiente) y la pendiente de la recta o constante de proporcionalidad es 2π.

6.1.3 Configuración epistémica asociada a la situación de aprendizaje 1

A continuación, se caracteriza la tipología de objetos primarios emergentes de las prácticas matemáticas propuestas por el autor (solución institucional).

Elementos lingüísticos
Los elementos lingüísticos considerados pueden ser términos y expresiones matemáticas tales como: lenguaje matemático, palabras o términos, notaciones, diagramas o dibujos entre otros. **¿Existe alguna relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular?** Se refiere a una acción de comparación entre el perímetro del circulo y el diámetro o entre el diámetro y el perímetro del círculo, con el propósito de establecer una aproximación a pi (π). **¿Se puede hallar el perímetro de otro objeto circular conociendo la medida de su diámetro?** Se refiere a encontrar un modelo matemático que permita determinar el perímetro de cualquier círculo a partir de su diámetro. **Completar la tabla con los perímetros de cada círculo según el radio indicado. S**e refiere a colocar en funcionamiento el modelo matemático que permite hallar el perímetro de cualquier círculo al conocer su radio. **Realizar una gráfica que relacione los datos de la tabla.** Se relaciona con la representación de datos para analizar los comportamientos de proporcionalidad y establecer hipótesis relacionadas con el perímetro y el radio del círculo. **¿Qué puedes concluir de la gráfica?** Comprende generar argumentos explicativos de generalización relacionadas con la proporcionalidad directa. **Razón entre el perímetro y el diámetro. I**ndica el número de veces que esta contenido el diámetro en la circunferencia. Simbólicamente se representa con la expresión: $\frac{P}{D} = \pi$ **Razón entre el perímetro y el número pi ($\boldsymbol{\pi}$).** Indica que el diámetro es $\frac{1}{\pi}$ veces la circunferencia. Simbólicamente se representa con la expresión: $\frac{P}{\pi} = D$.

Representación tabular. Ordenamiento de números en filas y columnas que facilita la interpretación de la información o toma de decisiones sobre un fenómeno específico.
Hallar. Inventar o descubrir una forma de determinar el perímetro de un circulo conocido su diámetro.

Conflictos relacionados con los elementos lingüísticos:

- Obtener medidas que no se aproximan al número pi(π) generando dificultades en hallar una constante de proporcionalidad directa (se establece como una aproximación para pi, el valor que va desde 3 hasta 3,3).
- Conflictos al hallar la razón entre el perímetro y el diámetro.
- No establecer un modelo matemático que relacione el radio y el perímetro del círculo.

Conceptos

Los conceptos son entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición formal. A continuación, se dan a conocer algunos conceptos con sus significados de referencia asociados.

Medida. Cantidad que resulta de medir una magnitud.
Circunferencia. Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo llamado centro. Hace referencia al contorno del círculo.
Círculo. Es el lugar geométrico de los puntos contenidos en el interior de la circunferencia.
Relación. Correspondencia o conexión que hay entre dos o más cosas.
Razón. La razón expresa, cuantifica, la comparación multiplicativa, llamada por “cociente”, entre esas dos cantidades (cuanto es de, o cuantas veces está contenido en, o cuantas unidades de… por cada unidad de…)
Perímetro. Medida del contorno de una figura, el contorno refiere a los bordes o límites de una superficie.
Diámetro del círculo. Segmento de recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de la circunferencia.
Gráfica. Tipo de representación de datos, generalmente numéricos, mediante recursos visuales (líneas, vectores, superficies, volúmenes o símbolos).
Variable dependiente e independiente. Las variables dependientes representan el producto o resultado cuya variación se está estudiando. Las variables independientes, también conocidas en un contexto estadístico como regresores, representan insumos o causas, es decir, razones potenciales de variación. En un experimento, cualquier variable que el experimentador manipule puede denominarse variable independiente.
Función lineal. Función polinómica de grado uno, que pasa por el origen de coordenadas. Su representación gráfica en el plano es una línea recta y su representación algebraica es $f(x) = mx$

Pendiente de la recta. Determina la inclinación de la recta: la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas, el número que multiplica a la "x" en la formula $f(x) = mx$, aumento de la variable dependiente por unidad de la variable independiente.
Constante de proporcionalidad. Familia de razones proporcionales.

Conflictos relacionados con los conceptos

- Conflictos al comprender algunos significados de razón, perímetro, diámetro o radio.
- La constante de proporcionalidad pi(π) no es usada para hallar el perímetro de un círculo conocido su radio o diámetro.

Procedimientos

Los procedimientos refieren a técnicas, algoritmos, y operaciones. A continuación, se dan a conocer algunos procedimientos con sus significados asociados.

Razón. La razón expresa, cuantifica, la comparación multiplicativa, llamada por “cociente”, entre esas dos cantidades (cuanto es de, o cuantas veces está contenido en, o cuantas unidades de… por cada unidad de…)
Hallar el Perímetro del círculo. Multiplicar el diámetro por el número pi (π). Simbólicamente se representa por la expresión: $P = D \cdot \pi$.
Regla de tres. Algoritmo algebraico (fórmula) que permite plantear y resolver problemas de proporcionalidad donde se desconoce un valor.
Aproximar del número pi ($\boldsymbol{\pi}$). Encontrar un número con determinas cifras que este muy próximo a pi(π). La aproximación puede realizarse por defecto (inmediatamente menor) o por exceso (inmediatamente mayor) a pi(π).
Dividir. Consiste en averiguar cuantas veces un número (el divisor) está contenido en otro número (el dividendo). El resultado de una división recibe el nombre de cociente. De manera general puede decirse que la división es la operación inversa de la multiplicación.

Conflictos relacionados con los procedimientos

- Obtener diferentes resultados al hallar la razón entre el perímetro y el diámetro de los círculos.
- Obtener diferentes resultados al completar la tabla de perímetros.
- Manejar escalas diferentes en el eje "x" y en el eje "y"al realizar la gráfica de proporcionalidad.

Propiedades

Las propiedades refieren a enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba. A continuación, se dan a conocer algunas propiedades con sus significados asociados:

P1. Si se representa con "x" e "y" dos magnitudes correlacionadas directamente entonces la razón $\frac{y}{x}$ es siempre una constante k.
P2. Si se grafican en el plano cartesiano dos magnitudes directamente proporcionales entonces su gráfica será una línea recta de la forma $Y = k \cdot x$

Conflictos relacionados con las propiedades

— Dificultad al hallar la constante de proporcionalidad pi (π).

— Conflictos al construir una gráfica de proporcionalidad directa.

Argumentos

Se refieren a las justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas. A continuación, se dan a conocer algunos argumentos:

Justificación de P1 y P2: para que dos magnitudes mantengan una relación de proporcionalidad directa tienen que estar relacionadas de tal forma que, si duplicamos una, la otra también se duplica, si triplicamos una la otra también se triplica, si reducimos una a la mitad, la otra también se reduce a la mitad y si reducimos una a la tercera parte, la otra también se reduce a la tercera parte etc.

Conflictos relacionados con los argumentos

— Dificultad en establecer una relación de proporcionalidad directa entre el diámetro y el perímetro del círculo.

— Conflictos al establecer la constante de proporcionalidad pi(π)

La configuración epistémica de la situación problema no pretende ser exhaustiva: algunos otros objetos podrían involucrarse, así como la asignación de significados diferentes a los que se consideraron. Este análisis sirve de referencia para identificar los conocimientos de los estudiantes al resolver la situación problema propuesta y también permiten identificar potenciales conflictos de aprendizaje.

6.2 Análisis cognitivo asociado a la situación de aprendizaje 1

Análisis cognitivo de las prácticas matemáticas de los estudiantes

Las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de grado séptimo para solucionar la Situación problema 1 titulada *Construcción del Modelo Matemático que Relaciona el Radio y el Perímetro del Círculo* tuvieron lugar en dos clases de matemáticas, cada una de 50 minutos, en estas clases los estudiantes resolvieron en parejas las preguntas planteadas a través de prácticas operativas y discursivas. En las fotografías de las figuras 6.1 y 6.2 se observan algunas prácticas realizadas por dos parejas de estudiantes.

Figura 6.1. Prácticas matemáticas – estudiantes E3 y E4.

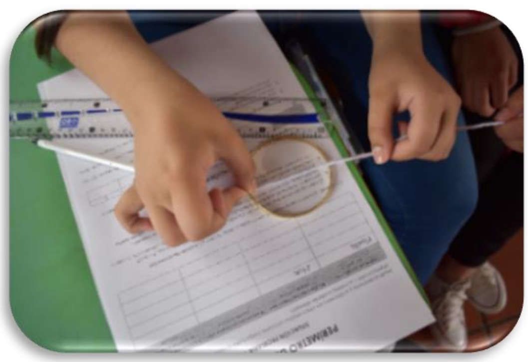


Figura 6.2. Prácticas matemáticas – estudiantes E5 y E6

Configuraciones cognitivas asociadas a las soluciones de la situación problema 1

El análisis de las soluciones dadas por los estudiantes a las preguntas 1, 2 y 3 es realizado a través de las siguientes configuraciones cognitivas: 1) relación entre el perímetro y el diámetro del círculo, 2) modelo matemático que correlaciona el perímetro y el diámetro y 3) gráfica que correlaciona el perímetro con el diámetro. Cada configuración cognitiva permite caracterizar elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos, proposiciones y argumentos puestos en juego por los estudiantes al resolver las preguntas 1, 2 y 3. Finalmente, el análisis sistemático de las tres configuraciones cognitivas permite caracterizar el significado global de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad presentes en las practicas matemáticas sociales (institucionales) compartidas por los estudiantes de grado séptimo.

6.2.1 Configuración cognitiva 1. Relación entre el perímetro y el diámetro del circulo

Elementos lingüísticos

Los estudiantes iniciaron sus prácticas matemáticas hallando la razón entre el perímetro y la medida del diámetro de algunos objetos circulares, como se observa en la tabla de la Figura 6.3.

Nombre del objeto circular	Medida del Perímetro del objeto circular	Medida del diámetro del objeto circular	Razón entre el perímetro y el diámetro del objeto circular
Hilo	6,4 cm	2,4 cm	2,666
Vaso	23 cm	7,6 cm	3,026
recipiente de madera	24 cm	7,5 cm	3,2
gradvodor	31,3 cm	10,7 cm	2,925
CD	37,8	12,5	3,024

Figura 6.3. Mediciones registradas por la pareja de estudiantes E1 y E2

Para completar la tabla los estudiantes midieron el contorno y el diámetro de cinco objetos circulares. El perímetro de los objetos era determinado por los estudiantes al rodear con hilo su contorno, este hilo era estirado y medido con regla, la medida del diámetro era tomada con hilo o de forma directa con la escuadra o con la regla. Con base en las medidas registradas en la tabla los estudiantes contestaron las siguientes preguntas: ¿Existe alguna relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular? ¿Si, no, por qué? La respuesta de una pareja de estudiantes se evidencia en la Figura 6.4.

> Si, ya que el diametro es aproximadamente la tercera parte del perimetro

Figura 6.4. Uso de la expresión: aproximadamente la tercera parte – Estudiantes E5 y E6

En la Figura 6.4 se observa el uso del lenguaje natural y se afirma que si existe relación puesto que “el diámetro es aproximadamente la tercera parte del perímetro”. Otra respuesta suministrada por una pareja de estudiantes consistió en razonar sobre el número de unidades de perímetro por unidad de diámetro como se observa en la Figura 6.5.

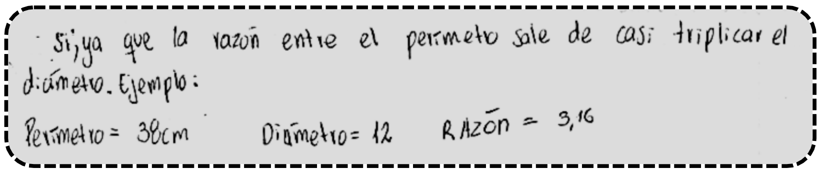


Figura 6.5. Uso de la expresión “el perímetro sale de casi triplicar el diámetro – Estudiantes E3 y E4.

En esta respuesta se da a conocer que el perímetro es aproximadamente tres veces el diámetro, y que la razón se obtiene al dividir el perímetro entre el diámetro. Finalmente, en la Figura 6.6 se observa que otra pareja de estudiantes afirma que sí existe relación entre el perímetro y la medida del diámetro “porque al realizar la respectiva división los resultados empiezan siempre por 3”.

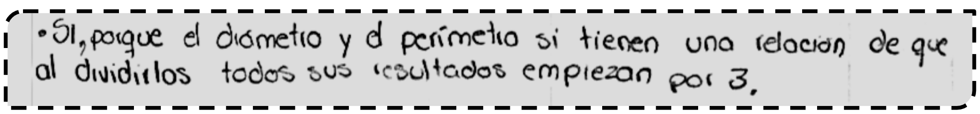


Figura 6.6. Uso de la expresión: todos sus resultados empiezan por 3 – Estudiantes E9 y E10.

En las respuestas de los estudiantes se observa el uso del lenguaje técnico de las matemáticas y el uso del lenguaje común o cotidiano; particularmente en la Figura 6.4 la pareja de estudiantes usa el lenguaje técnico en la expresión “aproximadamente”, para indicar la relación irracional entre el perímetro y la medida del diámetro, mientras que en la Figura 6.5 otra pareja de estudiantes usa el lenguaje común expresado en la palabra “casi ” para indicar el número de veces que se debe multiplicar el diámetro para obtener el perímetro. Según D`Amore (2011, p. 262) el uso del lenguaje de las matemáticas y el lenguaje común son habituales en el aula de clases y es allí donde el estudiante comienza a necesitar en verdad el uso del lenguaje específico de las matemáticas no solo explicativo, sino también formal.

En las producciones escritas evidenciadas en las Figuras 6.4, 6.5 y 6.6 se observa el uso de expresiones como: *tercera parte*, *casi triplicar* y *todos los resultados empiezan por 3*, al respecto

Fiol y Fortuny (1990, p.40) dan a conocer que en las expresiones usadas por los estudiantes la razón cumple una función de medir las magnitudes involucradas: tomar de referencia el diámetro para medir el perímetro o viceversa, de esta forma la razón permite dar respuestas a preguntas como: ¿Cuánto mide el diámetro del circulo en relación a su perímetro? o ¿Cuál es perímetro del circulo en relación a su diámetro? En las expresiones usadas por los estudiantes en las figuras 6.4, 6.5 y 6.6 emerge el significado parcial de la razón denominado: *razón como relator*, puesto que la razón establece una relación entre magnitudes homogéneas de carácter cuantitativo y además expresa la relación parte-todo entre las dos cantidades comparadas.

De otra parte en relación al lenguaje oral usado por los estudiantes se presenta el siguiente dialogo entre el profesor (P) y una pareja de estudiantes (E1 y E2) en el cual se muestra un episodio donde se usa el lenguaje de las matemáticas y el lenguaje natural de forma simultánea, para indicar la relación entre el perímetro y el diámetro del círculo, en este diálogo se observan expresiones como: "el diámetro cabe tres y un poco más en el perímetro", "el perímetro y el diámetro guardan una relación", "el perímetro y el diámetro tienen tamaños relativos", "el perímetro y el diámetro son proporcionales"

Dialogo 1. Transcripción de un diálogo del profesor y los estudiantes E1 y E2. Grabación en audio N° 1, 2019.

1	**P:**	Bueno e… Muchachos, ustedes completaron la tabla, ¿correcto? quiero que me digan ¿existe relación entre el perímetro y el diámetro de cada objeto circular?
2	**E1:**	Pues sí, porque digamos, la razón que hay entre el diámetro y el perímetro da como una aproximación a lo que es pi, esa es como la relación que guarda o pues que vimos que guardan las dos medidas.
3	**P:**	Bueno e… ustedes hallaron la razón entre el perímetro del objeto circular y el diámetro del objeto circular, en cada uno ¿cuánto les daba?
4	**E2:**	Nos daba tres y un poquito más, y pues eso depende de qué tan exacto sea la medida que vamos a usar en el perímetro y en el diámetro, y pues entre más específicos seamos con las medidas pues nos va dando más cifras de pi.
5	**P:**	Bueno… ¿qué significaría ese resultado? <palabras omitidas> ¿qué significa 3,375?
6	**E2:**	¿Es lo que cabe, es el que, en el <uhm> en el perímetro cabe tres veces el diámetro <???>, o sea, el diámetro cabe tres veces y un poco más.
7	**P:**	<palabras omitidas> y ¿creen que eso se va a repetir siempre en los objetos circulares cuando lo comparamos con su diámetro?

8	**E1:**	Sí, porque digamos guarda una proporción, digamos si tú tienes un <…>, o sea, siempre la guarda porque digamos si te fijas acá, o sea es proporcional ¿si me entiendes? si tienes un objeto de este tamaño, pues el perímetro va a ser uno y como que el diámetro va a ser como proporcional <???> también va a ser proporcional a las medidas entonces va a seguir dando como ese tres y un poco más.
9	**P:**	Bueno, explícame ¿tú qué entiendes por proporcional? ya que estás utilizando ese término.
10	**E1:**	Proporcional es digamos cuando <….> es que no sé cómo decirlo, <palabras omitidas> , que digamos, si un objeto es grande sus medidas se van a agrandar y de pronto su área, su diámetro su perímetro se va a agrandar, como que guarda una relación entre todas esas medidas, eso es como lo que entiendo como proporción.
11	**E2:**	Es como el relativo ¿no? También se podría usar ahí.
12	**P:**	Por ejemplo, ¿el relativo qué sería? ¿para expresar qué?
13	**E2:**	Pues la cuestión de tamaños relativos.
14	**P:**	Y ¿qué significa de que tengan tamaños relativos?
15	**E2:**	Porque digamos, digamos yo tengo un cuadrado de dos por dos, si yo lo voy amplificando pues, digamos, digamos cuatro por cuatro y así siempre van guardando como una similitud entre los cuadrados, e… pero digamos no porque yo agrande un lado el área va a seguir siendo siempre la misma, sino que también se va digamos, puede que cuadriplicarse y así entonces va guardando un tipo de relación.

Este episodio, muestra que los estudiantes usan distintas expresiones para referirse a la razón entre el perímetro y el diámetro como se observa en la entrada 2, donde el estudiante (E1) expresa que: la razón puede ser interpretada como una relación cuantitativa que guardan dos medidas y que se aproximan a $pi(\pi)$. En la entrada 6 se observa que el estudiante (E2) usa el lenguaje común para indicar el número de veces que contiene el perímetro al diámetro mediante la expresión cabe “tres y un poco más”.

En este episodio emerge de forma espontánea la palabra “proporcional” con la que el estudiante (E1) da a conocer en la entrada 10, que si un objeto se agranda sus medidas (diámetro y perímetro) se van a agrandar y posiblemente también su área ya que según el estudiante “todas las medidas guardan una relación”, según Inhelder y Piaget (1972) citados por Reyes (2013, p.29), en los argumentos dados por los estudiantes en las entradas 6 y 10 se evidencia un razonamiento cualitativo que puede ser interpretado a través de la expresión “a más-más... a menos-menos”.

Otra expresión que emerge de forma espontánea en el diálogo profesor-alumno es la de “tamaños relativos” evidenciada en la entrada 15 por el estudiante (E2): en esta entrada se observa que el estudiante explica el uso de esta expresión mediante un ejemplo dando a conocer lo que sucede al relacionar áreas de cuadrados que son amplificados: si se duplica el lado de un cuadrado de lados 2×2 su área se cuadruplica. El uso de la expresión “tamaños relativos” se evidencia también en el libro V de los Elementos de Euclides en donde se indica que: “Una razón es una clase de relación con respecto al tamaño entre dos magnitudes de la misma clase” (Heath, 1908, p. 114). En este caso se considera que la expresión “relación con respecto al tamaño” puede ser interpretada como un sinónimo de magnitud relativa. En este episodio se observa en las prácticas discursivas de los estudiantes la emergencia de una diversidad de ejemplos y palabras que son usadas para dar sentido y significado a las expresiones de su lenguaje común; es decir para el estudiante es más cómodo dar ejemplos explicativos que definiciones formales.

Otra respuesta a la pregunta *¿Existe alguna relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular? ¿Si, no, por qué?* evidencia la complejidad que tuvo para una pareja de estudiantes establecer la razón entre el perímetro y la medida del diámetro, como se observa en la Figura 6.7.

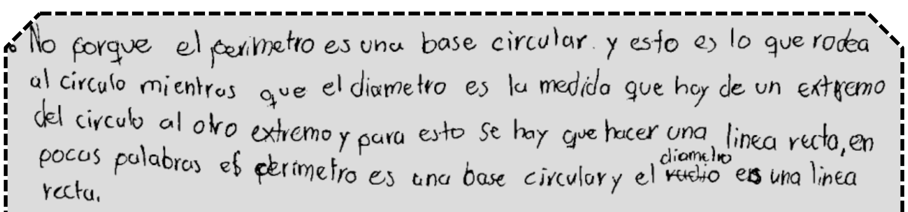

No porque el perimetro es una base circular. y esto es lo que rodea al circulo mientras que el diametro es la medida que hay de un extremo del circulo al otro extremo y para esto se hay que hacer una linea recta, en pocos palabras el perimetro es una base circular y el ~~radio~~ diametro es una linea recta.

Figura 6.7. Justificación para indicar que no hay relación entre perímetro y diámetro – Estudiantes E27 y E28

En esta respuesta la pareja de estudiantes justifica la no existencia de una relación entre el perímetro y el diámetro, argumentando que: “el perímetro es una base circular y el diámetro es una línea recta”, en este tipo de justificación se evidencia que la pareja de estudiantes establece una relación de tipo cualitativo y centra el interés en la comparación de las formas de los objetos: base circular-línea recta, y no en la relación cuantitativa que se puede llegar a establecer entre las medidas de la circunferencia y el diámetro. Según Fiol y Fortuny (1990) este tipo de razonamiento cualitativo tiene su origen en el significado asignado a la palabra relación (razón), ya que en el contexto cotidiano del estudiante (no escolar) esta palabra presenta diversos sinónimos que posiblemente lo pueden llevar a realizar comparaciones centradas en características cualitativas de los objetos. Otra posible interpretación a la respuesta dada por la pareja de estudiantes refiere a que la situación propuesta genera incertidumbre en los estudiantes; ya que al hallar la razón entre el perímetro y la medida del diámetro de los círculos no se obtienen regularmente valores cercanos a $pi(\pi)$, lo que impide el reconocimiento de algún patrón constante, llevando al estudiante a no lograr establecer una relación cuantitativa entre el perímetro y el diámetro.

