

**LA VISUALIZACIÓN EN EL PENSAMIENTO ESPACIAL A PARTIR DEL
CÁLCULO DE VOLÚMENES**

CATALINA MOLANO CARRANZA



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2019

**LA VISUALIZACIÓN EN EL PENSAMIENTO ESPACIAL A PARTIR DEL
CÁLCULO DE VOLÚMENES**

CATALINA MOLANO CARRANZA

Trabajo de grado, requisito parcial para optar al título de Magister en Educación

Matemática

Director: Dr. OSVALDO JESÚS ROJAS VELÁZQUEZ

Doctor en Ciencias Pedagógicas y en Educación



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRIA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2019

Agradecimientos

Doy gracias a Dios por su infinito amor y misericordia, por concederme el don de la vida y a la vez cada logro que he alcanzado. Él me ha otorgado el vigor y las fuerzas para seguir adelante y obtener los sueños y anhelos propuestos. Todo lo que soy, tengo y tendré se lo debo a Él.

También quiero agradecer a mi esposo Hildebrando Díaz por su apoyo y colaboración incondicional en cada una de las etapas en las que hemos compartido durante el transcurso de los años que llevamos juntos.

A su vez, agradezco toda la colaboración recibida por parte de amigos colegas y al director de esta tesis quienes me animaron, aportaron ideas, orientaciones, indicaciones y correcciones, haciendo posible la realización de este trabajo de investigación.

Con todo mi agradecimiento,

Catalina Molano Carranza

Dedicatoria

A Dios, quien me ha concedido vida y salud para alcanzar este nuevo logro; a mi familia, que ha sido mi motor para continuar hacia adelante, su paciencia y amor me han dado la fuerza para vencer los obstáculos presentados durante el transcurso de mi vida y sus palabras de ánimo me han servido de ayuda en los momentos de desesperanza; a todos aquellos que creen en mí, y quienes han aportado en mi formación académica a lo largo de mi vida proporcionándome apoyo y la motivación necesaria para lograr un nuevo éxito en mi vida profesional. Por eso y por mucho más les dedico esta nueva meta de formación que permite mejorar mis prácticas educativas y desempeñarme mejor en el aula de clases.

Con todo mi amor,

Catalina Molano Carranza

Contenido

Resumen.....	1
Capítulo 1. Introducción.....	2
Descripción de la problemática	2
Objetivo general.	5
Objetivos específicos.	5
Justificación del problema.....	5
Capítulo 2. Antecedentes.....	11
Investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio en la educación básica	15
Investigaciones sobre el desarrollo de la habilidad visualización para la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio	20
Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio, de la visualización y en particular del concepto de volumen	29
Capítulo 3. Marco Teórico.....	38
Referentes teóricos sobre la visualización matemática	38
La visualización como producto y proceso de imágenes mentales.....	41
Habilidades de visualización.	43
Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización	45
Niveles de visualización.	47
Referentes acerca de los conocimientos básicos sobre el pensamiento espacial y pensamiento métrico	48
Pensamiento espacial.	48

Definiciones de espacio	48
Pensamiento métrico.....	50
Matriz de Referencia Matemática (MRM)	50
Construcción de la noción del objeto matemático volumen.	51
El volumen y su relación con otras magnitudes.....	53
Volumen y capacidad.....	53
Volumen y masa.	53
Masa y peso.	53
El principio de Arquímedes.	54
Diferentes puntos de vista sobre la enseñanza del concepto de volumen	54
Punto de vista geométrico.....	55
Desde el punto de vista numérico.	55
Desde el punto de vista numérico – geométrico	56
Desde el punto de vista del entorno físico	56
Otras indicaciones para la enseñanza del objeto matemático volumen	57
Capítulo 4. Metodología de la Investigación.....	58
Tipo de Estudio	58
Contextualización y Población.....	59
Etapas de la Investigación	60
Etapas de reconocimiento de la problemática.	61
Etapas de revisión teórica.....	61
Etapas de instrumentos o herramientas para la recolección de la información.....	62
Etapas de elaboración de categorías de análisis y análisis de la información	64

Estructura de las actividades para fortalecer habilidades de visualización en el pensamiento espacial a partir del cálculo de volúmenes.	68
Estructura de las actividades.....	69
Actividades de aprendizaje para identificar habilidades de visualización en el pensamiento espacial a partir del cálculo de volúmenes.	70
Actividad 1. Aproximación al concepto de volumen	70
Actividad 2. Volumen de algunos cuerpos redondos	73
Actividad 3. Volumen de algunos poliedros.....	76
Actividad 4. Distinguiendo el volumen de otras magnitudes	79
Actividad 5. Prácticas inusuales.	80
CAPÍTULO 5. Análisis de Resultados.....	83
Actividad 1. Aproximación al concepto de volumen.	83
Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 1-Reto 1	83
Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 1-Reto 2.....	87
Actividad 2. Volumen de algunos cuerpos redondos.	92
Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 2- Reto 1	93
Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 2-Reto 2	96
Actividad 3. Volumen de algunos poliedros.....	105
Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 3-Reto 1	105
Actividad 4. Distinguiendo el volumen de otras magnitudes	109
Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 4- Reto 1	109
Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización relacionada con la comparación entre capacidades de la Actividad 4- Pregunta (5a)	114

Actividad 5. Prácticas inusuales	117
Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 5 - Reto 1	117
Conclusiones	126
Bibliografía	129
Anexo 1. Encuesta a Docentes de la IERD Cacicazgo	137
Anexo 2. Evidencia fotográfica de las actividades.....	138

Índice de tablas

Tabla 1 Tipos de visualización en el contexto de las matemáticas (Presmeg, 1986).....	42
Tabla 2 Procesos en la actividad de visualización (Bishop, 1989).	42
Tabla 3 Habilidades Visuales (Del Grande, 1990).....	44
Tabla 4 Tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales.....	45
Tabla 5 Tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales (Gonzato & et ál., 2011)..	46
Tabla 6 Tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales.....	46
Tabla 7 Niveles de Visualización (Castiblanco et ál, 2004).	47
Tabla 8 Definiciones de espacio desde diferentes perspectivas.	49
Tabla 9 Definiciones de los componentes de la Matriz de referencia de Matemáticas	51
Tabla 10 Síntesis de actividades o tareas de aprendizaje en la adquisición del objeto matemático volumen.....	57
Tabla 11 Relación entre las competencias (habilidades de visualización), aprendizajes y evidencias del componente Espacial Métrico relacionados con el cálculo de volumen.	65
Tabla 12 Relación entre las actividades diseñadas y las competencias del componente Espacial Métrico relacionadas con el objeto matemático volumen.....	67
Tabla 13 Relación entre las actividades diseñadas y tareas de aprendizaje del objeto matemático volumen.....	68
Tabla 14 Relación entre las actividades diseñadas y tareas de aprendizaje del objeto matemático volumen.....	68

Índice de imágenes

Imagen 1. A1-R1- P (1-4) Tareas de aprendizaje volumen involucradas	85
Imagen 2. A1-R1- P (5-7) Tareas de aprendizaje de volumen involucradas	86
Imagen 3. A1-R2- P1 Tareas de aprendizaje volumen involucradas	88
<i>Imagen 4. A1-R2- P2 Tareas de aprendizaje volumen involucradas.....</i>	<i>88</i>
Imagen 5. A1-R2- P3 Ejemplo de respuesta elaborada por G6	88
Imagen 6. A1-R2- P4 Ejemplo de respuesta elaborada por G6	88
Imagen 7. A1-R2- P (5a) Ejemplo de respuesta relacionada con la pregunta 5a.....	89
Imagen 8. A1-R2- P (5b) Ejemplo de respuesta relacionada con la pregunta 5b	89
Imagen 9. A1-R2- P (5c) Ejemplo de respuesta relacionada con la pregunta 5c.....	90
Imagen 10. A1-R2- P (5d) Ejemplo de respuesta relacionada con la pregunta 5d	90
Imagen 11. A1- R (1-2) Justificación de un integrante del G6	92
Imagen 12. A2- R (1). Justificación de un integrante del G7	94
Imagen 13. A2- R (1). Justificación del grupo G3.....	95
Imagen 14. A2- R (2) Ejemplo de respuesta para la pregunta 1(a y b).....	98
Imagen 15. A2- R (2) Ejemplo de respuesta para pregunta para la pregunta 1(a y b)	98
Imagen 16. A2-R (2). Ejemplo de respuesta de G1, para pregunta 2	99
Imagen 17. A2- R (2) Ejemplo de respuesta de G1, para pregunta 3	99
Imagen 18. A2- R (2) Ejemplo de respuesta de G1, para pregunta 4	100
Imagen 19. A2- R (2) Ejemplo de respuesta de G1, para pregunta 5 caso (1 y 3) con relación al cono.....	101
Imagen 20. A2- R (2) Ejemplo de respuesta del G5 para el caso (1 y 3) en relación con el cono	101
Imagen 21. A2- R (2) Ejemplo de respuesta del G5 con respecto a la P (5) caso (2 y 4) con relación al cilindro.	102
Imagen 22. A2- R (2) Ejemplo de respuesta del G5 con respecto a la P (5) caso (2 y 4) con relación al cilindro.	102

Imagen 23. A2- R (2) conclusiones de pregunta 5 para el caso (3 y 4) con relación al cilindro.....	103
Imagen 24. A2- R (2) conclusiones de pregunta 6 del G1 con relación al cilindro.	103
Imagen 25. A2- R (2) conclusiones de pregunta 6 del G5 con relación al cilindro.	103
Imagen 26. A2- R (2) respuesta de pregunta 7 del G1 con relación al cono	103
Imagen 27. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de G3 con relación a P (1 a 4)	110
Imagen 28. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de G3 con relación a P (1 a 5)	110
Imagen 29. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de G1 con relación a P (1 a 4)	111
Imagen 30. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de G1 con relación a P (5) (a, b y c).....	111
Imagen 31. Pregunta P (5a) modificada A4- R (1) del y aplicada a varis estudiantes de grado noveno después de tres meses de desarrollados los restos haber desarrollado	113
Imagen 32. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de un integrante del G6 (IG6) con relación a P (5a) modificada.....	114
<i>Imagen 33.</i> A4- R (1) Ejemplo de respuesta de un integrante del G1 (IG1) con relación a P (5a) modificada.....	114
<i>Imagen 34.</i> A4- R (1) Ejemplo de respuesta de un integrante del G7 (IG7) con relación a P (5a) modificada.....	115
<i>Imagen 35.</i> A4- R (1) Ejemplo de respuesta de un integrante del G5 (IG5) con relación a P (5a) modificada.....	115
Imagen 36. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G1 con relación a P (1) Tarea de medida-entorno físico	118
Imagen 37. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G6 con relación a P (1) Tarea de medida-entorno físico	119
<i>Imagen 38.</i> A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G7 con relación a P (1) Tarea de medida-entorno físico	119
<i>Imagen 39.</i> A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G1 con relación a P (2) Tarea de medida-entorno físico	120

<i>Imagen 40.</i> A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G5 con relación a P (2) Tarea de medida-entorno físico	121
<i>Imagen 41.</i> A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G6 con relación a P (3) Tarea de medida-entorno físico	121
<i>Imagen 42.</i> A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G8 con relación a P (3) Tarea de medida-entorno físico	122
<i>Imagen 43.</i> A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G1 con relación a P (3) Tarea de medida-entorno físico	122
<i>Imagen 44.</i> A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G5 con relación a P (3) Tarea de medida-entorno físico	122
<i>Imagen 45.</i> A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G2 con relación a P (3) Tarea de medida-entorno físico	122
<i>Imagen 46.</i> A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G7 con relación a P (3) Tarea de medida-entorno físico	124

Resumen

Este trabajo pretende abordar aspectos sobre la habilidad de visualización en el pensamiento espacial; se desarrolló con estudiantes de grado noveno a través de la implementación de tareas de aprendizaje focalizadas hacia el cálculo de volúmenes teniendo en cuenta las perspectivas numérica, geométrica y numérica- geométrica. Algunas de estas tareas se apoyaron con el uso de recursos y materiales educativos que no sólo sirven en la comprensión del concepto de volumen, sino que contribuyen al desarrollo de destrezas en el ámbito visual y generan en el estudiante una percepción diferente hacia la enseñanza de la geometría.

Este trabajo de investigación se centró en algunos referentes teóricos como: el aprendizaje y enseñanza de la geometría, el concepto de volumen y la visualización, que permiten evidenciar el papel que juega el estudiante en la construcción de su propio conocimiento, el rol del docente en crear ambientes de interacción en el aula que propicien y ayuden a la reflexión, discusión y concertación de significados con el fin de potenciar en los estudiantes habilidades de visualización en el pensamiento espacial.

Capítulo 1. Introducción

Descripción de la problemática

La geometría euclídea es una rama fundamental de las matemáticas que se encarga de reconocer y estudiar las propiedades, medidas y relaciones matemáticas entre puntos, rectas, ángulos, planos, superficies, sólidos, entre otras. Su aplicación a la vida cotidiana ha generado que el ser humano trate de clasificar y relacionar los objetos que lo rodean partiendo de la observación de regularidades y de formas geométricas, como un mecanismo o herramienta de cálculo que facilite el desarrollo de problemas en contextos culturales.

La posibilidad de utilizar elementos derivados de la geometría para el desarrollo de actividades cotidianas ha generado que ésta sea,

(...) considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural del individuo, dada su aplicación en diversos contextos; su capacidad formadora del razonamiento lógico (Báez e Iglesias, 2007); y su contribución en el desarrollo de habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración. (Jones, 2002, citado por Gamboa y Ballester, 2010, p.126)

En cuanto a la enseñanza de la geometría en la educación básica, el MEN (1998) menciona que esta sirve como una herramienta para interpretar, entender y apreciar diversas formas de figuras bidimensionales y tridimensionales presentes en el entorno. Dicho de otra manera, la enseñanza y aprendizaje de la geometría (EAG) propicia el desarrollo de habilidades espaciales como el razonamiento, la percepción, la orientación e intuición visual; también EAG, permite mejorar la capacidad para interpretar y manipular mentalmente la información visual que reciben los estudiantes de diferentes objetos físicos en relación a su contexto, entre otras.

Por otro lado, la enseñanza de la geometría en la educación básica, permite diseñar situaciones concretas tomadas de su realidad mediante la exploración y la manipulación de objetos. También propicia la elaboración de diseños y maquetas, posiciones y transformaciones de figuras en diferentes perspectivas, que contribuyen a la construcción del espacio en su entorno físico,

cultural, social e histórico y a su vez orienten a los estudiantes a reconocer y hacer uso de propiedades y conceptos geométricos.

Cabe destacar, que la enseñanza y aprendizaje de la geometría ha sido el objeto de estudio en diversas investigaciones entre ellas están las de Van Hiele (1957), Bishop (1989), Alsina (1989, 1997, 2001, 2007), Campistrous y Rizo (2007), Gamboa & Ballesterro (2010), Guillén & et ál. (1992), Gutiérrez (1991, 1992, 1998, 2006), Sarukkai (2008), Acuña (2008), Rojas (2009), entre otros., en muchas de estas investigaciones se reconoce que las mayores dificultades se presentan en la geometría del espacio. Rojas (2009) afirma que:

Estas dificultades están dadas por la insuficiente comprensión de los conceptos geométricos (especialmente espaciales) y se manifiestan en la deficiente habilidad que consiguen los alumnos para transferir los conocimientos de la geometría plana hacia el espacio tridimensional, es decir el pobre desarrollo de habilidades para representar cuerpos geométricos y realizar transferencias del plano al espacio (p.3).

También aduce que:

Evidencias empíricas dan fe de la existencia actual en la práctica educativa de un grupo de dificultades que perduran en el aprendizaje de la geometría del espacio, que parten de no estimular las habilidades requeridas para la visualización, la representación y la imaginación espacial; del escaso reconocimiento de las propiedades de figuras geométricas; del empleo de métodos que acentúan la actividad reproductiva de los alumnos; del poco aprovechamiento y falta de creatividad en la utilización de los materiales didácticos, especialmente el uso de las TIC's que aún es insuficiente y de la poca aplicación de los conocimientos geométricos a la solución de problemas geométricos espaciales vinculados a la vida. (pp. 23-24)

Se considera que las posibles dificultades, que se mencionan con anterioridad están relacionadas con las investigaciones que se han realizado en varios países en las que se mencionan que algunos docentes han prorrogado o suprimido de los currículos en matemáticas la enseñanza de la geometría, especialmente la relacionada con el espacio.

Autores como Abrate, Delgado y Pochulu (2006), señalan que "... algunos docentes priorizan la enseñanza de las matemáticas en otras áreas y van desplazando los contenidos de geometría

hacia el final del curso, hecho que implica en ciertos casos a excluir algunos temas o atenderlos de manera superficial” (Citado por Gamboa y Ballester, 2010, p.127). También sobre esta idea, Pérez & Guillén (2009) y Benigno & Cardozo (2008) “en sus investigaciones acerca de la geometría en la educación, mostraron como resultado que en muchos cursos de nivel medio los profesores desplazan la geometría como último tema del área e incluso se ha llegado a prescindir de ella” (Citado por Rivera, 2014, p.18).

Gutiérrez (1992) y Rojas (2012) expresan el escaso uso de herramientas tecnológicas (TIC's) en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría del Espacio, conllevando a una percepción poco favorable por parte de los estudiantes hacia la enseñanza y aprendizaje de este contenido. Estas herramientas permiten organizar espacios de aprendizaje más interesantes, dinámicos para facilitar la comprensión de conceptos geométricos.

Como se ha dicho con anterioridad y relacionándolo particularmente con la Institución Educativa Rural Departamental (IERD) Cacicazgo de Suesca, se puede mencionar que la Institución no está exenta de estas dificultades. La enseñanza de la geometría se ha postergado para el último período académico, dándole mayor énfasis a otros temas de matemáticas y en ocasiones se ha abordado nociones básicas de la geometría plana de manera superficial, dejando a un lado la geometría espacial, además actividades como juegos para enseñar algunos temas, el uso de la tecnología y de material concreto, son actividades que según el criterio de los docentes son poco utilizadas (ver Anexo 1).

A través de una revisión documental de los resultados de las Pruebas Saber 9° del año 2015 (pp. 35-38) y las descripciones de los niveles de desempeño Saber 9° 2016 y 2017 de la IERD Cacicazgo (pp. 21-22), se constata algunas dificultades en el componente geométrico-métrico, específicamente en las competencias evaluadas en la prueba como de razonamiento y argumentación, planteamiento y resolución de problemas. Estas pueden resumirse de la siguiente manera:

- Se le dificulta pasar de una representación bidimensional a una tridimensional y viceversa.

- Dificultad para establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para determinar medidas de superficie y volúmenes.
- Poca argumentación formal e informal por parte del estudiante sobre propiedades, relaciones de figuras planas y sólidos.
- Falta de comprensión en la resolución de problemas en contextos geométricos o métricos que requieran seleccionar técnicas adecuadas de estimación y aproximación

A causa de las valoraciones obtenidas en estos resultados de las Pruebas Saber 9° y con el objetivo de buscar acciones específicas de mejoramiento que contribuyan en la enseñanza y aprendizaje de la geometría espacial, al desarrollo de habilidades de visualización y al acercamiento del concepto de volumen, su medida y su relación con situaciones en contexto, se planea la siguiente **pregunta de investigación**, ¿cómo fortalecer la habilidad de visualización en el pensamiento espacial a través del cálculo de volúmenes en los estudiantes del grado noveno de la IERD Cacicazgo del Municipio de Suesca Cundinamarca?. Por lo anterior se proponen los siguientes objetivos de investigación

Objetivo general.

Fortalecer habilidades de visualización en el desarrollo del pensamiento espacial mediante el cálculo de volúmenes.

Objetivos específicos.

1. Identificar habilidades de visualización en el pensamiento espacial.
2. Diseñar actividades relacionadas con el cálculo de volúmenes que contribuyan a mejorar habilidades de visualización en el pensamiento espacial.
3. Describir la relación entre las habilidades de visualización y las actividades de enseñanza del volumen visto desde diferentes perspectivas.

Justificación del problema

La matemática y sus diferentes ramas son un área fundamental que contribuye al desarrollo del pensamiento del ser humano de manera integral, con el fin de mejorar la calidad de vida y las relaciones interpersonales. La matemática se puede utilizar como un instrumento valioso que

ayuda a descifrar y comprender las experiencias del hombre cuando interactúa con su entorno y con diferentes culturas, para dar solución a situaciones que surgen en contextos, haciendo uso de habilidades espaciales (orientación, percepción, intuición, etc.), conjeturas, estrategias, fórmulas y operaciones concretas (contar, clasificar, relacionar, analizar, anticipar posibilidades comparar y contrastar, entre otras).

Por otro lado, la matemática favorece el aprendizaje de otras ciencias. Autores como Rico (1997) considera que las matemáticas son:

(...) un ingrediente básico de la cultura pues existe en un medio social y humano determinado, constituyendo un modo importante de relación y comunicación entre personas, que da forma y permite expresar múltiples actividades del hombre. Las matemáticas son un elemento de la cultura, una herramienta que la interpreta y elabora, puesto que atiende a planes, fórmulas, estrategias y procedimientos que gobiernan la conducta; permiten ordenar el comportamiento del hombre, marcan pautas de racionalidad, y ayudan a que surja y se desarrolle el pensamiento científico. El pensar matemático, que es social y público, consiste en dar significado y compartir un simbolismo lógico, espacial y cuantitativo que permite expresar y desarrollar las capacidades humanas de relación, representación y cuantificación. (p. 9)

En efecto, el hombre se encuentra rodeado de diferentes contextos culturales y cada uno de ellos permite desarrollar habilidades matemáticas partiendo de relaciones espaciales como la observación, la orientación, la ubicación, la distribución de espacio, la identificación de objetos, formas, diseños y transformaciones presentes en la vida cotidiana, que hacen parte de muchas actividades que se relacionan con la geometría. Duarte (2013) sugiere que “la geometría es una de las ramas de la matemática más intuitiva, concreta y ligada a la realidad, por tal razón existen numerosas posibilidades para experimentar mediante materiales adecuados, sus métodos, conceptos, propiedades y problemas” (p. 524).

En relación con la geometría del espacio, autores como Guillén (2010) en consonancia con Freudenthal sugieren que:

(...) el espacio con sus sólidos es más concreto que el plano con sus figuras; en el espacio hay multitud de relaciones; en el plano el camino hacia el análisis lógico es más corto; el espacio es más intuitivo y facilita más las actividades creativas. (p. 25)

Por otro lado, el MEN (1998) concibe al pensamiento espacial como "... el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (p. 56).

En relación con este trabajo de investigación, la idea surge a raíz del plan de mejoramiento acerca de los resultados de las Pruebas Saber 9° (2015, 2016 y 2017) y la forma en que se valora la Prueba de Matemáticas de acuerdo a la Guía de orientación Saber 9°; en la que se hacen referencia a que:

(...) tiene en cuenta los cinco pensamientos expuestos en los lineamientos curriculares y en los estándares básicos de competencias, los cuales se han agrupado en tres componentes numérico-variacional, geométrico-métrico y aleatorio, cada uno de ellos cuenta con una serie de afirmaciones para cada competencia (la comunicación, representación y modelación; razonamiento y argumentación; planteamiento y resolución de problemas), las cuales enuncian los conocimientos, capacidades y habilidades de los estudiantes y a su vez buscan evidenciar las significaciones que el estudiante ha logrado construir y que pone a prueba cuando se enfrenta con diferentes situaciones problema. (pp. 35-38)

Para esta investigación se tendrá en cuenta el componente geométrico-métrico, en donde se afirma que:

Este componente está relacionado con la construcción y manipulación de representaciones de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos y sus transformaciones; más específicamente, con la comprensión del espacio, el análisis abstracto de figuras y formas en el plano y en el espacio a través de la observación de patrones y regularidades, el razonamiento geométrico y la solución de problemas de medición, la descripción y estimación de magnitudes (longitud, área, volumen, capacidad, masa, etc.), transformaciones de figuras representadas en el plano o en el espacio, la selección de unidades de medida, de patrones y de instrumentos, el uso de unidades, los conceptos de perímetro, área y volumen. (p. 36)

Esta investigación pretende dar mayor importancia al proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría, especialmente la relacionada con la del espacio. En este proceso se parte del diseño e implementación de actividades, que involucren la manipulación de sólidos, representaciones mentales de objetos bidimensionales y tridimensionales desde distintas perspectivas. También se propone el trabajo con la visualización, tareas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen y el uso de algunos materiales educativos, que permitan potenciar habilidades de visualización del pensamiento espacial y a su vez aproximar a los estudiantes de grado noveno a la noción del volumen en sus diferentes apreciaciones y su relación con las medidas de capacidad.

Por otro lado, en relación con las clases de geometría en la educación básica y media en la Institución, se han basado en un sistema tradicional monótono y estático, donde las actividades y principales recursos que se utilizan dentro del aula son el tablero, el libro de texto, la capacidad de memorizar y aplicar correctamente fórmulas, definiciones, teoremas e identificar figuras geométricas entre otras (Observación de clase). Es posible que lo descrito con antelación, ha conducido a que el estudiante no se motive con la enseñanza de la geometría, considerándola aburrida y de poca utilidad e importancia para su vida.

Goncalves (2006) citado por Gamboa & Ballesteros (2010) señala que:

Aunque existen diversas investigaciones sobre la evolución y el conocimiento del aprendizaje, específicamente en el área de geometría, las diferentes situaciones que se presentan en las aulas evidencian la necesidad, por parte de docentes y estudiantes, de promover un aprendizaje efectivo.
(p. 17)

Ahora bien, considerando que el concepto de volumen en muchas ocasiones desde la práctica educativa ha sido orientado como la identificación de algunos cuerpos geométricos, sus características, elementos, el cálculo de la medida de áreas y volúmenes por medio de la aplicación de fórmulas que no conllevan al estudiante a razonar y conjeturar, lo cual ha generado dificultades en el momento de la enseñanza. Según Gamboa y Ballestero (2009), "... la enseñanza tradicional de la geometría se enfatiza hacia el estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones

geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas” (p. 2).

Esta propuesta de investigación parte de la importancia de diseñar actividades que involucren el uso y manipulación de materiales concretos que promuevan al desarrollo del pensamiento espacial, contribuyan al proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, y en especial, consoliden el concepto de volumen y a la adquisición de destrezas y habilidades de visualización en los estudiantes del grado noveno.

A través de estas actividades se pretende que el estudiante le halle el sentido e importancia a la geometría donde genere y afiance la construcción sólida del conocimiento geométrico. También desarrolle la intuición, la orientación espacial, habilidades de visualización, necesarias para la comprensión del espacio, el desarrollo del pensamiento espacial, la comprensión del concepto de volumen y su vínculo con la realidad, proporcionando al estudiante un mayor entendimiento de su entorno y la adquisición de competencias básicas, tal como se demanda desde los informes del Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) del año 2007.

Así mismo, Duarte (2013) hace referencia que “...una de las tareas del profesor de matemáticas es conseguir que sus estudiantes comprendan los diversos conceptos que están en juego, no de una forma mecánica, sino que puedan operar con ellos en diversos contextos” (p. 525).

En la investigación se pretende contribuir al pensamiento espacial por medio de la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático volumen en sus diferentes representaciones, para que los estudiantes del grado noveno de la IERD Cacicazgo, puedan aprovechar su potencial y le hallen sentido a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, además, busca fomentar el desarrollo de habilidades espaciales especialmente las relacionadas con la visualización, partiendo de cuerpos geométricos que involucre la solución de problemas presentes en situaciones de la vida cotidiana.

Hoffer (1981), citado en Beltrán & Suárez (2014) afirma que “las habilidades básicas que una buena enseñanza de la geometría debería ayudar a desarrollar son clasificadas en cinco áreas:

visuales, de comunicación, de dibujo y construcción, lógicas o de razonamiento y de aplicación o transferencia” (p. 199).

Esta investigación proyecta reducir parcialmente dificultades presentadas en la enseñanza y aprendizaje del pensamiento espacial, se realiza mediante la articulación de la habilidad de visualización y el concepto de volumen desde la perspectiva geométrica, donde se considera el volumen como parte del espacio, y a su vez, matizar este concepto desde el punto de vista numérico representado principalmente por la medida y sus interrelaciones.

Por otro lado, se pretende disminuir las concepciones poco favorables por parte de los estudiantes hacia el aprendizaje de la geometría; motivar a los docentes a incorporar periódicamente materiales concretos y herramientas tecnológicas como instrumentos de trabajo, que faciliten la enseñanza de la geometría y viabilicen el progreso en los estudiantes en destrezas y habilidades geométricas y de visualización necesarias para potenciar el pensamiento espacial.

Capítulo 2. Antecedentes

Este apartado está dirigido a destacar que la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio es una temática que ha ocupado a investigadores a nivel mundial en reuniones y congresos de alto impacto para el campo de la educación matemática; por ejemplo, el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), la Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), la Conference of European Research in Mathematics Education (CERME), las reuniones latinoamericanas de Matemática Educativa (RELME), los Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), entre otros.

A continuación, se darán a conocer de manera general algunas temáticas trabajadas durante los eventos mencionados con anterioridad.

Cabe destacar que, en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) el Grupo de Estudio de Temas (TSG) es el principal escenario de participación en este evento y buscan promover la discusión de un tema desde diferentes perspectivas teniendo en cuenta la clasificación asignada al grupo.

En el ICME 11 (2008), el grupo de debate TSG12, agrupa su núcleo temático en geometría y en particular hace énfasis sobre su enseñanza y aprendizaje. Este grupo centra su discusión en los siguientes criterios, desarrollo visual y habilidades espaciales para la enseñanza de la geometría, características del pensamiento espacial en el alumno, uso de programas dinámicos para la comprensión de la geometría y didáctica de la geometría para futuros maestros, estas reflexiones aportan y permiten mejorar el nivel deductivo en los estudiantes y las prácticas de aula.

En el ICME 13 (2016), el grupo tema de estudio (TSG13) aborda la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el espacio en el nivel secundario. Este grupo centra su tema de discusión en los siguientes aspectos, aplicaciones de la geometría para modelar situaciones del mundo real y su relación con otras disciplinas, conexiones entre teorías de la educación en geometría, prácticas y

procesos matemáticos (visualización, figuración e instrumentación, resolución de problemas, argumentación y prueba), problemas curriculares en geometría, el uso de herramientas y entornos tecnológicos, aspectos fundamentales para mejorar la comprensión geométrica y matemática.

En cuanto a los dos últimos congresos realizados por el CIBEM, vale destacar algunas reflexiones teóricas o experiencias relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría por parte de docentes e investigadores.

En algunas actas de comunicación del VII CIBEM Uruguay 2013, se publican temas relacionados con el pensamiento espacial, habilidades de visualización, el uso de entornos virtuales, la caracterización de niveles de razonamiento y la resolución de problemas en geometría.

Más adelante, en el VIII CIBEM Madrid 2017, se abordaron temas relacionados con la geometría del espacio. En diferentes actas de este congreso se expone la importancia de integrar la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, como instrumento que fomenta el desarrollo del pensamiento geométrico y la destreza en la resolución de problemas relacionados con el diseño de cuerpos geométricos clásicos, el cálculo de áreas y volúmenes. Además, se muestra que GeoGebra sirve de apoyo a los estudiantes para realizar construcciones dinámicas, verificar propiedades y elaborar conjeturas de objetos geométricos.

Por otro lado, la ponencia invitada en la reunión del Geometry Working Group durante el XV Congreso del PME (Psychology of Mathematics Education) en Group (Asís, Italia, 1991) y la conferencia en comunicación del XVI Congreso del PME Group (Durham, EE.UU., 1992), han tratado temas sobre el desarrollo de las destrezas de visualización y representación de cuerpos geométricos espaciales, en donde se resalta la importancia de trabajar en el aula con diferentes materiales y entornos dinámicos que ayudan a mejorar el pensamiento geométrico.

A continuación, se relacionan algunas actas de los simposios SEIEM relacionados con la enseñanza y aprendizaje del pensamiento geométrico.

Se puede señalar, que en las comunicaciones presentadas en el XII SEIEM Badajoz 2008, se aborda la enseñanza de la geometría de los sólidos, contenidos geométricos y medición en

secundaria, además, se expone la importancia de utilizar software en geometría dinámica (SGD) como estrategia de resolución de problemas de geometría analítica.

Además, en el XVII Simposio SEIEM Bilbao 2013, se trataron algunos seminarios relacionados con la didáctica de la geometría, en donde se aborda la importancia y el problema de la visualización y el razonamiento espacial, así mismo, se puntualiza sobre carencias y dificultades en futuros docentes de Educación Básica en tareas que giran en torno a habilidades de visualización.

Acto seguido, en el XVIII SEIEM Salamanca 2014, se desarrollan comunicaciones centradas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría utilizando aplicaciones de geometría dinámica que permiten mejorar la capacidad de percepción espacial y la actividad matemática, también, se presentan las relaciones entre el conocimiento de geometría usado durante la resolución de problemas, la enseñanza de la geometría analítica a través de diferentes contextos geométricos, el papel de la tecnología en el aula y problemas relacionados con la geometría plana.

En el caso del XX SEIEM Málaga 2016, se abordan comunicaciones sobre el aprendizaje de la geometría a partir de transformaciones geométricas y el uso del GeoGebra, así mismo, el desarrollo de la competencia de comparación y medida de la capacidad y del volumen relevantes para la formación de futuros maestros.

En la XXI SEIEM Zaragoza 2017, se exponen comunicaciones acerca de la visualización de objetos tridimensionales y sus propiedades, razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos y la comprensión de figuras geométricas, también, se realizan algunos pósteres sobre la visualización espacial, el uso del GeoGebra por maestros en formación y el desarrollo de la capacidad de visualización a partir de la resolución de problemas para abordar la enseñanza de la geometría.

A continuación, se mostrará de manera breve algunas sesiones trabajadas en las Conferencias de Investigación Europea en Educación Matemática (CERME) con respecto al pensamiento geométrico en algunos Grupos de Trabajo Temáticos (TWG siglas en inglés).

Así pues, en CERME 8 (2013), en el grupo TWG 4, presentó en sus discusiones cuatro competencias geométricas (razonamiento, figurativo, operacional y visual) que se deben potenciar en los estudiantes y que promueven el desarrollo del pensamiento espacial. También, se trataron temas sobre las dificultades de aprendizaje en geometría, el diseño de los planes de estudio y su implementación en los diferentes contextos educativos.

En el caso de CERME 9 (2015), en el grupo TWG 4, se desarrollaron algunas temáticas específicas que contribuyen a la enseñanza y aprendizaje de la geometría relacionadas con transformaciones geométricas, polígonos, visualización de objetos geométricos del plano al espacio e interacciones entre estudiantes y docentes relacionadas con la actividad geométrica.

Cabe resaltar, que en CERME 10 (2017), en el grupo TWG 4, se abordó la enseñanza y aprendizaje de la geometría a partir de las relaciones de estructuración del espacio y del pensamiento multiplicativo por medio de la resolución de problemas que involucran el área y el volumen. Además, se presenta el uso de diagramas geométricos y de software de geometría dinámica (DGS) como una estrategia de enseñanza que facilita la actividad de demostración en la geometría.

Con respecto a Encuentros Colombianos de Matemática Educativa (ECME), los Encuentros de Geometría y sus Aplicaciones de los años 2011, 2013, 2015 y 2017 pretenden fortalecer la formación de estudiantes y docentes de todos los niveles académicos a partir de experiencias e ideas en temáticas relacionadas con la geometría, su historia, su didáctica, sus aplicaciones y relaciones con otras ramas de las matemáticas.

En los eventos anteriormente mencionados se resalta la importancia de la enseñanza y aprendizaje de la geometría a partir del aprovechamiento y aplicación de herramientas tecnológicas, el uso de materiales didácticos (manipulables y visuales), relación de teorías en geometría con el área de matemáticas que conllevan y brindan la oportunidad de mejorar habilidades espaciales, de razonamiento y argumentación en pro de avanzar hacia el aprendizaje de la geometría.

A continuación, se muestra de manera más detallada algunas investigaciones realizadas sobre: la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio en la Educación Básica; el desarrollo de la habilidad matemática visualización para la geometría del espacio en la Educación Básica; la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen, en particular para el desarrollo del pensamiento espacial y la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio, en particular del concepto de volumen y de la visualización, para el desarrollo del pensamiento espacial en la Educación Básica.

Investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio en la educación básica

Guillén, Gutiérrez, Jaime & Cáceres (1992) en las memorias del proyecto de investigación, la enseñanza de la geometría de sólidos en la Educación General Básica (E.G.B.) pretenden elaborar un currículum de geometría de sólidos para la E.G.B., donde se relacione la enseñanza de la geometría en el aula con el modelo de Van Hiele. Este estudio se llevó a cabo con estudiantes de grado sexto en Valencia, España.

El trabajo se divide en dos partes: una teórica, donde se muestra la definición del marco teórico, la recopilación de información y el diseño de unidades de enseñanza. La segunda es práctica, donde se realiza la experimentación y el análisis de esas unidades de enseñanza con grupos de estudiantes de E.G.B.

En sus resultados se destaca que con este estudio se puede formar una unidad de investigación y enseñanza de destrezas de visualización espacial. Además, estos investigadores para su trabajo en el aula experimentan con diferentes materiales y entornos en los que se pueden plantear actividades de visualización espacial. Estos materiales o entornos están dados por: sólidos reales o en el ordenador, sólidos opacos o de varillas, movimiento continuo o movimiento instantáneo en el ordenador, caras decoradas (figurativas), sombreadas o transparentes, movimiento libre o limitado y representaciones isométricas, de vistas laterales o de vistas numéricas.

Las ideas plasmadas por estos autores se consideraron en este proyecto para el diseño de actividades, se hizo uso de algunos materiales o entornos sugeridos en estas memorias en aras de

desarrollar en los estudiantes de grado noveno habilidades y destrezas geométricas relacionadas con la representación de sólidos y la visualización.

Con respecto a la enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, Gamboa & Ballesterro (2010) presentan en su investigación los resultados obtenidos de la aplicación de un cuestionario a 233 estudiantes de tres Instituciones Educativas de secundaria en Costa Rica distribuidos de la siguiente manera: 40 de séptimo, 78 de Noveno, 51 de Noveno, 40 de décimo, 23 de undécimo y 1 de duodécimo.

Vale la pena decir que el objetivo principal del cuestionario era conocer la percepción de los estudiantes sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría, además, la encuesta constó de 24 preguntas relacionadas con información general sobre la opinión de los estudiantes con respecto a: qué es aprender geometría, temas en los cuales han tenido mayor dificultad, tipo de dificultades que han presentado al estudiar geometría, estrategias metodológicas empleadas, estrategias de estudio y uso de la tecnología.

El análisis de los resultados obtenidos en este estudio manifiesta que:

- El cuerpo docente debe interiorizar que en este proceso no es él el principal actor, sino los estudiantes, los cuales deben ser promotores de su aprendizaje a partir de su “guía”, donde las actividades planteadas y los recursos disponibles faciliten la exploración, visualización, argumentación y justificación, donde más que memorizar, puedan descubrir, aplicar y obtener conclusiones que contribuyan a su aprendizaje.
- Las clases de geometría en la educación secundaria se han basado en un sistema tradicional de enseñanza, donde los principales recursos utilizados por el docente son la pizarra, tiza o pilot, borrador, material fotocopiado y libro de texto; presentando la teoría, el desarrollo de ejemplos y una serie de ejercicios que deben ser resueltos por estudiantes.
- La geometría se presenta al alumnado como una “receta” de definiciones, fórmulas y teoremas totalmente alejada de su realidad, donde los ejemplos y ejercicios no poseen ninguna relación con su contexto. Esta situación provoca que el estudiantado no considere importante el estudio de esta disciplina porque no es aplicable a la vida cotidiana. (p.139)

Por su parte también expresan que:

- Las principales dificultades que los estudiantes poseen al estudiar geometría son: resolver un problema algebraicamente; calcular perímetros, áreas y volúmenes, debido a que no identifican cuál fórmula aplicar; dificultad para interpretar qué es lo que dice un problema.
- Los procesos de razonamiento, visualización y argumentación no tienen un papel importante en la enseñanza de la geometría”. (p. 140)

Con respecto a esta investigación, se tomaron algunas ideas para la elaboración de la encuesta aplicada a los docentes que orientan el área de matemáticas en la IERD Cacicazgo, en este cuestionario se evidenció que los docentes poco utilizan actividades de exploración y manipulación de materiales concretos, escasamente se proponen situaciones de aprendizaje contextualizadas que permiten al estudiante desarrollar habilidades geométricas (visualización, argumentación, razonamiento, entre otras).

Por otro lado, lo que se describe en las tendencias actuales de la enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación secundaria Barrantes & Balletbo (2012), realizan una revisión bibliográfica y una reflexión de las últimas investigaciones españolas sobre la enseñanza-aprendizaje de la geometría en revistas científicas de mayor impacto de la última década. Este estudio puede servir como referencia de base teórica para tesis, proyectos y otros trabajos académicos. En el trabajo de estudio se brinda al investigador datos actualizados sobre temas relacionados con el área de didáctica de la geometría según: diferentes materiales y medios como facilitadores de las actividades de aprendizajes.

Esta investigación se realizó a partir del análisis de revistas indicadas de la página web de In-Recs, seleccionando 89 revistas, de estas identificaron cuales presentaban artículos relacionados con el área de geometría a través de la Búsqueda Avanzada de Redined, además, realizan una revisión y análisis de los artículos de las revistas físicas de la hemeroteca y de la Biblioteca Virtual de la Facultad de Educación, en la Universidad de Extremadura. Para la revisión y análisis de los artículos también fue utilizado Dialnet considerada como una hemeroteca virtual, con base de datos de artículos, libros y tesis, fundamentalmente hispano.

Se recopilaron 95 artículos previamente codificados por los investigadores. Una vez recopilados, realizaron la lectura buscando una convergencia de las distintas temáticas, que les

permitiera iniciar un análisis más sistemático, dándoles una estructura y codificación formada por tres clasificaciones determinada de la siguiente manera: “Por niveles educativos, por temática correspondiente a cada uno de los niveles educativos, y según materiales y recursos geométricos utilizados en los diferentes niveles educativos” (p. 28).

Algunos de los resultados obtenidos en este trabajo de acuerdo a la clasificación dada por Barrantes & Balletbo (2012), son:

- Las investigaciones realizadas por niveles educativos en Educación Secundaria supera ampliamente a los demás niveles con un 48% (70 artículos), seguido por los artículos clasificados en Educación Superior con un 20%.
- Los artículos por temática correspondiente a cada uno de los niveles educativos en Educación Secundaria, son de un 35% para la Geometría Plana, seguido de Geometría Espacial y Enseñanza-aprendizaje de la geometría en un 18%. (pp. 29-30)

También estos autores identificaron artículos relacionados a los materiales y recursos geométricos clasificándolos en elementos manipuladores (modelos construidos, constructores y mecanismos) y recursos tecnológicos como se relacionan a continuación:

- 31 artículos que se refieren a elementos manipuladores donde el 69% son de la categoría de constructores seguido de un 27% de modelos construidos.
- 25 artículos que apuntan a la utilización recursos tecnológicos, para un 88% de programas informáticos de enseñanza-aprendizaje de la geometría y en un 8% a Imagen en movimiento (vídeos y películas). (pp. 33-35)

El trabajo realizado por estos autores da una idea general sobre los temas más abordados por diferentes investigadores y como se hace necesario que los docentes de matemáticas implementen diferentes estrategias de enseñanza aprendizaje de la geometría en el aula, donde el estudiante sea el actor y constructor de su propio conocimiento, criterio que se asumen para el desarrollo de la presente tesis.

En cuanto a la investigación, adaptación del estudio de la lección japonesa para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría y el razonamiento espacial en las aulas de los primeros años: un estudio de caso (conocido como el proyecto de matemáticas para niños pequeños)

realizada por Moss & et ál. (2015), contribuye a mejorar la comprensión de profesores y alumnos en lo que concierne al pensamiento espacial y geométrico, a través de la integración de cuatro adaptaciones al currículo, según el modelo de estudio de lecciones japonesas.

Vale destacar, que el método japonés involucra una planeación colaborativa de enseñanza y reflexión sobre el diseño de las actividades en el aula caracterizadas por el establecimiento de metas, la planificación e implementación, la lección de investigación y una reflexión.

Las cuatro adaptaciones fueron aplicadas a un equipo de aprendizaje profesional y están enfocadas a: transformaciones mentales (composición y descomposición de figuras tridimensionales); orientación de los maestros hacia las actividades en clase (se deben plantear problemas diferentes a los tradicionales y de carácter significativo); diseño de lecciones y actividades explorativas por parte del docente (las diseña y aplica a un grupo pequeño de estudiantes, de acuerdo con los resultados obtenidos las reforma y aplica al grupo predeterminado) y por último, se evalúan las estrategias utilizadas con anterioridad y como ello contribuye a una mejor adquisición del conocimiento en cuanto a la geometría espacial.

Dentro de la presente tesis se tendrán en cuenta las ideas abordadas anteriormente, porque estimula y motiva al docente a reflexionar sobre la responsabilidad e importancia de planificar y desarrollar acciones formativas que aporten a la enseñanza y aprendizaje de los educandos.

Por tal razón, se diseñarán y aplicarán actividades en grupo que favorezcan el trabajo colaborativo, que promuevan a la reflexión sobre las metas y objetivos planteados en cada uno de los retos propuestos dentro de cada actividad. También, se pretenderá evaluar las actividades si fueron pertinentes y condujeron a que los estudiantes desarrollarán habilidades de visualización, construyeran el concepto de volumen en pro hacia el mejoramiento del pensamiento espacial

Puedo incluir a Villarroel & Sgreccia (2011) que presentan la importancia de trabajar en el aula con materiales didácticos concretos en la enseñanza de la geometría en la básica secundaria. Además, identificar el tipo de habilidades geométricas que los materiales permiten desarrollar al ser aplicados.

La investigación se apoya en la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR), desde el paradigma del enfoque cualitativo de alcance exploratorio-descriptivo, destacando siete grupos de materiales: modelos fijos bidimensionales y tridimensionales, rompecabezas geométricos, tangram, geoplano, transformaciones dinámicas, origami o papiroflexia, objetos del entorno real.

Las diferentes actividades permitieron desarrollar las siguientes habilidades específicamente: visuales; de comunicación; lógicas o de razonamiento; de aplicación o transferencia; de dibujo; y de aplicación o transferencia de comunicación.

Inclusive, las autoras expresan que la manipulación de materiales didácticos concretos favorece la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Además, observaron que los materiales concretos facilitan y potencian las habilidades geométricas, favoreciendo y colaborando en el desarrollo del pensamiento geométrico.

También aducen, que la implementación de este tipo de materiales en la enseñanza de la geometría fundamenta a la investigación en la EMR, favoreciendo el aprendizaje activo del estudiante a través de los seis principios que la identifican: principio de actividad; principio de realidad; principio de niveles; principio de reinención guiada; principio de interrelación, y, por último, principio de interacción.

En este estudio se recalca la importancia del uso de materiales didácticos concretos, los cuales favorecen la enseñanza y aprendizaje de diversos contenidos geométricos; para esta tesis se tendrán en cuenta el uso de materiales concretos que permita a los estudiantes construir mentalmente el objeto matemático volumen, descubrir relaciones geométricas entre algunos sólidos y a su vez, poner en juego diversas habilidades de visualización en el desarrollo de actividades o tareas de aprendizaje.

Investigaciones sobre el desarrollo de la habilidad visualización para la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio

Sainz (2014) en su tesis de maestría en formación del profesorado de educación secundaria subraya que la orientación espacial y la visualización de cuerpos geométricos se consideran una competencia valiosa y necesaria para cualquier ciudadano. Por tal razón, Sainz en su trabajo de

grado se enfoca en medir y evaluar las habilidades de visualización iniciales que presentan un grupo de alumnos de 3º de ESO de Educación Secundaria Obligatoria en un centro urbano de Santander, y a su vez, realizar una propuesta docente para potenciarlas.

El marco teórico que adopta la autora lo desarrolla a partir de la definición de visualización aportada por Gutiérrez (1996), el objetivo es medir tres las habilidades de visualización (rotación, desarrollos y vistas isométricas) por medio de un test consta de seis ejercicios pertenecientes al Purdue Spatial Visualizations, dos para cada una de las habilidades que se pretenden medir.

De la aplicación de los test la autora dedujo los siguientes resultados:

- En los ejercicios de rotación se aprecia una mejora y desarrollan habilidades básicas de descomposición de figuras espaciales.
- Plantear actividades más interactivas, para estudiantes que presentaron falta de atención y de esfuerzo ya que esto influyo en los resultados de los test de visualización.
- Trabajar más actividades que inciten a pintar desarrollos planos de figuras espaciales, caras de sólidos con el fin de fortalecer representaciones bidimensionales y tridimensionales.
- Tratar, en definitiva, el tema de la visualización de manera interdisciplinar. Las situaciones de visualización pueden ser abordadas no sólo en el campo matemático, sino en otras asignaturas como la geografía (elaboración de materiales cartográficos), el dibujo técnico (tipos de proyecciones) y la educación física (actividades motrices de orientación).

La autora de esta tesis coincide con Sainz (2013) en trabajar la visualización en diferentes campos de la ciencia y áreas del conocimiento, con el fin de desarrollar habilidades de visualización en los estudiantes por medio de actividades enfocadas al descubrimiento de vistas, elaboración de desarrollos de planos y apreciación de diferentes posiciones de cuerpos u objetos tridimensionales a partir de la observación de su contexto, en pro de favorecer al pensamiento espacial.

Gutiérrez & Jaime (2012) hacen una reflexión sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria resaltando que esta debe ser enseñada a partir de actividades que involucren representaciones graficas (físicas y mentales), que conlleven al estudiante a explorar, descubrir y participar de manera activa durante las clases.

Vale destacar, que en este artículo los autores sintetizan algunos marcos teóricos como: las fases de aprendizaje de Van Hiele, la visualización espacial y el aprendizaje de conceptos geométricos elementales que ayudan al profesor en la organización e identificación de los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría y a su vez, le permiten planificar y gestionar los contenidos geométricos en sus clases.

Lo expuesto en este artículo sobre la visualización espacial lo tendré en cuenta para identificar y clasificar imágenes, procesos y habilidades visuales presentes en las actividades aplicadas a los estudiantes de grado noveno.

En cuanto a Fernández (2013) en su artículo visualización y razonamiento espacial pasado, presente y futuro. La autora describe algunos tópicos que han sido objeto de estudio y análisis y que siguen siendo de interés para futuras investigaciones en el ámbito de la geometría.

Considerando lo anterior, Fernández hace una revisión bibliográfica sobre la visualización y razonamiento espacial desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática bajo sus cuatro facetas o dimensiones (epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica) se presentan a continuación de manera general algunos temas vistos desde estas dimensiones:

- En cuanto a la faceta epistémica se aborda la visualización desde dos puntos de vista, el primero relacionado con la argumentación y demostración partiendo del razonamiento visual y el segundo aspecto se plantea desde la noción de representación.
- Por otro lado, en esta faceta epistemológica sobre el estudio del contenido matemático centrado en seis categorías: representaciones planas de objetos tridimensionales, desarrollos planos de cuerpos espaciales, clasificación de figuras, comprensión de conceptos y propiedades, transformaciones geométricas y validez de la demostración o argumentación visual (pp. 20-22).
- Luego, en la faceta cognitiva se hace énfasis en el análisis de las teorías para el desarrollo del aprendizaje de la geometría, donde la teoría de Van Hiele es la que sobresale cuando se trabaja en didáctica de la geometría siendo la visualización un nivel de razonamiento en esta teoría.

- Además, en esta faceta muchos investigados han centrado su interés en la visualización y razonamiento espacial desde tres aspectos: aprendizaje de conceptos, procesos y estrategias y preferencia del método. (pp. 22-26)
- En cuanto a la faceta instruccional, se refieren a la visualización vista desde: la conversión de representaciones planas a representaciones tridimensionales de cuerpos, conceptos geométricos básicos, exploración de transformaciones geométricas en el plano y desarrollos planos de sólidos. También se analizan los materiales manipulativos y entornos tecnológicos si favorecen a la creación de imágenes y habilidades visuales. (pp. 26-28)
- Por último, en la faceta ecológica se recogen aquellas investigaciones que tratan diferencias de género y diferencias culturales en cuanto al rendimiento en pruebas de visualización y razonamiento espacial. Además, se enfatiza en la importancia de incluir a la visualización en documentos curriculares y en trabajos en los que se operen conceptos matemáticos que no contienen aspectos espaciales.

Lo expuesto anteriormente permite a la autora de esta tesis conocer de manera más profunda diferentes puntos de vista en la que se ha trabajado la visualización, y como esta, es reconocida como un componente clave en el aprendizaje de las matemáticas.

También, Fernández (2014) realiza un trabajo de investigación centrado en la visualización y el razonamiento espacial en la formación de futuros maestros; la autora elaboró un cuestionario que consta de siete ítems el cuál es aplicado como prueba diagnóstica a 400 estudiantes de tercer curso de la Diplomatura de Maestro de la Universidad de Santiago de Compostela (España) en sus distintas especialidades (Primaria, Infantil, Lengua extranjera y Musical) a lo largo de tres cursos académicos (2005-2006; 2006-2007 y 2008-2009) y tiene como objetivo identificar que habilidades de visualización reconocen y cuál es su formación en el tema.

A continuación, se presentan algunas conclusiones obtenidas en la aplicación de la prueba por Fernández:

- Las tareas presentadas en el cuestionario reflejan que cada uno de los ítems implementados a los estudiantes no forman parte de su formación y práctica habitual. Además, no están

acostumbrados a realizar cortes de sólidos, a elaborar cuerpos truncados, ni generar sólidos de revolución y representaciones planas de objetos tridimensionales.

- Se observó que los futuros maestros en formación tienen ideas muy vagas y limitadas sobre conceptos básicos de geometría (simetría, giro, cubo, ortoedro, paralelepípedo, etc.) generando numerosos conflictos a la hora de interpretar y desarrollar las tareas planteadas.
- Desde una perspectiva formativa la investigación revela que los futuros maestros presentan carencias en cuanto al contenido de visualización y razonamiento espacial. Por lo tanto, surge la necesidad de planificar, implementar y evaluar acciones formativas encaminadas a mejorar tareas de visualización espacial en las instituciones de educación superior relacionadas con este tema.

Este artículo permite a la autora de esta tesis tomar conciencia sobre la importancia hacia el diseño de tareas y actividades variadas que involucren contenidos acerca de la visualización, la geometría espacial y plana, para implementarlas durante las clases como estrategias de aprendizaje a los estudiantes y así promover el desarrollo de habilidades de visualización y del pensamiento espacial.

De la misma forma, Gonzato, Godino, Contreras & Fernández (2013) dan a conocer en su comunicación expuesta en el SEIEM, tipos de soluciones de tareas propuestas, respuestas y conocimientos que presentan 241 futuros profesores del segundo curso de la especialidad Educación Primaria de la Universidad de Granada del año académico 2010-2011, al responder un cuestionario que consta de 5 ítems de respuesta abierta cuestionario sobre visualización de objetos tridimensionales (Cuestionario VOT). Además, exponen las reformas de las tareas que los docentes harían para utilizarlas en diferentes grados de escolaridad.

La metodología utilizada en esta investigación está centrada en un enfoque metodológico de tipo mixto; se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la instrucción matemática relacionándolo con la visualización de objetos tridimensionales representados en el plano.

Algunos resultados obtenidos a partir del análisis cuantitativo y cualitativo de las resoluciones por parte de los estudiantes fueron:

- Los futuros profesores muestran ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento especializado del contenido (coordinar e integrar vistas de objetos, plegar y desplegar desarrollos, componer y descomponer en partes un objeto tridimensional y generar cuerpos de revolución).
- Las justificaciones propuestas por los alumnos a tareas visuales de nivel elemental se refieren principalmente a validaciones de tipo perceptivo y argumentaciones deductivo-informales expresadas con un vocabulario cotidiano.
- Se presenta carencia de variaciones pertinentes a las tareas propuesta por parte de los docentes lo que puede influir negativamente en una futura gestión de una trayectoria didáctica idónea para el desarrollo de habilidades visuales en la en la enseñanza de la geometría espacial. (pp.316-317)

Como lo afirman en este artículo

“(...) se hace necesario diseñar acciones formativas específicas para desarrollar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los futuros maestros; una formación que incluya la reflexión sobre los diferentes tipos de esquemas de pruebas, y la manera de articularlos de forma progresiva, desde los primeros niveles educativos”. (Gonzato & et ál, 2013, p. 317)

Teniendo en cuenta lo anterior, la autora de esta tesis considera importante involucrar tareas de aprendizaje que involucren diferentes tipos de pensamiento matemático, con el fin de desarrollar en los estudiantes habilidades matemáticas como: visualización, razonamiento, argumentación, formulación de conjeturas, procesos generalización y resolución de problemas, entre otras; que permitan desarrollar en los educandos competencias y a su vez aplicarlas en diferentes contextos, ambientes y situaciones de aprendizaje.

En otro orden de ideas, Torres (2009) presenta la visualización desde tres perspectivas (cognitiva, tecnológica, y comunicativa) y acoge la idea que esta puede ser considerada como una disciplina científica. A continuación, se exponen algunos argumentos presentados por la autora de este artículo:

- La visualización es considerada una herramienta esencial del ser humano que permite comprender, explorar, analizar, describir y explicar fenómenos de la vida cotidiana con el propósito de descubrir o amplificar el conocimiento.