Procedimientos

Los estudiantes usaron operaciones, y técnicas de cálculo que fueron representadas a través del lenguaje natural, numérico y algebraico. En la Figura 6.8 se observa que una pareja de estudiantes explica a través del lenguaje natural las operaciones que realizó; para justificar la existencia de algunas relaciones entre el perímetro y la medida del diámetro indicando que para obtener el perímetro se debe multiplicar la razón y el diámetro y además explica que al dividir el perímetro con el diámetro se encuentra la razón.

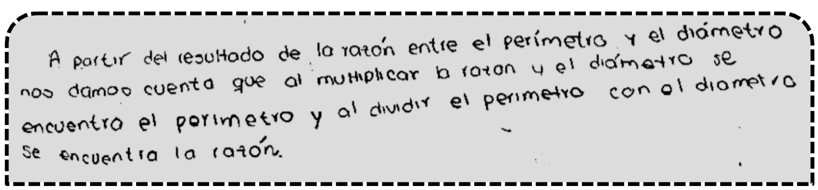

A partir del resultado de la razón entre el perímetro y el diámetro nos damos cuenta que al multiplicar la razon y el diámetro se encuentra el perimetro y al dividir el perimetro con el diametro se encuentra la razón.

Figura 6.8. Justificación para indicar que no hay relación entre perímetro y diámetro – Estudiantes E15 y E16

En el anterior procedimiento se observa el uso del significado parcial de la razón, denominado: *razón como operador*, dado que la razón expresa un factor de ampliación o reducción, que al ser aplicada sobre el diámetro produce el perímetro. En este sentido, otra pareja de estudiantes evidencia la relación entre el perímetro y el diámetro usando el lenguaje numérico y el algebraico como se observa en los procedimientos realizados en la Figura 6.9.

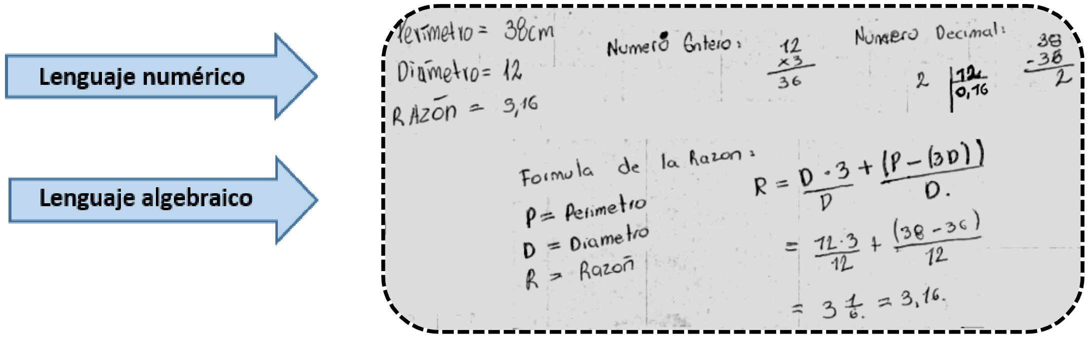


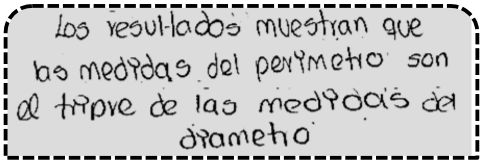
Figura 6.9. Lenguajes natural y algebraico usado para hallar un valor aproximado de pi(π) – Estudiantes E11 y E12

En la respuesta, los estudiantes usan un ejemplo donde el perímetro del circulo era de $38\ cm$, y el diámetro $12\ cm$ para hallar su respectiva razón que corresponde a $3{,}16$ (cantidad sin unidades), además se observa que los estudiantes obtienen la parte entera de la razón al multiplicar 3 por 12 y la parte decimal al dividir el residuo 2 entre 12, estos procedimientos numéricos llevan a los estudiantes a usar el lenguaje algebraico para tratar de generalizar la razón del perímetro y el diámetro obteniendo finalmente un valor de $3\frac{1}{6}$.

En relación al valor numérico obtenido por la pareja de estudiantes Fiol y Fortuny (1990, p. 58) indican que Arquímedes (237 a 218 a.C.) en su obra “La Medida del Círculo” dio a conocer que el perímetro de todo circulo vale el triple del diámetro aumentado en menos de una séptima parte, pero en más de diez setenta y una parte del diámetro: $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$ lo anterior evidencia que los estudiantes realizaron prácticas intuitivas en el salón de clase de forma similar a como la humanidad ha dado sentido y significado a los objetos matemáticos razón y proporción.

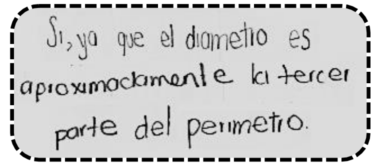
Conceptos

Los conceptos identificados son representaciones expresadas en lenguaje natural y matemático, para los cuales se puede formular una definición formal. A continuación, se dan a conocer algunos conceptos identificados en las prácticas de los estudiantes al establecer la relación entre el perímetro y el diámetro de los círculos. Los estudiantes dieron a conocer conceptos como los evidenciados en las figuras 6.10 y 6.11.



Los resultados muestran que las medidas del perimetro son el triple de las medidas del diametro

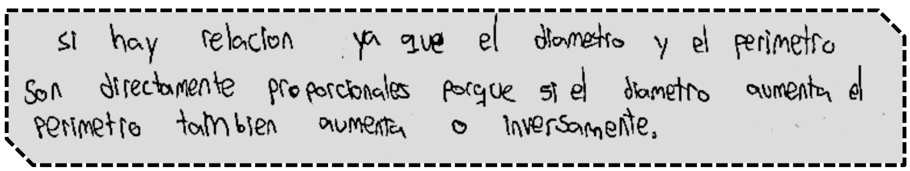
Figura 6.10. Concepto usado “triple” – Estudiantes E23 y E24.



Si, ya que el diametro es aproximadamente la tercer parte del perimetro.

Figura 6.11. Concepto usado “tercera parte” – Estudiantes E19 y E20.

Las producciones escritas evidencian que el concepto “triple” (Figura 6.10) fue usado con mayor frecuencia por los estudiantes para indicar la relación entre el perímetro y el diámetro, y con menor frecuencia usaron la palabra “tercera parte” (Figura 6.11). Además, se observa en la Figura 6.12 el uso del concepto “directamente proporcional” para indicar la relación entre el perímetro y el diámetro.



si hay relacion ya que el diametro y el perimetro son directamente proporcionales porque si el diametro aumenta el perimetro tambien aumenta o inversamente.

Figura 6.12. Concepto usado “directamente proporcionales” – Estudiantes E21 y E22

En los conceptos evidenciados por los estudiantes se hace explicito el uso del significado parcial de la razón, denominado: *razón como relator*, dado que en estos conceptos se establece una relación entre magnitudes homogéneas de carácter cuantitativo y, además, expresa la relación parte-todo entre las dos cantidades comparadas. Otros conceptos usados por los estudiantes fueron: diámetro, perímetro, radio, medida, número decimal, número entero, número impar, número par, fórmula, valor exacto, extremo y línea recta, con los cuales se realizaron explicaciones para responder las preguntas planteadas.

Propiedades

Las propiedades se refieren a enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba. En la Figura 6.13 se da a conocer la propiedad donde una pareja de estudiantes usa el lenguaje natural dando a conocer que: al hallar la razón entre el perímetro y el diámetro de cualquier objeto circular se obtendrá un numero decimal que empiece por 3.

> 1. Al hallar la razon del perimetro y diametro de cualquier objeto circular dara un numero decimal que empieze por 3 y despues de la coma sea par. Tambien que se aproxima a π

Figura 6.13. Propiedad que justifica la razón entre el perímetro y el diámetro – Estudiantes E17 y E18.

Las expresiones usadas en el protocolo de la Figura 6.13, evidencian que la pareja de estudiantes usa una propiedad "informal" no necesariamente de la forma si p entonces q para dar a conocer la relación entre el perímetro y el diámetro del círculo.

Argumentos

Los argumentos son los razonamientos que se utilizan para comprobar, explicar o justificar las soluciones de los problemas, o para validar las inferencias, conjeturas o deducciones que la trama constructiva en la actividad matemática puede implicar (Guacaneme, 2012). En la Figura 6.14 se da a conocer el argumento de una pareja de estudiantes, para indicar que el perímetro y el radio son directamente proporcionales.

> si hay relacion ya que el diametro y el perimetro son directamente proporcionales porque si el diametro aumenta el perimetro tambien aumenta o inversamente.

Figura 6.14. Justificación de la proporcionalidad – Estudiantes E13 y E14.

En la Figura 6.14 se observa que la pareja de estudiantes explica con palabras la relación de proporcionalidad directa al argumentar que "si el diámetro aumenta el perímetro también o inversamente", este tipo de argumentos se usa para justificar la relación que existe entre el perímetro y el diámetro de los objetos circulares.

6.2.2 Configuración cognitiva 2. Modelo matemático: perímetro vs radio

Elementos lingüísticos

Los elementos lingüísticos emergentes de las prácticas matemáticas de dos parejas de estudiantes al resolver la pregunta ¿Se puede hallar el perímetro de cualquier objeto circular conociendo la medida de su diámetro? se presentan las respuestas en las figuras 6.15 y 6.16.

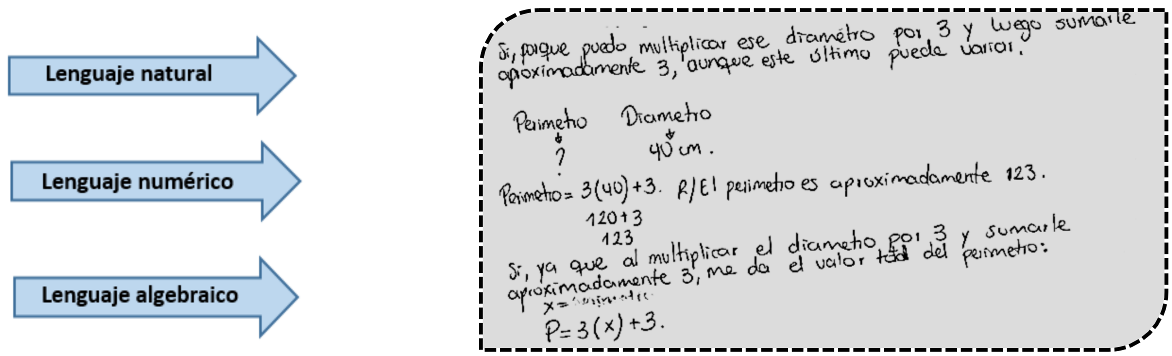


Figura 6.15. Uso del lenguaje: verbal, numérico y algebraico - Estudiantes E7 y E8.

La imagen de la figura 6.15 evidencia que los estudiantes usan tres tipos de lenguajes: natural, numérico y algebraico; en el lenguaje natural se observa el uso de palabras como multiplicar, diámetro, sumar, aproximar y variar, estas palabras son usadas para justificar una relación funcional entre el diámetro y el perímetro que se puede expresar de la forma: “tres más el triple de la razón equivale al perímetro”, esta expresión evidencia la tensión conceptual de los estudiantes al no obtener medidas exactas para los perímetros de los círculos, y usan operaciones alternas como sumar 3 al triple de la razón para compensar o aproximar los resultados de las operaciones y así hallar un perímetro más aproximado.

Se observa en las producciones de los estudiantes el uso del lenguaje numérico, para ejemplificar lo expresado en el lenguaje natural, se usan símbolos como “ =” para indicar el resultado del perímetro, "( )" para indicar una multiplicación y " + " para representar la adición de números. Finalmente, en el protocolo de los estudiantes se observa el uso del lenguaje algebraico que sintetiza y permite generalizar la relación funcional entre el perímetro y el diámetro con la expresión: $p = 3(x) + 3$.

Otro ejemplo ilustrativo en el que una pareja de estudiantes usa el lenguaje natural, numérico y algebraico, se da a conocer en la imagen de la Figura 6.16.

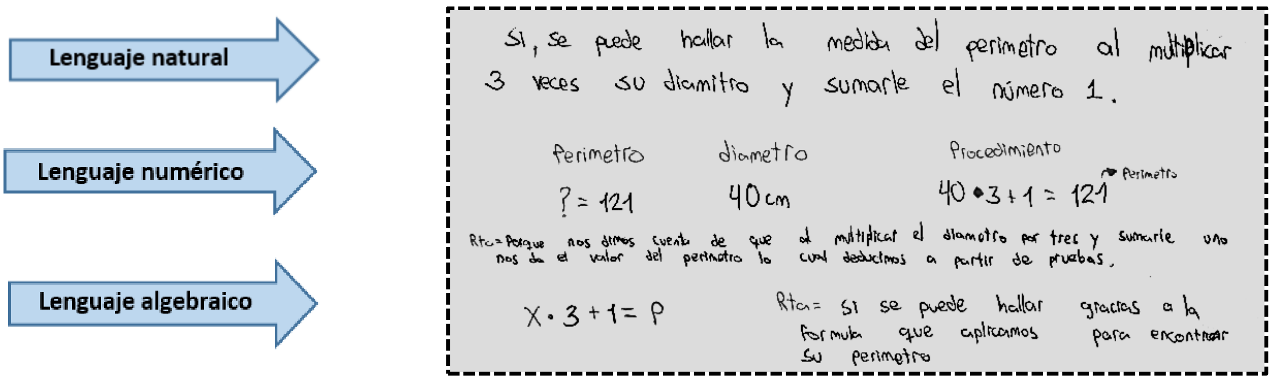


Figura 6.16. Uso del lenguaje: verbal, numérico y algebraico – Estudiantes E13 y E14.

En este protocolo, se observa que la pareja de estudiantes decide sumar 1 y no tres como se evidenció en la Figura 6.16, esto sucede ya que las medidas tomadas por los estudiantes de los objetos circulares fueron realizadas con mayor precisión. Se evidencia en el lenguaje numérico el uso de símbolos como "?" para representar un valor desconocido, además un "$\cdot$" para indicar multiplicación y el símbolo "$+$" para representar la adición de números. En el lenguaje algebraico se evidencia el uso de la fórmula: $x \cdot 3 + 1 = p$ para establecer una relación funcional entre el diámetro y el perímetro. En los elementos lingüísticos de las figuras 6.15 y 6.16 emerge el significado parcial de la proporción, denominado *proporcionalidad a través de razonamientos analíticos* , este significado permite establecer una relación entre el perímetro y el diámetro, donde la razón pi(π) se considera un operador lineal o correlator entre cantidades.

El siguiente diálogo entre el profesor **(P)** y una pareja de estudiantes **(E25 y E26)** muestra un episodio donde los estudiantes contestan a la pregunta: ¿Se puede hallar el perímetro de cualquier objeto circular conociendo la medida de su diámetro?

Dialogo 2. Transcripción de un diálogo del profesor y los estudiantes E25 y E26. Grabación en audio N° 2, 2019

1	**P:**	Ustedes, después de completar la tabla contestaron unas preguntas, e… me llama la inquietud lo siguiente: si ustedes conocen el diámetro de un círculo, solamente el diámetro ¿se puede hallar el perímetro?
2	**E25:**	Sí, pues, si tu multiplicas el pi por “D” <…>
3	**E26:**	Sí, por el diámetro.
4	**P:**	O sea, el diámetro por cuánto.
5	**E25**	Por 3,14.
6	**P:**	Bueno y ¿siempre se va a cumplir eso?
7	**E26:**	E… sí.
	P	¿Por qué se va a cumplir siempre eso?
8	**E25:**	Porque es una medida universal.
9	**P**	¿Qué quiere decir que sea una medida universal?
	E25	Pues, o sea, es como el promedio de todas estas medidas. [señala los valores obtenidos en la tabla]
10	**P:**	<palabras omitidas> ¿Y si yo quiero llegar a una medida universal? <…>
11	**E25:**	Pues, le sacas como el, la proporción, </o sea/>, ¿cómo se dice? e… lo que acabé de decir.
12	**P:**	¿El promedio?
13	**E25:**	El promedio, eso.
14	**P:**	Y ¿el promedio se aproximaría a cuánto?
15	**E25**	A… casi 3,14.

Este episodio, en lo fundamental, da a conocer que la pareja de estudiantes argumenta que si es posible hallar el perímetro de cualquier objeto circular; multiplicando al número $pi(\pi)$ por el diámetro como se da conocer en la entrada 2, además se observa que la pareja de estudiantes comprende al número $pi(\pi)$ como una constante universal, que se obtiene al hallar el promedio de las razones entre los perímetros de los círculos y la medida de sus diámetros (entradas 8, 9 y 11). Según Obando (2009), lo expresado por los estudiantes evidencia que la razón $pi(\pi)$ puede ser interpretada como una constante de proporcionalidad y el perímetro (p) como una función lineal que representa tal proporcionalidad. En el episodio emerge el significado parcial de la razón, denominado *razón como correlator*, a través de este significado se pude establecer una correlación entre dos cantidades de magnitud (perímetro y diámetro), es decir en este caso, la razón al ser aplicada sobre cantidades de magnitud A, produce cantidades de magnitud correspondientes en B (familias de cantidades correlacionadas).

Conceptos

Los conceptos usados por los estudiantes refieren a definiciones formales o descripciones de objetos matemáticos. En las Figuras 6.17 y 6.18 se evidencia el uso de algunos conceptos del lenguaje cotidiano y del lenguaje matemático usados por los estudiantes al justificar la forma de hallar el perímetro a través del diámetro del círculo.

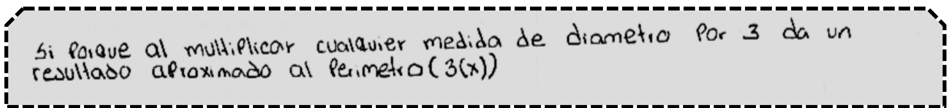


Figura 6.17. Uso de la palabra: resultado aproximado – Estudiantes E25 y E26.

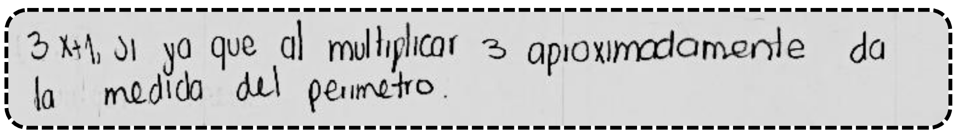


Figura 6.18. Uso de la palabra: aproximadamente – Estudiantes E19 y E20

El concepto que usaron los estudiantes con más frecuencia fue “aproximar”, como se observa en las Figuras 6.17 y 6.18, esto porque el valor de la razón entre el perímetro y el diámetro obtenido era aproximado a 3 por los estudiantes, quienes despreciaban las cifras decimales, por tanto, al asignar valores al diámetro en las expresiones algebraicas creadas, los resultados de los perímetros obtenidos variaban en relación a las medidas tomadas inicialmente de los objetos circulares: se evidencia que los estudiantes al no obtener medidas exactas deciden sumar 1, 2 o 3 al triple del diámetro como se observa en la expresión $3x + 1$ de la Figura 6.18. El concepto “aproximar” llevó a los estudiantes a usar diversas expresiones, como, por ejemplo:” valor aproximado”, “resultado aproximado”, “resultado completo”, “número exacto”, “valor total” estos conceptos expresados por los estudiantes evidencian el predominio del lenguaje natural en la construcción del número irracional $pi(\pi)$. Otros conceptos que usaron con frecuencia los estudiantes fueron: hallar, encontrar, obtener, fórmula, poner, perímetro, diámetro, razón, número pi, medida, multiplicar, sumar, variable; que fueron introducidos en las respuestas para indicar que si era posible determinar una expresión que relacionara el perímetro y el diámetro.

Procedimientos

Las operaciones, algoritmos y técnicas evidenciadas en las Figuras 6.19 a 6.22, dan a conocer el lenguaje natural, numérico y algebraico usado por los estudiantes para responder a la pregunta *¿Se puede hallar el perímetro de cualquier objeto circular conociendo la medida de su diámetro?*

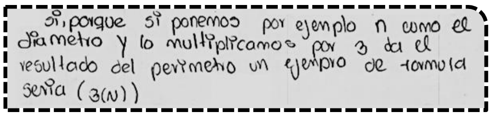


Figura 6.19. Uso del lenguaje natural y algebraico – Estudiantes E15 y E16.

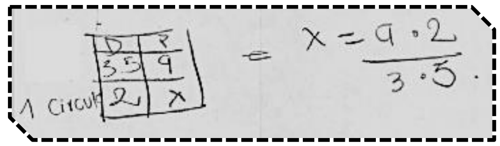


Figura 6.20. Uso del lenguaje numérico Estudiantes E23 y E24.

En la Figura 6.19 se observa que una pareja de estudiantes usa el lenguaje natural para expresar que sí es posible hallar el perímetro; multiplicando el diámetro "n" por 3, esta expresión es representada en lenguaje algebraico mediante la fórmula $(3(n))$. Otra pareja de estudiantes utilizó el lenguaje numérico para justificar el procedimiento que permite hallar el perímetro, esto lo realizaron a través de una tabla de valores como se observa en la Figura 6.20, en la que se usa el "producto cruzado" para hallar el perímetro de un circulo de diámetro 2, a partir del diámetro y perímetro de un circulo conocido. En la figura 6.20 se observa el uso del significado parcial de la proporción, denominado: *proporción a través de la regla de tres.* El lenguaje natural y el lenguaje numérico no fueron los únicos usados por los estudiantes como se observa en las Figuras 6.21 y 6.22.

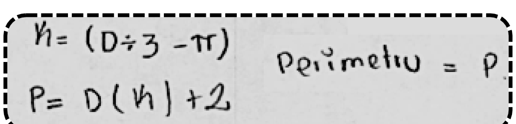


Figura 6.21. Uso del lenguaje algebraico – Estudiantes E 11 y E12.