- Actualmente es una temática que ha sido abordada en diferentes campos del conocimiento; diferentes investigadores consideran a la visualización como una disciplina científica en evolución, dinámica, cambiante e innovadora.
- La visualización desde la perspectiva cognitiva ayuda al ser humano en la comprensión del mundo externo a partir del pensamiento, el razonamiento y el uso de los sentidos, no solo el de la vista. Además, permite el reconocimiento de patrones; favorece los procesos del aprendizaje y contribuye a partir de representaciones externas e internas mostrar estructuras inherentes al conocimiento las personas.
- Desde la perspectiva tecnológica, la visualización se centra en las interacciones del ser humano con las computadoras favoreciendo a la cognición (adquisición y uso del conocimiento) mediante las representaciones visuales e interactivas.
- La perspectiva comunicativa considera que la visualización permite comprender y transformar el sentido oculto de la información asociada con los datos abstractos y los fenómenos complejos de la realidad en mensajes visibles. (pp.161-171)

De lo anterior, se puede concluir que la visualización es útil en el desarrollo del pensamiento del ser humano y contribuye a facilitar procesos de aprendizaje si se asocia en diferentes campos de la ciencia.

En el estudio de caso realizado por Beltrán & Suárez (2014) sobre el proceso de visualización en geometría, los autores elaboran una comparación sobre las habilidades espaciales que presentan un hombre y una mujer de quinto semestre en la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas mediante una actividad propuesta relacionada con geometría.

Este trabajo se abordó bajo la metodología de la resolución de problemas, además, incluyo los tres primeros niveles de Van Hiele relacionándolos con los niveles de visualización propuestos por Duval y tuvo en cuenta dos puntos de vista: el observador (encargado de ver el proceso que utilizan los estudiantes en la solución del problema) y el resolutor (justifica en forma verbal cómo afronta la solución de la actividad planteada), con el fin de categorizar los resultados, identificar y clasificar el tipo de habilidades que presentan los resolutores en la actividad planteada.

A partir de los datos recolectados y el análisis realizado por los autores de esta investigación se obtienen algunas conclusiones:

- Aunque las habilidades de visualización en los procesos de resolución son los mismos, los razonamientos, estrategias y consideraciones visuales de las figuras que hacen los resolutores (hombre y mujer) son distintos, también conllevan a utilizar diferentes caminos en la solución del problema siendo más claros en el hombre que en la mujer.
- La pareja de estudio presenta las siguientes habilidades de: identificación visual (reconocen una figura aislándola de su contexto), reconocimiento de relaciones espaciales (identifican correctamente las características de relaciones entre diversos objetos del espacio) y discriminación visual (comparación entre figuras para establecer sus semejanzas y diferencias).

Las ideas procedentes por estos autores dieron indicios a este proyecto para la elaboración de las categorías de análisis, también, como establecer las relaciones entre las habilidades de visualización y el resultado de la implementación de las actividades. Además, motiva a la autora de esta tesis a futuro identificar y hacer una comparación sobre el tipo de habilidades espaciales que presentan los estudiantes de grado noveno en los diferentes géneros.

Por otro lado, Martínez & Solano (2012) exponen el rol de la visualización como antesala de la resolución de problemas matemáticos, los autores proponen una actividad relacionada con un hexaedro regular truncado donde los resolutores requerirán de conocimientos previos asociados a la geometría plana y espacial, particularmente con el uso de fórmulas de áreas y volúmenes. La situación planteada buscaba fortalecer la capacidad de visualización espacial, desarrollar competencias para resolver problemas relacionados con situaciones de la vida cotidiana y el establecimiento de relaciones entre matemática y los fenómenos diarios.

Por un lado, considero que esta actividad propuesta en este trabajo permite identificar habilidades de visualización que presentan los estudiantes en el desarrollo de este problema y a su vez fortalecer el pensamiento espacial partiendo del cálculo de volúmenes y áreas.

Por otro lado, observo que el artículo debería mostrar resultados obtenidos en la aplicación de la actividad, a quienes se les aplicó y conclusiones sobre lo encontrado.

Por lo que se refiere al mejoramiento de habilidades de visualización espacial, Hoyos & Acosta (2014) presentan el diseño y desarrollo de secuencias didácticas que conlleva a los estudiantes a la manipulación de objetos tridimensionales concretos y virtuales de forma lúdica e interactiva a través del uso de dos softwares educativos denominados cubos y cubos y polidróno de marthica. Este trabajo busca conceptualizar los sistemas de representación con actividades que permiten visualizar el espacio tridimensional a través del desarrollo de tareas de interpretación de objetos tridimensionales.

La propuesta se basó en la teoría cognitiva del aprendizaje (Baroody, 2000), enfocado desde el constructivismo y el trabajo colaborativo, mediante el uso del software educativo y de las actividades desarrolladas. Dicha propuesta se compone de tres fases las cuales se presentan a continuación: Estados previos (indagación), desarrollo y descubrimiento (Orientación dirigida y libre) y puesta en común, con el fin de promover habilidades de visualización espacial y la construcción de conceptos geométricos por parte de los alumnos.

De acuerdo con lo expuesto por los autores, los ambientes informáticos utilizados permiten el desarrollo de la visualización espacial facilitando la enseñanza y el aprendizaje de la geometría espacial y generando en los estudiantes la posibilidad de explorar el espacio y los objetos tridimensionales de forma novedosa y totalmente interactiva.

Además, las herramientas computacionales facilitaron el manejo de la perspectiva y la capacidad para calcular volúmenes de sólidos irregulares, a través de la construcción libre o guiada de los sólidos con el uso de unidades cúbicas.

Este trabajo expone la importancia de involucrar en enseñanza de la geometría softwares que con lleven a los estudiantes a resolver problemas por medio de la manipulación de objetos tridimensionales concretos y virtuales de forma lúdica e interactiva.

Para el caso de mi investigación usaré materiales concretos ya que por el momento no se cuenta con la instalación de los softwares ni el espacio de la sala de informática, pero motiva a la autora de esta tesis a implementar en su práctica pedagógica ambientes informáticos que ayuden a los estudiantes a fortalecer el pensamiento espacial.

Investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio, de la visualización y en particular del concepto de volumen

Romo & Jaimes (2013) presentan un reporte sobre la integración del uso de habilidades espaciales y geométricas para el aprendizaje significativo del concepto de volumen de sólidos con estudiantes de grado 8° (13-14 años) del Instituto Técnico Industrial Francisco de Paula Santander ubicado en la ciudad de Puente Nacional (departamento de Santander en Colombia). El objetivos de esta investigación es potenciar el aprendizaje del concepto volumen, a través de un proyecto de aula transversal entre las áreas de dibujo técnico y matemáticas.

Para el desarrollo de este proyecto los autores adoptaron la metodología de la ingeniería didáctica que permite el diseño de situaciones didácticas a través de cuatro fases: análisis preliminares, concepción y análisis a priori de las situaciones, experimentación y análisis a posteriori y evaluación.

En esta comunicación Romo & Jaimes exponen los resultados que esperan obtener a través de la aplicación de una situación didáctica y el uso del software llamado multicubos con el fin de encontrar tareas de conservación del volumen de un objeto en diferentes perspectivas de rotación y a su vez encontrar una relación las habilidades espaciales y las habilidades de razonamiento geométrico de manera tridimensional con base a una evidencia empírica.

Esta información sugiere una idea de trabajo a la autora de esta tesis en involucrar habilidades de visualización con tareas de volumen que permitan propiciar el desarrollo del pensamiento espacial a través de actividades específicas, que con lleven a responder la pregunta de investigación.

El estudio realizado por Sanchis & Guillén (2013) describe la observación de procesos de aprendizaje de contenidos concernientes al volumen de algunos sólidos (prismas, pirámides, troncos de pirámide y cilindros). Las autoras diseñaron 18 actividades que aplicaron a un grupo de 17 alumnos de 2° de ESO en la IES Pou Clar de Ontinyent (València) en 15 sesiones de 55 minutos cada una.

Además, cabe resaltar que las secuencias de actividades se trabajaron en dos partes: la primera de ellas estaba organizada en 6 sesiones, cada una con un nombre y descripción de la actividad. Estas sesiones involucraban varios aspectos como: la interacción constante entre el profesor y el alumno (vía pregunta- respuesta), el uso de material manipulativo, la resolución de problemas, la elaboración de fórmulas como contenido objeto de enseñanza y la utilización de procedimientos geométricos con el objetivo de producir y construir la fórmula de volumen de algunos sólidos (paralelepípedos, prismas, pirámides y cilindros) y a su vez asociarlos con la superficie y capacidad de cada uno de éstos.

En la segunda parte los estudiantes trabajaron en grupos y resolvieron 10 actividades en las que dieron solución a los problemas planteados relacionados con: contenidos relativos al cálculo de volúmenes de algunos sólidos, capacidad y área; unidades de medida; propiedad aditiva y conservación del área y del volumen; diferentes representaciones de los sólidos y el uso del lenguaje geométrico y algebraico.

En particular, las actividades propuestas buscaban identificar los procedimientos que usan los estudiantes, las dificultades y errores que presentan en el desarrollo de cada una de las sesiones.

Algunas de las conclusiones obtenidas en este informe y que corroboran resultados obtenidos con otras investigaciones son:

- Las actividades que implican diferenciar o relacionar el volumen con otras magnitudes son las que presentan mayor dificultad en los estudiantes.
- El uso de tareas de recubrimiento con unidades no estándar favorece a la medición del volumen desde una perspectiva diferente y posterga en cierto grado a no calcular el volumen mediante algoritmos facilitando la medida de áreas y volúmenes de sólidos utilizando unidades adecuadas.
- Se evidencia que los estudiantes presentan habilidad para relacionar volúmenes de diferentes cuerpos geométricos, aunque predomina la tendencia a usar fórmulas memorísticamente y esto conlleva a una dificultad en la resolución de problemas.
- La justificación de las fórmulas a partir de métodos de descomposición, puzzles u otros procedimientos utilizados en la enseñanza previa no fue suficiente para que los grupos

superaran las dificultades que se tenían para establecer relaciones entre sólidos al determinar el volumen de éstos.

- Existe la convicción entre algunos estudiantes que la función de la resolución de un problema es obtener el resultado.
- Los estudiantes presentan dificultad para usar el lenguaje geométrico y el lenguaje algebraico. Posiblemente se encuentre la explicación en la poca enseñanza previa en la geometría de los sólidos y en la introducción temprana del lenguaje algebraico. (pp. 511-522)

Por lo anterior, la autora de esta tesis subraya la importancia de trabajar con los estudiantes desde edad temprana actividades (de acuerdo al nivel de escolaridad) que permitan afianzar el concepto de volumen mediante diversas tareas (percepción, comparación, medición, estimación, etc.) que involucren el uso de recursos educativos (cubos, sólidos, puzzles, entre otros) y habilidades de visualización para ir contrarrestando de manera progresiva dificultades y errores presentados en el aula de clase y que constatan diferentes investigadores en este tema.

De modo idéntico, Gil, Montoro & Moreno (2016) exponen en su trabajo algunos errores y dificultades que cometen maestros en formación al medir el volumen mediante la aplicación de dos tareas que vinculan las competencias de comparación de cualidades y de medida relacionadas con capacidad (interior) y volumen (exterior). Además, proponen una actuación en el aula para que los estudiantes detecten y superen las estrategias erróneas presentadas durante el desarrollo de las tareas.

Se realiza un estudio exploratorio e interpretativo con participación voluntaria y consentimiento aprobado de estudiantes de la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y la Medida de segundo curso de Maestro de Primaria de la Universidad de Almería.

Este trabajo se lleva a cabo en dos sesiones prácticas de la asignatura: En la primera sesión se grabaron a 8 grupos durante la realización de la tarea de comparación del volumen y la capacidad; en la segunda sesión se graba a 5 grupos realizando la tarea de medida de la capacidad y el volumen. Hay que aclarar que dicha grabación no fue llevada a cabo en el aula-taller (salón de prácticas asignado) para clase para evitar los ruidos procedentes del trabajo de otros grupos.

Respecto a los contenidos que abordaron en este trabajo cabe señalar:

- A los estudiantes se les dificulta el volumen de la superficie, además cometen errores al relacionar las unidades de medida de la capacidad y del volumen.
- Esta prueba permitió comprobar que los estudiantes acceden con lagunas en su formación relacionada con la estimación, comparación, y unidades de medidas del volumen y la capacidad.

Ahora, cabe resaltar que las grabaciones fueron mostradas a los estudiantes participantes con el fin de validar las estrategias puestas en juego, mostrarles interrogantes planteados y cómo los solucionaban. Lo anterior, con el fin de retroalimentar los procesos de enseñanza aprendizaje del volumen y la capacidad.

También, se buscaba conscientizar a los futuros maestros de la gran variedad de respuestas que pueden aportar sus estudiantes, la importancia de evaluar y juzgar la validez de los razonamientos realizados por ellos.

Este artículo me permite reflexionar sobre la importancia de implementar grabaciones (audio, video) como una estrategia de mejoramiento y evaluación de mi práctica educativa, y a la vez, identificar los errores (propios y estudiantes) que se experimentan dentro del aula de clase con el fin de elaborar acciones de cambio que propicien el aprendizaje de la geometría.

Ahora bien, Anwandter-Cuellar (2013) plantea algunas tareas asociadas con el concepto de volumen, con el fin de identificar y analizar que nociones tienen los estudiantes universitarios acerca del volumen desde la perspectiva geométrica (volumen como parte del espacio) y la perspectiva numérica (caracterizado por medidas y sus interrelaciones).

Los objetivos de esta investigación son: identificar y analizar qué tipos de concepciones (numéricas y geométricas) presentan tres estudiantes a la hora de resolver dos cuestionarios (tipo A y tipo B) que involucran la noción de volumen; descubrir las dificultades de aprendizaje y enseñanza sobre el concepto de volumen.

Para determinar el análisis, comprensión, el conocimiento en acción utilizado y la caracterización de concepciones de la noción de volumen por parte de los estudiantes (4° y 3°) universitarios de Montpellier, Anwandter-Cuellar utiliza la teoría cognitivista de Gerard Vergnaud (1991), especialmente los conceptos de "teorema en acto" y "Concepto en acción", junto

con los diseños de marcos desde la perspectiva numérica y geométrica en el cálculo de volúmenes propuesta por de Douady (1986).

Del estudio se destacan algunos resultados como:

- Algunos estudiantes confunden las fórmulas de cálculo de volumen de un paralelepípedo rectangular y el área un rectángulo.
- Algunos estudiantes encuentran dificultades para establecer vínculos entre los lados del objeto y la fórmula.
- La mayoría de los estudiantes saben calcular el volumen de un paralelepípedo dando las dimensiones, pero se les dificulta armar un paralelepípedo si se les da el volumen total y ellos deben determinar las dimensiones del sólido.
- Algunos estudiantes no usan la propiedad aditiva de la medida y no realizan recuentos correctamente.

Teniendo en cuenta lo anterior, se hace relevante que cada una de las actividades diseñadas en esta investigación esté relacionadas con la representación del volumen desde el punto de vista geométrico que considera al volumen como el espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos y el punto de vista numérico que se caracteriza por las medidas y sus interrelaciones.

Agregando a Sáiz (2003) quien expone algunos resultados obtenidos de la aplicación de un taller de actualización que constaba de tres cuestionarios (aplicado dos veces) centrado en el concepto de volumen y su enseñanza en un centro de maestros de la ciudad de México; cabe destacar, que la primera aplicación del taller contó con la dirección de la investigadora y participación de 15 maestros con dos asesores de dicho centro, realizado en cinco sesiones matutinas de cuatro horas cada una y la segunda aplicación del taller fue realizada por los dos asesores mencionados y cuento con la asistencia de 9 maestros en el turno vespertino.

El objetivo primordial de esta investigación fue conocer las concepciones que tienen los maestros sobre el volumen, su enseñanza y dificultades presentadas.

El marco teórico metodológico, que utilizó la autora se enfoca a través de cuatro componentes de acuerdo con Filloy relacionados con: modelos de enseñanza, modelos de los procesos

cognitivos, modelos de competencia formal y modelos de comunicación, además, incorpora un análisis fenomenológico de acuerdo con Freudenthal.

Algunas deducciones de este proyecto de investigación son:

- Los resultados obtenidos señalaron la importancia de incluir en programas de formación y actualización de profesores, dificultades presentadas en cuanto a la relación del volumen y la capacidad, el volumen y el peso, el volumen y el área de un cuerpo.
- Es necesario reforzar procedimientos cualitativos para resolver problemas sobre volumen, enriqueciendo la enseñanza de este concepto sin reducirla a la aplicación de fórmulas.
- Se subraya la riqueza del concepto volumen, por la variedad de significados que pueden asociarse a este vocablo, su complejidad en las características físicas y geométricas de los objetos volumen-medibles y las relaciones que guarda con otros atributos de los cuerpos como la capacidad y el peso, las cuales, además, permiten medir el volumen indirectamente de diferentes formas como usando la inmersión o pesando.

Lo anterior recalca la importancia de trabajar en el aula con esta magnitud “volumen” desde varias perspectivas y sus relaciones con otras medidas con el fin de ir superando dificultades que se presentan en los estudiantes y docentes. En esta tesis se desarrollarán algunas actividades que propendan a fortalecer la enseñanza del volumen y las habilidades de visualización.

En esa misma línea, Sáiz (2003) en su documento de reflexión sobre el volumen ¿por dónde empezar? expone algunos aspectos que tienen que ver con la enseñanza y el aprendizaje del objeto matemático volumen y recalca que, para enseñar cualquier concepto matemático, es recomendable tener presente los siguientes aspectos:

- Entender el concepto en cuestión desde el punto de vista de las matemáticas
- Conocer que dificultades cognitivas se han detectado en estudios realizados con niños y adolescentes
- Tener en cuenta diferentes modelos de enseñanza propuestos por expertos para el concepto en cuestión. (Sáiz 2003, p. 1.)

A continuación, se muestra de manera resumida la manera de ver el concepto matemático volumen teniendo en cuenta los aspectos mencionados con anterioridad.

En primer lugar, Sáiz presenta al volumen como una unidad susceptible de ser medida, como la longitud y el área, pero no siempre las propiedades que se cumplen para estas magnitudes (área, longitud) se deben cumplir para el volumen. Hay que hacer notar que el cálculo de volumen en matemáticas es una aplicación de la integral definida y en geometría está vinculado al estudio de poliedros.

Como segundo aspecto, la autora resalta la enseñanza del volumen a partir de la conservación de la cantidad y la sustancia partiendo desde el punto de vista psicológico o cognitivo. Piaget realizó aportes significativos en relación con el concepto de volumen y de su enseñanza.

No obstante, muchas investigaciones (adaptaciones de las tareas piagetianas) han detectado los problemas y dificultades que presentan los estudiantes y futuros maestros con la conservación del volumen y las relaciones entre el volumen y otras magnitudes como el área lateral, la capacidad, la masa y el peso, además, confunden el área con el volumen.

Finalmente, Sáiz se refiere a las recomendaciones de expertos para la enseñanza del volumen, tomando como referente a Freudenthal (1983) quién considera que antes de enseñar un concepto matemático se debe realizar un análisis fenomenológico. Freudenthal propone actividades que considera indispensables para la formación del objeto mental volumen (se enunciarán en el marco teórico de esta tesis).

Algunas reflexiones obtenidas por Sáiz en este documento se enuncian a continuación:

- En primaria y secundaria la estimación de magnitudes y en particular, la estimación del volumen no es un contenido que se trate en las aulas de clase con frecuencia.
- Motivar a los docentes a trabajar actividades de estimación con el fin de dar sentido al concepto de medición.

El documento anterior incentiva a la autora de esta tesis a tener en cuenta los aspectos mencionados por Sáiz a la hora de enseñar un concepto matemático, sabiendo que esto ayuda a mejorar mi práctica educativa. Además, seguir trabajando el objeto matemático volumen desde varias perspectivas, apoyándome de investigaciones trabajadas con anterioridad.

Por otro lado, reconocer las dificultades presentadas por los estudiantes a quienes oriento la enseñanza de las matemáticas y partiendo de ello formular acciones de mejoramiento.

Por otra parte, en su estudio sobre los acercamientos de los niños al concepto de volumen Potari & Spiliotopoulou (1996) presentan resultados obtenidos de dos grupos de 5° (11 años) grado de una escuela primaria en Patras, Grecia, a quienes se le aplicaron diferentes tareas enfocadas a la adquisición del concepto de volumen.

En la mayoría de las tareas los materiales usados fueron mostrados a los niños y se les permitió que los tomaran y los examinaran libremente. Luego de culminadas las actividades, se dio apertura a una discusión general en donde los niños expresaban sus ideas verbalmente sobre lo trabajado en el aula. Lo anterior permitió a los autores de esta investigación explorar de una manera más acertada los significados que tienen los niños de este concepto a través de sus estrategias.

Además, Potari & Spiliotopoulou consideran que las tareas de este estudio proveen oportunidades para los niños de expresar, discutir y clarificar sus ideas. También, estas tareas permitieron que los niños tuvieran la oportunidad de ser conscientes de sus concepciones personales y sus inconsistencias sobre el concepto de volumen. Inclusive, pueden ser ejemplos apropiados para docentes en la organización de contenidos y formulación de actividades para aplicar en el aula de clase.

Algunos de los resultados obtenidos por Potari & Spiliotopoulou (1996) citado en Sáiz (2003) son:

- Los niños de quinto grado de primaria dan significados diferentes al término volumen de acuerdo con características físicas de los cuerpos que se les presentan.
- Al comparar dos cubos idénticos, uno de papel hueco y otro sólido de madera, algunos niños le dan a volumen el significado de capacidad y concluyen que el objeto hueco es mayor (al otro no le cabe nada); otros le dan al término el significado de masa o material con el que está hecho, en ese caso dicen que el mayor es el de madera. Lo mismo ocurre cuando el significado asociado es peso. Cuando el significado asociado es el de volumen como espacio ocupado dicen que ambos cubos tienen el mismo volumen. (p. 9)

Se recalca a partir de este estudio, la importancia de orientar actividades en el aula que propendan a un acercamiento del concepto de volumen, integrando diferentes estrategias de enseñanza y aprendizaje desde las matemáticas y las ciencias, haciendo uso de materiales concretos, instrumentos de medida, entre otros; esto con el fin de desarrollar en los estudiantes un concepto de volumen coherente y fortalecer las prácticas educativas.

Capítulo 3. Marco Teórico

Este capítulo se propone presentar el marco teórico de la presente tesis, se asumen tres ítems; en primer lugar, se diserta sobre la visualización espacial, destacando su importancia en la Educación Matemática desde el punto de vista de procesos, imágenes mentales, niveles y habilidades visuales requeridas en la formación del pensamiento matemático del ser humano. En segundo lugar, se tiene en cuenta el pensamiento espacial y el pensamiento métrico visto desde los lineamientos curriculares (MEN) y finalmente se abordan algunas sugerencias para la enseñanza y aprendizaje de la noción del objeto matemático volumen teniendo en cuenta diferentes perspectivas para su enseñanza.

Referentes teóricos sobre la visualización matemática

A medida que el ser humano interacciona con su entorno hace uso de sus sentidos, en este caso, el sentido que cobra más relevancia para la construcción y formación de imágenes mentales es el de la vista, cada una de estas imágenes se van estructurando y organizando en la mente del ser humano con su devenir diario, y a su vez, la memoria va realizando asociaciones con imágenes mentales almacenadas con anterioridad.

Torres (2009) menciona que “(...) cualquier esfuerzo que implique comprender, analizar y explicar fenómenos de la vida cotidiana ha estado siempre presente la visualización, asociada fundamentalmente con los procesos de abstracción del ser humano” (p. 162). Por consiguiente, el ser humano establece una relación estrecha entre lo que percibe de su contexto (imágenes externas) y la mente (construcción interna) haciendo uso de sus sentidos; este proceso que realiza es conocido como visualización.

También aduce que:

“la visualización se considera una tarea del proceso comunicativo, por medio del cual se transforman los datos abstractos y los fenómenos complejos de la realidad en mensajes visibles, y que lleva a un proceso de descubrimiento del conocimiento” (p. 164).

Algo semejante ocurre con Gutiérrez (1991) cuando manifiesta que “la visualización o percepción visual es un elemento importante en infinidad de actividades de la vida, no solo en las relacionadas con el aprendizaje escolar o con la geometría (...)” (p.44).

De modo accesorio Zazkis, Dubinsky & Dautermann (1996) citado en Suárez y León (2016) presentan la visualización como “el acto que puede consistir en la construcción mental de objetos o procesos que un sujeto asocia con objetos o medio externos como el papel, la pizarra o la pantalla del ordenador o situaciones percibidas” (p.112).

Además, Buttenfield y Mackaness (1991) citado en Torres (2009), consideraron a “la visualización como el proceso de representar la información como una vista general de un todo, con el propósito de reconocer, comunicar e interpretar patrones y estructuras” (p.163)

Lo descrito con antelación ha generado que el hombre busque establecer conexiones entre el mundo real y las diferentes ramas de la matemática, permitiéndole desarrollar varios tipos de habilidades como: visuales, de dibujo y construcción, de comunicación, de orientación, de razonamiento y de modelización; a partir del reconocimiento de diferentes posiciones espaciales de su contexto.

Así mismo, Presmeg (2006) afirma que:

(...) cuando una persona crea un arreglo espacial (incluyendo una inscripción matemática), hay una imagen visual en la mente de la persona guiando tal creación. Por tanto, la visualización incluye el proceso de construir y transformar tanto el imaginario visual mental como las inscripciones de una naturaleza espacial que puedan estar involucradas en el quehacer matemático. (2006, Citado por Gómez-Chacón, 2014, p. 8)

De lo anterior se destaca la importancia de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas y en especial en la geometría; ya que contribuye al desarrollo del pensamiento lógico matemático, a dar una visión global e intuitiva del contexto, al razonamiento, la resolución de problemas y la demostración en la actividad geométrica, entre otras.

Cabe mencionar a Urchegui (2015) quien afirma que:

(...) el concepto o constructo de pensamiento visual plantea una forma específica de conocimiento y un estilo de comunicación. Una forma de recibir información a partir de la interpretación de

imágenes y una manera de transmitir información y comunicar a partir de la construcción de imágenes, desde el simple gesto gráfico hasta la utilización de diferentes recursos y TIC's. (p. 25)

Igualmente, Hershkowitz (1990) asocia la visualización con “la habilidad para representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar sobre información visual” (p. 75). A su vez Arcavi (2003) combina las definiciones que dan Hershkowitz (1989) y Zimmermann y Cunningham (1991) para comprender la visualización como:

(...) la capacidad, el proceso y el producto de creación, interpretación, uso y reflexión sobre fotos, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información sobre el pensamiento y desarrollo de ideas previamente desconocidas y avanzar en la comprensión. (p. 217)

Además, cabe resaltar que la visualización para Clements & Battista (1992) “(...) integran diferentes procesos que permiten obtener conclusiones a partir de las representaciones de objetos bidimensionales o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones”. Al respecto, Castiblanco, Urquina, Camargo & Acosta (2004) aluden que, “en el aprendizaje de la geometría, los procesos de visualización constituyen el soporte de la actividad cognitiva en geometría donde el sujeto evoluciona en su percepción de los objetos y su potencial heurístico en la resolución de problemas” (Citado por Suárez y León 2016, p. 113).

De manera particular De Guzmán (1996), menciona que en la visualización en matemáticas

(...) Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presenten una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geoméricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo. (p. 2)

Por otro lado, Suarez & león (2016) señalan “que la visualización suele referenciarse con figuras o representaciones pictóricas externas (medio material) o internas (imagen mental)”. Además, estos autores mencionan los aportes de Castro y Castro (1997) haciendo referencia que “el pensamiento visual está ligado a la capacidad para la formación de imágenes mentales, cuya característica es hacer posible la evocación de un objeto sin que esté presente” (p. 113).

Vale destacar que la visualización juega un papel importante en el aprendizaje de la matemática y en especial de la geometría, esta contribuye a que el estudiante desarrolle diferentes tipos de procesos (representar, transformar, comunicar, reflexionar, modelar, formular y resolver problemas, etc.) necesarios para la actividad matemática. Son diversas las áreas que requieren de representaciones visuales, tanto para representar algún concepto, fórmula, patrones, como de instrumentos útiles para el análisis.

Tal como afirman Gonzato & et ál. (2013) sobre la visualización y la orientación espacial sugiriendo que son un conjunto de habilidades que hacen parte del razonamiento espacial.

(...) visualizar y orientar un objeto, un sujeto o un espacio, no incluye únicamente la habilidad de “ver” los objetos y los espacios, sino también la habilidad de reflexionar sobre ellos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y de examinar sus posibles transformaciones (rotación, sección, desarrollos, etc.). (p.2)

La visualización como producto y proceso de imágenes mentales.

En relación a la visualización como producto muchos investigadores la han referenciado con términos variados como: diagramas, imágenes visuales, gráficos, dibujos, esquemas, representaciones icónicas y visuales, imágenes mentales, movimientos, figuras geométricas, entre otras. Para resumir lo anterior se utilizará la visualización como un producto, vista desde lo que aporta (Gutiérrez, 1996) citado en Sainz (2014), haciendo referencia a que “una imagen mental es cualquier tipo de representación cognitiva de un concepto o propiedad matemática por medio de elementos espaciales o visuales” (p.12).

A continuación, se muestra la categorización de diferentes tipos de imágenes mentales realizada por Presmeg (1986) en la siguiente tabla:

Tabla 1
Tipos de visualización en el contexto de las matemáticas (Presmeg, 1986).

	IMÁGENES MENTALES	DESCRIPCIÓN
TIPOS DE VISUALIZACIÓN EN MATEMÁTICAS	Imágenes concretas pictóricas	Se trata de imágenes figurativas de objetos físicos
	Imágenes de fórmulas	Consisten en la visualización mental de fórmulas o relaciones esquemáticas de la misma manera como se las vería.
	Imágenes de patrones.	Son imágenes de esquemas visuales correspondientes relaciones abstractas. A diferencia del tipo anterior, no se visualiza la relación propiamente dicha (una fórmula generalmente), sino alguna representación gráfica de su significado.
	Imágenes cinéticas	Se trata de imágenes en parte físicas y en parte mentales, y que en ellas tiene un papel importante el movimiento de manos, cabeza, etc.
	Imágenes dinámicas	Son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Nota. Elaboración propia de la tabla con información tomada de Sainz (2014)

Cabe resaltar, que una imagen puede ser categorizada de dos maneras diferentes: cinética o dinámica y estas son independientes a la hora de clasificarlas como una imagen pictórica, de patrón o de fórmula.

Por otro lado, se tiene en cuenta lo que dice (Bishop, 1989) citado en Fernández (2011, p. 22), donde se relaciona a las imágenes visuales (físicas o mentales) como los objetos que se utilizan en la actividad de visualización, y hace hincapié que se puede realizar una manipulación de imágenes visuales partiendo desde dos tipos de procesos:

Tabla 2
Procesos en la actividad de visualización (Bishop, 1989).

	PROCESOS DE VISUALIZACIÓN	
DESCRIPCIÓN DEL PROCESO	Procesamiento visual (VP)	Interpretación de información figurativa (IFI)
		Este es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales y también el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras.

Nota. Elaboración propia de la tabla con información tomada de Gutiérrez (1991, p.45)

Los procesos de visualización involucran imágenes (mentales o físicas) que con llevan al ser humano a realizar acciones de transformación de representaciones externas de su medio en

imágenes mentales o transformaciones de imágenes mentales en información que conduzca a la elaboración de razonamientos y argumentos que permitan explicar fenómenos de su contexto.

Además, Bonilla y et ál. (2012) mencionan que los procesos de visualización han cobrado importancia en el ámbito de la matemática escolar y se refieren a que:

(...) el potencial de los procesos de visualización estriba en la integración de procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones mentales de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones. (p.86)

Habilidades de visualización.

Las habilidades de visualización son utilizadas por los seres humanos en diferentes contextos de su diario vivir. Estas son herramientas que hacen parte de la formación del pensamiento espacial del individuo. Gonzato & et ál. (2013) declaran que “(...) el desarrollo de habilidades de orientación espacial y visualización de cuerpos geométricos se considera un objetivo valioso y necesario para cualquier ciudadano” (p.1).

Al mismo tiempo Gonzato & et ál. (2011) mencionan que:

(...) la interpretación y la comunicación de la información de manera figural (con descripciones gráficas y modelos de hechos y relaciones espaciales) o verbal (vocabulario específico utilizado en geometría, expresiones y términos deícticos) son importantes habilidades relacionadas con la visualización y la orientación espacial. (p.100)

La visualización permite al ser humano reflexionar y comunicar la información (a otros, o a si mismo) que observa de su contexto y a su vez interpretarla mediante el uso de representaciones materiales (fotos, esquemas, dibujos, planos, maquetas, entre otros) y mentales (objetos imaginados, pensados, entre otros) aportando a la construcción de su conocimiento y el de otros.

Se considera los aportes realizados por Torres (2009) haciendo referencia a que:

(...) la visualización apoya el sistema cognitivo del usuario, puede potenciar procesos humanos automáticos para el reconocimiento de patrones, apoya los procesos de soporte del aprendizaje y, a partir de representaciones externas, revela estructuras inherentes al conocimiento (de un

individuo y de grandes cantidades de información), en función de ayudar a otras personas a adquirir un nuevo conocimiento. (p. 163)

Por otro lado, cabe resaltar que Bishop no realiza una diferencia clara entre procesos y habilidades, mientras que otros investigadores han elaborado interpretaciones diferentes entre los conceptos de procesos y habilidades. Así pues, Gutiérrez (1996, p. 6) unifica las propuestas de diversos autores como Del Grande (1987) y McGee (1979) con el fin de agrupar de manera detallada habilidades que integran la percepción espacial.

A continuación, se relacionan el conjunto de habilidades que los individuos utilizan para la creación y el procesamiento de imágenes visuales que permiten solucionar una situación problema a través de la visualización.

Tabla 3
Habilidades Visuales (Del Grande, 1990)

	DESCRIPCIÓN	EJEMPLO	
HABILIDAD	Coordinación motriz de los ojos	Es la habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo	Completar un trazado sin levantar el lápiz y sin pasar dos veces por el mismo lugar Reproducir una figura o un objeto presente con la mano o con el mouse de la computadora
	Identificación visual	Es la habilidad de reconocer una figura determinada (el foco) aislándola de su contexto	Descubrir figuras dentro de una figura compuesta o entre figuras sobrepuestas Descubrir intersecciones entre figuras Completar figuras Invertir figuras-fondos en un dibujo dado
	Conservación de la percepción	Es la habilidad para reconocer que un objeto (real o una imagen mental) mantiene su forma, aunque deje de verse total o parcialmente	Modificar posiciones de figuras o cuerpos y analizar la invariabilidad de su tamaño y de su forma Anticipar y comparar tamaños de tres o más figuras o cuerpos desde distintos puntos de vista
	Percepción de la posición en el espacio	Es la habilidad de relacionar la posición de un objeto, con uno mismo (el observador) o con otro punto de referencia	Identificar figuras en distintas posiciones. Invertir, desplazar y rotar figuras cambiando la posición de ciertos detalles Reconocer figuras congruentes en distintas posiciones Dibujar imágenes de figuras por desplazamientos, rotaciones y simetrías
	Percepción de relaciones espaciales	Es la habilidad que permiten identificar correctamente las características de	Ensamblados de cubos según un patrón dado Encontrar el camino más corto entre dos puntos Completar un patrón geométrico

	relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.	Combinar figuras o cuerpos para obtener modelos dados
Discriminación visual	Es la habilidad de distinguir similitudes y diferencias entre objetos, dibujos o imágenes mentales entre sí	Distinguir figuras o cuerpos congruentes Descubrir las figuras diferentes dentro de un conjunto Descubrir errores en la reproducción de una figura Completar rompecabezas
Memoria visual	Es la habilidad de recordar características visuales de un conjunto de objetos que no están a la vista	Reproducir figuras ausentes Completar de memoria una figura mostrada durante breves instantes Ubicar cuerpos y figuras según un modelo visto

Nota. Fuente: Suárez & León (2016). La visualización espacial en niños y en niñas.

Cabe resaltar a Gutiérrez (2006) citado en Ramírez (2012) cuando expone que la visualización “es el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes puedan producir, analizar, transformar y comunicar” (p.10).

Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización

Basándome en el trabajo expuesto por Gonzato, Fernández & Godino (2011, pp. 102-111) se resumen a continuación el tipo de tarea, descripción de las actividades, acciones y respuestas que los estudiantes ponen en juego cuando se enfrentan a diferentes tareas de aprendizaje con el fin de abordar la enseñanza de la visualización y el desarrollo de habilidades en el contexto de la geometría espacial.

Tabla 4

Tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales

TIPO DE TAREA: ORIENTACIÓN ESTÁTICA DEL SUJETO Y DE LOS OBJETOS	
Descripción de la actividad	En estas actividades los autores consideran que los objetos y las personas están inmóviles. Requieren comprender el esquema corporal, identificar y utilizar sus polaridades.
Acciones	<i>De manera general:</i> Desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos
Respuestas	Arriba-abajo, izquierda-derecha, delante-detrás, utilizar dicho lenguaje para describir la posición del propio cuerpo, o de otro observador, con respecto a objetos u otras personas y las posiciones de objetos con respecto a otros objetos.

Nota. Elaboración propia, teniendo en cuenta los aportes de (Gonzato & et ál., 2011)

Tabla 5

Tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales (Gonzato & et ál., 2011)

TIPO DE TAREA: INTERPRETACIÓN DE PERSPECTIVAS DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES	
Descripción de la actividad	<p>Requieren reconocer y cambiar puntos de vista (cambio de perspectivas), interpretar perspectivas de objetos, rotar mentalmente objetos, interpretar diferentes representaciones planas de objetos tridimensionales (perspectivas, vistas, etc.), convertir una representación plana en otra, construir objetos a partir de una o más representaciones planas.</p> <p>Estas tareas construyen técnicas para representar un objeto o un espacio, y al mismo tiempo se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos.</p> <p><i>De manera general:</i> Reconocer, describir, fabricar o transformar objetos.</p>
Acciones	<ul style="list-style-type: none"> • Cambiar el tipo de representación (plana o tridimensional): representar un objeto físico con una representación plana, construir un objeto tridimensional a partir de su representación plana, o convertir representaciones planas de tipos diferentes (perspectiva/proyección isométrica/vistas/vistas codificadas/fotografías). Observamos que el cambio de representación puede implicar también una rotación del objeto, un cambio de punto de vista. • Rotar: rotar el objeto o partes del objeto, o de manera equivalente cambiar mentalmente de perspectiva (imaginarse en otra posición con respecto al objeto). Observamos que no hay cambio de tipo de representación plana. • Plegar y desplegar: plegar un desarrollo plano para formar un objeto tridimensional (físico o representado), o viceversa desplegar el objeto para obtener uno de sus desarrollos. • Componer y descomponer en partes: dadas dos o más piezas componerlas para formar un sólido, o viceversa, dado el sólido descomponerlo en dos o más partes. • Contar elementos: dado un sólido contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices, etc.).
Respuestas	<p>Construcción: si se requiere la construcción del objeto tridimensional.</p> <p>Dibujo: si se requiere una representación plana del objeto tridimensional.</p> <p>Identificación: si se requiere identificar la respuesta correcta entre más opciones.</p> <p>Verbal: si se requiere una respuesta verbal /numérica (que no exija ninguno de los anteriores tipos de respuestas).</p>

Nota. Elaboración propia, teniendo en cuenta los aportes de (Gonzato & et ál., 2011)

Tabla 6

Tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales

TIPO DE TAREA: ORIENTACIÓN DEL SUJETO EN ESPACIOS REALES (RECONOCIMIENTO)	
Descripción de la actividad	<p>Requieren que el sujeto comprenda el espacio donde se sitúa (o donde se sitúa otra persona u objeto), su ubicación y orientación en el espacio.</p> <p>Requieren el uso de planos y mapas: la exploración de lugares desconocidos (que puede servir para elaborar un propio plano), el desplazamiento en un espacio (los planos dan las informaciones necesarias para determinar el propio itinerario) y la comunicación de una localización precisa (con planos en escalas). También se diferencian las situaciones que requieren comunicar informaciones espaciales sin un plano o con un plano.</p>

	<p>De manera general: Reconocer, describir, construir o transformar un espacio de la vida cotidiana o de desplazamiento.</p> <p>Espacio real: La acción del sujeto transcurre en el presente o ya ha sido realizada en el espacio real sin el apoyo de ningún tipo de representación del espacio.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Explorar el espacio: (con movimiento) • Observar espacios, trayectos,... (sin movimiento)
Acciones (estímulo inicial)	<p>Representación espacial: el sujeto no realiza físicamente una acción, sino que sólo interpreta la información contenida en el mapa sin navegación física del espacio y sin tener una referencia física al espacio representado.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Interpretar información gráfica (localizar elementos, leer trayectos, interpretar sistemas de coordenadas, ...) <p>Espacio real +representación del espacio: El sujeto realiza o ha realizado la acción en un espacio físico y dispone de una representación de dicho espacio.</p> <ul style="list-style-type: none"> • Relacionar el espacio con su representación espacial
Respuestas	<p>De representación: del espacio: Construir maquetas, dibujar mapas/planos y de trayectos</p> <p>De localización de objetos y personas: En un mapa/ plano/ maquetas y con coordenadas</p> <p>De descripción (verbalmente): De trayectos y posiciones</p> <p>Física: Orientar la representación del espacio (de acuerdo a los puntos cardinales, de acuerdo a objetos fijos en la realidad); ejecutar trayectos y ubicar objetos o personas en el espacio</p>

Nota. Tabla elaboración propia con información tomada de (Gonzato & et ál., 2011)

Niveles de visualización.

El papel que la visualización tiene en el aprendizaje matemático y en general, en el aprendizaje de la geometría, es de carácter formativo, ya que facilita la comprensión, el desarrollo de la intuición y proporciona mayor capacidad de entendimiento en el individuo. Castiblanco, Urquina, Camargo & Acosta (2004) proponen una clasificación de tres niveles de visualización y su respectiva descripción en la que se debe ir dirigiendo a los estudiantes a llegar al nivel más alto de visualización a pesar de las dificultades que presenten los estudiantes cuando se enfrentan a situaciones problemas.

Tabla 7
Niveles de Visualización (Castiblanco et ál, 2004).

		DESCRIPTOR
NIVELES DE VISUALIZACIÓN	Nivel global de percepción visual	El resolutor realiza una actividad cognitiva en la que asocian las figuras, a objetos físicos donde prevalece la forma total de la imagen, identificando las formas prototípicas de la figura.
	Nivel de percepción de elementos constitutivos	El resolutor percibe de manera espontánea las partes constitutivas de la figura y los componentes de la misma en diferentes partes, lo que permite la construcción de relaciones y de conceptos.

Nivel operativo de percepción visual	Se organizan las configuraciones de las figuras y las manipulan, permitiendo al resolutor crear transformaciones y estrategias no articuladas por el discurso para lograr la solución del problema.
---	---

Nota. Elaboración propia, información tomada de Suárez & León (2016, p.115).

Conforme a la circunstancia descrita con anterioridad de desarrollar niveles de visualización en los estudiantes, cabe resaltar lo mencionado por Bishop (1989) sobre lo siguiente:

(...) La visualización como la imaginería visual son cuestiones muy personales; ya que cada alumno necesita un tiempo específico para la creación de las imágenes y, además, la forma de operar con esas visualizaciones depende de cada uno. Esas características han de ser contempladas en la enseñanza, pues muchos profesores esperan que los alumnos creen imágenes idénticas como resultado de procesos que son personales. Así mismo, comprender en profundidad el proceso de visualización supone tener en cuenta diferentes contextos, variedad de tareas y diversos estímulos.

(p. 11)

Referentes acerca de los conocimientos básicos sobre el pensamiento espacial y pensamiento métrico

En el contexto natural en el que el ser humano se desenvuelve a diario, se encuentra rodeado de objetos, formas, esquemas, transformaciones y relaciones que le van permitiendo conocer su entorno espacial.

Aprender a conocer, a hacer, a convivir y a ser, constituyen pilares básicos del aprendizaje que la educación debe crear y desarrollar (Delors, 1997, pp. 91-103). La geometría forma parte del currículo en matemáticas, analiza, organiza y sistematiza los conocimientos espaciales contribuyendo al logro de estos pilares.

Pensamiento espacial.

El aprendizaje de la Geometría puede partir desde como los seres humanos construyen relaciones espaciales en la mente, y a su vez, como los individuos van desarrollando niveles de conocimiento (conceptos y relaciones geométricas) adquiridos en la interacción con su entorno.

Definiciones de espacio.

Existen diferentes maneras de abordar este concepto, aquí se resumen a partir de tres perspectivas mencionadas por Alsina & et ál. (1989, p. 85)

Tabla 8
Definiciones de espacio desde diferentes perspectivas.

NOCIÓN DE ESPACIO			
PERSPECTIVA	Filosófica	<u>Espacio absoluto</u>	Los objetos y sus relaciones son independientes de la existencia propia del espacio.
		<u>Espacio relativo</u>	Está determinado por medio de las relaciones de posición de los objetos.
	Física	<u>Espacio físico</u>	Espacio atribuido al mundo exterior, el entorno físico que nos rodea.
	Psicológica	<u>Espacio psicológico</u>	Es cualquier espacio representado en la mente y no existe si la mente no existe.

Nota. Elaboración propia, información tomada de Invitación a la didáctica de la Geometría.

Cabe resaltar lo que menciona Alsina & et ál. (1989) sobre la construcción del espacio haciendo referencia a su relación como un proceso de construcción de tipo cognitivo de interacciones entre diferentes tipos de espacio (intuitivo y abstracto). Además, afirma que este proceso de construcción del espacio

(...) está condicionado e influenciado tanto por las características cognitivas individuales, como por la influencia del entorno físico, cultural, social e histórico. Por tal motivo la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría deben favorecer la interacción de cada uno de los componentes que determinan la construcción de espacio. (p.86)

Desde el MEN (1998) el pensamiento espacial es considerado como: "... el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y se manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones o representaciones materiales" (p.56).

El pensamiento espacial es el resultado de las construcciones que realiza el individuo a partir de las acciones, actividades y representaciones (externas e internas) de la información que obtiene cuando interactúa de con los objetos situados en el espacio.

Tal como enuncian Bonilla & et ál. (2012) "(...) el desarrollo del pensamiento espacial y el conocimiento de los sistemas geométricos consisten en una acumulación de acciones de reconocimiento de formas geométricas y su descripción en términos de sus partes y sus propiedades" (p. 36).

Pensamiento métrico.

A partir de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas y de los Estándares Básicos de Competencias, el pensamiento métrico y los sistemas de medidas, se refieren a la construcción de los conceptos y procesos de conservación de las magnitudes; la selección de unidades de medida, patrones e instrumentos; la asignación numérica; la estimación y el papel del trasfondo social de la medición.

“El pensamiento métrico se refiere a la comprensión general que tiene una persona sobre las magnitudes, su cuantificación y su uso con sentido y significado para la comprensión de situaciones en contextos.” Citado por MEN (Obando & et ál. 2006, p 19).

También está relacionado con la medida de las cantidades de magnitud, su estimación y aproximación, al igual que con la capacidad de usar instrumentos de medida.

Cabe resaltar lo mencionado por (Bright, 1976) sobre la definición del concepto de estimación, citado en Pizarro & et ál. (2016) declarando que:

“(...) estimar es el proceso de llegar a una medida sin la ayuda de instrumentos de medición. Es un proceso mental, aunque frecuentemente hay aspectos visuales y manipulativos en él” (p.93).

Matriz de Referencia Matemática (MRM)

La Matriz de referencia es un instrumento de consulta basado en los Estándares Básicos de Competencias (EBC), presenta los aprendizajes que evalúa el ICFES (prueba Saber) en cada competencia, relacionándolos con las evidencias de lo que debería hacer y manifestar un estudiante que haya logrado dichos aprendizajes en una competencia específica.

Al mismo tiempo la MRM, constituye un elemento que permite orientar procesos de planeación, desarrollo y evaluación formativa, inclusive, es una herramienta útil en las Instituciones Educativas (IE) para identificar aprendizajes que deben alcanzar los estudiantes. Y a su vez, sirve como estrategia para la planeación de clase, elaboración de acciones de aprendizaje y mejoramiento con base a los resultados obtenidos en las pruebas Saber de cada IE.

Los siguientes conceptos corresponden a definiciones de los componentes de la MRM.

Tabla 9
Definiciones de los componentes de la Matriz de referencia de Matemáticas

DEFINICIONES	
COMPONENTES DE LA MATRIZ DE REFERENCIA	Competencia
	Componentes
	Aprendizaje
	Evidencia

Nota. Elaboración propia de la tabla, con información tomada del documento Matriz de Referencia Matemáticas.

Construcción de la noción del objeto matemático volumen.

En la siguiente sección se pretende mostrar diferentes significados que se asocian a la palabra “volumen”. Se tendrá en cuenta diversas clasificaciones que han surgido de investigaciones realizadas en torno a este significado.

Desde el punto vista fenomenológico Freudenthal (1983) hace referencia que para construir y formalizar el objeto mental volumen, se deben trabajar actividades en el aula relacionadas con:

- i. Comenzar con transformaciones de romper y rehacer
- ii. Continuar con la equivalencia de capacidad de recipientes abiertos y volumen de cuerpos sólidos
- iii. Seguir con transformaciones reales de vaciar para comparar contenidos
- iv. Abordar las transformaciones que conservan y no conservan el volumen (Citado por Del Olmo, M., Moreno, F. & Gil, F., pp.101-102).

Aunque en otro sentido, en estudios de tipo psicológico y cognitivo; Piaget, Inhelder y Szeminska (1970, pp. 355-358) distinguen tres clases de significados asociados al vocablo volumen:

1. Volumen interno;
2. Volumen como espacio ocupado, y
3. Volumen desplazado.

Con respecto al término de volumen interno, Piaget & et ál., consideran dos situaciones. La primera relacionada con el volumen limitado por superficies y la segunda con respecto a la cantidad de unidades de material que forman un cuerpo.

Así mismo, con lo relacionado al volumen como espacio ocupado, Piaget, Inhelder y Szeminska (1970, p. 360) hacen referencia a la cantidad de espacio ocupado por las unidades que conforman un cuerpo en su totalidad, en relación con otros objetos a su alrededor. De esta manera, el espacio ocupado es aquel que ya no puede ser usado por otro objeto.

Por último, se tiene el significado de volumen desplazado, el cual para Piaget y sus colaboradores corresponde a la cantidad de agua desplazada al introducir un objeto en ese líquido.

En lo que corresponde al concepto de volumen, Vergnaud (1983) citado por Artigue (2018) expone que es una magnitud susceptible a dos tratamientos, uno como magnitud unidimensional y el otro como magnitud tridimensional y que deben trabajarse de manera unificada con el fin de que el estudiante logre construir el concepto de volumen a partir de las siguientes concepciones:

- Por una parte, el volumen es una magnitud física unidimensional, que se presta a comparaciones, de medidas, de estimaciones, de transformaciones, de sumas y de diferencias, entre otras, dentro de muchas situaciones de la vida cotidiana.
- Por otra parte, el volumen es una magnitud tridimensional que supone a la vez un análisis físico – geométrico del espacio y una aplicación de este análisis en lo numérico y en lo dimensional. (p. 23)

El volumen y su relación con otras magnitudes

Por otro lado, el volumen se relaciona con otras unidades de medida y estas a su vez generan dificultades de aprendizaje en los estudiantes a causa del Sistema Internacional de unidades en el que se trabaja el volumen y el sistema de numeración decimal para la capacidad, masa y longitud.

Volumen y capacidad.

Del olmo y et ál. (1993) mencionan que el volumen es considerado como “el espacio ocupado o reclamado y la capacidad como el espacio vacío o creado con posibilidad de ser llenado”. Además aducen, “que la capacidad puede ser vista desde el punto de vista como espacio creado (espacio vacío) y el volumen como espacio reclamado (espacio ocupado)” (p.98)

La capacidad es una magnitud, y es una propiedad medible que tienen ciertos cuerpos. La capacidad se refiere a la cantidad del espacio que hay en el interior de un recipiente.

Desde el punto de vista de la Real Académica Española el volumen se definen como el “espacio ocupado por un cuerpo; el volumen es la magnitud física que expresa la extensión de un cuerpo en tres dimensiones, largo, ancho y alto, y cuya unidad en el sistema internacional es el metro cúbico (m^3)”.

Volumen y masa.

La masa es la cantidad de materia que un cuerpo posee, cuya unidad fundamental en el sistema internacional es el Kg. El volumen interno de un cuerpo, es entendido como la cantidad de unidades de material que lo forman, de lo anterior difícilmente se puede concluir que estos dos términos sean equivalentes.

Masa y peso.

El peso, se determina por la gravedad, es una característica de los cuerpos que le permite atraer otros cuerpos con mayor o menor intensidad. Como los cuerpos están formados por partículas, la masa del cuerpo es la masa total de las partículas que lo forman. La unidad de masa es el kilogramo y corresponde a la masa de un cilindro de platino iridiado.

El peso de un cuerpo es la fuerza con la que un cuerpo es atraído por la Tierra y su unidad de medida es el Newton, que corresponde a la fuerza gravitatoria que a un kilogramo de masa le produce una aceleración de un metro por segundo cuadrado.

El principio de Arquímedes.

Todo cuerpo que se encuentra dentro de un fluido (líquido o gas), experimenta un empuje vertical ascendente, igual al peso del fluido desalojado por dicho cuerpo. Este principio permite la medición del volumen de un cuerpo de manera indirecta sumergiéndolo en agua.

Cuando se mide el volumen de un objeto utilizando inmersión lo que se hace es medir el volumen de agua que tal cuerpo desaloja.

Este diseño fue identificado por Piaget, Inhelder & Szeminska (1973) y Saíz-Roldán (2003) Citado en Anwandter-Cuellar (2012) donde corroboran el concepto de volumen desplazado a partir del principio de Arquímedes "Todo cuerpo inmerso en un fluido recibe de este fluido una fuerza (empuje) verticalmente, hacia arriba cuya intensidad es igual al peso del volumen de fluido desplazado (esto el volumen es igual al volumen sumergido del cuerpo)" (pp. 59-60).

Diferentes puntos de vista sobre la enseñanza del concepto de volumen

El volumen puede concebirse de distintas maneras, algunas enfocadas a la representación del volumen como el espacio que ocupa un cuerpo en relación con otros objetos; otras con la comparación de unidades que forman un cuerpo y el volumen visto desde el espacio desplazado al sumergir un objeto en un líquido.

Anwandter-Cuellar (2012) menciona que:

“... la actividad geométrica a menudo se reduce al reconocimiento de objetos geométricos, su clasificación y la aplicación de fórmulas para realizar cálculos, sin tener en cuenta el objeto matemático volumen como un objeto independiente en sus dimensiones geométricas y físicas”. (p. 55)

Además, Anwandter-Cuellar (2012) menciona diversos tipos de tareas para la enseñanza del volumen desde diferentes perspectivas, partiendo de las contribuciones y aportes realizados por: Piaget, Inhelder y Szeminska (1973); Saiz-Roldán (2003); Douady y Perrin-Glorian (1989) y

Moreira-Baltar (1994-1995) quiénes han aportado sobre la enseñanza del área y del volumen y se relacionan a continuación:

Punto de vista geométrico

Volumen limitado

Piaget, Inhelder y Szeminska (1973) presentan el volumen como “... el espacio limitado por una superficie, que está envuelto por un conjunto de límites, que consiste en superficies visibles desde el exterior” (p. 437).

A su vez, Saiz-Roldán (2003) hace una diferencia del concepto de volumen desde dos posiciones: volumen interior (capacidad que tiene un cuerpo) y volumen encerrado (cantidad de materia de un objeto).

Volumen ocupado

Según Piaget, Inhelder y Szeminska (1973) el volumen se define como el “lugar ocupado por un cuerpo en el espacio o lugar ocupado por un objeto relacionado con lo que lo rodea,... cualquier objeto en el espacio físico tiene un volumen ya que ocupa un lugar en el espacio” (p. 437).

Desde el punto de vista numérico.

Esta clasificación se tiene en cuenta a partir de lo trabajado por Moreira-Baltar (1994-1995) citado en Anwandter-Cuellar (2012, p. 59) sobre las áreas y se adaptan con el fin de clasificar las actividades en tareas de aprendizaje de volumen

Volumen-Número

El volumen se ve como el número obtenido por medio de una fórmula sin ninguna relación con el volumen como magnitud. Esta acción con lleva a usar fórmulas para el cálculo de volúmenes.

Medición de volumen

El volumen representa la cantidad de unidades en cm^3 necesarias para cubrir un sólido. Es decir, se debe elegir una unidad patrón y se determina el número de unidades necesarias para completar un determinado sólido.

Desde el punto de vista numérico – geométrico

Continuando con la clasificación de Moreira-Baltar (1994-1995) con respecto al área, se presenta al volumen como un tamaño.

Tamaño del volumen

El volumen es una magnitud, es decir, es una característica común a los sólidos que se pueden medir. En este sentido, se asume un conjunto de sólidos y se establece una relación de equivalencia para definir el tamaño del volumen. La acción requerida en este aspecto se puede realizar teniendo en cuenta la estructura de orden, suma, resta y división sin recurrir a medidas.

Desde el punto de vista del entorno físico

Aquí se tiene en cuenta lo propuesto por Piaget, Inhelder y Szeminska (1973) y Saíz-Roldán (2003)

Volumen desplazado

El concepto de volumen desplazado proviene del principio de Arquímedes: "Todo cuerpo inmerso en un fluido recibe de este fluido una fuerza (empuje) verticalmente, hacia arriba cuya intensidad es igual al peso del volumen de fluido desplazado (esto el volumen es igual al volumen sumergido del cuerpo). La acción que se tendrá en cuenta para el volumen de un objeto es la cantidad de agua desplazada cuando el objeto está sumergido en el agua.

Volumen interno

De acuerdo con Saíz-Roldán (2003, p.456) quien plasma una distinción entre volumen encerrado y el volumen interior. De acuerdo con investigaciones realizadas, la autora menciona que el volumen encerrado se relaciona con lo que algunos estudiantes piensan sobre los objetos huecos (como un cilindro hecho con una hoja de papel) que no tiene volumen. Por otro lado, El volumen interno es la cantidad de materia en el sentido físico que constituye un objeto. Es decir, la cantidad de material que se puede poner en un objeto, aquí el volumen se relaciona como capacidad.