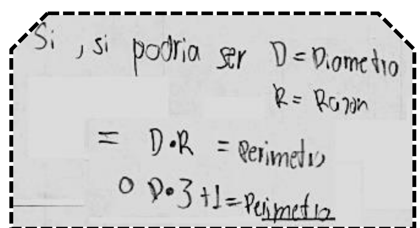


Figura 6.22. Uso del lenguaje algebraico – Estudiantes E9 y E10

En las figuras 6.21 y 6.22 se observa el uso del lenguaje algebraico implementado para generalizar la relación funcional entre el perímetro y el diámetro. Particularmente en la Figura 6.19 se usa la expresión $3(n)$, en la Figura 6.21 se usa la expresión: $p = D(k) + 2$, y en la Figura

6.22 se usa la expresión $D \cdot 3 + 1 = perimetro$, esta variedad de expresiones algebraicas evidencia que los estudiantes intentan hallar valores muy aproximados para el perímetro del circulo al sumar valores como el 1 o el 2 al triple del diámetro. En los procedimientos usados por los estudiantes y representados mediante el lenguaje natural y numérico emerge el significado parcial de la razón denominado *razón como correlator*, dado que la razón es usada por los estudiantes para establecer una relación entre el diámetro y el perímetro de los círculos que es generalizada a través del lenguaje algebraico.

Propiedades

Las propiedades se refieren a enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba. En las imágenes de las Figuras 6.23 y 6.24 se dan a conocer algunas propiedades en las que dos parejas de estudiantes a través del lenguaje natural y algebraico justifican la dependencia lineal entre el perímetro y el diámetro.

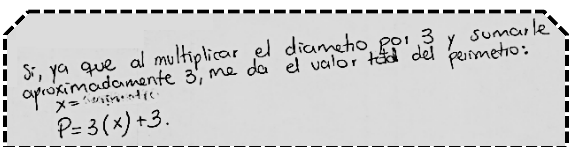


Figura 6.23. Suma y multiplicación para relacionar el perímetro y el diámetro – Estudiantes E7 y E8.

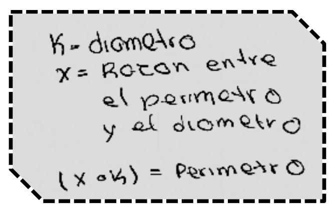


Figura 6.24. Uso de la multiplicación para relacionar el perímetro y el diámetro – Estudiantes E5 y E6.

En la respuesta de la Figura 6.23, aunque no se evidencia una propiedad con estructura condicional, si se observa que la pareja de estudiantes usa palabras y lenguaje algebraico para expresar la relación de dependencia entre el perímetro y el diámetro, es decir: si se conoce el diámetro entonces el perímetro se puede hallar al "sumar tres al triple del diámetro". En la Figura 6.24 los estudiantes usan las letras k, x, para representar la medida del diámetro y la razón respectivamente, y a través de la formula $x \cdot k = perímetro$, justifican la relación entre el diámetro y el perímetro, nótese que en este caso la fórmula puede interpretarse así: si se conoce la razón x y el diámetro k, entonces el diámetro se puede hallar al multiplicar $x \; por \; k$. Estas propiedades implícitas que muestran la relación de dependencia lineal entre el perímetro y el diámetro permiten emerger el significado parcial de la razón, denominado *razón como como correlator*.

Argumentos

Los argumentos son los razonamientos que se utilizan para comprobar, explicar o justificar las soluciones de los problemas (Guacaneme, 2012). En las figuras 6.25 y 6.26 se dan a conocer los argumentos de dos parejas de estudiantes quienes explican la forma de hallar el perímetro del circulo al conocer su radio o diámetro.

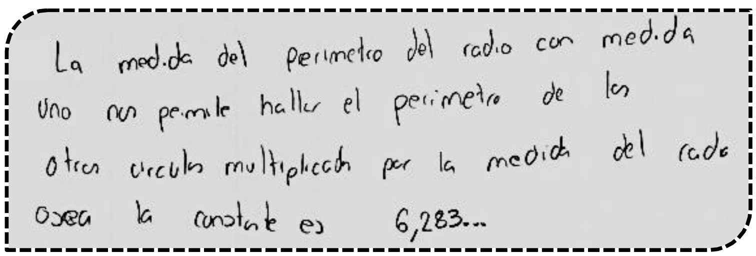

La medida del perimetro del radio con medida
Uno nos permite hallar el perimetro de los
otros circulos multiplicado por la medida del radio
osea la constante es 6,283...

Figura 6.25. Justificación de la constante 6.283 ... *para hallar el perímetro* – Estudiantes E27 y 28.

En el argumento de la Figura 6.25 se observa que la pareja de estudiantes usa la constante 6.283 ... para hallar el perímetro de "los otros círculos" , esta constante es determinada mediante la relación perímetro – radio que logran establecer los estudiantes al asignar el valor de 1 al radio y obtener un perímetro de 6.283 ..., este último valor es tomado por los estudiantes como una constante que permite generalizar la forma de hallar el perímetro, es decir; en la justificación se considera básicamente que para hallar el radio de cualquier circulo se debe multiplicar el radio por la constante 6.283 ..., en los anteriores argumentos emerge el significado parcial de la razón, denominado: *razón como correlator* ya que permite establecer una correlación directa entre las magnitudes involucradas.

En la Figura 6.26 se da a conocer otro argumento, donde una pareja de estudiantes explica porque se debe usar el numero $\pi \approx 3{,}1416$ para hallar el perímetro del círculo.

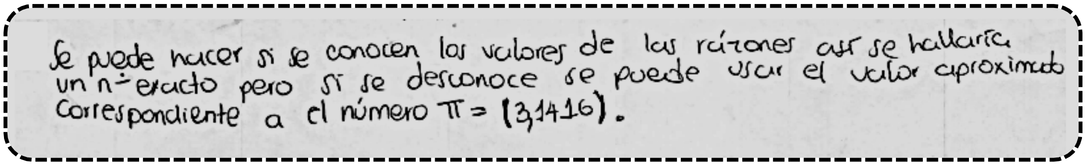

Se puede hacer si se conocen los valores de las razones asi se hallaría un n- exacto pero si se desconoce se puede usar el valor aproximado Correspondiente a el número π = (3,1416).

Figura 6.26. Justificación de uso del número pi(π) para hallar el perímetro - Estudiantes E17 y E18.

En estos razonamientos se observa que la pareja de estudiantes, inicialmente, considera que la razón entre el perímetro y el diámetro de los círculos puede variar, esto debido a que los valores obtenidos de las razones a través de las mediciones de los objetos circulares no fueron exactas, pero finalmente justifican que si se desconocen las razones, estas, pueden ser sustituidas por el valor aproximado de $\pi \approx 3{,}1416$ el cual al ser multiplicado por el diámetro permitirá obtener un perímetro aproximado. Otra pareja de estudiantes argumenta que no es posible determinar el perímetro del círculo conociendo su diámetro y lo expresa como se evidencia en la Figura 6.27.

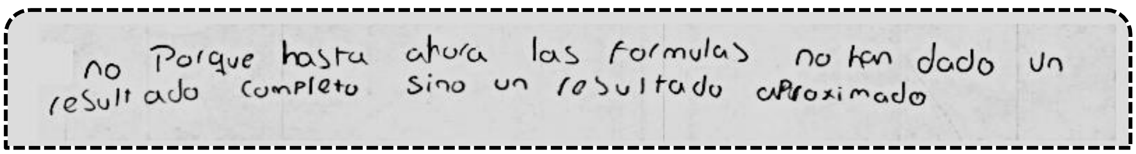

no Porque hasta ahora las formulas no han dado un resultado completo sino un resultado aproximado

Figura 6.27. Justificación de uso del número pi(π) para hallar el perímetro – Estudiantes E3 y E4.

En las explicaciones, se observa la importancia de obtener un valor exacto o “completo” para el perímetro, ya que según los razonamientos de los estudiantes si esto no sucede entonces es imposible hallar una expresión matemática que permita relacionar el perímetro y el diámetro.

6.2.3 Configuración cognitiva 3. Gráfica que correlaciona el perímetro con el diámetro

Elementos lingüísticos

En el punto 3 de la situación problema, los estudiantes hallaron el perímetro de algunos círculos de radios 0, 1, 2, 3, 4, y 5 centímetros, estos perímetros fueron registrados en una tabla y luego representados gráficamente, en las prácticas de los estudiantes se evidencia el uso del lenguaje natural, numérico, algebraico y gráfico. En las imágenes de las Figuras 6.28 y 6.29 se evidencia el uso simultáneo del lenguaje natural y numérico expresado por una pareja de estudiantes para hallar el perímetro de 5 círculos:

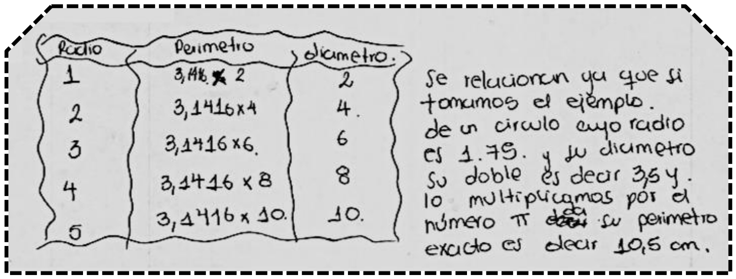
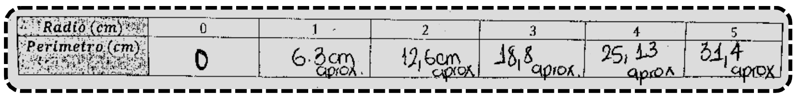


Figura 6.28. Uso simultaneo del lenguaje numérico y natural- estudiantes E13 y E14.



Radio (cm)	0	1	2	3	4	5
Perimetro (cm)	0	6.3cm aprox.	12,6cm aprox	18,8 aprox.	25,13 aprox	31,4 aprox

Figura 6.29. Registro de resultados - Estudiantes E13 y E14.

En la imagen de la Figura 6.28 se observa que la pareja de estudiantes halla de forma numérica el perímetro de los círculos, el procedimiento empleado es expresado en palabras, y con ellas, se da a conocer que para determinar el perímetro de los círculos se debe hallar el doble del radio y multiplicarlo por el número π , se evidencia además en la segunda columna de la tabla de la figura 6.28 que cada diámetro de los círculos es multiplicado por la constante $3{,}1416$, finalmente la aproximación de los perímetros obtenidos son registrados en otra tabla como se evidencia en la figura 6.29. En el lenguaje numérico y natural expresado por los estudiantes emerge el significado parcial de la razón, denominado *razón como correlator* o constante de proporcionalidad que permite obtener familias de razones de la forma $(D, p(D))$ siendo D el diámetro y $p(D)$ el perímetro que depende del diámetro, además en el procedimiento usado por la pareja de estudiantes emerge el significado parcial de la proporción, denominado *proporción a través de razonamientos analíticos* los cuales permiten obtener perímetros de distintos círculos al multiplicar $3{,}1416$ por distintos valores de radios.

La relación entre el perímetro y el radio de los círculos obtenida de la tabla de valores fue representada por los estudiantes a través del lenguaje gráfico. En la Figura 6.30 se observa la gráfica de una línea recta y el procedimiento en lenguaje natural usado por una pareja de estudiantes para representar la relación entre el perímetro y el radio de los círculos.

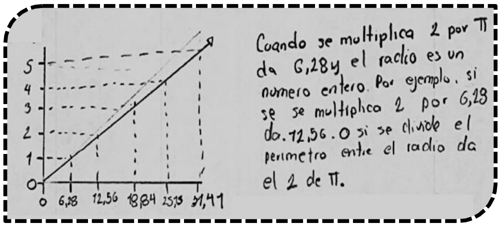


Figura 6.30. Grafica de Línea recta – Estudiantes E21 y E22.

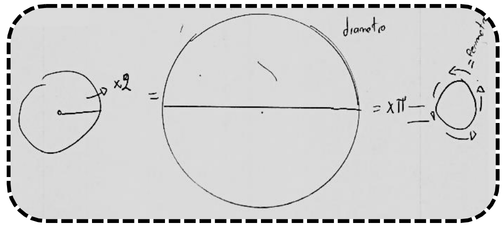


Figura 6.31. Grafica icónica – Estudiantes E25 y E26.

.

Se observa en los argumentos escritos, el uso del significado parcial de la proporción denominado *proporción a través de razonamientos por analogía* , este significado emerge al indicar que si el perímetro de un círculo de radio 1 es de 6,28, entonces al duplicar el radio, también se duplicará análogamente su perímetro obteniendo un valor de 12,36. Se evidencia además que los datos obtenidos del razonamiento por analogía son representados a través de una línea recta, y que los valores de los radios son ubicados en el eje de ordenadas y el de los perímetros en el eje de abscisas. Otra representación usada por los estudiantes se evidencia en la figura 6.31 en la imagen se observa que una pareja de estudiantes usa una representación icónica para argumentar que el perímetro de cualquier círculo (indicado por flechas) se puede hallar al multiplicar el radio por 2 y luego por π.

Procedimientos

Los estudiantes usaron operaciones y técnicas de cálculo para hallar el perímetro de los círculos y graficar sus relaciones a través de diversas formas como se evidencia en las Figuras 6.32 y 6.33.

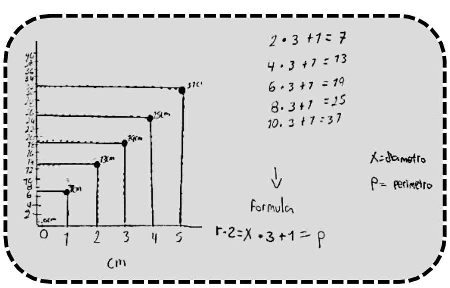


Figura 6.32. Grafica de puntos – Estudiantes E13 y E14.

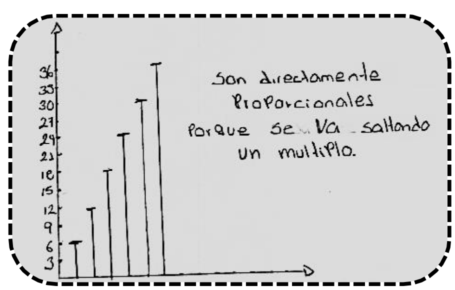


Figura 6.33. Gráfico de barras – Estudiantes E9 y E10.

En la imagen de la Figura 6.32 se aprecia que una pareja de estudiantes usa la expresión $x \cdot 3 + 1 = p$ con $x = r \cdot 2$, para establecer una relación funcional asignando valores numéricos de 1, 2, 3, 4 y 5 al radio, y obteniendo así los distintos perímetros de los círculos, finalmente el valor de los radios y el de los perímetros son relacionados mediante puntos en el primer cuadrante del plano cartesiano. En la Figura 6.33, se observa otro tipo de razonamiento usado por una pareja de estudiantes donde se identifica una proporcionalidad directa entre las magnitudes relacionadas y se evidencia el uso de la constante de proporcionalidad $\frac{6}{1}$ como una pendiente; es decir por cada 1 cm de radio en el eje x se aumentan 6 cm de perímetro en el eje y, lo cual permite representar a los estudiantes la relación de proporcionalidad a través de una función lineal y a través de una gráfica de líneas verticales o de barras.

En los razonamientos usados por los estudiantes en las figuras 6.32 y 6.33 emerge el significado parcial de la proporcionalidad, denominado: proporcionalidad – sistemas de cambio. Según Fiol y Fortuny (1990, p. 83-84), los términos de razón, proporción y proporcionalidad adquieren un significado unificado con la noción de función lineal. Esta noción es un modelo que sintetiza diversos lenguajes, situaciones, expresiones y fenómenos. La función lineal puede considerarse como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de la proporcionalidad. La función lineal representa la estructura de la proporcionalidad, sirve para visualizar los diferentes estados de variación, es decir expresa su comportamiento cualitativo.

Conceptos

Los conceptos usados por los estudiantes refieren a definiciones formales o descripciones de objetos matemáticos. En las figuras 6.34 y 6.35 se evidencia el uso de algunos conceptos del lenguaje cotidiano y del lenguaje matemático usado por los estudiantes para describir la relación de proporcionalidad entre el perímetro y el diámetro.

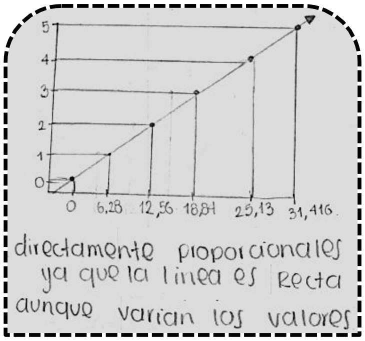


Figura 6.34. Uso del concepto: directamente proporcional – Estudiantes E17 y E18.

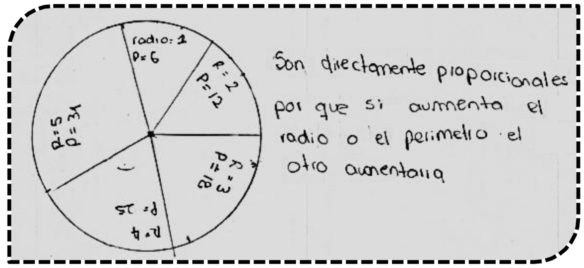


Figura 6.35. Grafico circular – Estudiantes E5 y E6.

El concepto que usaron los estudiantes con más frecuencia fue “directamente proporcional”, para indicar que si el radio aumentaba el perímetro también lo hacía, como se observa en la Figura 6.34, además en la Figura 6.35 se observa que una pareja de estudiantes representa la relación existente entre el perímetro y la medida del radio mediante una grafico circular, en el que a cada porción del gráfico le corresponde un perímetro y un radio: en la gráfica se evidencia que los estudiantes relacionan el tamaño de la porción con el valor numérico del perímetro y argumentan con lenguaje natural que: “el radio y el perímetro son directamente proporcionales”.

En las prácticas matemáticas de los estudiantes se observa además el uso del concepto “múltiplo de 6” para indicar la manera en que variaban los perímetros, este concepto emerge por la forma en que fueron presentados los radios de los círculos a los que debían hallar el perímetro, es decir por cada unidad de radio el perímetro aumentaba 6 unidades. Otros conceptos que usaron los estudiantes fueron: círculo, radio, diámetro, perímetro, tamaño, medida, línea diagonal, aumentar, multiplicar, dividir, variar, variable, expresión algebraica, valores, tabla, número entero, algo en común y va saltando un múltiplo. Los anteriores conceptos fueron usados por los estudiantes para indicar la relación de proporcionalidad observada en las gráficas. En los conceptos usados por los estudiantes para hallar el perímetro a través del radio emerge el significado parcial de la proporción denominado, proporción *a través de razonamientos por analogía*, específicamente a través de los múltiplos del 6, en los procedimientos también emerge el significado parcial de la proporción, denominado *proporción a través de razonamientos analíticos.*

Propiedades y argumentos

Las propiedades se refieren a enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba, y los argumentos son los razonamientos que se utilizan para comprobar, explicar o justificar las soluciones de los problemas (Guacaneme, 2012). El lenguaje natural y el lenguaje gráfico evidenciado en la Figura 6.36, es usado por una pareja de estudiantes para dar a conocer una propiedad de la linealidad y los argumentos de existencia de una proporcionalidad directa.

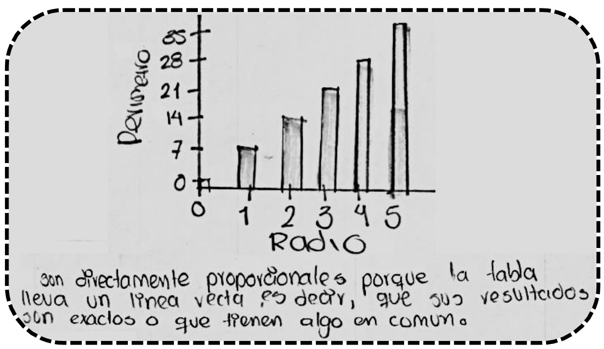


Figura 6.36. Argumento usado para justificar la proporcionalidad directa – Estudiantes E11 y E12

En la imagen se observa que los estudiantes usan una propiedad “informal” no necesariamente de la forma si p entonces q, para dar a conocer que: dos magnitudes son directamente proporcionales si al graficarlas se obtiene una línea recta, o deben presentar características intuitivas de linealidad como se observa en la gráfica de barras hecha por los estudiantes. En relación a los argumentos se observa en la Figura 6.36, que la linealidad entre las magnitudes emerge de la relación o razón común que tienen el perímetro y el diámetro de los círculos. En relación a los argumentos dados por los estudiantes Fiol y Fortuny (1990, p. 83-84), dan a conocer que la proporcionalidad entre dos magnitudes puede interpretarse bajo el concepto de función como una cantidad variable que depende de otra cantidad variable, porque en ella están implícitos los tres aspectos que caracterizan a la noción de función: variación, dependencia y correspondencia. En este sentido se pone de manifiesto, en las producciones de los estudiantes la esencia del concepto de proporcionalidad como correspondencia específica entre cantidades, conservándose invariante la noción de razón.

El siguiente diálogo muestra un episodio en el que un estudiante (**E12)** justifica al profesor **(P)**, el uso de un diagrama de barras (Figura 6.36) para relacionar el perímetro y el diámetro de los círculos.

Dialogo 3. Transcripción de un diálogo del profesor el estudiante E12. Grabación en audio N° 3, 2019

1	**P**	Muchachos ¿por qué realizaron este tipo de gráfica de barras?
2	**E12**	Porque esta gráfica refleja mejor, digamos lo que es proporcional, porque va aumentando en línea recta, entonces aquí esto nos puede decir que es directamente proporcional <señala la gráfica, figura 35>, porque cada que va aumentando, va aumentado todo, ¿sí? o digamos cada que va disminuyendo, va disminuyendo todo.
3	**P**	Todo es ¿qué? Explícame bien eso.
4	**E12**	E… digamos acá, <señala la gráfica>, la primera que nos daba con radio 1, o sea diámetro dos, nos iba a dar 6 y un poquito más, ¿sí? cuando iba aumentando a diámetro 4 nos iba a dar 12 y un poquito más, cuando iba aumentando a radio 6 nos iba a dar 18 y un poquito más y así iba sucesivamente, entre más iban aumentando esta columna de la izquierda, también iban aumentando los de abajo.
5	**P**	Pero ¿por qué utilizaron la gráfica de barras?
6	**E12**	< >No sé. Nos pareció más fácil como representar lo que estábamos viendo.

Este episodio da a conocer que el estudiante reconoce en la gráfica de la Figura 6.36, la correspondencia proporcional entre las magnitudes: circunferencia y diámetro, al indicar que si una aumenta la otra también y además esta correspondencia debe darse en “línea recta” (entrada 2), es de resaltar que en la gráfica de la Figura 6.36 no se representa la correspondencia con una línea recta sino con un diagrama de barras, pero intuitivamente el estudiante observa en ella una línea recta, que es justificada con ejemplos numéricos con los cuales se indica la forma como fueron obtenidos los perímetros de los círculos (entrada 4). En la gráfica de la Figura 6.36 y en los argumentos orales del estudiante se evidencia que la variable radio es interpretada desde un contexto discreto mas no continuo, es decir el estudiante solo representa los radios y perímetros solicitados en la pregunta y no generaliza la correspondencia para valores continuos del radio, una posible explicación a la representación a través de barras es que al no ser exactos los valores de los perímetros de los círculos los estudiantes prefieren usar otro tipo de graficas distintas a las lineales.

6.3 Análisis epistémico de la Situación - problema 2

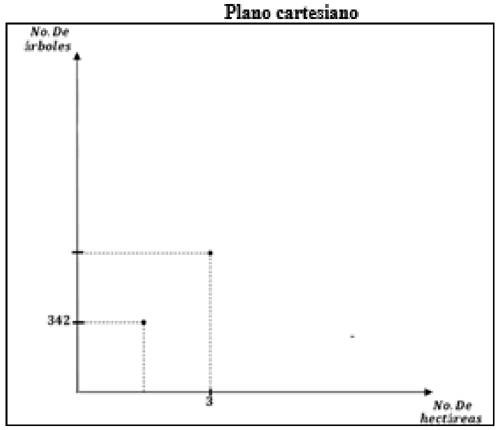
La situación problema 2, tuvo como objetivo general promover prácticas matemáticas en los estudiantes de grado séptimo que favorecieran la emergencia de significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad. En el diseño se las situaciones se consideraron dos preguntas fundamentales, relacionadas con el concepto de densidad poblacional. Las preguntas permitieron indagar por los conocimientos puestos en juego por los estudiantes al construir una gráfica y completar una tabla de proporcionalidad directa. A continuación, se presenta la situación problema:

6.3.1 Situación de aprendizaje 2

Situación – problema 2. Construcción de nuevas magnitudes, el caso de la densidad poblacional

En el plano cartesiano y en la tabla se dan a conocer algunos datos relacionados con la cantidad de árboles que pueden crecer en un determinado lugar dependiendo del número de hectáreas.

Plano cartesiano



Tabla

No. De hectáreas	No. De árboles
4,5	
	114
2	
6	
	1254
	342
0	

De acuerdo con la información dada, construir en el plano cartesiano, una gráfica, que relacioné el número de hectáreas con el número de árboles, luego determinar los datos que completan la tabla.

Preguntas

1. ¿Cómo se determinó la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles que permitieron construir la gráfica?
2. ¿Qué estrategias o procedimientos se usaron para hallar la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles que completan la tabla?

6.3.2 Solución institucional asociada a la situación de aprendizaje 2

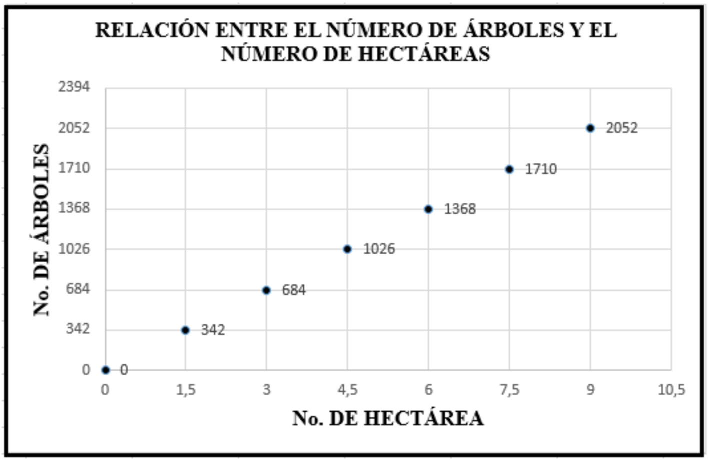
6.3.3 Prácticas matemáticas asociadas a la solución de la pregunta 1

A continuación, se propone una posible secuencia de prácticas matemáticas para resolver la pregunta 1 (solución institucional).

- Se halla el número de hectáreas en las que pueden crecer 342 árboles, es decir, se determina la coordenada $(x, 342)$.
- El valor x está en la mitad de 0 y 3 hectáreas: $x = \frac{0+3}{2} = 1.5$, por tanto se establece la coordenada $(1.5\ , 342)$, esta coordenada indica, que 342 árboles pueden crecer por cada 1,5 hectáreas: $\frac{342\ \acute{a}rboles}{1{,}5\ hect\acute{a}reas}$.
- Se halla el número de árboles que pueden crecer en 3 hectáreas, es decir se determina la coordenada $(3, y)$.
- El valor de y es el doble de 342: $y = 342 \times 2 = 684$, por tanto se establece la coordenada $(3\ , 684)$ que puede representarse con la razón $\frac{684\ \acute{a}rboles}{3\ hect\acute{a}reas}$.
- Un razonamiento que permite hallar el número de hectáreas y el número de árboles para construir la gráfica es usar la igualdad de razones: $\frac{342}{1.5} = \frac{684}{3} = \frac{1026}{4.5}$... esta igualdad puede obtenerse a través de la operación suma o a través de múltiplos de la razón $\frac{342\ \acute{a}rboles}{1{,}5\ hect\acute{a}reas}$.
- Otro razonamiento para construir la gráfica consiste en determina el número de árboles que pueden crecer por hectárea (constante de proporcionalidad), $\frac{342\ \acute{a}rboles}{1{,}5\ hect\acute{a}reas} =$

$228 \frac{árboles}{hectárea}$, esta constante permite establecer una correlación lineal entre el número de árboles (y) y el número de hectáreas (x) que se generaliza a través de la expresión algebraica $y = 228x$, donde los valores obtenidos en y dependen de los asignados a x.

— Finalmente, la gráfica que correlaciona el número de árboles (variable discreta) con el número de hectáreas (variable continua) se representa a continuación.



6.3.4 Prácticas matemáticas asociadas a la solución de la Pregunta 2

Para solucionar la pregunta 2: ¿Qué conceptos matemáticos o procedimientos se usaron para hallar el número de hectáreas y el número de árboles que completan la tabla? se propone la siguiente secuencia de prácticas matemáticas:

— Para determinar la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles que completan la tabla se halla inicialmente el número de hectáreas en las que pueden crecer 342 árboles, usando la coordenada $(1.5 , 342)$ obtenida en la solución de la Pregunta 1.

— Para hallar los datos de la tabla se realiza un razonamiento por analogía; que consiste en determinar cómo se relacionan dos o más cantidades de hectáreas para luego trasladar de forma análoga dicha relación a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades (número de árboles). El razonamiento por analogía puede basarse en la conservación de la relación aditiva (suma), o puede referir a la conservación de la medida relativa (razón). A continuación, se da un ejemplo de un posible razonamiento por analogía que permite completar los datos desconocido en la tabla.

	No. De hectáreas (x)	No. De árboles (y)	
Triple de 1,5 hectáreas	4,5	1.026	Triple de 342 árboles
Tercera parte de 1,5 hectáreas	0,5	114	Tercera parte de 342 árboles
Doble de 1 hectárea	2	456	Doble de 228 árboles
Cuádruple de 1,5 hectáreas	6	1.368	Cuádruple de 342 árboles
$4{,}5\ hectáreas + 1 hectárea$	5,5	1.254	1.026 árboles + 228 árboles
Coordenada $(1.5\ ,342)$	1,5	342	Coordenada $(1.5\ ,342)$
Cero hectáreas	0	0	Cero árboles

— Otro procedimiento para hallar el número de hectáreas y el número de árboles que completan la tabla es aplicar un razonamiento analítico o funcional que consiste en hallar el número de árboles que pueden crecer por hectárea (constante de proporcionalidad) $\frac{342\ árboles}{1{,}5\ hectáreas} = \frac{228\ árboles}{1\ hectárea}$, esta constante permite establecer una correlación lineal entre el número de árboles y el número de hectáreas que se generalizan a través de las expresiones algebraicas $y = 228x$ o $x = \frac{y}{228}$, con estas expresiones se pueden hallar los datos que completan la tabla como se muestra a continuación:

No. De hectáreas (x)	No. De árboles (y)
4,5	$y = 228(4{,}5) = 1.026$
$x = \frac{114}{228} = 0{,}5$	114
2	$y = 228(2) = 456$
6	$y = 228(6) = 1.368$
$x = \frac{1.254}{228} = 5{,}5$	1.254
$x = \frac{342}{228} = 1{,}5$	342
0	$y = 228(0) = 0$

6.3.5 Configuración epistémica asociada a la situación de aprendizaje 2

La configuración epistémica centra el interés en caracterizar la tipología de objetos primarios propuestos en el EOS: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos emergentes de la secuencia de prácticas matemáticas (solución institucional). A continuación, se caracterizan estos objetos primarios.

Elementos lingüísticos
Al analizar la solución institucional, se observa el uso de elementos lingüísticos como: *palabras o términos*, *notaciones o símbolos matemáticos*, *expresiones algebraicas* y *representaciones gráficas*. Particularmente se identificaron palabras *o términos* como: número, hectáreas, crecer, coordenada, valor de x, mitad, doble, razón, razonamiento, construir, gráfica, igualdad, operación, suma, múltiplos, árboles que pueden crecer por hectárea, constante de proporcionalidad, correlación, generaliza, expresión algebraica, variable discreta, variable continua. En estas *palabras o términos* se evidencia el significado lingüístico de los objetos matemáticos razón y proporción que permiten dar sentido a los conceptos, propiedades y argumentos que dan solución a la pregunta1. En la secuencia de prácticas se usan *notaciones o símbolos* incorporando en la solución las letras x e y para nombrar el número de hectáreas y el número de árboles respectivamente, se usan paréntesis para representar coordenadas del plano cartesiano como $(x, 342)$, $(1.5\ , 342)$, $(3, y)$, $(3\ , 684)$ se observa el uso del símbolo vinculo $(/)$, para representar las razones $\frac{342\ árboles}{1{,}5\ hectáreas}$, $\frac{684\ árboles}{3\ hectáreas}$ y el uso del símbolo igual $(=)$ para representar la igualdad de razones $\frac{342}{1.5} = \frac{684}{3} = \frac{1026}{4.5} \ldots$, se observa el uso de la *expresión algebraica* $y = 228x$ para establecer una correlación lineal entre el número de árboles (y) y el número de hectáreas (x). Finalmente, en la secuencia de prácticas matemáticas propuesta, se propone una *representación gráfica* en el plano cartesiano que evidencia la correlación lineal entre el número de árboles (variable discreta) y el número de hectáreas (variable continua) a través de una gráfica de puntos.
Conflictos relacionados con los elementos lingüísticos En el marco del EOS, los conflictos de los estudiantes se interpretan en términos de discordancia entre los significados institucionales de los objetos implicados en las practicas matemáticas y los significados personales (Burgos, Pellicer, Giacomone & Godino, 2018). A continuación, se presentan posibles conflictos que pueden manifestarse en las prácticas matemáticas de los estudiantes en relación a los elementos lingüísticos. — Conflictos con la palabra hectárea asociada a una unidad de superficie.

— Conflictos con el uso del signo igual ($=$).

— Conflictos para lograr establecer la expresión algebraica $y = 228x$

— Conflictos al determinar intuitivamente las coordenada $(x, 342)$ o $(3, y)$.

Conceptos

Los conceptos son entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición formal. Los conceptos son interpretados en el EOS como propone Wittgenstein, como “reglas gramaticales sobre el uso de símbolos y expresiones” para describir las situaciones y las acciones que se realizan ante dichas situaciones. Tales reglas cambian según la fenomenología, los juegos de lenguaje, las formas de vida, las instituciones (Godino, 2002). A continuación, se describen conceptos/definiciones usados en la solución institucional, según el diccionario de la lengua de la Real Academia Española (RAE, 2019).

Número. Signo grafico o conjunto de signos gráficos que expresa o representa esa cantidad.

Hectárea. Medida de superficie equivalente a 100 áreas. Medida de superficie equivalente a 10.000 m^2 (símbolo ha).

Árbol. Planta perenne, de tronco leñoso y elevado, que se ramifica a cierta altura del suelo.

Coordenada. Cada una de las rectas que se cruzan perpendicularmente y que sirven para ubicar un punto en un plano o en el espacio.

Mitad. Cada una de las partes en que se divide un todo. Parte que equidista de sus extremos.

Doble. Dos veces mayor o que contiene una cantidad dos veces exactamente. Que implica dos elementos iguales o semejantes o la repetición de algo dos veces.

Razón. la razón expresa, cuantifica, la comparación multiplicativa, llamada “por cociente”, entre esas dos cantidades (… cuánto es de…, o… cuántas veces está contenida en …, o, ... cuántas unidades de… por cada unidad de…). La razón tiene asociados cuatro funciones: como relator y operador, cuando la razón se define sobre cantidades homogéneas, y como correlator o transformador, cuando la razón se define sobre cantidades heterogéneas (Obando, 2009, p. 313).

Razonamiento. Serie de conceptos encaminados a demostrar algo, ordenar y relacionar ideas para llegar a una conclusión. Exponer razones o argumentos.

Construir. Hacer algo utilizando los elementos adecuados.

Graficar. Representar mediante figuras o signos.

Igualdad. Correspondencia y proporción que resulta de muchas partes que uniformemente componen un todo. Conformidad de algo con otra cosa en naturaleza, forma, calidad o cantidad. Equivalencia de dos cantidades o expresiones.

Operación. Acción de un operador sobre una pareja de números, a la que se le asigna un único valor.

Correlación. Correspondencia o relación recíproca entre dos o más cosas o series de cosas. Medida de la tendencia de la evolución de dos variables.

Generalizar. Abstraer lo que es común y esencial a muchas cosas, para formar un concepto general que las comprenda todas.

Expresión algebraica. Conjunto de números y símbolos ligados entre sí por los signos de las operaciones del álgebra.

Constante. Cantidad que tiene un valor fijo en un determinado proceso, calculo etc.

Variable. Letra que puede tomar varios valores en una operación, función, fórmula.

Variable discreta. Entidad a la que puede asignarse un número perteneciente al conjunto de los números enteros.

Variable continua. Entidad a la que puede asignarse un número perteneciente al conjunto del número reales.

Conflictos relacionados con los conceptos

- Conflictos para comprender el concepto de *constante* de proporcionalidad.
- Conflictos para comprender los conceptos de variable *continua* y *variable discreta*.
- Conflictos para comprender el concepto de *razón*.
- Conflictos para comprender el concepto *igualdad* de razones.

Procedimientos

El análisis de la solución institucional permite reconocer algunos procedimientos como: *operaciones*, a*lgoritmos*, *estrategias de cálculo* y *razonamientos*, estos procedimientos permiten comprender las formas de uso de los objetos en un ámbito no necesariamente discursivo o de definiciones (Guacaneme, 2012). A continuación, se describen los procedimientos usados.

Dividir. Consiste en determinar cuántas veces un número está contenido en otro número. La división es la *operación* usada para hallar la primera componente de la coordenada $(x, 342)$, a través de la expresión $x = \frac{0+3}{2} = 1.5$. La división además es usada para hallar el número de árboles por hectárea (constante de proporcionalidad) a través de la expresión $\frac{342\ árboles}{1,5\ hectáreas} = \frac{228\ árboles}{1\ hectárea}$

Multiplicar. La multiplicación es una operación aritmética de composición que consiste en sumar reiteradamente la primera cantidad tantas veces como indica la segunda. La multiplicación es usada para hallar la segunda componente de la coordenada $(3, y)$ a través de la expresión $y = 342 \times 2 = 684$. La multiplicación es usada para obtener múltiplos de la razón $\frac{342}{1.5}$, generando la siguiente igualdad de razones $\frac{342}{1.5} = \frac{684}{3} = \frac{1026}{4.5}$ que permite construir la gráfica.

Razón como relator. Dadas dos magnitudes M_1 y M_2 y dos cantidades de magnitud a_1 y b_1 que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente. Se determina una cantidad $p = R(a_1,\ b_1)$, entre las dos cantidades de magnitud dadas. Esta relación, R, es de carácter cuantitativo y se puede expresar como sigue: $R: M_1 \times M_2 \rightarrow Q$, $(a_1, b_1) \rightarrow \frac{a_1}{b_1} = p = R(a_1, b_1)$. Se debe tener en cuenta que si M_1 y M_2 son magnitudes homogéneas entonces p es una cantidad numérica que expresa la relación parte-todo entre las dos cantidades comparadas. En este caso Q es el conjunto de los números racionales o más generalmente, los reales. Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces p es una cantidad con unidades que expresa la cantidad de unidades de a_1 por cada unidad de b_1, en cuyo caso Q puede ser una nueva cantidad.

Razón como operador. La razón puede ser usada para ampliar o achicar y será vista como un operador. Sean M_1 y M_2 dos magnitudes y a_1 y b_1 dos cantidades de magnitud que pertenecen a M_1 y M_2 respectivamente luego existe una operación unaria, O, de la forma: $O: M_1 \rightarrow M_2$, $a_1 \rightarrow O(a_1) = p \times a_1 = b_1$. Si M_1 y M_2 son magnitudes homogéneas entonces p es una cantidad numérica que expresa un factor de ampliación o reducción que, aplicado sobre la cantidad de magnitud a_1 produce la cantidad de magnitud b_1. Ahora, Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces p es una cantidad con unidades que actúa como operador transformando la cantidad de magnitud a_1 en la cantidad de magnitud b_1.

Razón como correlator. La razón puede expresar una propiedad invariante a dos series de cantidades de magnitud, que se pueden poner en correspondencia uno a uno, y donde la razón es el operador lineal que permite definir la función que correlaciona ambos conjuntos, esto es, a través de la razón se puede establecer una correlación entre dos cantidades de magnitud. La razón como correlator permite poner en correlación el número de hectáreas (x) y el número de árboles (y) a traves de la expresión algebraica $y = 228x$.

Razón como transformador. Si M_1 y M_2 son magnitudes heterogéneas, entonces la razón p es una cantidad con unidades que actúa como operador (transformador) que permite transformar la cantidad de magnitud a_1 en la cantidad de magnitud b_1. La razón como transformador es de especial interés en el caso de la comparación entre familias de cantidades que se correlacionan linealmente, en donde la razón es un transformador lineal que aplicado sobre cualquier cantidad de una de las familias produce la cantidad correspondiente en la otra familia.

Razonamiento por analogía. Los razonamientos por analogía consisten en determinar cómo se relacionan dos o más cantidades de magnitud de una misma magnitud para luego trasladar de forma análoga dicha relación a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades. Los procedimientos usados al aplicar razonamientos por analogía son diversos en cuanto a su forma de expresión como de representación;

en algunos casos pueden referir a analogías basadas en la conservación de la relación aditiva (suma), y en otros casos los razonamientos por analogía pueden referir a la conservación de la medida relativa (razón).

Razonamiento analítico. Los razonamientos analíticos son estrategias que consisten en comparar parejas de cantidades heterogéneas a través de la razón entre ellas, estos tipos de razonamientos, obligan a un cambio de foco en la manera como se comprenden las relaciones entre las cantidades involucradas en las situaciones problema y, a su vez, exigen de otras formas de acción ahora ligadas a la comparación de cantidades heterogéneas y al uso de instrumentos que permiten la comparación no solo de parejas de cantidades, sino de familias de parejas de cantidades, uno de los instrumentos que permiten la comparación son las gráficas de proporcionalidad directa en el plano cartesiano donde se establecen relaciones entre las cantidades del eje x con respecto a las cantidades en el eje y.

Conflictos relacionados con los procedimientos

- Conflictos al realizar operaciones con números racionales.
- Conflictos al usar la razón como relator y operador.
- Conflictos al usar la razón como correlator o transformador.
- Conflictos al realizar razonamientos por analogía.
- Conflictos al realizar razonamientos analíticos.
- Conflictos al hallar una expresión algebraica que permita relacionar el número de árboles con el número de hectáreas.

Propiedades

Las propiedades son interpretadas en el EOS como propone Wittgenstein, como "reglas gramaticales sobre el uso de símbolos y expresiones" para describir las situaciones y las acciones que se realizan ante dichas situaciones (Godino, 2002, p. 246). Las propiedades suelen darse como enunciados o proposiciones para las cuales se requiere una justificación, demostración o prueba, las propiedades exhiben el carácter utilitario de los objetos ya que dan cuenta de que se puede o no hacer con los conceptos. A continuación, se describen las propiedades emergentes de la solución institucional.

P1. Para hallar el número de árboles y el número de hectáreas se usa la igualdad de razones: $\frac{342}{1.5}=\frac{684}{3}=\frac{1026}{4.5}\ldots$

P2. Si se divide un número de árboles (y) entre su correspondiente número de hectáreas (x) entonces se obtiene la constante de proporcionalidad directa: $\frac{228\, árboles}{1\, hectárea}$.

P3. La constante de proporcionalidad directa: $\frac{228\, \acute{a}rboles}{1\, hect\acute{a}rea}$ permite establecer una correlación lineal entre el número de árboles (y) y el número de hectáreas (x) que se generaliza a través de la expresión algebraica $y = 228x$.

Conflictos relacionados con las propiedades

- Conflictos al usar la propiedad 1
- Conflictos al usar la propiedad 2
- Conflictos al usar la propiedad 3

Argumentos

Los argumentos son los razonamientos que se utilizan para comprobar, explicar o justificar las soluciones de los problemas, o para validar las inferencias, conjeturas o deducciones que se evidencian en la secuencia de prácticas matemáticas. A continuación, se describen los argumentos emergentes de la secuencia de prácticas para justificar las propiedades P1, P2 y P3.

Justificación de P1. En las situaciones de proporcionalidad es posible realizar razonamientos por analogía que consisten en determinar cómo se relacionan dos o más cantidades de magnitud de una misma magnitud para luego trasladar de forma análoga dicha relación a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades. Los procedimientos usados al aplicar razonamientos por analogía son diversos en cuanto a su forma de expresión como de representación; en algunos casos pueden referir a analogías basadas en la conservación de la relación aditiva (suma), y en otros casos los razonamientos por analogía pueden referir a la conservación de la medida relativa (razón).