Otras indicaciones para la enseñanza del objeto matemático volumen

En esta sección se menciona otro tipo de tareas para la enseñanza del volumen partiendo de lo expuesto por Olmo, Moreno & Gil (1993, pp. 115-139), clasificaciones que se tendrán en cuenta para para el análisis de resultados en esta tesis. Se resumen a continuación en la siguiente tabla.

Tabla 10

Síntesis de actividades o tareas de aprendizaje en la adquisición del objeto matemático volumen.

INDICACIONES PARA LA ENSEÑANZA DEL VOLUMEN			
	Descripción	Tipo de actividades	
TAREAS DE APRENDIZAJE	Percepción	<p>Percibir una cualidad es aislarla, es distinguirla de las restantes cualidades de los objetos.</p> <p>Conocimiento de una cosa por medio de las impresiones que comunican los sentidos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Táctiles • Llenado (empaquetar y llenar objetos) • Observar el comportamiento del volumen (inmersión, hechos físicos) • Distinguir el volumen de otras cualidades
	Comparación	<p>Fijar la atención en dos o más cosas para reconocer sus diferencias y semejanzas y para descubrir sus relaciones.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Comparar capacidades • Comparar volúmenes (inmersión, recuento) • Comparar volúmenes con capacidades
	Medida	<p>Se orienta a un número que muestra el tamaño o cantidad de algo.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Elección de un patrón de medida • Sistemas de medida • Instrumentos de medida
	Estimación	<p>Es el proceso de obtener una medida o medir sin la ayuda de instrumentos.</p> <p>Realizar juicios subjetivos sobre la medida de los objetos.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Capacidad – capacidad • Capacidad – volumen • Volumen – volumen
	Aritmetización	<p>Trata sobre la obtención del volumen de unos cuerpos en función de otros llamados unidades.</p> <p>Es el modo de calcular las áreas y volúmenes de forma práctica mediante el uso de fórmulas</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Cálculo de volúmenes de cuerpos (empaquetado, llenado, rellenado, transformaciones de romper y rehacer)

Nota. Tabla elaborada con información tomada del libro Superficie y volumen ¿algo más que el trabajo con fórmulas?

Capítulo 4. Metodología de la Investigación

En este capítulo se presentan los aspectos metodológicos asumidos en esta investigación, destacando: tipo de estudio, la contextualización y población, etapas de la investigación y los instrumentos empleados para la recolección de la información.

Tipo de Estudio

El desarrollo de esta investigación se centró bajo la perspectiva del enfoque fenomenológico interpretativo (hermenéutico), el cual es un enfoque de la investigación cualitativa. A continuación, se destaca lo que proponen Hernández & et ál. (2014) quienes manifiestan que los diseños fenomenológicos interpretativos tienen como “(...) propósito principal explorar, describir y comprender las experiencias de las personas respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias” (p.493).

Vale la pena decir, que este enfoque propone analizar y comprender las descripciones que los estudiantes hacen de manera individual y colectiva desde su experiencia en el aula, partiendo de una serie de actividades en las que se obtienen resultados, acciones y respuestas de transformación de un tema o área de conocimiento, con la finalidad de mejorar la enseñanza y generar en los estudiantes interacciones con el aprendizaje, entre sus pares y el docente.

Además, Creswell et ál. (2007) & van Manen (1990) consideran que la fenomenología interpretativa

(...) es producto de la interacción dinámica entre las siguientes actividades de indagación: a) definir un fenómeno o problema de investigación (una preocupación constante para el investigador), b) estudiarlo y reflexionar sobre éste, c) descubrir categorías y temas esenciales del fenómeno (lo que constituye la naturaleza de la experiencia), d) describirlo, e) interpretarlo (mediando diferentes significados aportados por los participantes). (Citado en Hernández & et ál., 2014, pp.494)

Por tal razón, este enfoque de investigación fenomenológico interpretativo conlleva al docente a reflexionar en su práctica pedagógica con el fin de replantearla y generar cambios en la misma con el propósito de evadir la improvisación en el diseño de las actividades y buscando que este

sea un orientador, ejemplo y guía en los procesos de enseñanza y aprendizaje para el estudiante. También, busca que el educando sea consciente sobre los métodos, técnicas y dificultades que se presentaron en el desarrollo de las actividades propuestas.

Así pues, Tójar (2001) citado en Nieto (2012) resalta la importancia de la investigación de tipo cualitativa, enmarcando tres propósitos generales que se enuncian a continuación: “(...) comprender e interpretar la realidad, los significados y las intenciones; transformar una determinada realidad social, o la de algunos grupos que viven en ella e identificar potenciales de cambio individuales y colectivos” (p.410).

Con respecto a lo anterior, en esta investigación se pretende identificar habilidades de visualización que los estudiantes ponen en juego a la hora de desarrollar actividades de aprendizaje centradas en el cálculo de volúmenes, y a su vez, ir contribuyendo a la corrección de dificultades individuales y colectivas mostradas en el pensamiento espacial métrico dentro (pruebas internas, entre otras) y fuera del aula (pruebas externas).

Además, Mertens (2010) & Álvarez-Gayou (2003) citado por Hernández & et ál (2014) mencionan que el diseño fenomenológico se fundamenta en los siguientes aspectos:

(...) describir y entender los fenómenos desde el punto de vista de cada participante y desde la perspectiva construida colectivamente; analizando discursos y temas en la búsqueda de sus posibles significados; el investigador confía en la intuición, imaginación y en las estructuras universales para lograr aprender la experiencia de los participantes, y a su vez contextualiza las experiencias en términos de su temporalidad (momento en que sucedieron), espacio (lugar en el cual ocurrieron), corporalidad (las personas que las vivieron) y el contexto relacional (los lazos que se generaron durante las experiencias). (p. 494)

De acuerdo con lo anterior, para este estudio se tendrá en cuenta el enfoque fenomenológico interpretativo que permite explorar, describir, analizar y comprender las experiencias obtenidas por los estudiantes de manera individual y grupal en cada uno de los retos desarrollados.

Contextualización y Población

La investigación se llevó a cabo en la IERD Cacicazgo, la Institución es de carácter oficial, mixto y se encuentra ubicada en el Municipio de Suesca Cundinamarca en la vereda de Cacicazgo.

La vereda está situada en el sur-oriente del centro urbano de Suesca, limita al norte con Santa Rosita, al sur con Sesquilé, al occidente con Guita y al oriente con San Vicente y Tenería.

En la IER Cacicazgo no se aplica ningún modelo pedagógico puro, pero prima el constructivismo que es un modelo donde hay una meta educativa, que se interesa porque cada individuo acceda progresivamente, a la etapa superior de desarrollo intelectual, de acuerdo con las necesidades y condiciones de cada uno. El docente debe crear un ambiente estimulante de experiencias que le permitan al estudiante su acceso a las estructuras cognoscitivas de la etapa inmediatamente superior.

Por otro lado, las metodologías que se implementan en los procesos de enseñanza aprendizaje de la IERD Cacicazgo, se ajustan a los ritmos y estilos de aprendizaje de los estudiantes, algunas de las metodologías que se aplican son: Aprendizaje basado en problemas, aprendizaje por proyectos, aprendizajes por módulos, grupos interactivos, tertulias literarias, trabajo cooperativo entre otras. Es importante resaltar que el docente tiene autonomía para elegir la metodología que sea pertinente o proponer nuevas estrategias de enseñanza e innovar sobre las que ya existe.

Para el desarrollo de esta investigación se contó con la participación de 24 estudiantes de grado noveno, a quienes oriento el área de matemáticas, los estudiantes tienen edades que oscilan entre 14 a 16 años de edad y en su mayoría viven en la vereda Cacicazgo.

El proyecto de investigación se aplicó en el marco del desarrollo de los contenidos programados en el plan de estudio de matemáticas para el primero y segundo período académico de 2019. El aula de clase tuvo como objeto el trabajo colaborativo, la reflexión sobre la enseñanza aprendizaje de la geometría desde una perspectiva diferente a la memorización de fórmulas y contenidos.

Etapas de la Investigación

La investigación se centra en fortalecer habilidades de visualización que presentan los estudiantes del grado noveno en el desarrollo de actividades de aprendizaje enfocadas al cálculo de volúmenes y tareas de visualización que permitieron llevar a cabo el análisis de los datos. Se tuvieron en cuenta las siguientes etapas:

Etapa de reconocimiento de la problemática.

La primera etapa surge a partir del análisis de los resultados de las Pruebas Saber 9° del año 2015, en las descripciones de los niveles de desempeño Saber 9° 2016 y 2017 y en el informe por colegio del cuatrienio saber 9, Siempre Día E: Análisis histórico y comparativo 2018, donde se identifica la problemática en el componente Espacial Métrico, específicamente en los aprendizajes de las matrices de referencia de matemáticas que se enuncian a continuación:

- En la competencia Resolución, los estudiantes del colegio presentan dificultades en establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficie y volúmenes; también en resolver problemas de medición utilizando de manera pertinente instrumentos y unidades de medida, encontrándose por debajo 14,1 puntos porcentuales de todos los colegios de Cundinamarca y 11, 4 puntos porcentuales por debajo de todos los colegios del país.
- En la competencia Razonamiento, los estudiantes tienen dificultad en generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de algunos sólidos.
- En la competencia Comunicación, los estudiantes del colegio se encuentran 6,5 puntos porcentuales por debajo de todos los colegios del país y 9, 4 puntos porcentuales por debajo de su Ente Territorial Certificado (ETC) en el aprendizaje relacionado con identificar relaciones entre distintas unidades de medida de cantidades de la misma magnitud y determinar su pertinencia.

Por lo anterior, se diseñaron e implementaron actividades que incorporen los aprendizajes enunciados en los párrafos anteriores que permitan potenciar en los estudiantes habilidades de visualización y ayuden a la comprensión de conceptos geométricos.

Etapa de revisión teórica

La revisión teórica estuvo centrada alrededor de tres temáticas: la primera relacionada con la visualización vista desde diferentes perspectivas, algunos autores que han investigado en Educación Matemática, especialmente en el área de geometría (Battista, 2007; Bishop, 1989;

Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1996; Hershkowitz, Parzysz y Van Dormolen, 1996; Presmeg, 2006a; Gonzato, Fernández & Díaz 2011, entre otros), la segunda corresponde al pensamiento espacial destacándose algunos autores como Guillén, Gutiérrez, Jaime & Cáceres (1992); Barrantes & Balletbo (2012), entre otros; y por último se tiene en cuenta lo concerniente al objeto matemático volumen en la Educación Básica, autores como Vergnaud, (1983), Potari y Spiliotopoulou, (1996), Sáiz-Roldán (2003) y otros; Además, lo que se refiere a estudios del volumen de corte psicológico, se encuentran particularmente los de Piaget, Inhelder y Szeminska (1970) sobre la conservación de la cantidad y del volumen.

Etapas de instrumentos o herramientas para la recolección de la información.

En esta sección se mencionan algunos de los instrumentos utilizados en el desarrollo de las actividades desarrolladas por los estudiantes de grado noveno.

Hernández, Fernández & Baptista (2010) mencionan que diversos métodos y técnicas para la recolección de datos y estos no son únicos.

(...) métodos de recolección de datos no estandarizados ni completamente predeterminados. No se efectúa una medición numérica, por lo cual el análisis no es estadístico. La recolección de los datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos subjetivos). También resultan de interés las interacciones entre individuos, grupos y colectividades. (p.9)

Vale la pena mencionar las consideraciones expuestas por Hernández, Fernández & Baptista (2010) quienes afirman que las “técnicas para recolectar datos, como la observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, discusión en grupo, evaluación de experiencias personales, registro de historias de vida, e interacción e introspección con grupos o comunidades” (p.10), son herramientas que facilitan la recolección de la información de este enfoque de investigación.

A continuación, se relacionan algunos instrumentos de recolección de información utilizados en el desarrollo de la investigación:

Cuestionario

Este tipo de herramienta se relaciona con las actividades elaboradas y aplicadas a los estudiantes de grado noveno en las sesiones de clase de matemáticas; fueron de tipo abierto (no presentan alternativa de respuesta). Así pues, Fiorentini & Lorenzato (2010) mencionan que el “cuestionario es uno de los instrumentos más tradicionales de recolección de la información y consiste en una serie de preguntas que pueden ser cerradas, abiertas o mixtas” (p.86). También aducen que el cuestionario de tipo abierto permite elaborar categorías para el análisis de la información.

Diario de Campo

Se destaca lo que Fiorentini & Lorenzato (2010) expresan sobre el diario de campo, “(...) es donde el investigador registra los fenómenos, hace descripciones de personas y escenarios, describe episodios o retrata diálogos” (p.89).

Se puede señalar que el diario de campo es un informe personal (observador y observado) que se utiliza para recoger información sobre un hecho que tenga continuidad. Los diarios son una herramienta que permite identificar observaciones, sentimientos reflexiones, interpretaciones, explicaciones, entre otros. Para nuestro caso, durante las sesiones de trabajo se implementaron dos tipos de diario:

Diario del estudiante. Para nuestro caso cada estudiante realizaba anotaciones en su cuaderno después de terminada cada sesión de clase (desarrollo de las actividades aplicadas); este contenía nombre de la actividad, fecha, logros, dificultades presentadas y la motivo que les generó cada reto aplicado.

Diario del docente. El docente lo elaboro como recurso de observación para realizar anotaciones sobre: conductas, actitudes, preguntas que le realizaban el grupo de estudiantes, dificultades, identificar si las actividades formulaban preguntas claras y concisas o generaban dificultades en la comprensión por parte de los estudiantes. También, incluía fecha, nombre de actividad y lugar donde se realizaron las practicas.

Observación en el aula-directa: Este tipo de observación se enfoca en captar lo que sucede dentro del aula (contexto escolar) con el fin de identificar las interacciones entre: docente–estudiante, pares, actividades- estudiantes, conductas del observador y los observados sin tener en cuenta lo que piensen los involucrados.

Etapa de elaboración de categorías de análisis y análisis de la información

Categorías de análisis

En esta parte intento llevar a cabo el primer objetivo específico propuesto en esta investigación que menciona: *identificar habilidades de visualización en el pensamiento espacial*; para cumplir con este objetivo se tuvo en cuenta diferentes definiciones de visualización elaboradas por autores como Hershkowitz (1990), Gutiérrez (2006), Torres (2009), Arcavi (2003), Gonzato & et ál. (2013), entre otros; mencionando que la visualización es la habilidad de representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar, reflexionar, producir, analizar, reconocer, e interpretar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos.

Además, Ramírez (2012) menciona que en el “contexto geométrico, la relación entre conceptos y habilidades está presente en la intencionalidad de desarrollo del sentido espacial que se entiende como un elemento de la competencia matemática” (p.10).

De acuerdo con los párrafos anteriores y relacionando las competencias de Comunicación, Razonamiento (generalizar, reflexionar, representar, transformar) y Resolución (documentar, producir) que se enuncian en el componente Espacial Métrico de la matriz de referencia grado 9° con relación al cálculo de volúmenes de aquí en adelante serán llamadas habilidades de visualización y serán las categorías que se tendrán en cuenta en el análisis de resultados.

Tabla 11

Relación entre las competencias (habilidades de visualización), aprendizajes y evidencias del componente Espacial Métrico concernientes al cálculo de volumen.

	CATEGORÍAS DE ANÁLISIS	APRENDIZAJES	EVIDENCIAS
HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN	Comunicación	C1. Identificar relaciones entre distintas unidades de medida de cantidades de la misma magnitud y determinar su pertinencia.	C1-E1. Identificar la información relacionada con la medición en situaciones que involucran magnitudes. C1-E2. Reconocer que una magnitud puede expresarse en diferentes unidades de medida y establecer relaciones entre ellas. C1-E3. Determinar cuándo una unidad de medida es más apropiada que otra.
	Razonamiento	Ra1. Generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el área de figuras planas y el volumen de algunos sólidos.	Ra1-E1. Explicar por qué a través de la descomposición de figuras planas o sólidos es posible determinar el área o el volumen de figuras y cuerpos. Ra1-E2. Justificar la validez o no validez de un procedimiento para obtener el área de figuras planas o el volumen de algunos sólidos. Ra1-E3. Justificar el cálculo del área superficial o el volumen de un sólido a partir de su desarrollo plano.
	Resolución	Ra2. Resolver problemas de medición utilizando de manera pertinente instrumentos y unidades de medida.	Ra2-E1. Usar de manera pertinente instrumentos y unidades para determinar medidas de superficies y volúmenes. Ra2-E2. Reconocer que no existe un único procedimiento para resolver problemas de medición.
		Re1. Establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de superficie y volúmenes	Re1-E1. Usar diferentes estrategias para determinar medidas de superficies y volúmenes. Re2-E2. Reconocer que el procedimiento para determinar el volumen y la superficie no siempre es único. Re3-E3. Explicar la pertinencia o no de la solución de un problema de cálculo de área o volumen de acuerdo con las condiciones de la situación. Re4-E4. Utilizar relaciones y propiedades geométricas para resolver problemas de medición.

Nota. Esta tabla representa las metas y propósitos a evaluar en el diseño de las tareas de aprendizaje son las mismas en todas las actividades, ya que cada reto por actividad se utilizará el aprendizaje con la evidencia que más se ajuste a las respectivas preguntas de cada numeral. Además, se coloca su respectiva abreviación para utilizarlas en la elaboración de otras tablas.

Análisis de la información

En esta sección centró el análisis de la información especialmente basados en la elaboración de tablas que permiten realizar diferentes conexiones en tres en tres aspectos: en primer lugar la

relación existente entre las actividades diseñadas y las habilidades de visualización (Resolución, Razonamiento y Comunicación); en segundo lugar crear un vínculo entre las actividades diseñadas con las tareas de aprendizaje del volumen vista desde diferentes perspectivas expuestas en el marco teórico y por último elaboración del informe final, este tercer aspecto se desarrolla en el capítulo 5, y se apoyará de la información de las tablas, los cuestionarios o actividades desarrolladas por cada grupo, que contribuyen a describir de manera más acertada habilidades de visualización, acciones y respuestas que utilizaron los estudiantes en el desarrollo de las tareas propuestas.

Herramienta de análisis de las relaciones establecidas entre las actividades y las habilidades de visualización trabajadas en la experiencia.

En este apartado se desglosan los dos primeros aspectos mencionados en el párrafo anterior y se busca cumplir en parte con el segundo objetivo específico de la investigación: *diseñar actividades relacionadas con el cálculo de volúmenes que contribuyan a mejorar habilidades de visualización en el pensamiento espacial*. Es decir, se relacionan las actividades diseñadas, con las habilidades de visualización (categorías de análisis), tareas de volumen y tareas de visualización que son esenciales para el desarrollo de estas y otras habilidades que surjan a medida que se realice el análisis de los datos en el capítulo 5.

Primer aspecto: Determinar la relación existente entre las actividades diseñadas y las habilidades de visualización. La siguiente tabla muestra la conexión entre las habilidades de visualización (Resolución, Razonamiento y Comunicación) mencionadas en la tabla 11 y las actividades de aprendizaje relacionadas al cálculo de volúmenes, que en el próximo capítulo serán una herramienta para el análisis de la información.

Tabla 12

Relación entre las actividades diseñadas y las competencias del componente Espacial Métrico con el objeto matemático volumen.

		HABILIDADES DE VISUALIZACIÓN					
	Nombre de actividad	Actividad N°	Reto N°	Resolución	Razonamiento		Comunicación
				Re1	Ra1	Ra2	C1
ACTIVIDADES DISEÑADAS	Aproximación al concepto de volumen	A1	R1	x	x	x	x
			R2	x	x	x	x
	Volumen de algunos cuerpos redondos	A2	R1	x	x	x	x
			R2	x	x	x	x
	Volumen de algunos poliedros	A3	R1	x	x	x	x
	Distinguiendo el volumen de otras magnitudes	A4	R1	x	x	x	x
	Prácticas Inusuales	A5	R1	x	x	x	x

Nota. Cada actividad y respectivos retos se escriben con su correspondiente abreviación. Esto con el fin de utilizar las abreviaturas enunciadas de aquí en adelante.

Segundo aspecto: en esta parte se plantea la relación entre las actividades diseñadas e indicaciones para la enseñanza del volumen propuestas por (Olmo, Moreno & Gil, 1993, pp. 115-140).

Cabe aclarar que las indicaciones para la enseñanza del volumen de aquí en adelante son llamadas tareas de aprendizaje enfocadas al volumen, acogiendo la idea de Gómez, Mora & Velasco (2018) que se refieren al término “tarea” como “las tareas de aprendizaje que el profesor propone con la intención de brindar oportunidades para que los estudiantes logren las expectativas de aprendizaje y afectivas que ha establecido, y superen las limitaciones que ha conjeturado que ellos tendrán” (p.198).

A continuación se presenta la relación entre las actividades diseñadas en esta investigación y las tareas de aprendizaje relacionadas con el concepto de volumen en la siguiente tabla.

Tabla 13

Relación entre las actividades diseñadas y tareas de aprendizaje del objeto matemático volumen

			TAREAS DE APRENDIZAJE				
			<u>Percepción</u>	<u>Comparación</u>	<u>Medida</u>	<u>Aritmetización</u>	<u>Estimación</u>
ACTIVIDADES	A1	R1		x	x	x	
		R2		x	x		
	A2	R1	x	x	x	x	x
		R2		x	x		
	A3	R1	x	x	x	x	x
	A4	R1		x	x	x	
	A5	R1			x		

Nota. A partir de esta tabla se descifra que las actividades diseñadas no incluyeron de manera significativa tareas de aprendizaje del volumen enfocadas a la percepción y estimación.

Otra relación existente que realizo en este trabajo es la de actividades diseñadas con las actividades de aprendizaje enfocadas al volumen desde el punto de vista del entorno físico, numérico y geométrico.

A continuación se presenta en la tabla la relación entre las actividades diseñadas y las actividades de aprendizaje del volumen.

Tabla 14

Relación entre las actividades diseñadas y tareas de aprendizaje del objeto matemático volumen

			TAREAS DE APRENDIZAJE		
			<u>Geométrico</u>	<u>Numérico</u>	<u>Entorno físico</u>
ACTIVIDADES	A1	R1	x	X	
		R2	x	X	
	A2	R1	x	X	x
		R2		X	
	A3	R1	x	x	x
	A4	R1		X	x
	A5	R1			x

Nota. Elaboración propia, a partir del análisis de las actividades y el marco teórico.

Estructura de las actividades para fortalecer habilidades de visualización en el pensamiento espacial a partir del cálculo de volúmenes.

Las actividades diseñadas en este capítulo buscan promover la confianza de los estudiantes hacia la enseñanza y el aprendizaje de la geometría del espacio en situaciones de contexto real, haciendo uso de materiales concretos que fortalezcan habilidades de visualización a través de tareas de cálculo de volúmenes.

Cada actividad es totalmente accequible para los educandos y pretende que los estudiantes verifiquen, construyan y den respuesta a cada uno de los retos planteados. Además, que los

estudiantes hagan uso de la intuición, percepción, orientación espacial y saberes previos, con el fin de identificar aciertos y dificultades que presentan los estudiantes de grado noveno.

Cabe resaltar que las actividades diseñadas están relacionadas con el tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales propuesto por Gonzato & et ál. (2013) clasificada en la *interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales*. (pp. 9-19) en este sentido también se describirán en las actividades acciones y respuestas que los estudiantes ponen en juego teniendo en cuenta estas tareas.

Estructura de las actividades

Se diseñaron seis actividades denominadas A1, A2, A3, A4 y A5 y en algunas de ellas se integran retos R1 y R2 respectivamente, estas tareas de aprendizaje pretenden contribuir a la comprensión del objeto matemático volumen, fortalecer habilidades de visualización espacial y al mismo tiempo, ir contrarrestando una o más dificultades presentadas en los resultados de las pruebas Saber 9 del componente Espacial Métrico.

Teniendo en cuenta lo anterior, se espera que los educandos continúe optimizando sus competencias en comunicación, razonamiento y resolución; además, mejoren su capacidad para interpretar, manipular la información visual y mental que perciben a través de la exploración y experimentación (material concreto). Así mismo fortalezcan el trabajo grupal y cooperativo a través de las interacciones que se generan en el aula.

El diseño y elaboración de las actividades están enfocadas a los aprendizajes y evidencias de aprendizaje (lo que se espera que alcancen los estudiantes) expuestos en la tabla 11 con la siguiente información: competencias (habilidades) a desarrollar, aprendizajes y evidencias (dirigido a la temática de volúmenes en el componente espacial métrico) de acuerdo con la matriz de referencia matemáticas 9º; las actividades tendrán como esquema principal: un objetivo general, materiales a utilizar, sugerencias metodológicas y el desarrollo de las actividades que involucraron objetivos específicos y nombre de actividad en los diferentes retos propuestos.

Actividades de aprendizaje para identificar habilidades de visualización en el pensamiento espacial a partir del cálculo de volúmenes.

A continuación, se muestra de manera detallada todas las actividades aplicadas a los estudiantes del grado noveno.

Actividad 1. Aproximación al concepto de volumen

Objetivo general

Utilizar procedimientos de cálculo válidos para acercarse a la noción del objeto matemático volumen.

Sugerencias metodológicas

Esta actividad está dividida en dos retos. El **reto 1**, se trabaja en grupo de tres estudiantes, a cada grupo se les entrega la guía de trabajo y diferentes cantidades de galletas en forma rectangular y circular, con el fin de que cada grupo construya diferentes representaciones haciendo uso del material. El docente dará libertad en la elaboración de estas representaciones, pasará observando a cada grupo y estará atento a orientar a los estudiantes si se suscita alguna duda.

Se plantearon diferentes preguntas en la guía, aquí los estudiantes intercambiarán sus respuestas con su grupo de trabajo escribiendo en ella sus aportes, al finalizar el desarrollo del R1, el docente solicita la participación de un integrante de cada grupo para que compartan cada una de sus respuestas y se ira realizando un consenso con todas las respuestas recibidas con el fin de unificar cada una de las respuestas.

El **reto 2**, se realiza de manera individual se le entregará al estudiante la guía de trabajo, algunas piezas de cubo soma o pentacubos. El docente estará atento al desarrollo realizado por cada estudiante y tendrá la disposición de aclarar dudas que surjan durante el desarrollo de este reto; al finalizar solicitará a los estudiantes que se ubique en mesa redonda para socializar las respuestas y formalizar cada una de ellas teniendo en cuenta las opiniones de los estudiantes.

Materiales a utilizar

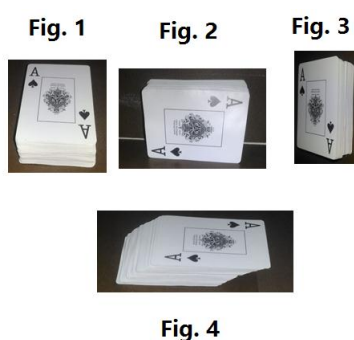
Para el desarrollo de los retos se utilizarán los siguientes materiales: Galletas de diferentes formas (rectangulares, circulares), logicubos, piezas de cubo soma y pentacubos de diferentes materiales.

Desarrollo de la actividad

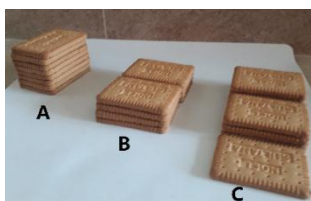
Reto 1. Comparando construcciones parte I

Objetivo específico: Adquirir la noción de volumen a través de la composición y descomposición de cuerpos con la manipulación de objetos concretos de diferentes formas, tamaños y texturas.

1. Construyan torres diferentes utilizando todas las galletas rectangulares o circulares asignadas.
¿De todas las torres construidas, cuál ocupa mayor y menor espacio? ¿Por qué?
2. Ahora, elijan una de sus torres y con las demás torres reacomoden las galletas del tal forma que sean semejantes a la torre que eligieron. ¿Qué pueden decir acerca del espacio ocupado?
3. Tome 2 barajas de cartas de póker y póngalas una sobre la otra en su pupitre, ubique las barajas en las diferentes posiciones como se muestra en las figuras, respondan las preguntas y justifiquen sus respuestas.



- a) El volumen de la Fig. 1., y la Fig. 4. ¿es igual o diferente? ¿Por qué?
 - b) ¿Cómo es el espacio ocupado por las barajas de póker en cada uno de los casos?
4. El sólido A se ha formado a partir de galletas iguales. Su volumen es $148,003 \text{ cm}^3$, su área lateral es $107,16 \text{ cm}^2$ y su área total es $170,14 \text{ cm}^2$ ¿Qué se puede decir del volumen, del área lateral y del área total de los sólidos B y C contruidos a partir de A?