Justificación de P2. Para que dos magnitudes mantengan una relación de proporcionalidad directa tienen que estar relacionadas de tal forma que, si duplicamos una, la otra también se duplica, si triplicamos una la otra también se triplica, si reducimos una a la mitad, la otra también se reduce a la mitad y si reducimos una a la tercera parte, la otra también se reduce a la tercera parte etc.

Justificación de P3. En las situaciones de proporcionalidad directa es posible establecer una relacional funcional entre las cantidades de magnitud de una magnitud y las cantidades de magnitud de la otra, en estos tipos de razonamiento funcional se reconoce que para cualquier par de valores $a_i, f(a_i)$ se tiene que $f(a_i) = \lambda a_i$, donde λ es un número racional con unidades, llamado constante de proporcionalidad.

Conflictos relacionados con los argumentos

- Conflictos al justificar la propiedad 1
- Conflictos al justificar la propiedad 2
- Conflictos al justificar la propiedad 3

6.4 Análisis cognitivo asociado a la situación de aprendizaje 2

Análisis cognitivo de las prácticas matemáticas de los estudiantes

Las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de grado séptimo al solucionar la situación problema 2 titulada *Construcción de nuevas magnitudes, el caso de la densidad poblacional* tuvo lugar en dos clases de matemáticas, cada una de 50 minutos, en estas clases los estudiantes resolvieron en parejas las preguntas planteadas en la situación problema a través de prácticas operativas y discursivas. En las fotografías de las figuras 6.37 y 6.38 se observan algunas prácticas operativas realizadas por dos parejas de estudiantes.

Figura 6.37. Practicas matemáticas – Estudiantes E15 y E16.

Figura 6.38. Practicas matemáticas - estudiantes E3 y E4.

6.4.1 Configuraciones cognitivas asociadas a las soluciones de la pregunta 1

El análisis de las soluciones dadas por los estudiantes a la pregunta 1, permitió identificar cuatro tipos de prácticas matemáticas de acuerdo a la similitud de algunos objetos matemáticos primarios puestos en juego, estas prácticas matemáticas permitieron la emergencia de algunos significados parciales de los objetos razón y proporción los cuales fueron analizadas a través de las siguientes configuraciones cognitivas: 1) razonamiento por analogía a través de sumas; 2) razonamiento por analogía a través de multiplicaciones; 3) razonamiento analítico o funcional y 4) razonamiento mediante la regla de tres. Cada configuración cognitiva permite caracterizar elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos puestos en juego por los estudiantes al resolver la pregunta 1. Finalmente, el análisis sistemático de las cuatro configuraciones cognitivas permite caracterizar el significado global de los objetos matemáticos razón y proporción presentes en las practicas matemáticas sociales (institucionales) compartidas por los estudiantes de grado séptimo. Las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes para solucionar la Pregunta 1 de la situación problema son caracterizadas a través de las siguientes configuraciones cognitivas.

6.4.1.1 Configuración cognitiva 1: Razonamiento por analogía a través de sumas

En las figuras 6.39, 6.40 y 6.41 se dan a conocer las practicas matemáticas realizadas por una pareja de estudiantes para solucionar la Pregunta 1: ¿Cómo se determinó la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles que permitió construir la gráfica?

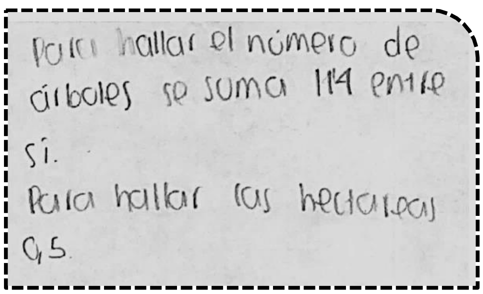


Figura 6.39. Lenguaje natural – Estudiantes E23 y E24.

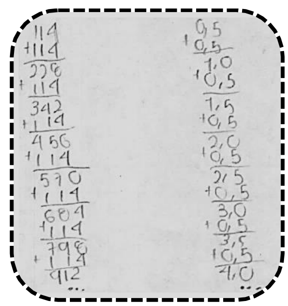


Figura 6.40. lenguaje numérico– Estudiantes E23 y E24.

En la Figura 6.39 se observa que los estudiantes usan *palabras* como: hallar, número, árboles, suma y hectáreas, a través de estos términos se da a conocer el razonamiento usado para hallar la cantidad de árboles y la cantidad de hectáreas que permitieron construir la gráfica de proporcionalidad directa, en estas *palabras* se objetiva el significado lingüístico de los objetos razón y proporción, es decir, en la *expresión* "Para hallar el número de árboles se suma 114 entre sí. Para hallar las hectáreas 0,5" emerge de forma explícita la razón 0,5 hectáreas por cada 114 árboles, a través de esta razón es posible realizar dos sumas de sumandos iguales que permiten obtener las cantidades de hectáreas y árboles.

Los razonamientos dados en *lenguaje* natural se explican a través del lenguaje numérico como se observa en la Figura 6.40, en la cual se da a conocer el *procedimiento* usado para hallar las cantidades que permiten construir la gráfica; este *procedimiento* consiste en la coordinación de dos sumas de sumandos iguales, y tiene como fundamento dos procesos de variación, que consisten en sumar simultáneamente el valor 114 árboles y de forma análoga el valor 0,5 hectáreas. Los razonamientos expresados en *lenguaje* natural y numérico permitieron a la pareja de estudiantes construir una *gráfica* de proporcionalidad directa donde el objeto matemático razón se objetiva a través de la *expresión*: por cada 0,5 hectáreas representadas en el eje x se representan 114 árboles en el eje y como se observa en la Figura 6.41.

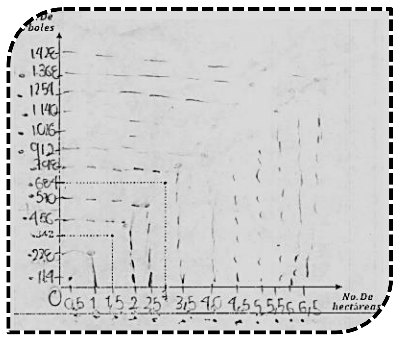


Figura 6.41. lenguaje gráfico – Estudiantes E23 y E24

La gráfica representada en la Figura 6.41 evidencia la familia de parejas ordenadas $(0.5, 114); (1, 228); (1.5, 342)$ ..., estas parejas de cantidades dan a conocer la correlación directa entre la cantidad de árboles y la cantidad de hectáreas: esta correlación directa fue establecida por los estudiantes a través de la coordinación de dos sumas de sumandos iguales (Figuras 6.39 y 6.40). En los *elementos lingüísticos*, *argumentos* y *procedimientos* usados por la pareja de estudiantes en las Figuras 6.39, 6.40 y 6.41 emerge el significado parcial de la proporción denominado, *proporción a través de razonamientos por analogía.* A través de este significado parcial la pareja de estudiantes establece que la relación aditiva entre la cantidad de hectáreas puede ser trasladada de forma análoga a la cantidad de árboles como se evidencia en la figura 6.39.

El uso del razonamiento por analogía permite la emergencia del significado parcial de la razón, denominado: *razón como correlator,* a través de la razón 0,5 hectáreas por cada 114 árboles, lo cual permite establecer una correlación directa entre las cantidades comparadas en la gráfica, esta correlación directa puede representarse a través de la siguiente igualdad: $\frac{114}{0,5} = \frac{228}{1} = \frac{342}{1,5}$ ... Finalmente, el significado parcial de la proporción denominado: *razonamiento por analogía* y el significado parcial de *razón como correlator* son los que permiten emerger el significado parcial de la proporcionalidad, denominado: *proporcionalidad – sistemas de cambio* , este significado emerge cuando es construida la gráfica de proporcionalidad directa.

6.4.1.2 Configuración cognitiva 2: Razonamiento por analogía a través de multiplicaciones

Para contestar la pregunta ¿Cómo se determinó el número de hectáreas y el número de árboles que permitió construir la gráfica? una pareja de estudiantes realizó la secuencia de prácticas matemáticas que se dan a conocer en las figuras 6.42 a 6.45.

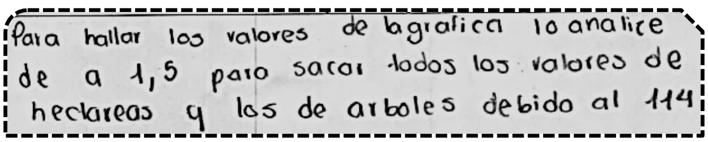


Figura 6.42. Lenguaje natural – Estudiantes E9 y E10.

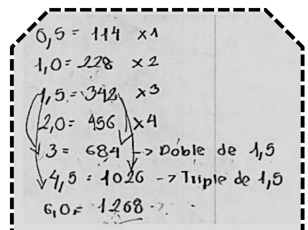


Figura 6.43. Lenguaje numérico – Estudiantes E9 y E10.

En la Figura 6.42 se observa el uso del *lenguaje* natural para dar conocer los *procedimientos* que permiten determinar la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles, estos *procedimientos* consisten en usar implícitamente la familia de razones $\frac{114}{0,5} = \frac{228}{1} = \frac{342}{1,5} = \frac{456}{2} \ldots$ donde por cada 0,5 hectáreas representadas en el eje x se deben representar 114 árboles en el eje y o por cada 1,5 hectáreas representadas en el eje x se deben representar 342 árboles en el eje y, estos razonamientos propuesto en *lenguaje* natural son explicados por los estudiantes a través del lenguaje numérico como se da a conocer en la figura 6.43; en esta práctica matemática se observa que la pareja de estudiantes usó el *signo* igual $(=)$ en lugar del signo vinculo $(/)$ o los dos puntos $(:)$ para representar la relación entre cantidades de hectáreas y árboles; por ejemplo $0,5 = 114$ puede ser interpretado desde el contexto del problema como: a 0,5 hectáreas en el eje x le corresponden, equivalen o asignan 114 árboles en el eje y.

En la práctica matemática de la Figura 6.43 los estudiantes proponen un razonamiento con fundamento en la coordinación de dos variaciones análogas; que consisten en multiplicar simultáneamente la razón $(0{,}5 = 114)$ por 2, 3 y 4 para determinar el número de árboles que pueden crecer en 1, 1.5 y 2 hectáreas respectivamente. En la Figura 6.43 son usados además *símbolos* como flechas y *propiedades* de la proporcionalidad que indican que si la cantidad de hectáreas aumentan al doble o al triple entonces la cantidad de árboles también debe aumentar al doble o al triple simultáneamente, el uso de estos objetos primarios dan a conocer la forma como fueron determinadas las cantidades de árboles que pueden crecer en 3, 4.5 y 6 hectáreas: hallando el doble, el triple y el cuádruple de la razón $(1{,}5 = 342)$.

Los razonamientos dados en *lenguaje* natural y numérico permiten a la pareja de estudiantes usar el *lenguaje* simbólico y grafico como se observa en las figuras 6.44 y 6.45.

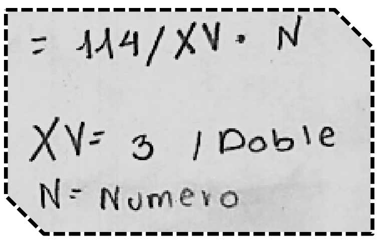


Figura 6.44. Lenguaje algebraico – estudiantes E9 y E10.

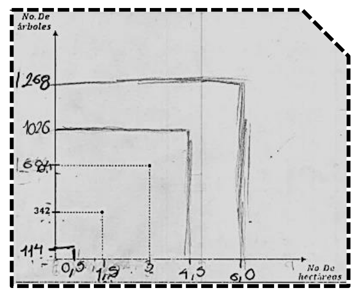


Figura 6.45. lenguaje gráfico – estudiantes E9 y E10.

En la Figura 6.44 se evidencia que la pareja de estudiantes construye la *expresión* algebraica $114/XV \cdot N$: de esta expresión se infiere que para determinar la cantidad de árboles correspondientes a un determinado número de hectáreas $XV = 05, 1, 1.5$ ... se debe multiplicar 114 por un número N=1, 2, 3… respectivamente y para hallar la cantidad de árboles correspondiente a 3, 4.5 y 6 se halla el doble, triple y cuádruple de la razón $\frac{342\ \acute{a}rboles}{1{,}5\ hect\acute{a}reas}$. Por último, los razonamientos expresados en las figuras 6.42 a 6.44 son representados de forma gráfica en la figura 6.45, en ella se observa que al valor de 0,5 hectáreas se le asignan 114 árboles, y a través de esta relación se establece una escala de 1,5 en el eje x y de 342 en el eje y permitiendo construir una gráfica de proporcionalidad directa.

En las prácticas matemáticas realizadas por la pareja de estudiantes (figuras 6.42 a 6.45) emerge el significado parcial de la razón denominado: *razón como correlator*, a través de la *expresión*: por cada 0,5 hectáreas pueden crecer 114 árboles, esta razón al ser multiplicada por 2, 3 y 4 genera la siguiente igualdad de razones $\frac{114}{0,5} = \frac{228}{1} = \frac{342}{1,5} = \frac{2}{456}$: del análisis de esta igualdad, la pareja de estudiantes decide usar además la razón: por cada 1,5 hectáreas pueden crecer 342 árboles, que al ser duplicada, triplicada o cuadruplicada genera la igualdad de razones $\frac{342}{1,5} = \frac{384}{3} = \frac{1026}{4,5} = \frac{1268}{6}$. El significado parcial de *razón como correlator,* permite a la pareja de estudiantes determinar las cantidades que generan la gráfica de proporcionalidad directa en el plano. En los razonamientos representados en las figuras 6.42 a 6.44 emerge el significado de la proporción denominado: *proporción a través de razonamientos por analogía*, a través del cual se traslada de forma análoga la relación multiplicativa establecida entre el número de hectáreas al número de árboles (Obando,2015).

A la pregunta ¿Cómo se determinó el número de hectáreas y el número de árboles que permitió construir la gráfica?, otra pareja de estudiantes evidencia las prácticas matemáticas de las figuras 6.46 a 6.49.

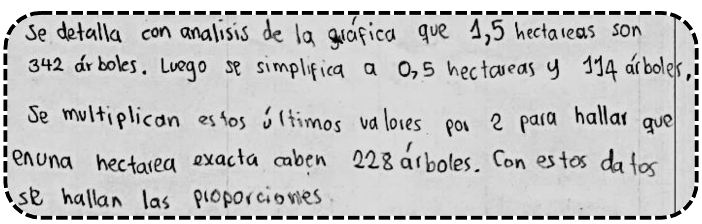

Se detalla con analisis de la gráfica que 1,5 hectareas son 342 árboles. Luego se simplifica a 0,5 hectareas y 114 árboles. Se multiplican estos últimos valores por 2 para hallar que enuna hectarea exacta caben 228 árboles. Con estos datos se hallan las proporciones.

Figura 6.46. Lenguaje natural– Estudiantes E3 y E4.

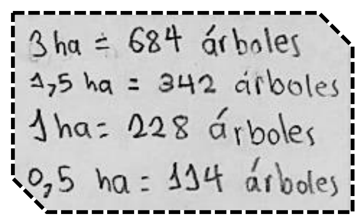

3 ha = 684 árboles
1,5 ha = 342 árboles
1 ha = 228 árboles
0,5 ha = 114 árboles

Figura 6.47. Lenguaje numérico – Estudiantes E3 y E4.

En la Figura 6.46 se observa que la pareja de estudiantes usa *palabras* como: detalla, análisis, gráfica, hectáreas, árboles, simplifica, multiplican, valores, hallar, datos y proporciones, a través de estas palabras se da conocer el *procedimiento* usado para hallar la constante de proporcionalidad, particularmente en las figuras 6.46 y 6.47 se observa que la pareja de estudiantes simplifica la expresión $\frac{342\ árboles}{1,5\ hectáreas}$ obteniendo una razón equivalente que puede representarse por la expresión $\frac{114\ árboles}{0,5\ hectáreas}$, los valores de esta última expresión son multiplicados por 2 lo cual permite obtener el número de árboles que pueden crecer por hectárea, es decir la constante de proporcionalidad $288\ \frac{ärboles}{hectárea}$: a través de esta expresión los estudiantes hallan algunas cantidades desconocidas en el plano cartesiano. Los razonamientos representados a través del lenguaje natural y numérico permiten a la pareja de estudiantes construir una expresión algebraica y una gráfica de proporcionalidad directa como se evidencia en las figuras 6.48 y 6.49.

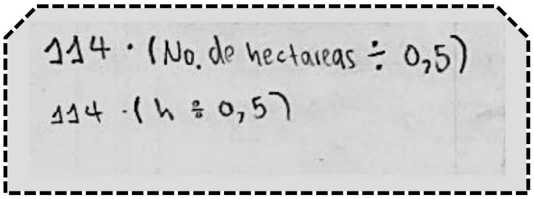


Figura 6.48. Lenguaje algebraico – Estudiantes E3 y E4.

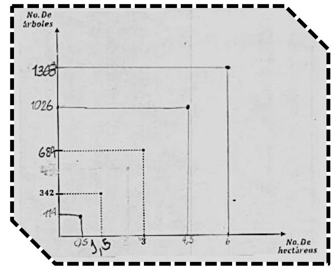


Figura 6.49. Lenguaje grafico – Estudiantes E3 y E4.

En la expresión $114 \cdot (h \div 0{,}5)$ de la Figura 6.48, se observa que para hallar la cantidad de árboles los estudiantes proponen dividir inicialmente la cantidad de hectáreas h entre 0,5 y luego multiplicar el resultado obtenido por 114, en este razonamiento se evidencia que la expresión $(h \div 0{,}5)$ indica el número de veces que debe repetirse el valor 114 para determinar la cantidad de árboles correspondiente a h hectáreas emergiendo así el significado parcial de la razón denominado: *razón como operador*. Finalmente, los razonamientos expresados a través del *lenguaje* natural, numérico y algebraico permiten construir la gráfica de proporcionalidad directa de la Figura 6.49, la cual correlaciona la cantidad árboles con las hectáreas.

6.4.1.3 Configuración cognitiva 3: razonamiento analítico o funcional

En las figuras 6.50 a 6.53 se dan a conocer otro tipo de prácticas matemáticas realizadas por una pareja de estudiantes para solucionar la pregunta ¿Cómo se determinó el número de hectáreas y el número de árboles que permitió construir la gráfica?

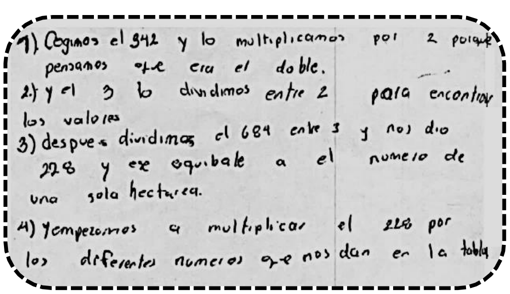


Figura 6.50. Lenguaje natural – Estudiantes E11 y E12

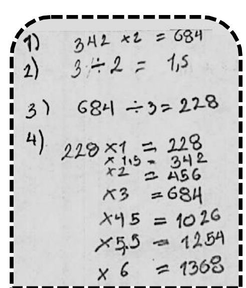


Figura 6.51. Lenguaje numérico – Estudiantes E11 y E12

En la Figura 6.50 se observa que la pareja de estudiantes usa el *lenguaje* natural para dar a conocer la secuencia de prácticas matemáticas que permite determinar la cantidad de árboles y la cantidad de hectáreas para construir la gráfica de proporcionalidad directa. Particularmente, los estudiantes proponen una secuencia de cuatro pasos; en el primero son usadas las *palabras*: multiplicamos, pensamos y doble para indicar la forma de hallar la segunda componente de la coordenada $(3, y)$ la cual corresponde a 684, en el segundo paso son usadas las *palabras*: dividir, encontrar y valores para indicar la forma de hallar la primera componente de la coordenada $(x, 342)$ la cual corresponde a 1.5: en el tercer paso se da a conocer la forma de hallar la cantidad de árboles que pueden crecer por hectárea a través de la *expresión* “dividimos el 684 entre tres” esta *operación* puede ser representada en símbolos como $\frac{684\ \text{árboles}}{3\ \text{hectáreas}} = 228\,\frac{\text{ärboles}}{\text{hectárea}}$, la cual compara la cantidad de árboles con la cantidad de hectáreas, esta razón permite obtener una nueva magnitud denominada densidad poblacional. Por último, en el cuarto paso la pareja de estudiantes usan las *palabras*: empezamos, multiplicar, diferentes, números y tabla para *argumentar* la forma de hallar la cantidad de árboles dependiendo el número hectáreas; para esto, los estudiantes proponen multiplicar la constante de proporcionalidad $228\,\frac{\text{ärboles}}{\text{hectárea}}$ por distintos valores de hectáreas que se encuentran en la tabla suministrada en la situación problema.

En la figura 6.51 se observa el uso del *lenguaje* numérico y de *símbolos* como $(\times, \div, =)$ los cuales permiten representar *operaciones* matemáticas para determinar la cantidad de árboles que pueden crecer en 1, 1.5, 2… hectáreas etc. El procedimientos usado por la pareja de estudiantes consiste en multiplicar la constante de proporcionalidad 228 por distintas cantidades de hectáreas. Los argumentos de las figuras 6.50 y 6.51 son generalizados por los estudiantes a través del *lenguaje* simbólico y gráfico como se evidencia en las figuras 6.52 y 6.53.

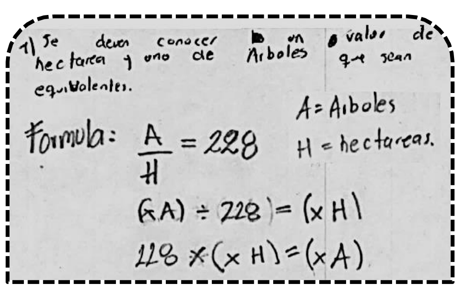


Figura 6.52. Expresión algebraica – Estudiantes E11 y E12.

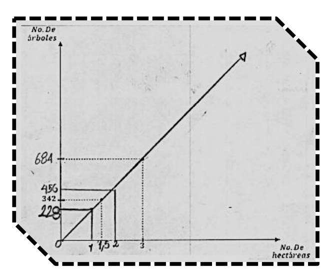


Figura 6.53. Expresión algebraica– Estudiantes E11 y E12.

En la Figura 6.52 se observa que para determinar la constante de proporcionalidad directa fue necesario "conocer un valor de hectárea y uno de árboles que fueran equivalentes", es decir la constante de proporcionalidad emerge al comparar por medio de un cociente la cantidad de árboles (A) con la cantidad hectáreas (H), y por lo tanto la constante de proporcionalidad directa expresa la cantidad de árboles que pueden crecer por hectárea.

A través de las expresiones algebraicas propuestas por los estudiantes en la figura 6.52 se observa que si se desconoce la cantidad de hectáreas estas pueden ser determinadas al dividir una cantidad de árboles entre la constante 228, y si se desconoce la cantidad de árboles estas pueden ser determinadas multiplicando la constante 228 por la cantidad de hectáreas. Finalmente, los razonamientos expresados a través del *lenguaje*: natural, numérico y algebraico permiten a los estudiantes representar en el plano cartesiano la correlación directa entre la cantidad de árboles y la cantidad de hectáreas como se observa en la Figura 6.53 en esta grafica la pareja de estudiantes ubica en el eje x los valores 1, 1.5, 2 y 3 y en el eje y los valores 228, 342, 456 y 684 los cuales son correlacionados por medio de una línea recta.

En las prácticas matemáticas de los estudiantes (figuras 6.50 a 6.53) emerge el significado parcial de la razón, denominado: *razón como correlator,* dado que la constante 228 expresa la cantidad de árboles que pueden crecer por unidad de hectárea. En las figuras 6.51 y 6.52 emerge además el significado parcial de la razón, denominado: *razón como transformador* donde la razón $288\ \frac{\ddot{a}rboles}{hect\acute{a}rea}$ es un transformador lineal que, aplicado sobre cantidades de hectáreas, produce la cantidad de árboles correspondientes: en estos *argumentos* se observa que la razón 228 expresa una propiedad invariante a dos series de cantidades de magnitud (hectáreas y árboles), que las pone en correspondencia uno a uno, y donde la razón permite definir la función que correlaciona ambos conjuntos, esto es, a través de la razón 228 se puede establecer una correlación entre la cantidad árboles y la cantidad hectáreas.

Finalmente, en las prácticas matemáticas de los estudiantes (figuras 6.50 a 6.53) emerge el significado parcial de la proporción denominado, *proporción a través de razonamientos analíticos,* este significado permitió a los estudiantes comparar familias de parejas de cantidades heterogéneas (árboles y hectáreas) a través de la razón entre ellas, estas familias de parejas de cantidades eran obtenidas al relacionar valores del eje y con valores del eje x en el plano cartesiano. Según Obando, Vasco y Arboleda (2009) en los razonamientos analíticos se debe reconocer que para cualquier par de valores a_i, $f(a_i)$ se tiene que $f(a_i) = \lambda a_i$, donde λ es un número racional con unidades, llamado constante de proporcionalidad. En este caso se pretende establecer una relación funcional entre las cantidades de magnitud de una magnitud y su correspondiente valor en la otra magnitud.

6.4.1.4 Configuración cognitiva 4: razonamiento a través de la regla de tres

Para contestar la pregunta ¿Cómo se determinó el número de hectáreas y el número de árboles que permitió construir la gráfica?, una pareja de estudiantes realizó la secuencia de prácticas matemáticas que se dan a conocer en las figuras 6.54 a 6.57.

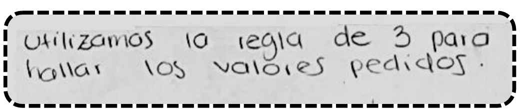


Figura 6.54. Lenguaje natural – Estudiantes E1 y E2.

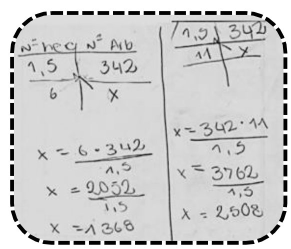


Figura 6.55. Lenguaje numérico – Estudiantes E1 y E2.

En la respuesta de la Figura 6.54 se usa el *lenguaje* natural para indicar el *algoritmo* usado por los estudiantes: "utilizamos la regla de tres para hallar los valores pedidos", en la Figura 6.55 los estudiantes ubican los sistemas de cantidades (No. de hectáreas y No. de árboles) en tablas organizadas en filas y columnas en las que son ubicados los valores correspondientes a dichos sistemas. Entre las *operaciones* realizadas se evidencia que los estudiantes multiplican el valor de 6 hectáreas por 342 árboles y dicho resultado (2052) es dividido entre 1.5 para obtener 1368, que corresponde a la cantidad de árboles que se pueden sembrar en 6 hectáreas; de igual forma, se realizan operaciones para hallar la cantidad de árboles que se pueden sembrar en 11 hectáreas: se observa que en este tipo de procedimientos no se hace explicito el uso de una razón (densidad o valor por unidad), y se centra el interés en la ubicación espacial correcta de las cantidades involucradas, para finalmente realizar multiplicaciones y divisiones que permitan obtener valores desconocidos.

En la Figura 6.55 se realiza una organización espacial de las magnitudes a través de una tabla de valores de doble entrada; según Obando (2017) este tipo de técnica corresponde a la regla general explicada por Leonardo de Pisa (1202), la cual es similar a la presentada por los matemáticos indo-árabes; donde se hace explicito el reconocimiento del proceso de dependencia de las cuatro cantidades involucradas en la situación (en términos modernos, la covariación positiva). Esta regla permite operar con las cuatro cantidades sin que sea necesario reconocer explícitamente la constante de proporcionalidad entre las cantidades involucradas.

A través de los razonamientos expresados en *lenguaje* natural y numérico (figuras 6.54 y 6.55) la pareja de estudiantes escribe una *expresión* algebraica que permite determinar la cantidad de árboles y hectáreas como se observa en la Figura 6.56: esta técnica permite encontrar parejas de coordenadas de la forma (x, y) que son ubicadas en el plano cartesiano como se observa en la figura 6.57.

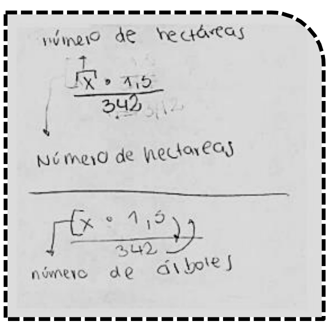


Figura 6.56. Lenguaje algebraico – Estudiantes E1 y E2

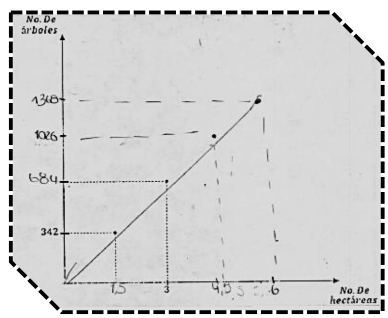


Figura 6.57. Lenguaje grafico – Estudiantes E1 y E2

En la Figura 6.56 se observa que la *expresión* algebraica $\frac{x \cdot 1.5}{342}$ permite generalizar la relación entre el número de hectáreas y el número de árboles: además en esta figura se indica por medio de flechas que los valores 1.5 y 342 pueden cambiar de posición; dependiendo de los datos desconocidos, es decir, para hallar la cantidad de hectáreas se puede usar la fórmula $\frac{x \cdot 1.5}{342}$ donde

x representa la cantidad de árboles y para hallar la cantidad de árboles se puede usar la formula $\frac{x \cdot 342}{1.5}$ donde x representa ahora la cantidad de hectáreas.

En las prácticas matemáticas realizadas por la pareja de estudiantes (figuras 6.54 a 6.57), emerge el significado parcial de la proporción, denominado: *proporción a través de la regla de tres*, el cual tiene como fundamento teórico la *propiedad* de las proporciones: el producto de extremos es igual al producto de medios, es decir, si $\frac{x}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $x \cdot d = c \cdot b$.

Síntesis de configuraciones cognitivas asociadas a la solución de la Pregunta 1

El análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes, a la luz de las configuraciones cognitivas obtenidas, permitió identificar regularidades en las soluciones propuestas por los estudiantes. En la Tabla 6.2 se muestra un resumen de las practicas matemáticas realizadas por los estudiantes.

Tabla 6.2
Síntesis de configuraciones cognitivas, situación - problema 2, pregunta 1

	Frecuencias	
Configuraciones cognitivas	**No. De estudiantes**	**% de estudiantes**
Razonamiento por analogía a través de sumas.	8	28,5
Razonamiento por analogía a través de multiplicaciones.	6	21,4
Razonamiento analítico o funcional.	10	35,7
Razonamiento a través de la regla de tres.	4	14,3
Totales	28	99.9

Fuente (Elaboración propia).

A través de la síntesis de prácticas matemáticas para solucionar la pregunta 1 se evidencia que la configuración cognitiva razonamiento *analítico o funcional* fue la más usada por los estudiantes con un 35, 7% seguida de la configuración: *razonamiento por analogía a través de suma* con un *28,5%*, las configuraciones menos usadas por los estudiantes fueron *razonamiento por analogía a través de multiplicaciones con un 21,4% y razonamiento a través de la regla de tres* con un

14,3%. Se aclara que el principal objetivo de la investigación fue caracterizar las prácticas matemáticas de los estudiantes que permitieran comprender los significados de los objetos razón y proporción emergentes de dichas prácticas, y aunque se cuenta el número de estudiantes que dio a conocer cierta configuración cognitiva, este número se toma como referencia más no como un elemento básico de interpretación.

6.5.2 Configuraciones cognitivas asociadas a las soluciones de la Pregunta 2

Las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes para solucionar la Pregunta 2 de la situación problema son caracterizadas a través de las siguientes configuraciones cognitivas.

6.5.2.1 Configuración cognitiva 1: Razonamiento por analogía a través de sumas

En las figuras 6.58 a 6.61 se dan a conocer las prácticas matemáticas realizadas por una pareja de estudiantes para solucionar la Pregunta 2 de la situación problema: ¿Qué estrategias o procedimientos se usaron para hallar la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles que completan la tabla?

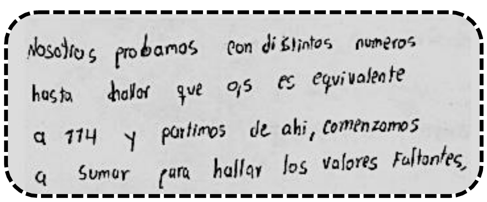


Figura 6.58. Lenguaje natural – Estudiantes E5 y E6.

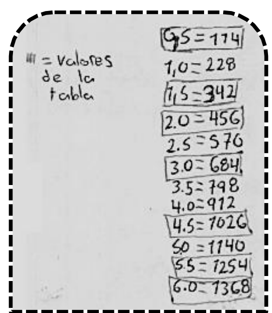


Figura 6.59. Lenguaje numérico – Estudiantes E5 y E6.

En las figuras 6.58 y 6.59 se observa que los estudiantes usan el *lenguaje* natural y numérico para representar los razonamientos usados y hallar las cantidades que faltan en la tabla, en el lenguaje natural son usadas dos *expresiones* importantes para resolver la pregunta con éxito a) “0.5 es equivalente a 114” y b) “comenzamos a sumar para hallar los valores faltantes”, en la primera expresión emerge explícitamente el uso de la razón como una correspondencia entre la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles, en la segunda *expresión* se observa el tipo de *procedimiento* usado para hallar las cantidades desconocidas en la tabla, este *procedimiento* consiste en realizar dos proceso de sumas iteradas; una para 0,5 y otro para 114, es decir; por cada vez que se repite la cantidad 0,5 hectáreas se repite la cantidad 114 árboles (Figura 6.59).

Los *argumentos* dados por los estudiantes (Figuras 6.58 y 6.59) evidencian que la forma como están distribuidos las cantidades en la tabla, determinan como se analizan las relaciones entre las cantidades, específicamente, los datos en la tabla están distribuidos aleatoriamente y las cantidades de hectáreas son múltiplos de 0,5, esta distribución espacial de las cantidades lleva a que los estudiantes tomen como referente la pareja de números 0.5 a 114 para hallar las cantidades desconocidas, y por tanto decidan ordenar de menor a mayor y en forma vertical las cantidades involucradas en el problema, de esta forma logran realizar dos proceso de variación, uno para 0.5 y otra para 114, es decir por cada vez que se suma la cantidad 0.5 hectáreas se suma de forma análoga la cantidad 114 árboles.

En la práctica matemática de la Figura 6.59 se observa que la pareja de estudiantes usa el *signo* igual $(=)$ en lugar del signo vinculo $(/)$ o los dos puntos $(:)$ para representar la relación entre las cantidades de hectáreas y las cantidades de árboles; por ejemplo la *expresión* $0.5 = 114$ es usada para indicar que a 0.5 hectáreas le corresponden o asignan 114 árboles en la tabla de valores, en la figura 6.59 se observa además que los datos usados para completar la tabla son encerrados con rectángulos.

Los razonamientos representados en *lenguaje* natural y numérico permiten a la pareja de estudiantes proponer una expresión algebraica para generalizar la correlación directa que existe entre las cantidades de árboles y hectáreas como se observa en la figura 6.60.

$(2(x)\cdot y = 114$

x = N. de hectareas

Y = N. de arboles

Figura 6.60. Lenguaje algebraico – Estudiantes E5 y E6.

No. De hectáreas	No. De árboles
4,5	1026
0.5	114
2	456
6	1368
5,5	1254
1.5	342
0	0

Figura 6.61. Lenguaje gráfico – Estudiantes E5 y E6.

En la *expresión* algebraica es usada la letra x para representar la cantidad de hectáreas y la letra y para representar la cantidad de árboles, se observa en la expresión que los estudiantes indican mediante una flecha la posición correcta que debe tener la letra y: de esta fórmula se infiere que las cantidad de árboles desconocidas en la tabla (Figura 6.61) pueden determinarse al multiplicar una cantidad x de hectáreas por el doble de 114. Las practicas matemáticas propuestas por los estudiantes (figuras 6.58 a 6.60) permiten determinar los datos faltantes de la tabla como se observa en la Figura 6.61. Finalmente, las prácticas matemáticas propuestas por los estudiantes en las figuras 6.58 y 6.59 permiten la emergencia del significado parcial de la razón, denominado *razón como correlator* en la expresión "0.5 es equivalente a 114" la cual objetiva la relación entre dos familias de cantidades (árboles y hectáreas) y permite establecer una correspondencia uno a uno entre elementos de ambas familias, y definir una proporcionalidad directa entre ellas.

En las practicas matemáticas evidenciadas en las figuras 6.58 y 6.59 emerge el significado parcial de la proporción, denominado *proporción a través de razonamientos por analogía*, el cual consistió en realizar dos procesos de sumas iteradas; una para 0.5 y otro para 114, es decir por cada vez que se sumaba la cantidad 0.5 hectáreas se sumaba de forma análoga la cantidad 114 árboles. En la expresión algebraica $y = 2(x) \cdot 114$ propuesta en la figura 6.60 emerge el significado parcial de la razón, denominado: *razón como transformador*, en donde la constante de proporcionalidad $2 \cdot 114 = 228$, al ser aplicada a distintos valores de hectáreas permite obtener las correspondientes cantidades de árboles.

6.5.2.2 Configuración cognitiva 2: Razonamiento por analogía a través de multiplicaciones

Las figuras 6.62, 6.63 y 6.64 dan a conocer una secuencia de prácticas matemáticas que propone otra pareja de estudiantes para responder la pregunta: ¿Qué estrategias o procedimientos se usaron para hallar la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles que completan la tabla?

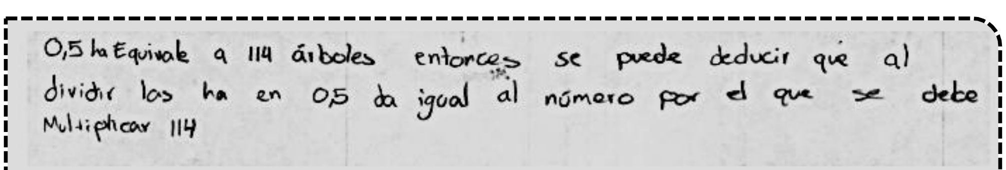

0,5 ha Equivale a 114 árboles entonces se puede deducir que al dividir los ha en 0,5 da igual al número por el que se debe Multiplicar 114

Figura 6.62. Lenguaje natural – Estudiantes E13 y E14.

En la Figura 6.62 se observa el uso de palabras como: equivale, árboles, entonces, deducir, dividir, igual, número y multiplicar, las cuales hacen explicitas dos *propiedades* de la proporcionalidad: a) cuando la cantidad de magnitud a_1 (hectáreas) aumenta al doble, al triple, ..., entonces la cantidad de magnitud b_1 (árboles) aumenta al doble, al triple, ... , b) cuando la cantidad a_1 (hectáreas) disminuye a la mitad, a la tercera parte, ..., entonces la cantidad b_1 (árboles) disminuye a la mitad, a la tercera parte, ...en las expresiones usadas por la pareja de estudiantes se evidencian los *argumentos* que permiten determinar las cantidades desconocidas en la tabla. El *argumento* expresado en la figura 6.6.2 lleva a que los estudiantes puedan generalizar la correlación directa entre la cantidad de árboles y la cantidad de hectáreas como se da a conocer en la figura 6.63.

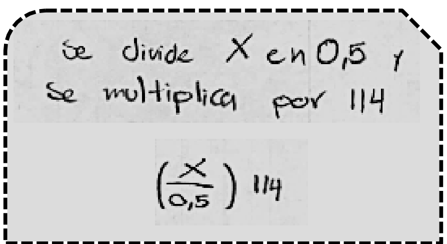
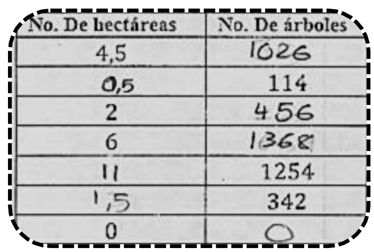


Figura 6.63. Lenguaje numérico y algebraico Estudiantes E13 y E14.



No. De hectáreas	No. De árboles
4,5	1026
0,5	114
2	456
6	1368
11	1254
1,5	342
0	0

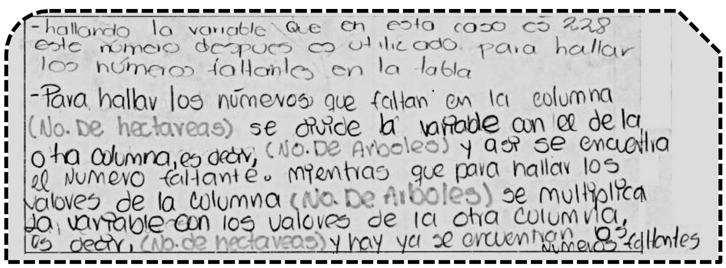
Figura 6.64. Lenguaje gráfico Estudiantes E13 y E14.

En la expresión $\left(\frac{x}{0,5}\right)114$, se observa que para hallar la cantidad de árboles que completan la tabla (figura 6.64), los estudiantes proponen dividir inicialmente una cantidad x de hectáreas entre 0.5 y luego multiplicar el resultado obtenido por 114: en este *procedimiento* se evidencia que la expresión $\frac{x}{0,5}$ indica el número de veces que debe repetirse el valor 114 para determinar la cantidad de árboles correspondiente a x hectáreas.

A partir de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes y expresadas mediante *lenguaje* natural, numérico y algebraico emerge el significado parcial de la razón, denominado: *razón como correlator* , este significado se objetiva en la expresión “0.5 ha equivale a 114 árboles”, y permite establecer una correlación directa entre las cantidades propuestas en la tabla de valores. En la fórmula $\left(\frac{x}{0,5}\right)114$ emerge el significado parcial de la razón, denominado: *razón como operador* a través de la expresión $\frac{x}{0.5}$ que al ser aplicada a la cantidad 114 permite determinar la cantidad de árboles que completan la tabla. La secuencia de prácticas matemáticas propuesta por la pareja de estudiantes evidencia la emergencia del significado parcial de la proporción, denominado: *proporción a través de razonamientos por analogía,* el cual consistió en determinar la forma como se relacionaban las cantidades de hectáreas y luego trasladar de forma análoga dicha relación (multiplicativa) a las cantidades de árboles.

6.5.2.3 Configuración cognitiva 3. Razonamiento analítico o funcional

Los protocolos de las figuras 6.65, 6.66 y 6.67 evidencian la secuencia de prácticas matemáticas que propone una pareja de estudiantes para responder la pregunta: ¿Qué estrategias o procedimientos se usaron para hallar la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles que completan la tabla?


-hallando la variable que en esta caso es 228 este número despues es utilizado para hallar los números faltantes en la tabla

-Para hallar los números que faltan en la columna (No. De hectareas) se divide la variable con el de la otra columna, es decir, (No. De Arboles) y así se encuentra el numero faltante. mientras que para hallar los valores de la columna (No. De Arboles) se multiplica la variable con los valores de la otra columna, es decir, (No. de hectareas) y hay ya se encuentran los números faltantes

Figura 6.65. Lenguaje natural – Estudiantes E25 y E26.

Se observa en el protocolo de la Figura 6.65 que los estudiantes usan el *lenguaje* natural, para dar a conocer los *procedimientos* que permiten determinar las cantidades desconocidas en la tabla de proporcionalidad directa, sin embargo, en el uso del *lenguaje* se evidencian *conceptos* erróneos como por ejemplo "variable" el cual es usado por la pareja de estudiantes para referirse a la constante de proporcionalidad directa, en el protocolo son usadas con mayor frecuencia expresiones como: número faltante, divide, columna, valores y multiplica.

Como *procedimiento*, los estudiantes proponen usar la constante de proporcionalidad $228\frac{árboles}{hectárea}$; indicando que "para hallar los números que faltan en la columna (No. De hectáreas) se divide la variable (constante) con el de la otra columna, es decir, (No. De árboles) " en el anterior procedimiento se observa un error ya que para determinar la cantidad de hectáreas se tiene que dividir la cantidad de árboles entre la constante, y no la constante entre el número de árboles como proponen los estudiantes, de igual forma esto no es un obstáculo para determinar los valores desconocidos en la tabla como se observa en la figura 6.66. Entre los *procedimientos* propuestos se evidencia que "para hallar los valores de la columna (No. De árboles) se multiplica la variable (constante) con los valores de la otra columna, es decir, (No. De hectáreas)", estos procedimientos observados en la figura 6.65 permiten inferir que la pareja de estudiantes logra comprender la correlación directa entre los dos sistemas de cantidades presentes en la tabla.