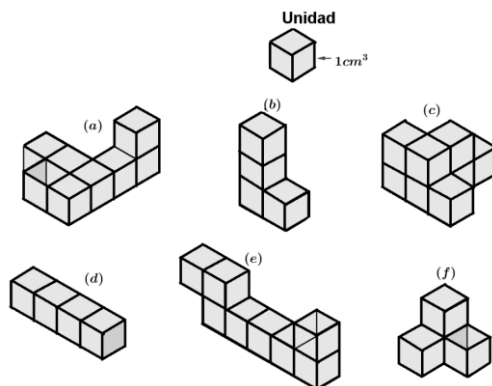
5. He comprado cuatro tacos de galletas Saltín, un taco contiene 17 galletas que colocadas una encima de la otra forman una altura de $8,5\text{ cm}$. Una galleta mide $9,5\text{ cm}$ de largo y 6 cm de ancho.
- a) ¿Necesito saber cuánto espacio ocuparan los 4 tacos de galletas en el mueble de mi cocina?
¿Explicué como hago para calcular este espacio?



- b) ¿Cómo debería acomodar las galletas de tal manera que el espacio ocupado sea menor?
6. Coloca 12 galletas circulares una encima de la otra como harían para calcular el espacio ocupado por estas galletas. Justifique su respuesta.

Reto 2. Comparando construcciones parte II

1. Observa la figura. ¿De cuántos cubos se compone cada representación?



2. ¿Cuál es el volumen de cada sólido teniendo en cuenta la unidad de patrón mostrada en la figura?
3. Determina cuáles de los sólidos de la figura ocupan mayor espacio _____ y cuáles ocupan menor espacio _____.
4. Reconstruye dos sólidos que tengan el mismo volumen con las piezas del cubo soma o pentacubos asignados, describa similitudes y diferencias que encuentran en los sólidos. Nota (tomar foto o dibujar sus construcciones)

5. Construir con tetracubos en forma de L, un cubo, un ortoedro (prisma recto de base rectangular) y un módulo en forma de L más grande. Determine en cada caso el volumen. (tomar foto o dibujar sus construcciones)

Actividad 2. Volumen de algunos cuerpos redondos

Objetivo general: Buscar estrategias para estimar y relacionar volúmenes de algunos sólidos geométricos.

Sugerencia metodológica: Cada estudiante elabora las representaciones planas para la construcción de un cono y un cilindro, de una pirámide y un prisma en cartulina o cartón paja según las instrucciones del docente, se da una orientación previa para la construcción y elaboración de los mismos. Luego se procede a organizar grupos de 2 a 3 estudiantes de forma aleatoria.

Esta actividad tiene dos retos, **el reto 1**, está encaminado a que los estudiantes encuentren la relación que existe entre el volumen de un cono y un cilindro que tienen bases y alturas congruentes, para el desarrollo de este reto se entrega la guía de trabajo y un material de cocina. **El reto 2**, pretende que los estudiantes deduzcan el área de lateral y el área total de un cilindro y un cono recurriendo al su desarrollo en el plano, en este proceso el docente en su rol de orientador, guiará a los estudiantes a descubrir características principales que lo acerquen a calcular estas áreas, además que a partir de gráfica pueda hacer inferencias sobre lo que ocurre le volumen cuando se mantiene una variable constante y la otra cambia.

Para cada enunciado se busca que los estudiantes intercambien sus saberes y lleguen a un acuerdo de solución con el fin de que plasmen sus respuestas en la guía de trabajo de acuerdo al reto, cada grupo debe escribir sus respuestas y se dará un espacio para que las socialicen, al final se realizará un consenso de las respuestas otorgadas por cada grupo donde se aclaren y refuercen conceptos. El docente rotará de manera continua por las mesas de trabajo e intervendrá cuando sea requerido, además observará algunas estrategias que usan los estudiantes en la resolución de los problemas de cada reto.

Reto 1. Relación entre el volumen del cono y el cilindro.

Objetivo específico: Comprender la relación que existe entre el volumen de un cilindro y un cono de bases iguales y alturas congruentes a partir de experiencias concretas.

Materiales a utilizar: para esta actividad cada grupo utilizará un cono y un cilindro construidos en cartulina o cartón paja, cuyas bases son de igual área y alturas congruentes, frijoles, azúcar, arroz, lentejas garbanzos, arveja, maíz, sal, lana, regla y guía de trabajo.

Desarrollo de la actividad

1. Tome la lana y mida el contorno de la circunferencia de la base del cono, con cuidado y sin perder la medida extienda la lana sobre una hoja de papel y con la regla tome su medida aproximada, realicen el mismo procedimiento con el contorno de la circunferencia del cilindro ¿Qué observan?
2. Sitúen sobre tu pupitre el cono y el cilindro de tal manera que se apoyen sobre la base, coloca tu regla sobre estos dos sólidos, ¿Qué propiedad geométrica se cumple o que pueden decir acerca del cono y el cilindro?
3. Tomen el cono como unidad de medida y llénelo completamente (hasta el borde) del material de cocina que le correspondió a su grupo. Vierta este contenido en el cilindro y repita el paso anterior las veces que sean necesarias hasta que logres llenar completamente el cilindro, ¿en cuál de los dos sólidos hay mayor contenido de su material de cocina?
4. ¿Cuántas veces tuviste que llenar el cono para que el cilindro quedará completamente lleno?
5. Aproximadamente cuantas veces es mayor el volumen del cilindro en comparación con el cono.
6. Intercambien el material de cocina con otro grupo que ya haya terminado y procedan a desarrollar nuevamente las preguntas 3 a 5. Realicen la experiencia dos veces más con diferente material.
7. De acuerdo a las experiencias realizadas con anterioridad que pueden deducir:
8. ¿Cómo escribirían la relación anteriormente hallada?
9. De acuerdo a las respuestas de los puntos 1 y 2, completen el siguiente enunciado:

“Dado un cono y un cilindro que tienen _____ y la misma _____” se puede concluir que:

10. ¿Conocían la relación existente entre el volumen de un cilindro y de un cono? _____ a partir de la experiencia realizada, ¿cuál sería la expresión algebraica que representaría el volumen de un cono con relación al volumen de un cilindro? Escríbela $v_{cono} =$

Reto 2. Descubriendo el área total y volumen de un cilindro y un cono

Objetivos específicos:

- Realizar conjeturas partiendo de la comparación de dos sólidos de la misma clase realizando algunas modificaciones en sus elementos geométricos (altura, radio) que los componen.
- Aplicar los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas.

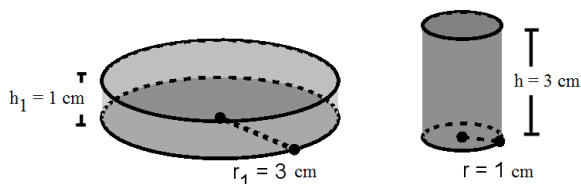
Materiales a utilizar: Lápiz, Regla y Compás

Desarrollo de la actividad

1. Recorte dos rectángulos de cartulina de dimensiones $20\text{cm} \times 10\text{cm}$ y enróllelos para formar dos cilindros diferentes. Fijen los bordes con cinta pegante para mantener la forma, póngalos sobre una superficie plana y llene cada uno con arena, arroz u otro grano.
 - a) ¿Cuál de los dos cilindros tiene mayor área lateral? Justifiquen su respuesta
 - b) ¿Cuál tiene mayor volumen? Justifiquen su respuesta
2. Elabore un triángulo rectángulo de lados 3cm y 4cm y resuelva los siguientes ítems
 - a) Si giran el triángulo rectángulo de lados 3cm y 4cm sobre uno de sus catetos que obtienes:
 - b) Calcula el área total y el volumen en los dos casos (cambiando el cateto sobre el que gira) que puedes concluir:

Caso 1.	Caso 2.
---------	---------

3. ¿Qué figura tiene mayor volumen, el tubo o el disco? ¿Cuál es la razón del volumen mayor al menor?



4. Un cono y un cilindro tienen la misma base. Si la altura del cono es tres veces mayor que la altura del cilindro, ¿cómo es el volumen del cono y el cilindro? Justifica tu respuesta.
5. Observa las figuras en cada caso y a partir de ellas describe que diferencias y semejanzas encuentras entre sus elementos fundamentales y su volumen. Que pueden concluir en cada caso.

<p>Caso 1.</p>	<p>Caso 2.</p>
<p>Caso 3.</p>	<p>Caso 4.</p>

6. ¿Cuándo crece más el volumen de un cilindro, cuando se duplica la altura o cuando se duplica el radio de la base?
7. ¿Cuándo crece más el volumen de un cono, cuando se duplica la altura o cuando se duplica el radio de la base?

Actividad 3. Volumen de algunos poliedros

Objetivo general: Generalizar procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y volúmenes de sólidos.

Sugerencias metodológicas:

Esta actividad estará dividida en dos retos. **El reto 1.** Se trabaja en grupo de 2 a 3 estudiantes de acuerdo a las indicaciones realizadas por el docente, se le entregará la guía de trabajo, los estudiantes harán uso de los prismas y pirámides que realizaron con antelación durante las clases de matemáticas. Cada uno de los cuerpos geométricos tiene sus bases movibles, para que facilite el ingreso de la harina dentro de ellos; los estudiantes usarán su material de manera libre y podrán repetir varias veces la experiencia hasta que puedan encontrar la relación existente entre una pirámide y un prisma recto de bases congruentes y alturas de igual medida.

El docente estará atento al desarrollo realizado por cada grupo y aclarará dudas que se generen durante el desarrollo de cada reto; al finalizar cada una de las actividades propuestas, se solicita a un representante de cada grupo que socialice las respuestas y establezca una conclusión general de acuerdo a las respuestas otorgadas por sus compañeros.

Reto 1. Relación entre el volumen de un prisma y una pirámide

Objetivos específicos:

- Estimar el volumen o capacidad de un prisma y una pirámide cuyas bases y alturas son congruentes.
- Identificar qué relación existe entre el volumen de un prisma y una pirámide

Materiales a utilizar: 2 Prismas y pirámides en cartulina de diferentes bases poligonales, Libras de harina, arroz y azúcar, 1 regla o escuadra, 50 cm de lana o pita, 2 probetas, 2 Embudos.

Desarrollo de la actividad

Coloque sobre la mesa: guía de trabajo, la probeta, el embudo, la harina y el material elaborado previamente (pirámide y prisma en cartulina con bases poligonales congruentes) según orientaciones dadas por el docente.

1. Tome la pirámide como la unidad de medida y llénela completamente (hasta el borde) de harina.
2. Vierta este contenido en el prisma que tenga la base y altura congruente a su pirámide y repita el paso anterior las veces que sean necesarias hasta que logres llenar completamente el prisma,

¿Cuántas veces usted tuvo que llenar la pirámide para que el prisma quedará completamente lleno?

- Aproximadamente cuantas veces es mayor el volumen del prisma en comparación con el de la pirámide.
- Realiza la misma actividad de los puntos 1, 2 y 3 con un prisma y pirámide de diferente base poligonal a la que utilizaste con anterioridad (Repite esta actividad hasta completar la tabla, intercambiando material con sus compañeros).

PRISMA Y PIRÁMIDE DE BASE					
	Cuadrada	Triangular	Pentagonal	Hexagonal	Octagonal
Número de veces que desocupas el material de la pirámide en el prisma					

- Tome el embudo e introdúzcalo en la probeta, ahora llene nuevamente su pirámide y prisma de harina y vacíe cada uno de los contenidos en el embudo con el fin de que la harina quede dentro de la probeta. Registre la cantidad de harina, arroz o azúcar que se utilizó en cada uno de los cuerpos geométricos y escriba sus datos en la tabla que aparece a continuación:

BASE POLIGONAL					
	Cuadrada	Triangular	Pentagonal	Hexagonal	Octagonal
Contenido de material (harina, arroz y azúcar) en milímetros (ml) de la pirámide					
Contenido de material (harina, arroz y azúcar) en milímetros (ml) del prisma					

- De las dos tablas anteriores que puedes concluir:
- ¿Conocías la relación existente entre los volúmenes de los dos poliedros? _____ ¿Cuál es dicha relación?
- De la experiencia realizada en esta actividad, se puede concluir que el volumen de una pirámide y un prisma con bases congruentes y alturas iguales están relacionadas por la expresión algebraica:

Actividad 4. Distinguiendo el volumen de otras magnitudes

Objetivo general: Diferenciar la magnitud volumen de otras como la masa y la capacidad.

Objetivos específicos:

Buscar estrategias para estimar la capacidad y volumen de algunos recipientes de uso familiar.

Reconocer la relación que existe entre las unidades de volumen y capacidad de objetos del entorno.

Sugerencias metodológicas:

Esta actividad está dividida en dos retos. El **reto 1**, se trabajará en grupo de dos estudiantes, cada grupo trae el material solicitado (un cubo de 10 cm de arista, vasos plásticos, una botella plástica de 1 litro de capacidad, jeringas y agua y se hace entrega de la guía de trabajo.

En el desarrollo del reto el docente se desplazará por cada uno de los grupos de trabajo y estará atento a orientar a los estudiantes si se produce alguna duda.

Cabe resaltar, que este reto busca que el estudiante logre encontrar la relación existente entre el volumen de un cuerpo geométrico con otras unidades de medida (capacidad, peso y masa) y que tomen decisiones acertadas frente a situaciones contextualizadas. Los estudiantes intercambiarán sus respuestas con su grupo de trabajo escribiendo sus aportes en la guía y al finalizar el desarrollo de cada reto se realizará una mesa redonda en donde se compartirán los diferentes saberes y se unificarán algunos conceptos.

Materiales a utilizar: Cubo sin tapa de arista 10 cm, agua, 1 botella plástica de un litro de capacidad, vasos plásticos de 6 onzas, un embudo, jeringas.

Desarrollo de la actividad

Reto 1. Comparación de la unidad de volumen con las unidades de capacidad.

1. Tome la jeringa y llénela de agua, vacíe esta cantidad en uno de los vasos plásticos, realice esta actividad las veces que sean necesarias hasta llenar el vaso. ¿cuántos mililitros de agua son necesarios para llenar el vaso de 6 onzas? _____ ¿Cuánto equivale aproximadamente una onza en mililitros?

2. ¿Cuántos vasos con agua son necesarios para llenar la botella de 1 litro? _____ . Si no son exactos el número de vasos haga uso de la jeringa para que vierta el contenido que le haga falta en la botella y pueda estimar un valor exacto.
3. Tome la botella de litro llena de agua y vierta este líquido en el cubo de arista de 10 cm. ¿Qué capacidad y volumen tiene el cubo cuando se vierte el contenido de la botella en el cubo?
4. De acuerdo a la experiencia anterior se puede deducir que un cubo de volumen 1 dm^3 tiene capacidad para contener dentro de él _____ o _____
5. En la figura siguiente se muestran dos de las presentaciones de agua cristal.



- a) Natalia quiere vaciar el agua del garrafón de 5 litros en botellas de 300 ml. ¿Cuántas botellas utilizará Natalia?
- b) ¿Cuántos cm^3 de agua hay en 20 botellas de 300 ml?
- c) ¿Natalia quiere saber cuántos dm^3 hay en 2 garrafones y medio? Explíquense a Natalia como debe realizar este cálculo.

Actividad 5. Prácticas inusuales.

Objetivo general: Utilizar procedimientos de cálculo válidos para estimar el volumen de algunos cuerpos geométricos irregulares.

Sugerencias metodológicas

Esta actividad estará dividida en un reto. **El reto 1.** Se trabajará en grupo de tres estudiantes, a cada grupo se les hace entrega de la guía de trabajo y los materiales propuestos para este reto, cada grupo debe hacer uso de todos los materiales asignados. Para esta actividad se trabajará en el patio central de la Institución ya que se hará uso de baldes y tazas con agua con el fin de determinar el volumen de diferentes cuerpos a través del desplazamiento de líquidos en los diferentes recipientes.

El docente será orientador y guía en cada uno de los grupos con el fin de aclarar dudas que se presenten durante el desarrollo de la guía. Al finalizar el reto propuesto, el docente solicitará la participación de un integrante de cada grupo para que compartan lo que aprendieron y los resultados obtenidos en cada una de las situaciones planteadas.

Materiales a utilizar: Un trozo de borrador, un frijol, un garbanzo, una ciruela pasa, piedra pequeña, una canica, jeringas, vasos precipitados, baldes o tazas, agua, manzana, guatila, papa, papaya, banana.

Reto 1. Determinando el volumen de algunos sólidos irregulares

Objetivos específicos:

Buscar estrategias para estimar el volumen de algunos cuerpos irregulares.

Reconocer la relación que existe entre el volumen de un cuerpo irregular por el desplazamiento de líquidos.

1. Utilice una probeta graduada que contenga agua hasta la mitad de su nivel, y registre este dato. Luego sumerja cada uno de los sólidos irregulares pequeños, registre el nuevo dato del volumen desplazado. Calcule el volumen del sólido irregular restando el dato final menos el dato inicial. La diferencia del volumen del líquido inicial y el volumen del líquido final será el volumen del sólido irregular. Registre sus datos en la siguiente tabla 1. (Repita la experiencia hasta que haya culminado con todos los sólidos irregulares)

Tabla 1. Medidas para calcular el volumen de un sólido irregular. Registre aquí los datos correspondientes a los objetos seleccionados.

Volumen del vaso precipitado	Sólidos irregulares				
	Trozo de borrador	Un frijol,	Un garbanzo,	Una ciruela pasa	Una piedra pequeña
Volumen del líquido inicial					
Volumen del líquido final					
Volumen del sólido irregular					

2. Utilice el vaso precipitado y llene hasta la mitad su balde o taza que le correspondió con agua, registre este dato, marque el recipiente con un marcador el nivel del agua que ingreso. Luego sumerja cada uno de los sólidos irregulares que faltan por utilizar y con ayuda de la jeringa saque el agua que se desplazó sobre su marca anterior y registre la cantidad de agua retirada, esta representará el volumen desplazado. La diferencia del volumen del líquido inicial y el volumen del líquido final será el volumen del sólido irregular. Registre sus datos en la siguiente tabla 2. (Repita la experiencia hasta que haya culminado con todos los sólidos irregulares)

Tabla 2. Medidas para calcular el volumen de un sólido irregular. Registre aquí los datos correspondientes a los objetos seleccionados.

Volumen de la taza o balde	Sólidos irregulares				
	Papaya	Guatila	Papa	Durazno	Manzana
Volumen del líquido inicial					
Volumen del líquido final					
Volumen del sólido irregular					

3. Redacte un párrafo sobre lo aprendido en la realización de este reto

CAPÍTULO 5. Análisis de Resultados

En este capítulo se presenta un análisis de los resultados de las cinco actividades implementadas con sus respectivos retos, se parte de la clasificación agrupada de habilidades de visualización propuestas en la Tabla 11, la clasificación de tareas de aprendizaje acerca de la noción de volumen elaboradas en las tablas 12 a la 14, que permitieron realizar el análisis y descripción de las habilidades de visualización, y a su vez, describir que tipo de tareas de aprendizaje utilizaron en el desarrollo los estudiantes en cada uno de los retos planteadas.

Actividad 1. Aproximación al concepto de volumen.

Esta actividad se desarrolló en el aula de clase de matemáticas de la IERD Cacicazgo, se contó con la participación de 24 estudiantes que trabajaron en grupos de 3 integrantes en una sesión de clase de matemáticas de dos horas para el **R1** y otra sesión de dos horas de clase para el **R2**. Los grupos están abreviados por la letra G y su respectivo número al que corresponde. (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7 y G8)

A continuación, se muestra una descripción general sobre el tipo de tareas de aprendizaje volumen, habilidades de visualización, acciones y respuestas puestas en juego por los estudiantes en esta actividad.

Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 1-Reto 1

Este reto se enmarca en las tareas de aprendizaje desde el punto de vista de comparación, medida y geométrica- numérica; de *comparación* (volúmenes) porque busca reconocer diferencias y semejanzas para deducir relaciones entre sí. De *medida* enfocada a la relación con el número, tamaño o cantidad de algo y desde la perspectiva *geométrica-numérica*, en este sentido se tiene en cuenta al volumen como un tamaño, Anwandter-Cuellar (2013) cita a Moreira-Baltar (1994-1995) resaltando que el área se puede comparar desde el punto del tamaño y esto aplica para el volumen por ser una magnitud que permite encontrar relaciones de equivalencia entre sólidos definiendo estructuras de orden, suma, resta y división sin recurrir a medidas.

El propósito de estas tareas consistió en acercar a los estudiantes hacia la construcción del objeto matemático volumen mediante diferentes actividades prácticas. También que ellos

adquirieran la noción de volumen a través de la composición y descomposición de cuerpos con la manipulación de objetos concretos de diferentes formas, tamaños y texturas.

Tareas de aprendizaje de volumen R1

Para **P (1 y 2)**, desde la perspectiva *geométrica-numérica*, cinco grupos hacen una relación de equivalencia de orden utilizando la acción del conteo de galletas, sin importar la posición en que se ubiquen las galletas si en cada torre elaborada hay igual cantidad de galletas el volumen es el mismo luego el espacio ocupado también. Tres grupos consideran que el volumen es diferente cuando se colocan todas las galletas cubriendo un plano aquí el espacio ocupado es mayor que cuando está en forma de torre.

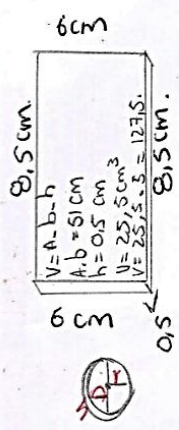
En **P (3a y 3b)**, la relación de equivalencia la realizan por el número de barajas utilizadas, cuatro grupos dudaron en decir que el volumen era igual por la posición de las cartas en la fig. 4., cabe resaltar que la tarea desde el punto de vista es de tipo geométrico ya que se debe identificar si existe variación del volumen cuando se realiza una transformación geométrica. La concepción del tamaño del volumen en este caso está relacionada con la siguiente propiedad relacionada con la medición: “El volumen es invariable por isometría, en otras palabras, si aplicamos una isometría a un sólido, su volumen se conserva”. Aquí interviene la docente haciendo preguntas a los grupos utilizando ejemplos de su contexto y al final ellos deducen que pasa lo mismo con las galletas sin importar la forma en que estén posicionados se mantiene el mismo volumen.

P (4 y 5), Aquí cinco grupos de estudiantes siguen utilizando relaciones de equivalencia teniendo en cuenta el patrón de medida elegido y hacen uso de la aritmetización, a pesar de que se habían realizado experiencias relacionadas en los puntos anteriores en la **P (5b)** un grupo concluye que los 4 tacos de galletas se deben ubicar uno detrás del otro para que ocupen menos espacio.

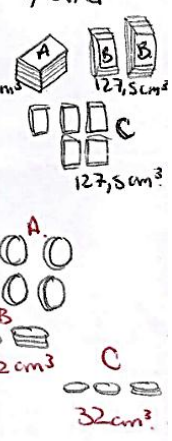
En cuanto a la tarea de *medida* hacen la elección de un patrón de medida en este caso la galleta es el patrón elegido por todos los grupos y determinar el volumen de las torres por el número total de galletas, número de barajas, número de tacos.

En la tarea de *comparación* todos los grupos la asumen a través del conteo de las galletas y de las barajas de póker. Por otro lado, el G6 y el G1 también hacen uso de la tarea de *aritmétización* haciendo uso de la fórmula, teniendo en cuenta las dimensiones de las galletas, taco de galletas, y de las barajas de póker y realizando el producto entre sus dimensiones cuando eran rectangulares.

Reto 1.



1. Construyan torres diferentes utilizando todas las galletas rectangulares o circulares asignadas. ¿De todas las torres construidas, cuál ocupa mayor y menor espacio? ¿Por qué? Todas las torres tienen el mismo volumen y ocupan el mismo espacio ya que cada torre tiene 5 galletas y si formamos diferentes torres, van a ocupar el mismo espacio ya que todas tienen las mismas cantidades.
2. Ahora, elijan una de sus torres y con las demás torres reacomoden las galletas del tal forma que sean semejantes a la torre que eligieron. ¿Qué pueden decir acerca del espacio ocupado? El espacio ocupado va a ser el mismo, de acuerdo con la cantidad de galletas o volúmenes, en diferente forma, siempre va a ser igual.
3. Tome 2 barajas de cartas de póker y póngalas una sobre la otra en su pupitre, ubique las barajas en las diferentes posiciones como se muestra en las figuras, respondan las preguntas y justifiquen sus respuestas.



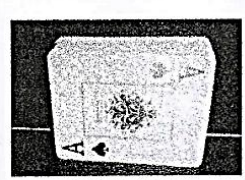
$D = 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm} \cdot 1 \text{ cm}$
 $r = 2 \text{ cm} = 0.4$
 $h = 1 \text{ cm} = 32 \text{ cm}^3$
 $2 \cdot \pi \cdot r^2$

Fig. 1



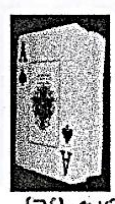
179,645

Fig. 2

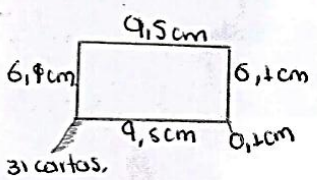


179,645

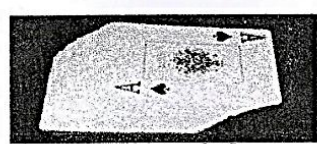
Fig. 3



179,645



$\begin{array}{r} 2 \cdot 2 \cdot \\ 5,795 \\ + 31 \\ \hline 5,795 \\ + 173,85 \\ \hline 179,645 \end{array}$



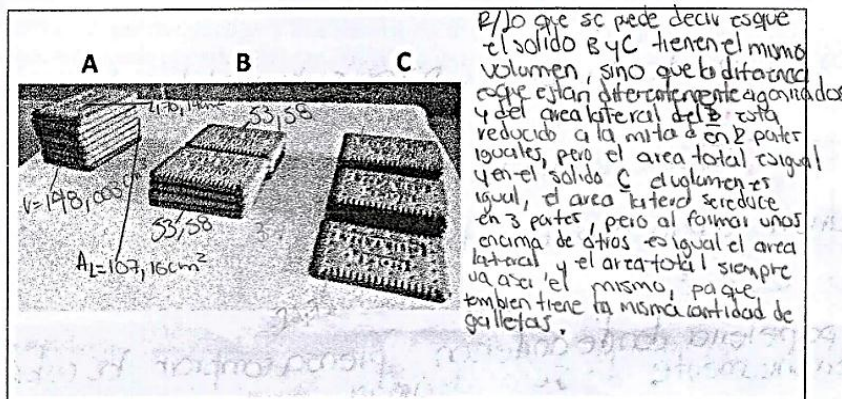
179,645

Fig. 4

4. ¿El volumen de la figura 1., y la figura 4. es igual o diferente? ¿Por qué? Es igual ya que la f.1 y la f.4, tienen la misma cantidad de barajas, lo cual las 2 fig. están completas con las barajas, ya que las podemos ver en 2 dimensiones y si las organizamos quedarían lo mismo.

Imagen 1. A1-RI- P (1-4) Tareas de aprendizaje volumen involucradas

5. ¿Cómo es el espacio ocupado por las barajas de póker en cada uno de los casos?
 El espacio ocupado por las barajas es igual, ya que todas tienen el mismo volumen, el espacio varía si el mismo sin impactar la posición en la que están.
6. El sólido A se ha formado a partir de galletas iguales. Su volumen es $148,003 \text{ cm}^3$, su área lateral es $107,16 \text{ cm}^2$ y su área total es $170,14 \text{ cm}^2$. ¿Qué se puede decir del volumen, del área lateral y del área total de los sólidos B y C construidos a partir de A?



7. He comprado cuatro tacos de galletas Saltín, un taco contiene 17 galletas que colocadas una encima de la otra forman una altura de $8,5 \text{ cm}$. Una galleta mide $9,5 \text{ cm}$ de largo y 6 cm de ancho.
- a) ¿Necesito saber cuánto espacio ocuparan los 4 tacos de galletas en el mueble de mi cocina? ¿Explique como calcula este espacio?

$$\begin{array}{r} 53 \\ 28,5 \\ + 17 \\ \hline 199,5 \\ 285 \\ \hline 484,5 \\ \times 4 \\ \hline 1.938,0 \end{array}$$

$484,5 \text{ cm}^3$ $484,5 \text{ cm}^3$ $V = A \cdot b \cdot h$
 $A \cdot b = 57 \text{ cm}$
 $h = 9,5 \text{ cm}$
 $V = 28,5 \text{ cm}^3 \cdot 17$
 $V = 484,5 \text{ cm}^3$

El espacio que ocupan las galletas será de $1,938 \text{ cm}^3$ en la cocina.

El/lo para calcular este espacio, primero hago la medición de los lados de una galleta, luego las multiplico la base o el área y el resultado dado lo multiplico por la altura y el resultado dado lo multiplico por las 17 galletas del taco y luego multiplico el resultado dado por los 4 tacos y según todo el resultado $1,938 \text{ cm}^3$ es el espacio que ocupan las galletas en la cocina.

- b) ¿Cómo debería acomodar las galletas de tal manera que el espacio ocupado sea menor?

El/lo debería acomodar los cuatro tacos de galletas una detrás de otro taco de tal manera que queden en una fila.