Los razonamientos expresados en *lenguaje* natural son representados de forma numérica como se evidencia en la Figura 6.66 y generalizados a través del *lenguaje* algebraico como se evidencia en la Figura 6.67.

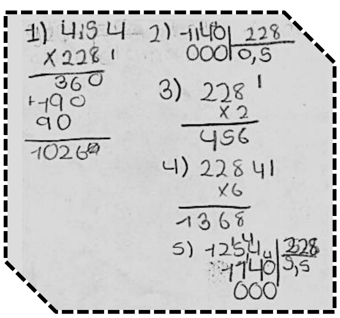


Figura 6.66. Lenguaje numérico – Estudiantes E25 y E26

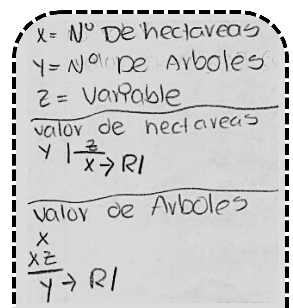


Figura 6.67. Lenguaje algebraico – Estudiantes E25 y E26.

Se observa en la Figura 6.66 que para hallar la cantidad de árboles correspondiente a 4.5, 2 y 6 hectáreas, la pareja de estudiantes multiplica dichos valores por la constante de proporcionalidad 228 y para hallar la cantidad de hectáreas correspondiente a 114 y 1254 árboles se dividen dichos valores entre la constante de proporcionalidad 228: estas *operaciones* de multiplicación y división son las que permiten determinar las cantidades faltantes en la tabla de valores. Por otra parte, en la figura 6.67 la pareja de estudiantes usa las letras x, y, z para representar la cantidad de hectáreas, árboles y la constante de proporcionalidad respectivamente mediante las cuales establece la siguiente *expresiones* algebraica $y \div z = x$ usada para hallar la cantidad de hectáreas y la expresión $x \cdot z = y$ usada para hallar la cantidad árboles, a través del uso del lenguaje numérico y algebraico: así es como la pareja de estudiantes *argumenta* y hace operativos los razonamientos hechos en *lenguaje* natural.

En las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes (figuras 6.65 a 6.67) emerge el significado parcial de la razón, denominado: *razón como correlator,* este significado esta soportado en la comparación de parejas de cantidades heterogéneas a través de la razón entre ellas y fue objetivada mediante la expresión $228\,\frac{árboles}{hectárea}$, esta razón pone en correspondencia biunívoca las cantidades de árboles con las cantidades de hectáreas en la tabla de valores: la razón $228\,\frac{árboles}{hectárea}$ es interpretada en el contexto del problema como el número de árboles que pueden crecer por cada hectárea, esta expresión al ser aplicada a distintos valores de hectáreas permite emerger el significado parcial de la razón, denominado *razón como transformador*, es decir, la expresión "228 árboles por cada hectárea" expresa una nueva cantidad (densidad poblacional) que cumple la función de operador lineal que se aplica sobre las cantidades 4.5, 2 y 6 hectáreas para obtener las cantidades 456, y 1368 árboles respectivamente que completan algunas casillas de la tabla de valores.

Finalmente, el uso de los significados parciales *razón como correlator* y *razón como transformador*, permiten la emergencia del significado parcial de la proporción, denominado: *proporción a través de razonamientos analíticos*, el cual se fundamenta no solo en la comparación de parejas de cantidades, sino familias de parejas de cantidades. Otra secuencia de prácticas matemáticas donde una pareja de estudiantes usa razonamientos analíticos que permiten contestar la pregunta 2: ¿Qué estrategias o procedimientos se usaron para hallar la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles que completan la tabla? se evidencian en las figuras 6.68 a 6.70.

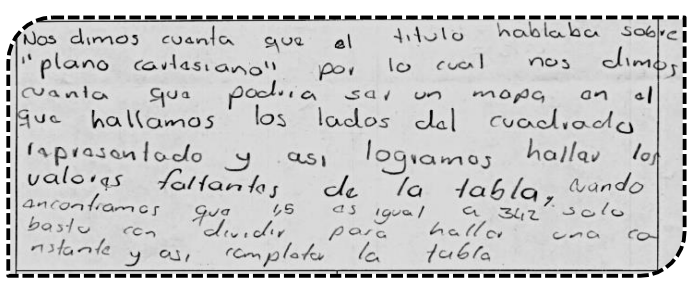

Nos dimos cuanta que el titulo hablaba sobre "plano cartesiano" por lo cual nos dimos cuanta que podria ser un mapa en el que hallamos los lados del cuadrado representado y asi logramos hallar los valores faltantes de la tabla, cuando encontramos que 4,5 es igual a 342 solo basto con dividir para hallar una constante y asi completar la tabla

Figura 6.68. Lenguaje natural – Estudiantes E27 y E28.

En la figura 6.68 se observa el uso de *palabras o términos* como: plano cartesiano, mapa, lados, cuadrado, valores, tabla y constate, estas palabras evidencian que los estudiantes relacionan las cantidades dadas en el plano cartesiano con mapas de forma cuadrada: es decir, el lado horizontal de un cuadrado, representa cierta cantidad de hectáreas y el lado vertical puede representar cierta cantidad de árboles; la relación entre los lados de los cuadrados es generalizada mediante reducción o ampliación proporcional de cada lado, esta relación lleva a los estudiantes a proponer expresiones como " "1.5 es igual a 342", mediante la cual se objetiva el uso de la razón: $\frac{342\ \acute{a}rboles}{1.5\ hect\acute{a}reas}$ que indica la cantidad de árboles que pueden crecer por cada 1,5 hectáreas, y que permiten completar las cantidades faltantes en la tabla de valores. En el *lenguaje* natural usado en la figura 6.58 se observa que los estudiantes proponen dividir la cantidad árboles entre la cantidad hectáreas y así hallar una constante de proporcionalidad directa: número de árboles por hectárea, la cual al ser aplicada a distintos valores de hectáreas permite obtener la cantidad de árboles que le corresponden.

Las *palabras* y *procedimientos* indicados a través del lenguaje natural son representados por los estudiantes en lenguaje numérico, gráfico y algebraico como se evidencia en las figuras 6.69 y 6.70.

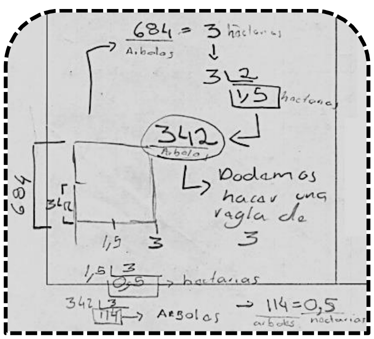


Figura 6.69. Lenguaje numérico y gráfico Estudiantes E27 y E28.

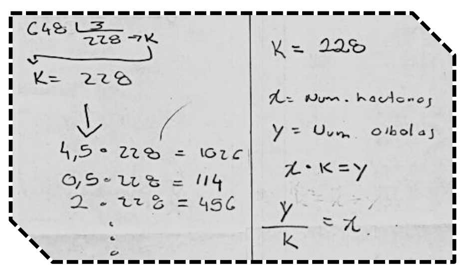


Figura 6.70. Lenguaje algebraico Estudiantes E27 y E28.

En la práctica matemática de la figura 6.69 se observa que la pareja de estudiantes representa a través de un cuadrado la correspondencia uno a uno entre la cantidad hectáreas y la cantidad árboles, esta representación objetiva el uso de tres razones, a saber: $\frac{342\ \acute{a}rboles}{1.5\ hect\acute{a}reas}$, $\frac{684\ \acute{a}rboles}{3\ hect\acute{a}reas}$, $\frac{114\ \acute{a}rboles}{0.5\ hect\acute{a}reas}$ en la Figura 6.69 observa además el uso el *signo* igual $(=)$ en lugar del signo vinculo $(/)$ o los dos puntos $(:)$ para representar la relación entre las cantidades de árboles y las cantidades de hectáreas; por ejemplo la *expresión* $684 = 3$ es usada para indicar que a 684 árboles le corresponden o asignan 3 hectáreas en la tabla de valores, se evidencia que los estudiantes hallan la razón 114 a 0.5 para determinar los datos que faltan en la tabla, particularmente se dividen 3 hectáreas entre 2 y luego el resultado, 1.5, es dividido nuevamente entre 3 para obtener la cantidad

0.5, mientras que para hallar el valor 114, dividen 684 entre 2 y luego el resultado, 342, es dividido entre tres, este procedimiento, evidencia el uso del significado parcial de la proporción, denominado : *proporción a través de razonamientos por analogía* que consistió en determinar cómo se relacionan dos o más cantidades de magnitud de una misma magnitud para luego trasladar de forma análoga dicha relación a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades.

En la Figura 6.70 se evidencia que los estudiantes hallan la cantidad de árboles que pueden crecer por hectárea, al dividir 684 entre 3, obteniendo la constante de proporcionalidad 228, esta constante al ser multiplicada por distintas cantidades de hectáreas permite obtener finalmente las cantidades desconocidas en la tabla de valores. En la Figura 6.70 se observa que los estudiantes usan las letras x , y para representar la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles respetivamente y la letra k para representar la constante de proporcionalidad, estas letras son usadas para dar a conocer la correlación directa entre las cantidades involucradas mediante la *expresión algebraica* $x \cdot k = y$, para hallar la cantidad de árboles si se conoce la cantidad de hectáreas, y la *expresión algebraica* $\frac{y}{k} = x$, para hallar la cantidad de hectáreas si se conoce la cantidad de árboles.

Las prácticas matemáticas de los estudiantes evidencian la emergencia del significado parcial, denominado: *razón como correlator*, este significado esta soportado en la comparación de parejas de cantidades heterogéneas a través de la razón entre ellas y fue objetivada mediante la expresión $228\frac{árboles}{hectárea}$, esta razón pone en correspondencia biunívoca las cantidades de árboles con las cantidades de hectáreas en la tabla de valores: la razón $228\frac{árboles}{hectárea}$ es interpretada en el contexto del problema como el número de árboles que pueden crecer por cada hectárea, esta razón al ser aplicada a distintos valores de hectáreas permite la emergencia del significado parcial de *razón como transformador*, es decir, la expresión 228 árboles por cada hectárea expresa una nueva cantidad (densidad poblacional) que cumple la función de operador lineal que se aplica sobre distintas cantidades de hectáreas para obtener cantidades desconocidas de árboles, o puede ser aplicada a distintas cantidades de árboles para obtener cantidades desconocidas de hectáreas. Finalmente, el uso de los significados parciales *razón como correlator* y *razón como transformador*, permiten la emergencia del significado parcial de la proporción: *razonamiento* *analítico,* el cual se fundamenta no solo en la comparación de parejas de cantidades, sino familias de parejas de cantidades.

6.5.2.4 Configuración cognitiva 4: Razonamiento a través de la regla de tres

Para contestar la pregunta ¿Qué estrategias o procedimientos se usaron para hallar la cantidad de hectáreas y la cantidad de árboles que completan la tabla? una pareja de estudiantes realizó la secuencia de prácticas matemáticas que se dan a conocer en las figuras 6.71 a 6.74.

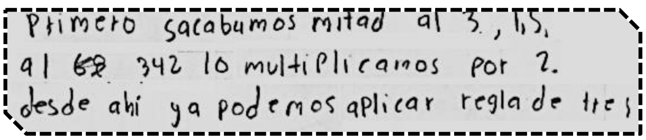


Figura 6.71. Lenguaje natural – Estudiantes E9 y E10.

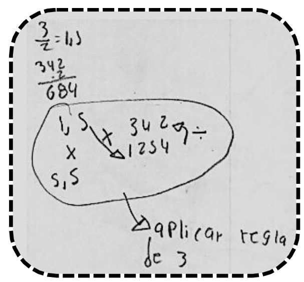


Figura 6.72. Lenguaje numérico – Estudiantes E9 y E10.

En la Figura 6.71 se observa el uso de *palabras* o *términos* como: mitad, multiplicar y regla de tres, estas expresiones dan a conocer los razonamientos usados para determinar las cantidades desconocidas en la tabla de valores, se evidencia en el *lenguaje* natural que la pareja de estudiantes objetiva las razones: $\frac{342\ árboles}{1{,}5\ hectáreas}$ y $\frac{684\ árboles}{3\ hectáreas}$, la aplicación de estas razones obtenidas del análisis de los datos presentes en el plano cartesiano son las que permite establecer una correlación lineal entre las cantidades desconocidas en la tabla de valores.

La Figura 6.72 da a conocer en *lenguaje* numérico las operaciones realizadas a través de las cuales emergen las razones: 1.5 a 342 y 3 a 684; la cantidad 1.5 es hallada al dividir 3 entre 2 y la cantidad 684 al multiplicar 342 por 2. En los *procedimientos* se da a conocer un ejemplo de la forma como fueron halladas los datos desconocidos en la tabla, es decir, para hallar la cantidad de hectáreas en las que pueden crecer 1254 árboles, los estudiantes proponen multiplicar 1.5 por 1254 y este resultado dividirlo entre 342, en la Figura 6.72 se observa el uso de los símbolos (×) para indicar la multiplicación, el uso del símbolo (÷) para indicar la división y el uso de flechas (→)

para indicar los números a multiplicar o dividir, a través de las operaciones y símbolos usados es dado a conocer la forma como funciona la regla de tres.

A través de los razonamientos expresados en *lenguaje* natural y numérico (Figuras 6.71 y 6.72) la pareja de estudiantes escribe una *expresión* algebraica que permite determinar la cantidad de árboles y hectáreas como se observa en la Figura 6.73, esta expresión sintetiza los procedimientos que permiten completar la tabla de la Figura 6.74.

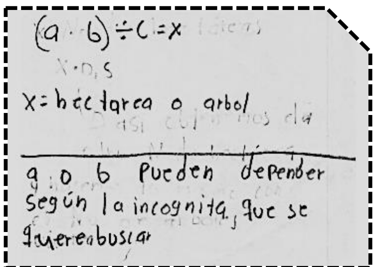
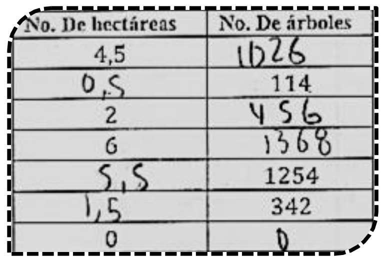


Figura 6.73. Lenguaje algebraico – Estudiantes E9 y E10.



No. De hectáreas	No. De árboles
4,5	1026
0,5	114
2	456
6	1368
5,5	1254
1,5	342
0	0

Figura 6.74. Lenguaje grafico – Estudiantes E9 y E10.

El protocolo de la Figura 6.73 da a conocer el uso de la *expresión algebraica* $(a \cdot b) \div c = x$, donde la letra x es usada para representar la cantidad de hectáreas o la cantidad de árboles simultáneamente, y las letras a, b "dependen según la incógnita que se quiera buscar" la expresión algebraica usada por los estudiantes es una forma de generalizar la regla de tres y se infiere que es obtenida a través de la repetición de las operaciones realizadas con números y que permitieron completar la tabla de la Figura 6.74. En las prácticas matemáticas realizadas por la pareja de estudiantes , emerge el significado parcial de la proporción: *regla de tres*, el cual tiene como fundamento teórico la *propiedad* de las proporciones: el producto de extremos es igual al producto de medios, es decir, si $\frac{x}{b} = \frac{c}{d}$ entonces $x \cdot d = c \cdot b$. Según Obando (2017) este tipo de técnica corresponde a la regla general explicada por Leonardo de Pisa (1202), la cual es similar a la presentada por los matemáticos indo-árabes; donde se hace explicito el reconocimiento del proceso de dependencia de las cuatro cantidades involucradas en la situación (en términos modernos, la covariación positiva). Esta regla permite operar con las cuatro cantidades sin que sea necesario reconocer explícitamente la constante de proporcionalidad entre las cantidades involucradas.

Síntesis de configuraciones cognitivas asociadas a la solución de la Pregunta 2

El análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes, a la luz de las configuraciones cognitivas obtenidas, permitió identificar regularidades en las soluciones propuestas por los estudiantes a la Pregunta 2. En la Tabla 6.3 se muestra un resumen de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes.

Tabla 6.3
Síntesis de configuraciones cognitivas, Situación - problema 2, Pregunta 2

	Frecuencias	
Configuraciones cognitivas	**No. De estudiantes**	**% de estudiantes**
Razonamiento por analogía a través de sumas.	12	42,8
Razonamiento por analogía a través de multiplicaciones.	6	21,4
Razonamiento analítico o funcional.	8	28,5
Razonamiento a través de la regla de tres.	2	7,1
Totales	28	99.8

Fuente (Elaboración propia).

A través de la síntesis de prácticas matemáticas para solucionar la pregunta 2 se evidencia que la configuración cognitiva: *razonamiento por analogía a través de sumas* fue la más usada por los estudiantes con un 42,8 % seguida de la configuración: *razonamiento analítico o funcional* con un *28,5%,* las configuraciones menos usadas por los estudiantes fueron *razonamiento por analogía a través de multiplicaciones con* un 21,4 % y *razonamiento a través de la regla de tres* con un 7,1 %. Se aclara que el principal objetivo de la investigación fue caracterizar las prácticas matemáticas de los estudiantes que permitieran comprender los significados de los objetos razón y proporción emergentes de dichas prácticas, y aunque se cuenta el número de estudiantes que dio a conocer cierta configuración cognitiva, este número se toma como referencia más no como un elemento básico de interpretación.

Capítulo 7. Conclusiones generales

El ideal de la Didáctica Científica de las Matemáticas es:
descubrir el verdadero funcionamiento de la ciencia y reemplazar
la génesis ficticia característica de los sistemas formales
por el conocimiento de la heurística de los
procesos de su constitución
Luis Carlos Arboleda (2015)

En este capítulo se responde la pregunta de investigación, dando a conocer en qué medida se lograron los objetivos del estudio. Las conclusiones se presentan con base en el análisis sistemático de los resultados obtenidos en cada una de las fases propuestas en el marco metodológico, para el desarrollo de la investigación. Las actividades realizadas en cada fase permitieron alcanzar los objetivos propuestos y dar respuesta a la pregunta de investigación, formulada en los siguientes términos ¿Cuáles son los significados de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad, emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo de una institución educativa de la ciudad de Tunja, al resolver situaciones – problemas de proporcionalidad directa?

7.1 Logro de los objetivos específicos 1 y 2

El objetivo específico 1, se centró en la reconstrucción del significado global de los objetos matemáticos razón y proporción, a través del estudio histórico – epistemológico relacionado con las fuentes fenomenológicas que dieron paso al surgimiento de la proporcionalidad directa. El objetivo específico 2, corresponde al análisis de los problemas – fenómenos obtenidos del estudio histórico – epistemológico, a través de configuraciones epistémicas relacionadas con los significados parciales de los objetos razón, proporción y proporcionalidad – RPP.

El logro de estos objetivos específicos se obtiene, como resultado de las actividades desarrolladas en las fases 1 y 2 del estudio: en la primera fase se analizaron libros de historia de las matemáticas, tesis doctorales, tesis de maestría y artículos científicos y el llegar a la comprensión de estas fuentes documentales permitió identificar y analizar seis periodos de la historia los cuales dan a conocer el desarrollo y constitución de los objetos RPP. En la segunda fase se pasa al análisis epistémico de seis problemas – fenómenos por medio de la caracterización de la tipología de objetos primarios propuestos en el EOS.

En esta dirección, la revisión y análisis de las fuentes documentales realizadas en la fase 1, dan a conocer que el origen y desarrollo de los objetos RPP a través de la historia se considera como una construcción social y cultural relacionada con necesidades básicas del ser humano como lo evidencia el trabajo de los babilonios (c. 3000 a. C – c. 1600 a. C); chinos (c. 300 a.C.- c. 300 d. C); hindúes y árabes (c. 300 a. C – c. 1300), donde el uso de la intuición y diversos métodos heurísticos les permitieron resolver fenómenos de la naturaleza . En este sentido, se evidenció que los babilonios (c. 3000 a. C – c. 1600 a. C) usaban algunos conceptos de razón y proporción al resolver situaciones con sistemas de medidas, agrimensura, construcciones, transacciones comerciales, astronomía, y la distribución de diferentes tipos de bienes y servicios como: impuestos, labores y alimentos, entre otros. El estudio de estos fenómenos permitió identificar el *primer significado parcial* de los objetos matemáticos, denominado: *razón como relator/transformador y proporción a través de comparación de áreas*.

En el estudio histórico – epistemológico se observó que los objetos RPP además de emerger de situaciones prácticas, presentan el fundamento axiomático – deductivo desarrollado por los griegos, particularmente en el periodo clásico (c. 600 a.C. – c. 300 a. C) y helenístico (c. 300 a.C. – c. 600 a. C). En el periodo clásico grandes matemáticos como Tales de Mileto (c. 640 a.C. – c. 546 a.C.), Anaximandro (c. 610 a.C. – c. 546 a.C.), Anaxímenes (c. 585 a.C. – c. 524 a.C.), Pitágoras (c. 585 a.C. – c. 500 a.C.) y Eudoxo (c. 390 a.C. – c. 337 a.C.) entre otros, desarrollaron el fundamento conceptual de la teoría de la proporción expuesta por Euclides en el texto de los *Elementos* (c. 325 a.C. – c. 265 a.C.). Tales de Mileto aportó un método deductivo basado en axiomas para el estudio de la geometría dejando de lado los métodos empíricos, con los axiomas era capaz de justificar métodos que le permitían realizar cálculos de distancias inasequibles, como por ejemplo la deducción de la altura de la pirámide de Keops en Egipto o los razonamientos usados para hallar distancias de barcos que se encontraban a la orilla de la playa. El estudio de estos fenómenos permitió identificar el *segundo significado parcial* de los objetos matemáticos, denominados: *razón como relator y proporción a través de razonamientos por analogía.*

En el periodo clásico, los griegos, desarrollaron además el método de antanairesis o antiphairesis conocido como método de restas sucesivas o algoritmo de la sustracción de Euclides: este método les permitía hallar la medida común de una pareja de magnitudes del mismo tipo y la proporción de estos. Según Filep (2003) la antanairesis pudo ser una teoría de la proporción atribuida a los matemáticos griegos clásicos y la génesis de la definición de razón y proporción de Eudoxo. Según Guacaneme (2015), si dos parejas de magnitudes tienen la misma antanairesis, entonces se puede concluir que estas guardan la misma razón, es decir, son proporcionales. Del análisis realizado al algoritmo de la sustracción de Euclides emerge del *tercer significado parcial* de los objetos matemáticos, denominado: *razón y proporción a través de la antanairesis*.