$A \cdot b \cdot h$
 $A \cdot b = 38 \text{ cm}$
 $h = 0,5 \text{ cm}$
 $V = 19 \text{ cm}^3$

$$\begin{array}{r} 1,938 \\ - 1,292 \\ \hline 0,646 \end{array}$$

Imagen 2. A1-R1- P (5-7) Tareas de aprendizaje de volumen involucradas

P6, Esta pregunta demostró dificultades y errores de tipo cognitivo seis grupos coinciden de una u otra forma que para determinar el espacio ocupado por las galletas de forma circular es necesario calcular el ancho, el largo de una galleta y luego se multiplica por la cantidad de galletas que conforman la torre. Es decir, asocian fórmulas del cálculo de áreas de algunas figuras planas para determinar el volumen.

Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 1-Reto 2

Tareas de aprendizaje de volumen R2

Para **P (1 a 5)**, desde la perspectiva *geométrica -numérica*, los 8 grupos utilizan la estrategia de conteo de números de cubos (contando el número de unidades) estas tareas están asociados con problemas de medición de volumen, se justifica desde el punto de vista matemático por la propiedad que, una vez elegido la unidad de volumen o unidad de patrón, los sólidos del mismo número de cubos tendrán el mismo volumen. Los grupos de estudiantes realizan la transición de la medición (numérico) a la elaboración de sólido (geométrico).

En cuanto a la tarea de *medida* la figura les muestra el patrón de medida en este caso el cubo que representa un volumen de 1cm^3 , a partir de esta situación se deduce el volumen de cada sólido y realizan la tarea de *comparación* identificando cuales de sólidos tienen la misma cantidad de cubos. Aquí también usan la relación de equivalencia de mayor, menor o igual cantidad de cubos en los sólidos representados.

Por otra parte en este **R2**, se trabaja la perspectiva del volumen como un tipo de tarea de visualización correspondiente a la familia de *interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales*, enunciada por Gonzato & et ál., enuncian (2013), este tipo de tareas permite que los estudiantes construya sólidos diferentes pero conservando el volumen y utilicen acciones como:

- *Contar elementos*, dado un sólido los estudiantes cuentan los elementos que los componen (unidad patrón)
- *Componer y descomponer en partes*, entregados dos o más piezas las componen para formar otros sólidos y determinan el volumen por medio del contar elementos

El tipo de respuesta de parte de los estudiantes es de *construcción* y de tipo *verbal* y *numérica*.

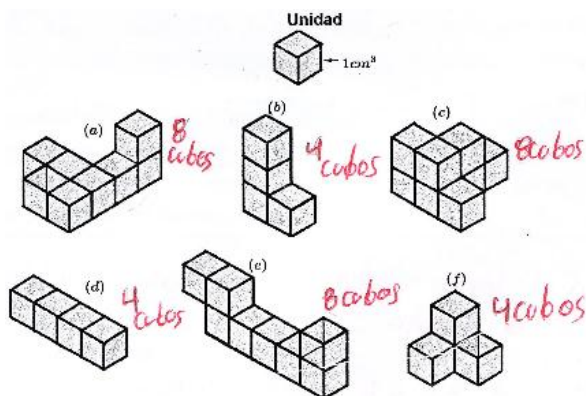


Imagen 3. A1-R2- P1 Tareas de aprendizaje volumen involucradas

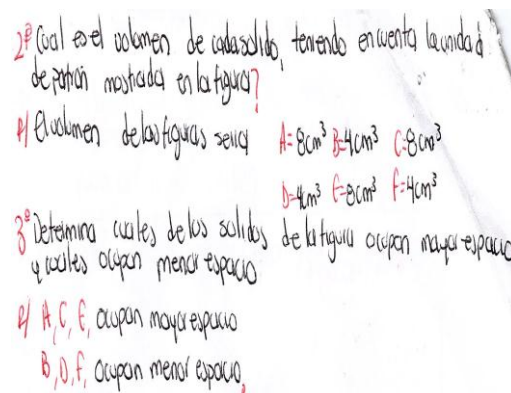


Imagen 4. A1-R2- P2 Tareas de aprendizaje volumen involucradas

A continuación se muestran algunas evidencias realizadas por el G6 con respecto a la **P (3 y 4)**.

P3. Diferentes piezas de cubo soma

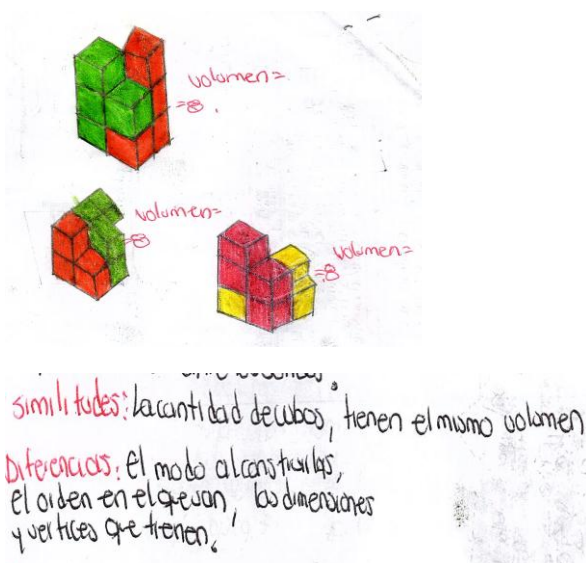


Imagen 5. A1-R2- P3 Ejemplo de respuesta elaborada por G6

P4. Utilización de piezas en forma de L

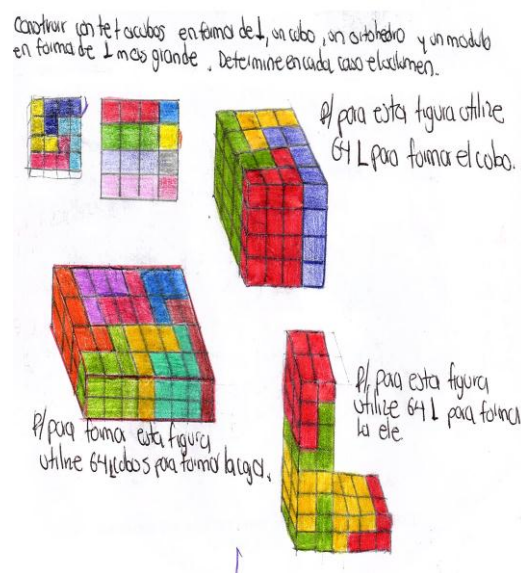


Imagen 6. A1-R2- P4 Ejemplo de respuesta elaborada por G6

P (4), El tipo de problemas que el estudiante debe desarrollar es el de producir un sólido de volumen mayor o menor que un sólido dado en este caso el de la L (una pieza del cubo soma)

Este procedimiento es comprendido por la propiedad de monotonía, A es un subconjunto de B luego $V(A) < V(B)$. En este caso el volumen de L (formada por 4 cubos) es menor que la L (formada por 64 cubos). Los estudiantes pueden concebir el volumen como el espacio ocupado. Según Piaget, Inhelder y Szeminska (1973), el volumen es visto como el lugar ocupado por un cuerpo en el espacio o lugar ocupado por un objeto relacionado con lo que lo rodea.

P (5), en esta pregunta está enfocada a determinar el número de cubos necesarios de (1, 2 y 5) cm para cubrir un cubo cuya dimensión es de 10 cm; la mayoría de los grupos de trabajo utilizaron

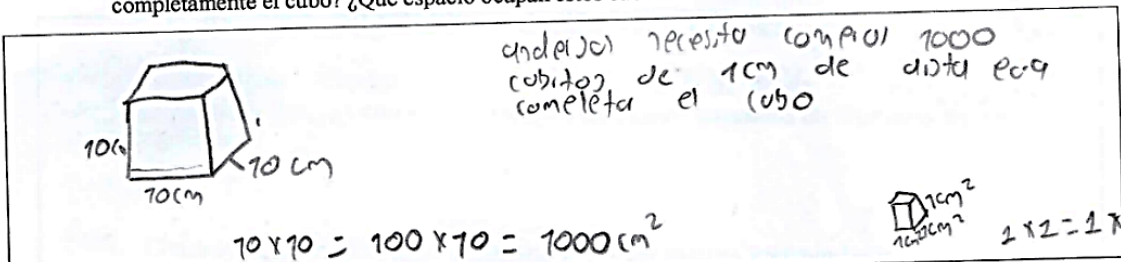
la adición teniendo en cuenta cuantos cubos se necesitan por lado y luego multiplicaban por los que se necesitaban en la otra dimensión (cantidad de cubos del piso), luego lo multiplicaban o sumaban las veces que cabían hacia arriba.

G1y G7 se dan cuenta que se están utilizando cubos de dimensiones que representan los divisores o la descomposición multiplicativa de 10. También encuentra una relación de equivalencia desde el punto de vista de la división.

A continuación se presenta algunas evidencias del G7 relacionadas a la pregunta 5(a, b, c y d)

Anderson desea cubrir un cubo sin tapa de 10 cm de arista.

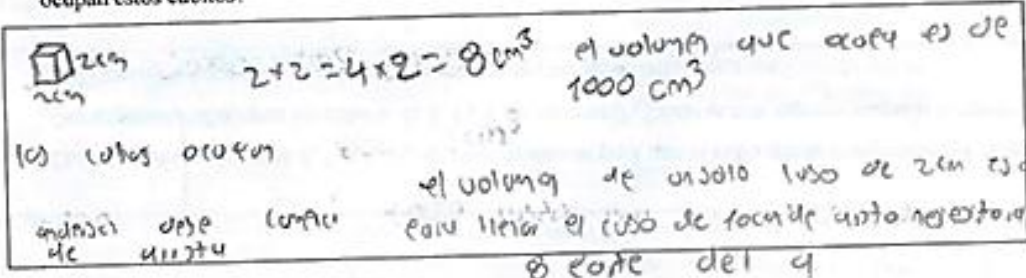
a) ¿Cuál es la cantidad máxima de cubitos de 1 cm de arista que necesita comprar Anderson para cubrir completamente el cubo? ¿Qué espacio ocupan estos cubitos?



Anderson necesita comprar 1000 cubitos de 1 cm de arista para completar el cubo.

Imagen 7. A1-R2- P (5a) Ejemplo de respuesta relacionada con la pregunta 5a

b) ¿Cuántos cubitos debe comprar ahora, si la medida de la arista es el doble de la anterior? ¿qué volumen ocupan estos cubitos?



el volumen que ocupa es de 1000 cm^3

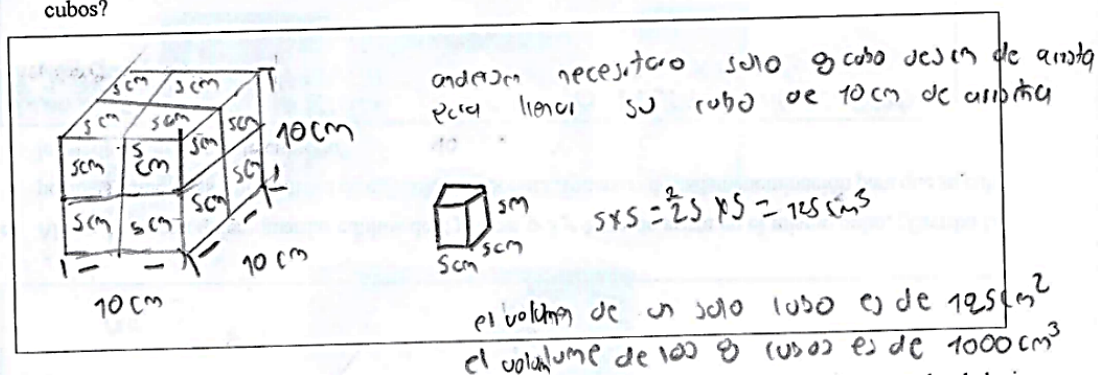
el volumen de un solo cubo de 2 cm es de 8 cm^3

para llenar el cubo de 10 cm de arista necesitara 125 cubos, 8 partes del a

Transcripción: $2 \times 2 = 4 \times 2 = 8 \text{ cm}^3$ el volumen que ocupa es de 1000 cm^3 . El volumen de un solo cubo de 2 cm es de 8 cm^3 . Para llenar el cubo de 10 cm de arista necesitara 125 cubos, 8 partes del **a** (el grupo se refiere al punto anterior).

Imagen 8. A1-R2- P (5b) Ejemplo de respuesta relacionada con la pregunta 5b

- c) En la papelería donde Anderson piensa comprar los cubitos le ofrecen únicamente de 5 cm de la arista, ¿cuántos cubitos debe comprar para llenar el espacio completo de su cubo? ¿qué volumen representan estos cubos?



Transcripción: Anderson necesitara solo 8 cubos de 5 cm de arista para llenar su cubo de 10 cm de arista. $5 \times 5 = 25 \times 5 = 125 \text{ cm}^3$. El volumen de un solo cubo es de 125 cm^3 . El volumen de los 8 cubos es de 1000 cm^3

Imagen 9. A1-R2- P (5c) Ejemplo de respuesta relacionada con la pregunta 5c

- d) De la experiencia realizada por Anderson en los resultados de los enunciados a), b) y c) que puedes deducir para llenar el cubo de 10 cm solo se puede utilizando cubos que sean divisibles entre 10 y que entre mayor sea el volumen de los cubitos utilizara menor números de cubitos

Transcripción: Para llenar el cubo de 10 cm solo se puede utilizando cubos que sean divisibles entre 10 y que entre mayor sea el volumen de los cubitos utilizara menor números de cubitos.

Imagen 10. A1-R2- P (5d) Ejemplo de respuesta relacionada con la pregunta 5d

Habilidades de visualización puestas en juego por los estudiantes de grado noveno A1.

En esta sección se muestran las habilidades de visualización, acciones y respuestas que los estudiantes utilizan en los diferentes retos.

Cabe resaltar que la A1 se enmarcan en el tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales propuesto por Gonzato & et ál. (2013) clasificada en la interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales. Es decir que este tipo de tarea permite al estudiante convertir un sólido en otro por medio de la composición y descomposición de sus partes, construir sólidos partiendo de unidades de patrón elegidas (conteo de elementos).

Habilidades de Comunicación. Esta habilidad requiere identificar relaciones entre distintas unidades de medida, unidades de la misma magnitud y determinar su pertenencia.

Las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A1 en esta habilidad fueron a manera general:

- La mayoría de los grupos identificaron el cálculo de volúmenes utilizando la unidad de medida apropiada (uso de galletas, tacos y cubos) relacionándola en las situaciones planteadas en los retos
- Reconocieron que pueden utilizar diferentes unidades de medidas es decir tomando un patrón de medida como referencia y a partir de allí obtener el volumen de un sólido
- Por otro lado cuatro grupos solo reconocen esa magnitud como única unidad de medida y un grupo no reconoce la unidad de medida para la experiencia realizada, expresa solo cantidades numéricas.
- Algunos grupos presentaron dificultades en decir que los volúmenes no son los mismos, a sí se utilicen la misma cantidad de galletas, ellos perciben que al hacer un cubrimiento (usando galletas) de una región esta ocupa mayor volumen y espacio que si se hacen torres de galletas
- El tipo de respuesta utilizado por los grupos de trabajo son de tipo verbal/ numérica y de construcción.

Habilidades de Razonamiento. Esta habilidad está relacionada con generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el volumen de algunos sólidos esta habilidad se evidencia en las:

Acciones que los estudiantes usaron para resolver la A1 fue:

- G1, G6, G5, G3 y G7 justificaron la validez de sus procedimientos realizando representaciones, dibujos y construcciones con los sólidos, también de forma verbal, la obtención del volumen sus sólidos, aunque en algunos ítems tenían dudas en el transcurso de la sesión se fueron aclarando por el docente o por compañeros de otros grupos, en el momento de realizar la justificación de las respuestas de cada grupo (estilo tertulia) muchos de ellos lograron aclarar sus inquietudes.

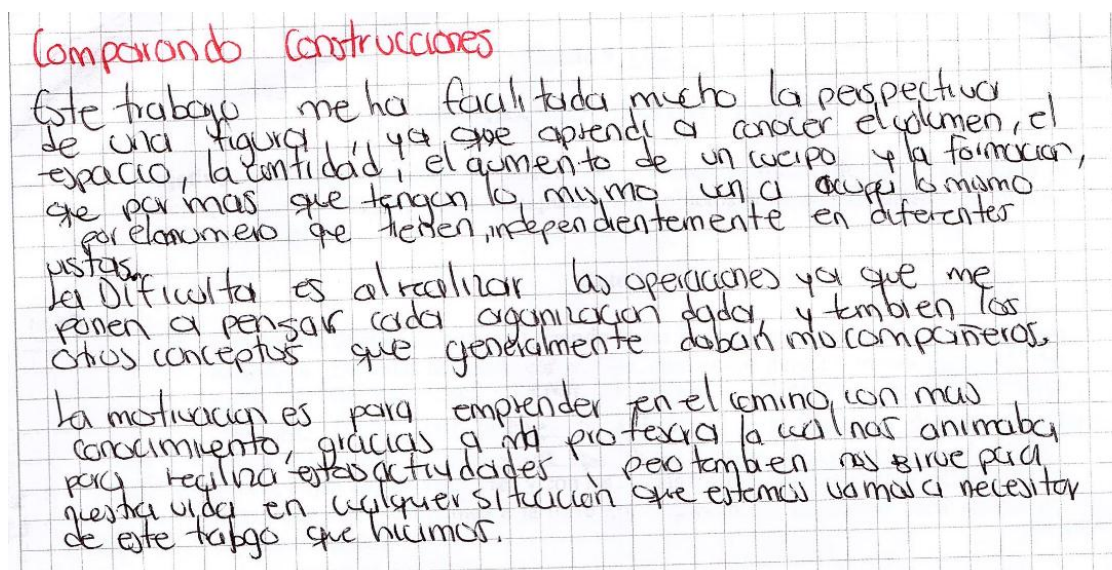


Imagen 11. A1- R (1-2) Justificación de un integrante del G6

Habilidades de Resolución. Esta habilidad concierne a establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volumen. Además, involucra tareas de medición utilizando de manera pertinente unidades de medidas.

Las acciones puestas en juego por los estudiantes para resolver la A1 fueron:

- Algunos grupos hacen uso de propiedades geométricas de manera implícita en el desarrollo de sus retos
- Reconocen que no existe un único patrón en unidades de medición, en este caso para el volumen
- Usaron de manera pertinente los materiales utilizados en estos retos para determinar el volumen de los sólidos creados por ellos.
- Usaron varias estrategias para determinar el volumen de los sólidos, por medio de contar elementos, a través de las fórmulas es decir utilizan la algebrización para obtener sus respuestas, componen y descomponen en partes los sólidos, entre otras.

Actividad 2. Volumen de algunos cuerpos redondos.

A continuación, se realiza la descripción de las tareas de aprendizaje de volumen relacionada con esta actividad y sus respectivos retos.

Esta actividad se desarrolló en el aula de clase de matemáticas de la IERD Cacicazgo, se contó con la participación de 24 estudiantes que trabajaron en grupos de 3 integrantes en una sesión de

clase de matemáticas de dos horas para el **R1**. Los grupos están abreviados por la letra G y su respectivo número al que corresponde. (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7 y G8)

A continuación, se muestra una descripción sobre el tipo de tareas de aprendizaje volumen con relación a **R1**.

Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 2- Reto 1

Para **P1** a **P10**, desde la perspectiva *geométrica-numérica*, este reto pretende de manera general llegar a una comparación a través de los elementos constitutivos de la figura aquí se busca realizar una comparación de la familia de cuerpos redondos (cilindro y cono) tomando como referencia sus bases y alturas.

También se ve relacionada la tarea de *estimación y percepción* en este **R1**, cuando se realiza a los estudiantes la siguiente pregunta ¿cuál creen que tiene mayor volumen el cilindro o el cono partiendo que los dos tienen la misma área de la base y alturas congruentes? (confirmado por los grupos al desarrollar **P (1 y 2)** esta se realiza antes de comenzar la **P (3)**, la mayoría de los estudiantes coincidieron en que como tienen la misma base y altura entonces el volumen es el mismo y tienen la misma capacidad de guardar el material que se introduzca en los sólidos.

Otra tarea que utilizan los estudiantes es la de *comparación* entre capacidad-capacidad, y comparación de volúmenes desde el punto de vista de la *medida* en las **P (3 a 5)**, En estas preguntas se induce al estudiante a que tome como patrón de medida el cono y a partir de este patrón realicen la experiencia de comprobar el número de veces que deben llenar el cono con diferentes materiales para que el cilindro quede completamente lleno.

Los estudiantes hacen uso de la propiedad de equivalencia de orden (mayor, igual o menor), esta actividad permitió a los educandos desistir de su conjetura inicial “si tienen la misma base y alturas iguales su volumen es igual”, y concluir que no siempre se cumple que si dos sólidos pertenecen a la misma familia y tienen características iguales su volumen es Igual.

Se evidencia la tarea de *comparación* en **P (1 a 7)**, todos los grupos coincidieron en que es necesario llenar tres veces de material el cono para que el cilindro quede relativamente lleno. Cabe

resaltar que en esta actividad no siempre se obtuvo que el cilindro quedara con su material a ras, debido a los diferentes tipos de material utilizados, aquí juega mucho la incertidumbre en la medida, la composición del material, entre otras)

El volumen en este caso se enfoca en el volumen interno de acuerdo con Saíz-Roldán (2003), consideramos *el volumen interior* como la cantidad de material usado (arena, azúcar, frijol, entre otros). Desde este punto de vista, los conceptos se relacionan con el volumen como capacidad.

La tarea de *aritmética* se evidencia en este R1 cuando la obtención del volumen del cilindro se halla en función del cono tomando a éste como unidad de patrón. Los grupos G1, G7 y G6 en la **P (9 a 10)** lograron concluir que: *el cono es la tercera parte del cilindro* y sin importar que tengan la misma base y alturas su capacidad es diferente. $v_{cono} = \frac{1}{3}v_{cilindro}$

De acuerdo a tus respuestas de los puntos 1 y 2, completa el siguiente enunciado:

“Dado un cono y un cilindro que tienen la misma altura y la misma base” se puede concluir que

que el cono es la tercera parte del cilindro y para que tenga la misma base, la altura no tiene la misma capacidad.

Transcripción: que el cono es la tercera parte del cilindro a pesar que tenga la misma base, la altura no tiene la misma capacidad.

Imagen 12. A2- R (1). Justificación de un integrante del G7

Los demás grupos enuncian que el volumen del cilindro es tres veces más grande que el cono.

$$v_{cilindro} = 3v_{cono}$$

Toma el cono como unidad de medida y llénalo completamente (hasta el borde) del material de cocina que le correspondió a su grupo. Vista este contenido en el cilindro y repite el paso anterior las veces que sean necesarias hasta que logres llenar completamente el cilindro, ¿en cuál de los dos sólidos hay mayor contenido de su material de cocina?

hay más contenido en el cilindro ya que nos toca hacer 3 conos para llenarlo.

¿Cuántas veces te viste que llenar el cono para que el cilindro quedara completamente lleno? lo tuvimos que llenar 3 veces para poder llenar bien el cilindro completamente tal cual a la actividad.

Aproximadamente cuántas veces es mayor el volumen del cilindro en comparación con el cono

es 3 veces mayor el volumen del cilindro, con el volumen del cono.

Intercambia su material de cocina con otro grupo que ya haya terminado y realiza nuevamente las preguntas 3 a 5. Realiza esta actividad dos veces más con diferente material.

De acuerdo a las experiencias realizadas con anterioridad que puedes deducir:

podemos deducir que aunque cambiemos el material las medidas del cono y el cilindro son iguales. ¿Por qué crees que sucede esto? Porque el cilindro y el cono como los

dos, tienen las mismas medidas y aunque cambiamos el material, siempre va a ser igual el resultado.

¿Cómo es ahora la relación anteriormente indicada? Lo que pudimos hallar es que el volumen del cilindro es 3 veces más grande que del cono.

Transcripción de las preguntas en el orden respectivo:

- Hay más contenido en el cilindro ya que nos tocó hacer 3 conos para llenarlo
- Lo tuvimos que llenar 3 veces para poder llenar bien el cilindro completamente tal cual a la actividad.
- Es 3 veces mayor el volumen del cilindro, con el volumen del cono
- Podemos deducir que aunque cambiemos el material, siempre va hacer igual el resultado.
- Lo que pudimos hallar es que el volumen del cilindro es 3 veces más grande que el cono.

Imagen 13. A2- R (1). Justificación del grupo G3.

La docente interviene aquí para concluir de acuerdo a las expresiones obtenidas por los estudiantes que el volumen del cilindro es $v_{cono} = \frac{1}{3} a_{base} * altura$. Entonces:

$$v_{cono} = \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

Habilidades de visualización puestas en juego por los estudiantes de grado noveno A2-R1.

En esta sección se muestran las habilidades de visualización, acciones y respuestas que los estudiantes utilizan en este reto.

Desde la perspectiva de la tarea de visualización se obtiene que todos los grupos construyeron el cilindro y el cono con bases iguales y alturas congruentes a partir de la representación plana del objeto tridimensional; la acción utilizada es la de construir un objeto tridimensional a partir de su representación plana y el tipo de respuesta es de construcción y dibujo, en esta respuesta ellos elaboraron las representaciones planas (orientación por parte del profesor) con las medidas asignadas por la docente.

Habilidades de Comunicación. Esta habilidad requiere identificar relaciones entre distintas unidades de medida, unidades de la misma magnitud y determinar su pertenencia.

Las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A2 en esta habilidad fueron:

Todos los grupos identificaron la relación existente entre el volumen del cilindro y el cono, además, el cono es la unidad de medida más apropiada para establecer y determinar la equivalencia entre estos dos sólidos.

Habilidades de Razonamiento. Esta habilidad está relacionada con generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el volumen de algunos sólidos esta habilidad se evidencia en las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A2 fue:

- Todos los grupos justificaron la validez del procedimiento a través de la repetición de la experiencia (más de tres veces) con diferente tipo de material, generalizando la expresión a través de la prueba de la fórmula con el material concreto.

Habilidades de Resolución. Esta habilidad concierne a establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volumen. Además, involucra tareas de medición reconociendo que el procedimiento para determinar el volumen no es único.

Las acciones puestas en juego por los estudiantes para resolver la A1 fueron:

- Algunos grupos hacen uso de propiedades geométricas de manera implícita en el desarrollo de sus retos, cuando justifican las preguntas formuladas en el R1.
- Reconocen que no existe un único patrón en unidades de medición, en esta caso para el volumen
- Usaron de manera pertinente los materiales utilizados en estos retos para determinar el volumen de los sólidos creados por ellos.
- Usaron la tarea de comparación de medida y determinaron la relación existente entre el volumen de estos dos sólidos.

Reto 2. Descubriendo el área total y volumen de un cilindro y un cono

Esta actividad se desarrolló en el aula de clase de matemáticas de la IERD Cacicazgo, se contó con la participación de 24 estudiantes que trabajaron en grupos de 3 integrantes en una sesión de clase de matemáticas de tres horas para el **R2**. Los grupos están abreviados por la letra G y su respectivo número al que corresponde (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7 y G8).

A continuación, se muestra una descripción general sobre el tipo de tareas de aprendizaje volumen con las que se relacionan **R2**, y se finaliza con las habilidades de visualización, acciones y respuestas que los estudiantes utilizan en los diferentes retos.

Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 2–Reto 2

Este reto se enmarca en las tarea de aprendizaje desde el punto de vista de *comparación, medida, aritmetización y geométrica- numérica*; se realiza en este **R2** la *comparación* de los

volúmenes de dos sólidos de la familia de los cuerpos redondos (cilindro-cilindro, cono-cono) con el fin de comparar sus medidas, interpretar las variaciones de los sólidos haciendo uso de relaciones de orden para las mediciones posición *geométrica*, También desde esta misma perspectiva al realizar comparaciones desde los elementos que constituyen el sólido, tomando como referencia el cambio del radio y altura (se modifica una de ella).

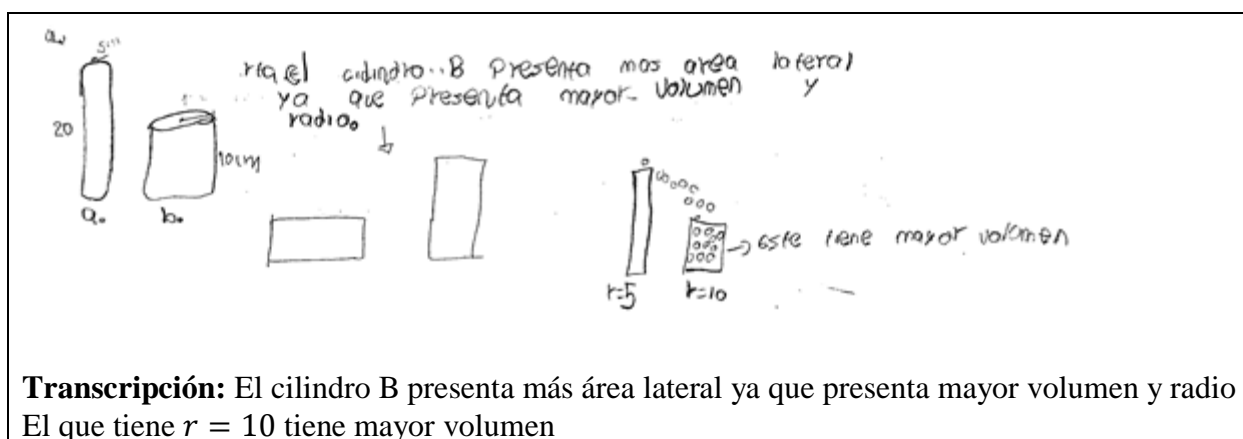
Otro tipo de tarea que se evidencia es la de *aritmización* por medio de la aplicación de fórmulas que previamente en la clase se consolidaron con la elaboración de los cuerpos geométricos realizados por cada estudiante cuando elaboraron los planos de cada sólido; la construcción del cono y cilindro permitió que la docente orientará a los estudiantes y determinaran cuánto material habían gastado en cada una de sus construcciones, desde este punto de vista en este reto el volumen y el área se ve como *número*.