Los objetos RPP, fueron estudiados también en el periodo clásico griego por Eudoxo (c. 390 a.C. – c. 337 a.C.), considerado uno de los matemáticos más importantes de la academia de Platón, el introdujo el concepto de magnitud continua el cual permitía comprender las razones conmensurables e inconmensurables. Aunque los razonamientos de Eudoxo fueron valiosos para el avance de la comprensión de los objetos RPP, se resalta que sus ideas solo permitían establecer razones entre cantidades homogéneas, dificultando la comprensión de razones entre cantidades heterogéneas. Finalmente, los fundamentos conceptuales realizados por los griegos clásicos fueron sistematizados en el periodo griego helenístico por Euclides (c. 325 a.C. – c. 265 a.C.) quien configuro en el texto *"Los Elementos"* una teoría de las proporciones que permitió, a los matemáticos de la época comprender las razones conmensurables e inconmensurables desde razonamientos geométricos deductivos.

El estudio histórico – epistemológico evidencia que el desarrollo de los objetos RPP no solo se dio en Grecia, sino que además tuvo importantes avances en los chinos, hindúes, árabes y en los trabajos de Leonardo de Pisa (c. 300 a. C – c. 1300 d. C). Específicamente, las ideas de razón y proporción en la cultura China (c. 300 a.C.- c. 300 d. C) emergieron desde un enfoque práctico relacionado con actividades comerciales, donde eran usadas de manera sistemática las constantes de proporcionalidad, en forma de factores de conversión, tasas de intercambio entre productos, costo unitario de un producto, cálculo de áreas (aproximación del número π) etc. Se evidencia en los métodos chinos el uso de razones entre cantidades heterogéneas, las cuales no eran aceptadas en las teorías desarrolladas por los griegos clásicos y helenísticos. El estudio de los fenómenos evidenciados en la cultura china permitió identificar el *cuarto significado* parcial de los objetos de estudio; significado denominado: *razón como correlator – transformador y proporción a través de razonamientos analíticos*.

En relación con los métodos usados por los hindúes y árabes (c. 300 a.C.-300 d. C) para resolver situaciones de proporcionalidad, se observa en el estudio histórico – epistemológico que, a diferencia de la versión china, los hindúes y árabes ponían énfasis en las operaciones a realizar a través de una organización espacial de los términos, a manera mnemotécnica para recordar el orden en el cual realizaban los cálculos y, donde posiblemente no se daba relevancia a la razón constante (el valor por unidad) el cual permite poner en relación las dos cantidades dadas, como se hace evidente en el caso de la aplicación del método chino.

Los análisis realizados en el estudio histórico – epistemológico evidencian que fueron los árabes (800 – 1300) quienes al reflexionar sobre los sistemas de prácticas matemáticas usadas tanto en la cultura griega, china e hindú llegaron a unificar los conceptos de razón entre cantidades homogéneas y heterogéneas, para resolver situaciones cotidianas como científicas, esta unificación dio un nuevo impulso al desarrollo de los objetos RPP que llegaría a establecerse finalmente en el *algoritmo de la regla de tres* fundamentado por Fibonnacci (c. 1170 – 1250) en el texto Liber Abacci (Leonardo de pisa, 1202-2003). La sistematización de los trabajos realizados por griegos, chinos, hindúes y árabes permitieron la emergencia del quinto significado parcial de los objetos de estudio, denominado: *razón y proporción a través de la regla de tres*.

Por último, se concluye que los objetos RPP adquirieron un significado unificado en Europa en los trabajos realizados por Galileo Galilei (1564-1642), Descartes (1596 – 1650), Newton, (1643 - 1727) y Leibniz (1646-1716) entre otros, quienes al reflexionar sobre la fundamentación cuantitativa de los fenómenos de la naturaleza cambiaron radicalmente la forma de estudiar el cambio y el movimiento, emergiendo en sus trabajos el concepto de función y poniendo de manifiesto, la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de la proporcionalidad. En este periodo emerge el *sexto significado parcial* de los objetos de estudio, denominado: *proporcionalidad – sistemas de cambio*. Finalmente, la identificación y caracterización de los 6 significados parciales descritos en los párrafos anteriores permitieron la reconstrucción del significado global de los objetos RPP, el cual se condensa en la red conceptual expuesta en la Figura 5.19 del Capítulo 5.

7.2 Logro de los objetivos específicos 3 y 4

El objetivo específico 3 corresponde al diseño e implementación de dos situaciones de aprendizaje donde se evidenció la emergencia de significados parciales de los objetos RPP a través de las prácticas matemáticas que realizaron los estudiantes. El objetivo específico 4 corresponde al análisis de los significados parciales de los objetos RPP emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo al solucionar las situaciones propuestas. El logro de estos objetivos específicos se obtiene como resultado del desarrollo de las actividades propuestas en las fases 3 y 4 según lo propuesto en el marco metodológico (ver, Capitulo 3)

En la tercera fase se diseñaron dos situaciones-problemas denominadas: 1) *Construcción del modelo matemático que relaciona el radio y el perímetro del círculo* y 2) *Construcción de nuevas magnitudes, el caso de la densidad poblacional*. La elección de los significados pretendidos en las situaciones tomó de referente el significado global obtenido en el estudio histórico – epistemológico y además los significados de referencia, pretendidos por la institución donde se realizó el estudio. Cada situación – problema y su solución institucional fueron analizadas a través de un estudio a priori o epistémico el cual permitió identificar la tipología de objetos primarios propuesta en el EOS y las posibles dificultades o conflictos que podían manifestar los estudiantes al resolver las situaciones propuestas. Finalmente, los significados parciales de los objetos RPP emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes fueron caracterizados a través de configuraciones cognitivas como se evidencia en el Capítulo 6.

Los análisis de las prácticas matemáticas de los estudiantes evidencian el uso de diversos significados parciales de los objetos RPP, así como la forma de razonar con estos significados. Se observó en la Situación problema 1 como algunos estudiantes usan el significado parcial del objeto razón, denominado: *razón como relator*, para comparar dos cantidades específicas (fijas), este significado emerge para dar sentido al número de veces que esta contenido el diámetro de un circulo en su perímetro: este significado permite establecer una relación parte – todo entre las cantidades comparadas.

Dentro de las prácticas de los estudiantes se observó el uso del significado parcial del objeto razón, denominado: *razón como correlator*, este significado parcial permitió comprender a los estudiantes que al cuantificar por cociente la relación entre el perímetro de cualquier circulo y su diámetro se obtiene siempre una cantidad fija, denominada: constante de proporcionalidad, esta constante permite establecer una correspondencia uno a uno entre elementos de ambas familias (perímetro y diámetro), y define una proporcionalidad directa entre ellas. El reconocimiento del significado parcial denominado razón *como relator/correlator* permitió a los estudiantes construir el modelo matemático que correlaciona el radio o diámetro de cualquier circulo con su perímetro.

Dentro de las prácticas de los estudiantes se evidenció el significado parcial del objeto proporción, denominado: *proporción a través de razonamientos por analogía*, este significado emerge básicamente al determinar cómo se relacionan dos o más cantidades de magnitud de una misma magnitud (radios o diámetros) para luego trasladar de forma análoga dicha relación a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades (perímetros). Los análisis de las prácticas evidenciaron, además, el uso del significado parcial del objeto razón, denominado: *razón como operador,* este significado emerge al momento en el que los estudiantes ponen en funcionamiento la constante de proporcionalidad (razón entre el perímetro y el diámetro) como un operador escalar (factor de ampliación o reducción) que, aplicado sobre una determinada cantidad de diámetro produce una determinada cantidad de perímetro. Finalmente, en las prácticas matemáticas de los estudiantes emerge el significado parcial de la proporcionalidad, denominado: *proporcionalidad – sistemas de cambio*, este significado surge cuando los estudiantes representan la relación de proporcionalidad directa entre el perímetro y el diámetro en un sistema de coordenadas cartesianas, en este significado los objetos matemáticos RPP adquieren un significado unificado relacionado con la función lineal. Este significado parcial permite representar a través de un modelo la síntesis de diversos lenguajes, situaciones, expresiones y fenómenos, y representa la estructura de la proporcionalidad, la cual permite visualizar los diferentes estados de variación de las cantidades correlacionadas linealmente.

En este sentido, se observó que en las practicas matemáticas realizadas por los estudiantes al solucionar la Situación problema 2, emergen algunos significados parciales de los objetos RPP. Se evidenció que los estudiantes usaron el significado parcial del objeto razón, denominado: *razón como relator*, este significado emerge cuando se determina la cantidad de árboles que pueden crecer por hectárea, esta cuantificación realizada por cociente permite la construcción de una nueva cantidad física denominada *densidad*. Dentro de las prácticas se observó el uso del significado parcial de la razón denominado, *razón como correlator*, este significado emerge cuando los estudiantes lograron objetivar la razón como una expresión que permite establecer una correspondencia uno a uno entre los elementos de las cantidades árboles y los elementos de la cantidad hectáreas, esta correlación permite establecer una proporcionalidad directa entre dichas cantidades. El significado *razón como correlator*, fue objetivado a través de una constante de proporcionalidad que tuvo unidades propias: *árboles por hectárea.*

Las soluciones propuestas por los estudiantes a la Situación problema 2 evidencian el uso del significado parcial de la razón, denominado: *razón como transformador*, el cual emerge cuando la constante de proporcionalidad “cantidad de árboles que pueden crecer por hectárea” es usada como operador (transformador), que permite transformar la cantidad de hectáreas en la cantidad de árboles. El significado parcial *razón como transformador* permite comparar familias de cantidades que se correlacionan linealmente, en donde la razón es un transformador lineal que aplicado sobre cualquier cantidad de una de las familias produce la cantidad correspondiente en la otra familia. Se resalta que en las prácticas emergió además el significado de la proporción, denominado: *proporción a través de razonamientos por analogía*, este significado fue usado por los estudiantes a través del reconocimiento del proceso de variación de dos cantidades: árboles y hectáreas, tanto en la tabla de valores propuesta como en la gráfica de proporcionalidad directa, los razonamientos por analogía dieron a conocer que las relaciones aditivas o multiplicativas establecidas por los estudiantes en una cantidad eran trasladadas de forma análoga a las cantidades correspondientes en el otro sistema de cantidades.

Los estudiantes al completar la tabla de valores y la gráfica de proporcionalidad directa usaron además el significado parcial de la proporción, denominado: *proporción a través de razonamientos analíticos*, este significado permitió reconocer a los estudiantes que para cualquier par de valores a_i, $f(a_i)$ se tiene que $f(a_i) = \lambda a_i$, donde λ es un número racional con unidades, llamado constante de proporcionalidad. En este caso los razonamientos usados por los estudiantes permitieron establecer una correlación directa entre la cantidad de árboles y la cantidad de hectáreas.

En las prácticas matemáticas de los estudiantes emerge el significado parcial de la proporción, denominado *proporción a través regla de tres*, este significado fue usado por los estudiantes como algoritmo mecánico que permitió determinar las cantidades desconocidas en la gráfica y tabla de valores que correlacionaban linealmente la cantidad de árboles y la cantidad de hectáreas. Por último, en las prácticas matemáticas de los estudiantes emerge el significado parcial de la proporcionalidad, denominado: *proporcionalidad – sistemas de cambio*, este significado es usado por los estudiantes al representar la relación de proporcionalidad directa entre la cantidad de árboles y la cantidad de hectáreas a través de una tabla de valores y en una gráfica cartesiana, se resalta que en este significado los objetos matemáticos RPP adquieren un significado unificado relacionado con la función lineal.

7.3 Reflexiones del autor e impacto en la Educación Matemática

El proceso investigativo desarrollado favoreció la reflexión pedagógica del autor en relación a los procesos heurísticos que han dado paso a la constitución formal de los objetos matemáticos razón, proporción y proporcionalidad – RPP en los distintos contextos socio – culturales e históricos de la humanidad, así como la identificación y compresión de los significados que emergen de las prácticas matemáticas de los estudiantes. Particularmente, la reconstrucción del significado global de los objetos RPP le permitió al autor llegar a la reflexión de los obstáculos y dificultades que afrontaron las distintas culturas en la historia para lograr el desarrollo y formalización de los objetos matemáticos, esta reflexión ha hecho que el autor reconozca que las dificultades históricas emergen también en la realidad escolar, y que no son ajenas a los razonamientos usados por los estudiantes en las clases de matemáticas cuando resuelven situaciones – problemas. En este sentido el análisis epistémico realizado a los seis problemas – fenómenos que dieron paso al surgimiento de los significados parciales de los objetos RPP permitieron al autor comprender el uso de algunas de las herramientas conceptuales usadas por la humanidad para lograr superar los obstáculos y dificultades en relación con los fenómenos que hacían uso del "razonamiento proporcional": dichas herramientas conceptuales refieren a los significados parciales de los objetos RPP emergentes del estudio histórico - epistemológico (ver, Capítulo 5).

La comprensión de los significados parciales de los objetos RPP han ampliado la visión usual del autor en relación a la enseñanza de las matemáticas y las distintas formas de pensar en matemáticas. Específicamente, las clases que ha empezado a impartir el autor están encaminadas a favorecer el aprendizaje de los estudiantes con base en los procesos heurísticos que ha construido la humanidad en su historia (significados parciales- epistemológicos), dejando de lado el simbolismo y la mecanización de las reglas que poco favorecen el desarrollo del razonamiento proporcional. Por último, los resultados obtenidos dan a conocer que es posible enseñar los objetos RPP de una forma deductiva y articulada, alejando el uso algorítmico y la mecanización de reglas, es decir se establece una enseñanza orientada al desarrollo del pensamiento variacional que articule los significados parciales de los objetos RPP y el diseño de situaciones – problemas que permitan del desarrollo del razonamiento proporcional en los estudiantes.

Referencias

Arboleda, L. C. (2011). Objetividad matemática, historia y educación matemática. En L. C. Recalde y G. I. Arbeláez (Eds.), *Los números reales como objeto matemático: una perspectiva histórico epistemológica*. Cali: Universidad del Valle.

Arboleda, L., y Castrillón. (2012). La historia y la educación matemática en el 'horizonte' conceptual de la pedagogía. *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, *14* (1), 13-32.

Bolea, P., Bosch, M., y Gascon, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en procesos de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *21(*3), 247-304.

Bosch, M. (1994). La dimensión ostensiva de la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad. (Tesis Doctoral no publicada). Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Educación Matemática, 18(2), 37-74. http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=40518203

Burgos, M., Beltrán, P., Giacomone, B., y Godino, J. (2018). Prospective mathematics teachers' knowledge and competence analysing proportionality tasks. *Educação e Pesquisa*, *44*, 1-22.

García, G. y Serrano, C. (1999). *La compresnsión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural* . Bogotá, Colombia: Grupo editorial Gaia.

Castro, Walter. (2011). Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elementales en futuros profesores. (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España). Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Walter_Castro_tesis.pdf

Corry, L. (s.f.). La teoría de las proporciones de Eudoxo interpretada por Dedekind. Recuperado de http://www.tau.ac.il/~corry/publications/articles/pdf/Dedekind-Eudoxus.pdf

D'Amore, B., y Godino, J. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 191-218.

D'Amore, B. (2011). *Didactica de la matematica*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.Euclides (1994).

Dauben, J.W. (1998). Ancient Chinese mathematics: the Jiu Zhang Suan Shu vs Euclid's *Elements. Aspects of proof and the linguistic limits of knowledge. Internat. J. Engrg. Sci*., *36(*12-14), 1339-1359.

Deulofeu, J. y Figueiras, L. (2002). *Las medidas a través de la historia. Matemátiques I*. Curs 2001-2002.

Filep, L. (2003). Proportion Theory in Greek Mathematics. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis*, 19, 167-174.

Fiol, L.M., y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el numero*. Madrid, España: Síntesis.

Fowler, D. (1999). *The mathematics of Plato's Academy: A new reconstruction.* Oxford: Clarendon press.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures (Vol. 1). Hingham, MA: Kluwer Academic Publishers.

Friberg, J. (2007). A remarkable collection of Babylonian mathematical texts. Manuscripts in the Schøyen Collection: Cuneiform Texts I. New York, NY: Springer.

Guacaneme, Edgar. (2001). Estudio didáctico de la proporción y la proporcionalidad: una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas. (Tesis de Maestría). Universidad del Valle, Colombia.

Guacaneme, E. (2012). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. En León, O. (Ed). *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp 99-135). Bogotá, Colombia: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Guacaneme, G. (2015). ¿Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad? *XIV CIAEM-IACME*.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Researches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Researches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, 1-20. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.htm

Godino, J. D, Beltrán, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino_beltran.pdf

Heath, T. L. (1926). *The Thirteen Books of Euclid' s Elements. Traducción e introducción de Sir Thomas L. Heath. 3 Vols*. New York. Dover

Hernández, R. y Mendoza, C. (2018). *Metodología de la investigación.* México, D.F: McGraw - Hill.

Hurtado, M. Prácticas matemáticas en estudiantes de un grado séptimo al resolver un problema de proporcionalidad. *Revista Acta Latinoamerican de Matemática Educativa*, 32(1), 581-590.

Høyrup, J. (2002). *Lengths, Widths, Surfaces*. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin. New York: Springer Verlag.

Høyrup, J. (2007). The roles of Mesopotamian bronze age mathematics tool for state formation and administration – carrier of teachers' professional intellectual autonomy. Educational Studies in Mathematics, 66(2), 257-271. doi: 10.1007/s10649-007-9090-4

Jiménez, A. (2005). *Formación de profesores de matemática: aprendizajes recíprocos escuela – universidad.* Tunja, Colombia: Búhos Editores.

Jiménez, A., Limas, L., y Alarcón, J. (2015). Prácticas pedagógicas matemáticas de profesores de una institución educativa de enseñanza básica y media. *Praxis & Saber*, 7(13), 127 – 152.

Lamon, S. (2007). Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. En F. K. Lester (Ed.), Second Handbook Of Research On Mathematics Teaching.

Leguizamón, J., Patiño, O., y Suárez, P. (2015). Tendencias didácticas de los docentes de matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los medios educativos en el aula. *Revista Educación Matemática,* 27 (3).

Leonardo (de Pisa). (1202/1872). Il Liber Abaci. In B. Boncompagni (Ed.), Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo pubblicati da Baldassarre Boncompagni: Il Liber abbaci di Leonardo Pisano. Roma.

Leonardo (de Pisa). (1202/2003). Liber abaci (L. Sigler, Trad.). In G. J. Toomer (Ed.), Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modem english of Leonardo Pisano's book of calculation. New York, NY: Springer.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hierbert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 93-117). Reston, VA: Lawrence Erlbaum associates.

Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". Educational Psychology, 27(1), 75-92. doi: 10.1080/01443410601061462 Modestou, M., & Gagatsis, A. (2009). Proportional reasoning: the strategies behind the percentages. Acta Didactica Universitatis Comenianae, 9, 25-40. Recuperado desde Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics (ADUC-M), sitio web: http://www.ddm.fmph.uniba.sk/ADUC/files/Issue9/03-Modestou&Gagatsis.pdf

Newton, I. (1720). Universal Arithmetick: or, a treatise of arithmetical composition and resolution (M. J. Raphson, Trad.) Universal Arithmetick: Or, A Treatise of Arithmetical Composition and Resolution. To which is Added, Dr. Halley's Method of Finding the Roots of Equations Arithmetically. London: J. Senex.

Newton, I. (1972). Universal Aritmetic. In D. T. Whiteside (Ed.), The Mathematical papers of Isaac Newton (Vol. 5). Cambridge: Cambridge University Press.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros dias,* (Vols 1-3) Madrid, España: Alianza.

Obando, G. (2015). Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica". (Tesis Doctoral). Universidad del Valle, Colombia. Recuperado de file:///C:/Users/ASUS_/Downloads/CB-0519794%20(3).pdf

Obando, G., Vasco, C. E., y Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte". *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*(1), 59-82.

Obando, G., Vasco, C. E., y Arboleda, L. C. (2013). Razón, proporción y proporcionalidad: configuraciones epistémicas para la Educación Básica. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *26*, 977-986.

Oller, A. (2012). Proporcionalidad aritmética: una propuesta didáctica para alumnos de secundaria ((Tesis Doctoral). Universidad de Valladolid, España.

Oller, A., y Gairín, J.M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y promoción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, *16 (3), 317-338.*

Piaget, J., & Inhelder, B. (1958). The growth of logical thinking from childhood to adolescence (A. Parson, Trad.). United Stated: Basic Book, Inc.

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático sobre la derivada. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L. (2017). Contribución del Enfoque Ontosemiótico a las investigaciones sobre didáctica del cálculo. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/pino-fan.pdf

Perry, P., Guacaneme, E., Andrade, E., y Fernández, F. (2003). *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX.* Madrid: Editorial Gredos S.A.

Puig, L. (2009). Protoálgebra en babilonia (1ª entrega). *Suma, 93-98.*

Puig, L. (2009). Protoálgebra en babilonia (2ª entrega). Métodos de solución. *Suma, 97-104.*

Quintero, G. (2015). Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad. *XIV CIAEM-IACME.*

Reyes, D. (2013). *La transversalidad de la proporcionalidad.* México D. F: Secretaria de educación pública.

Sánchez, E. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes, *Revista Sigma*, *11*(1), 10-25.

Sepúlveda, O. (2016). Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto grupo". (Tesis Doctoral). Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Recuperado de http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_Omaida.pdf.

Sepúlveda, P. (2018). *El conocimiento didáctico matemático del profesor universitario*. Tunja, Colombia: Editorial UPTC.

Stevin, S. (1634). L'Arithmetique. In A. Girard (Ed.), Les Oeuvres mathematiques de Simon Stevin de Bruges. Leyden: Bonaventine et Abraham Elsevier.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic. En J. Hierbert & M. Behr (Eds.), Number concepts and operations in the middle grades (Vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates.

Tippens, P. (2011). *Física, conceptos y aplicaciones*. México, D.F: McGraw - Hill.

Vasco, C. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. En D. N. Perkins, J. L. Schwartz, M. Maxwell West & M. Stone Wiske (Eds.), Software goes to school: teaching for understanding with new technologies (pp. 56-69). New York, NY: Oxford University Press.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México, D.F: Trillas.

Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(23), 133-170.