El propósito de estas tareas radicó en que los estudiantes logaran hacer conjeturas partiendo de la comparación de dos sólidos de la misma clase realizando algunas modificaciones en sus elementos geométricos (altura, radio) que los componen.

Tareas de aprendizaje de volumen relacionadas para R2

En la **P1(a-b)** la tarea es de *comparación* de los elementos que constituyen los cilindros elaborados, esta tarea llevo a todos los estudiantes a sacar la misma conclusión, tienen en cuenta las dimensiones del contorno de la base de los cilindros, y consideran que la que tiene una base mayor es la que representa mayor área. No percibieron que las dimensiones del rectángulo se mantienen invariantes solo se hace una transformación (rotación) a la hoja para construir el otro cilindro.

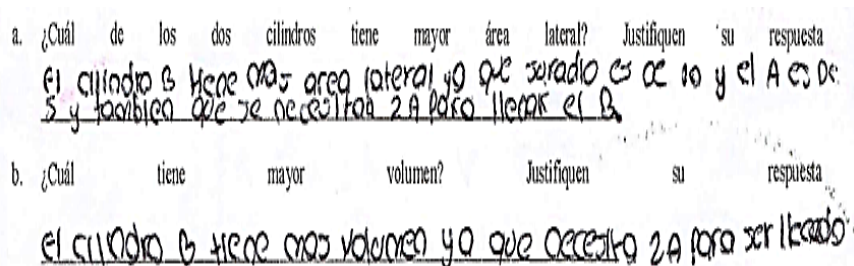
También se tiene la tarea de *medida*, la mayoría de estudiantes utilizaron el cilindro de menor área de base y lo toman como patrón de unidad de medida para identificar una relación de equivalencia. Además, todos los grupos coinciden en la relación de equivalencia $V_b = 2V_a$.



Transcripción: El cilindro B presenta más área lateral ya que presenta mayor volumen y radio. El que tiene $r = 10$ tiene mayor volumen.

Imagen 14. A2- R (2) Ejemplo de respuesta para la pregunta 1(a y b)

Con respecto a lo anterior se observa a pesar de que el G5 dibujan los rectángulos no relacionan que lo que cambia es su posición y que el área se conserva. Relacionan el tamaño del área teniendo en cuenta la relación del volumen hallada en la experiencia, por eso creen que como el volumen en B es mayor necesariamente al comparan sus áreas se mantiene la misma relación.



Transcripción de las respuesta del R2 literal a y b respectivamente:

- El cilindro B presenta más área lateral ya que su radio es de 10 cm y el de A es de 5 y también que se necesita 2A para llenar el B.
- El cilindro B tiene más volumen ya que se necesita 2A para ser llenado.

Imagen 15. A2- R (2) Ejemplo de respuesta para la pregunta 1(a y b)

En las **P (2-7)** las tareas propuestas de aprendizaje de volumen se enfocan en la aritmetización o algebrización, en donde el estudiante hace uso de las fórmulas para determinar el volumen de un cuerpo; además, involucra tareas de comparación relacionando al volumen como número y volumen como medida. Esto se evidencia cuando al comparar dos sólidos con las mismas características y se cambia en uno de ellos una medida deben conjeturar que cambio obtienen en su volumen. Tareas de este tipo permite a los estudiantes justificar relaciones de orden y comprobar el comportamiento del volumen cuando se reduce o se aumenta alguna de sus dimensiones (medidas).

Para **P2 caso (1 y 2)** las **respuestas obtenidas** por los grupos G1, G3 y G7 se mencionan a continuación: al girar el triángulo rectángulo se forma un cono y es mayor cuando el radio del círculo tiene mayor medida. La tarea de aprendizaje de volumen es de *comparación* y esta realacionada con la medida del radio.

Los demás grupo utilizan tareas de *estimación* y *percepción* haciendo alusión que el más ancho tiene mayor volumen

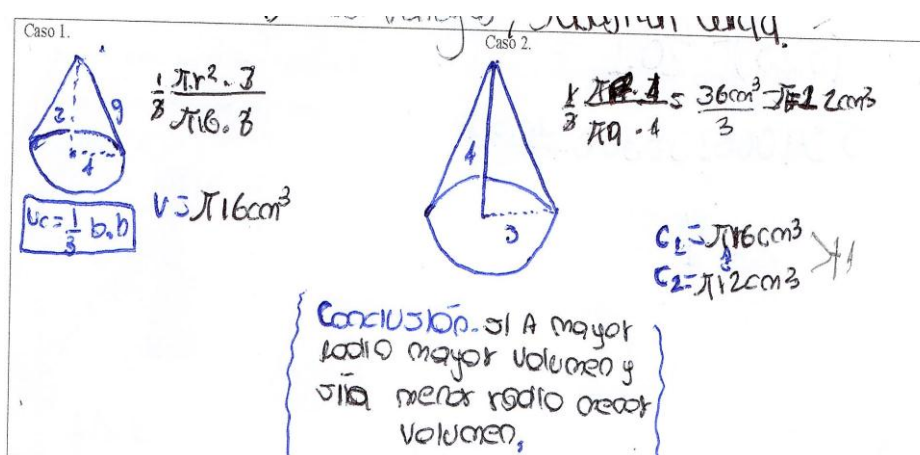


Imagen 16. A2-R (2). Ejemplo de respuesta de G1, para pregunta 2

Para **P (3)** La comparación obtenida por todos los estudiantes es de tipo aritmético y encuentran la relación de equivalencia entre los cilindros de la figura. Además, G1 realiza su justificación utilizando el concepto de razón.

Entre mayor sea el radio, el volumen aumenta respecto al cuadrado del valor del radio, esta conclusión la obtienen cuatro grupos los demás solo se limitan a aplicar la fórmula sin realizar justificaciones.

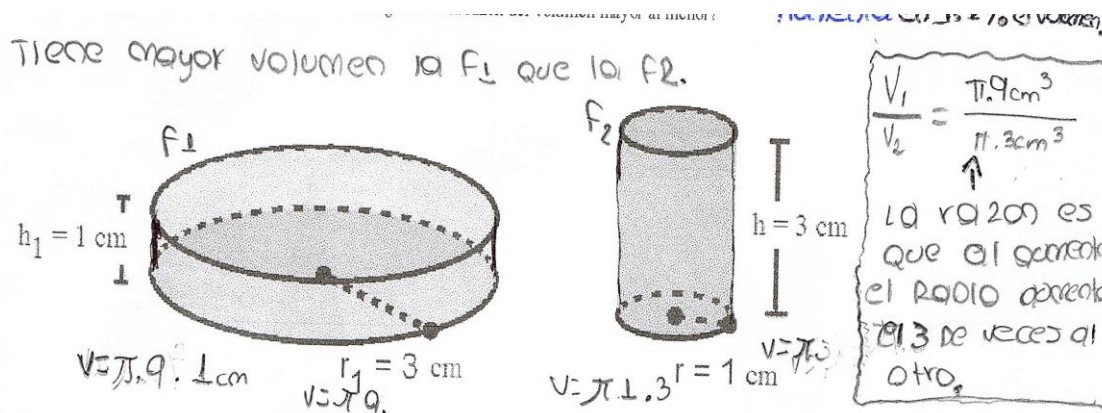


Imagen 17. A2- R (2) Ejemplo de respuesta de G1, para pregunta 3

Para **P (4)** La comparación obtenida por G1, G4, G2 y G7 es de tipo aritmético y encuentran la relación de equivalencia entre el cilindro y el cono, justificando al volumen por los resultados numéricos y se dieron cuenta que en este caso el volumen es igual debido a que tienen la misma base y el cono tiene tres veces mayor su altura que la del cilindro conduciendo a una relación de equivalencia de igualdad en los volúmenes.

Los demás grupos consideran que el cilindro tiene mayor volumen basándose en la experiencia realizada en el reto de comparación de volúmenes de cuerpos redondos y no tienen en cuenta que la altura del cono es tres veces mayor que la altura del cilindro. Haciendo uso de la tarea de *estimación* al realizar juicios subjetivos sobre la medida de los objetos en este caso partiendo que el volumen del cilindro es mayor que el del cono.

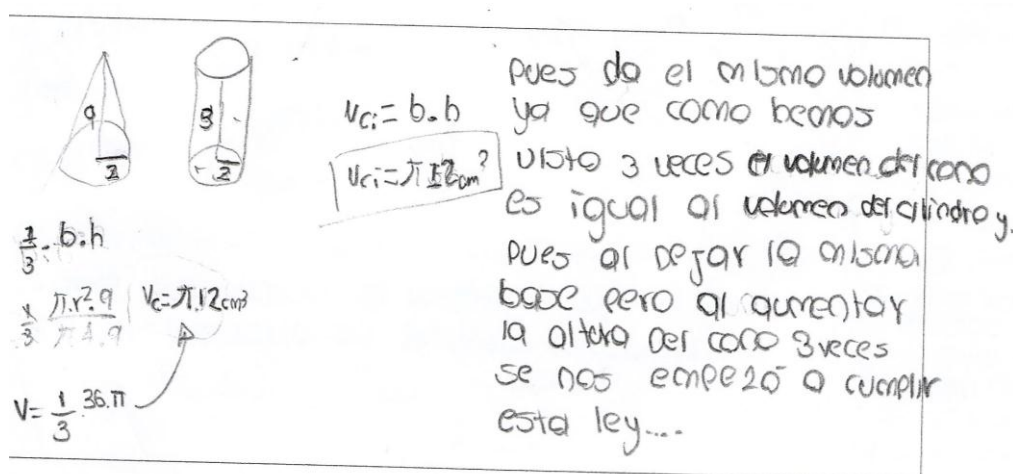


Imagen 18. A2- R (2) Ejemplo de respuesta de G1, para pregunta 4

Las **P (5 a 7)**, son tareas de volumen en donde los estudiantes utilizan las fórmulas conocidas con anterioridad por las experiencias realizadas con el material concreto, a través de modificaciones en algún elemento que conforma al sólido ellos perciben que el volumen sufre una transformación en su valor numérico.

Por otro lado, se evidencia la tarea de aprendizaje del volumen desde la perspectiva numérico-geométrica relacionada con el tamaño del volumen en la que el estudiante debe establecer una relación de orden (haciendo uso de la multiplicación, división, entre otras.) a través de la comparación de sus volúmenes entre cuerpos de la misma familia haciendo variaciones entre uno de sus elementos (altura o radio).

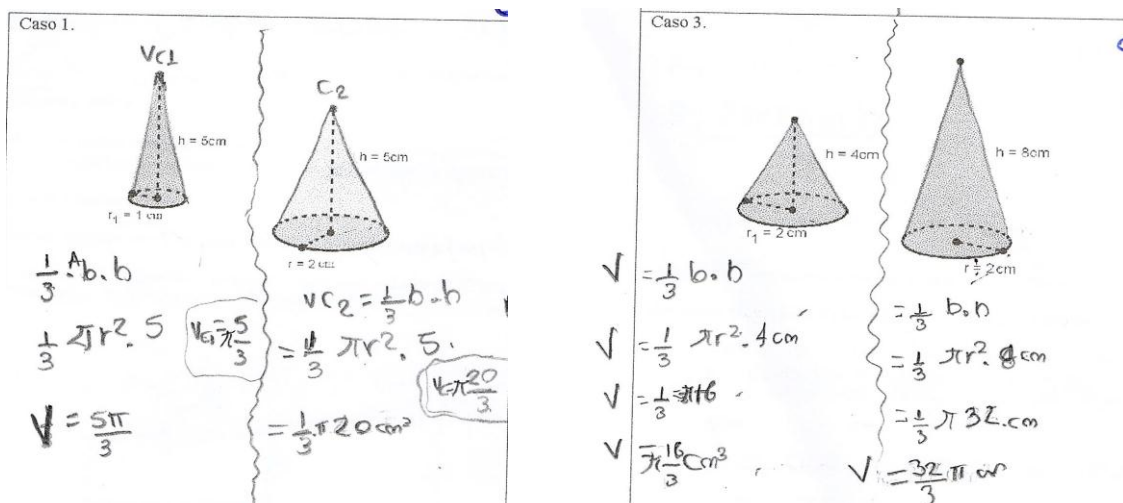
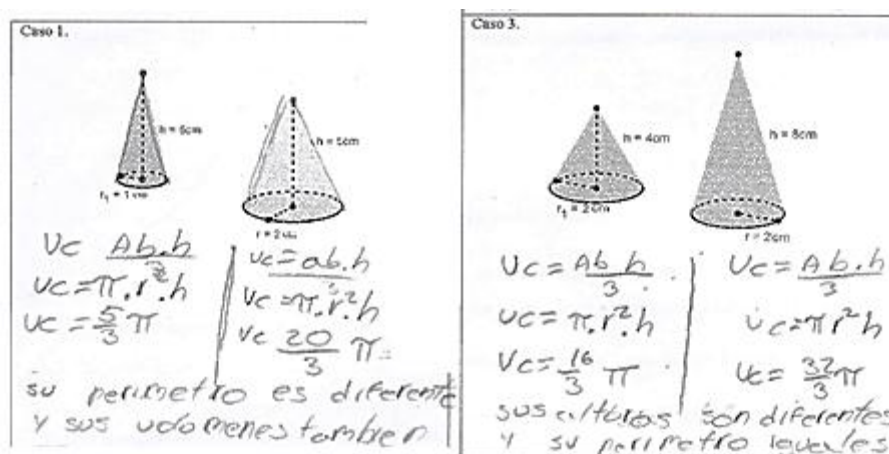


Imagen 19. A2- R (2) Ejemplo de respuesta de G1, para pregunta 5 caso (1 y 3) con relación al cono

Para **P (5)** con respecto al **caso (1 y 3)** utilizan la tarea de *aritmización*, calculando los volúmenes de forma práctica mediante el uso de las fórmulas que se dedujeron a partir de las experiencias realizadas con el material concreto en la comparación de cuerpos redondos (cono)



Transcripciones:

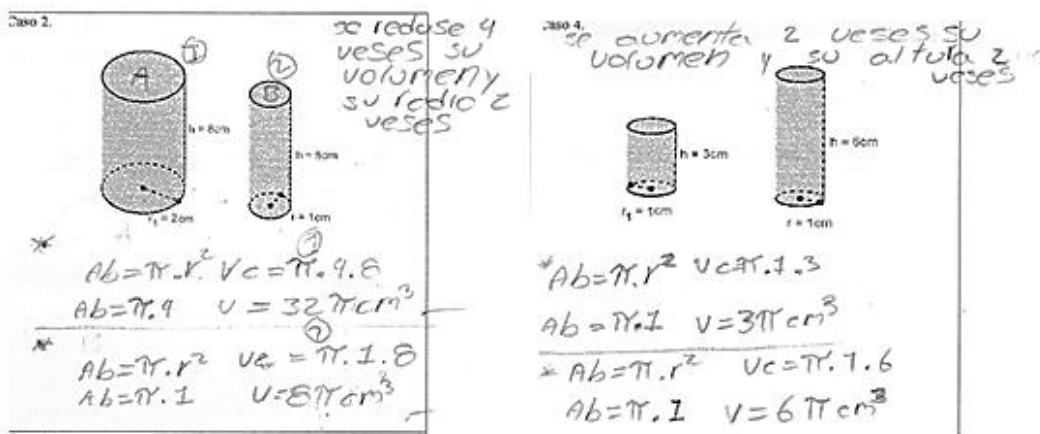
Caso 1. Su perímetro es diferente y sus volúmenes

Caso 3. Sus alturas son diferentes y su perímetro iguales.

Imagen 20. A2- R (2) Ejemplo de respuesta del G5 para el caso (1 y 3) en relación con el cono

Cabe resaltar que G5 para esta pregunta presentan dificultad en comunicar exitosamente la justificación produciendo descripciones de tipo verbal sin relacionar correctamente los elementos a los que se está refiriendo. Al realizar sus juicios utilizan en el perímetro de forma ambigua, no se identifica claramente si hace alusión al perímetro de la figura o al perímetro del área de la base del cono.

Para **P (5)** con respecto al **caso (2 y 4)** utilizan la tarea de *aritmización*, calculando los volúmenes de forma práctica mediante el uso de las fórmulas que se dedujeron a partir de las experiencias realizadas con el material concreto en la comparación de cuerpos redondos (cilindro)



Transcripciones:

Caso 2. Se reduce 4 veces su volumen y su radio 2 veces

Caso 3. Se aumenta 2 veces su volumen y su altura 2 veces.

Imagen 21. A2- R (2) Ejemplo de respuesta del G5 con respecto a la P (5) caso (2 y 4) con relación al cilindro.

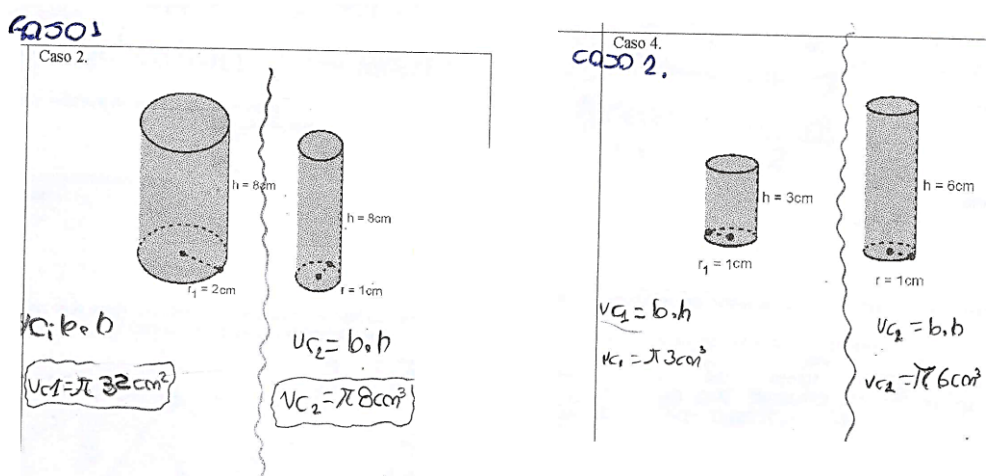
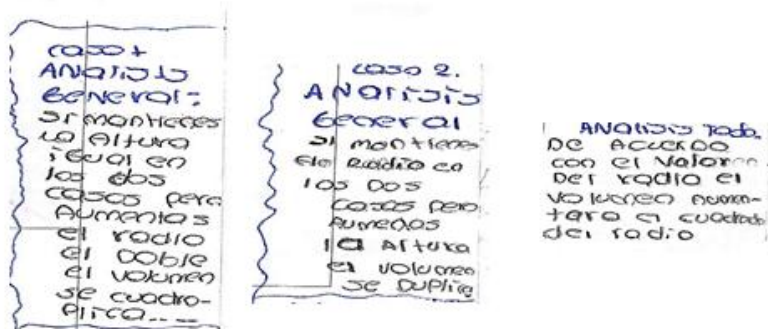


Imagen 22. A2- R (2) Ejemplo de respuesta del G5 con respecto a la P (5) caso (2 y 4) con relación al cilindro.



Transcripción análisis general para el cilindro:

- **Caso 1 (caso 2 en la guía de trabajo).**

Si mantienes la altura igual en los dos casos pero aumentas el radio el doble el volumen se cuadruplica.

- **Caso 2. (caso 4 en la guía de trabajo)**

Si mantienes el radio en los dos casos pero aumentas la altura el volumen se duplica.

- **Análisis todo.**

De acuerdo con el valor del radio el volumen aumentara el cuadrado del radio.

Imagen 23. A2- R (2) conclusiones de pregunta 5 para el caso (3 y 4) con relación al cilindro.

En las **P (6 y 7)** la tarea de aprendizaje de volumen estaba relacionada desde el punto de vista *numérico* con respecto al volumen – número donde se debe conjeturar y compara la relación del volumen del cilindro o del cono si se modifica su altura o el radio de la base, la justificación estuvo basada de acuerdo a los resultados numéricos en cada uno de los casos anteriores.

También desde el punto de vista *geométrico* se puede relacionar con el volumen ocupado desde el espacio físico que ocupa cada uno de los cuerpo (cono-cono y cilindro- cilindro)

P (6)

¿Cuándo crece más el volumen de un cilindro, cuando se duplica la altura o cuando se duplica el radio de la base?

R: crece mas cuando el radio se duplica ya que al duplicarlo se aumenta el cuadruplica Volumen.

Imagen 24. A2- R (2) conclusiones de pregunta 6 del G1 con relación al cilindro.

¿Cuándo crece más el volumen de un cilindro, cuando se duplica la altura o cuando se duplica el radio de la base?

el volume crece cuando se duplica el radio del cilindro ya que el radio va a estar al cuadrado, es decir, $\pi \cdot r^2$ lo cual hara que el volumen aumente.

Transcripción: El volumen crece cuando se duplica el radio del cilindro ya que el radio va a estar al cuadrado, es decir πr^2 lo cual hará que el volumen aumente.

Imagen 25. A2- R (2) conclusiones de pregunta 6 del G5 con relación al cilindro.

P (7)

¿Cuándo crece más el volumen de un cono, cuando se duplica la altura o cuando se duplica el radio de la base?

R: crece mas cuando el radio se duplica ya que al duplicarlo se aumenta el volumen al cuadruple.

Imagen 26. A2- R (2) respuesta de pregunta 7 del G1 con relación al cono

Además G1, G5, G5 y G7 concluyen que sin importar que sea un cono o un cilindro siempre se va a obtener mayor volumen cuando se modifica su radio, porque este aumentará de acuerdo al cuadrado del radio, mientras que al modificar la altura el volumen se duplica.

Habilidades de visualización puestas en juego por los estudiantes de grado noveno A2-R2.

Desde la perspectiva de la tarea de visualización se obtiene que la mayoría de los grupos lograron realizar conjeturas sobre como aumenta o disminuye el volumen de un cilindro o un cono si se realizan cambios en uno de sus elementos (radio o altura).

Habilidades de Comunicación. Esta habilidad requiere identificar relaciones entre distintas unidades de medida, unidades de la misma magnitud y determinar su pertenencia.

Las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A2 – R2 en esta habilidad fueron:

- La mayoría de los grupos identificaron la relación existente entre el volumen de un cilindro o un cono cuando el radio de su base aumenta el doble. Es decir, concluyeron que el volumen del cilindro o cono que se le modifica su radio por el doble tendrá cuatro veces el volumen con respecto al otro sólido.
- La mayoría de los grupos establecieron la relación existente entre el volumen de un cilindro o un cono cuando la altura aumenta el doble. Algunos grupos dedujeron que el volumen del cilindro o cono cuando se modifica su altura por el duplo tendrá el doble del volumen con respecto al otro sólido.

Habilidades de Razonamiento. Esta habilidad está relacionada con generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el volumen de algunos sólidos esta habilidad se evidencia en las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A2 – R2 fueron:

- Justificaron la validez de sus conjeturas a través del procedimiento de la aritmetización, es decir, mediante el uso de fórmulas para determinar la comparación de los volúmenes del cilindro o cono cuando se realiza alguna modificación en su radio o altura.

Habilidades de Resolución. Esta habilidad concierne a establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volumen. Además, involucra tareas de medición reconociendo que el procedimiento para determinar el volumen no es único.

Las acciones puestas en juego por los estudiantes para resolver la A2 – R2 fueron:

- Algunos grupos hacen uso de propiedades geométricas de manera implícita en el desarrollo de este reto, cuando justifican las preguntas formuladas en el R2.
- Explicaron de acuerdo a las condiciones dadas en la situación planteada lo siguiente: no importa que sea un cono o un cilindro siempre se va a obtener mayor volumen cuando se modifica su radio, porque este aumentará de acuerdo al cuadrado del radio, mientras que al modificar la altura el volumen se duplicará.

- Usaron de manera pertinente el uso de las fórmulas para determinar el volumen de los sólidos relacionados en esta actividad.
- Usaron la tarea de comparación de medida y determinaron la relación existente entre el volumen de estos dos sólidos.

Actividad 3. Volumen de algunos poliedros.

Esta actividad se desarrolló en el salón de clases de matemáticas en la IERD Cacicazgo, se llevó a cabo con la participación de 24 estudiantes que trabajaron en grupos de 3 integrantes en una sesión de clase de matemáticas de dos horas. Los grupos están abreviados por la letra G y su respectivo número al que corresponde. (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7 y G8)

A continuación, se muestran las habilidades de visualización, el tipo de tarea de aprendizaje a la que pertenece la actividad, y se muestran evidencias de lo realizado por los estudiantes en los retos propuestos en esta actividad. Aquí los estudiantes utilizarán el procedimiento de llenar una pirámide en su interior y tomarlo como patrón de medida para calcular el volumen de un prisma

Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 3-Reto 1

Las tareas de volumen que se tienen en cuenta en esta actividad tienen el propósito de acercar a los estudiantes a encontrar la relación que existe entre el volumen de un prisma y una pirámide a través de la experimentación. Tarea de *comparación* centra su atención en reconocer las semejanzas y diferencias de los sólidos, además se pretende comparar el volumen a través del contenido de los sólidos cuando se llenan de diferentes materiales.

La tarea *geométrica* permite encontrar diferencias y semejanzas entre los elementos del prisma con la pirámide. Otra tarea de volumen es la de medida a través de la elección del patrón de *medida* (la pirámide) se cuentan las veces que se debe llenar el sólido y vaciarlo en el prisma con el fin de hallar el volumen del prisma en términos del volumen de la pirámide.

Para **P (1 a 10)**, desde la perspectiva *geométrica-numérica*, este reto pretende de manera general llegar a una comparación a través de los elementos constitutivos de la figura aquí se busca realizar

una comparación de la familia de los poliedros (prisma- pirámide) tomando como referencia sus bases y alturas.

También se ve relacionada la tarea de *estimación y percepción* en este **R1**, cuando se realiza a los estudiantes la siguiente pregunta “cuál creen que tiene mayor volumen la pirámide o el prisma partiendo que los dos tienen la misma la base poligonal y alturas congruentes, esta pregunta se realiza antes de comenzar el **P (1)**, la mayoría de los estudiantes coincidieron en que como tienen la misma base y altura entonces el volumen es el mismo y tienen la misma capacidad de guardar el material que se introduzca en los sólidos.

Otra tarea que utilizan los estudiantes es la de *comparación* entre capacidad-capacidad, y comparación de volúmenes desde el punto de vista de la *medida* en las **P (1 a 8)**, En estas preguntas se induce al estudiante a que tome como patrón de medida la pirámide y a partir de este patrón realicen la experiencia de comprobar el número de veces que deben llenar el prisma con diferentes bases poligonales para que quede completamente lleno.

Los estudiantes hacen uso de la propiedad de equivalencia de orden (mayor, igual o menor), esta actividad permitió a los educandos desistir de su conjetura inicial “si tienen la misma base poligonal y alturas congruentes su volumen es igual”, concluyeron que no siempre se cumple que: si dos sólidos pertenecen a la misma familia y tienen características iguales su volumen es igual.

Se evidencia la tarea de *comparación* en **P (1 a 8)**, todos los grupos coincidieron en que es necesario llenar tres veces de material el cono para que el cilindro quede relativamente lleno. Cabe resaltar que en esta actividad no siempre se obtuvo que el prisma quedara con su material a ras, debido a los diferentes tipos de material utilizados, aquí juega mucho la incertidumbre en la medida, la composición del material, entre otras)

La tarea de *aritmización* se evidencia en este R1 cuando la obtención del volumen del prisma se halla en función de la pirámide tomando a ésta como unidad de patrón. Los grupos G1, G8 y G6 en la **P (7 a 8)**, lograron concluir que: el volumen de la pirámide es la tercera parte del volumen

del prisma y sin importar que tengan la misma base poligonal y alturas congruentes su capacidad es diferente. $v_{pirámide} = \frac{1}{3} v_{prisma}$

El volumen en este caso se enfoca en el volumen interno de acuerdo con Saíz-Roldán (2003), consideramos *el volumen interior* como la cantidad de material usado (arena, azúcar, frijol, entre otros). Desde este punto de vista, los conceptos se relacionan con el volumen como capacidad.

Los demás grupos enuncian que el volumen del prisma es tres veces más grande que el de la de la pirámide. $v_{prisma} = 3v_{pirámide}$

La docente interviene aquí para concluir de acuerdo a las expresiones obtenidas por los estudiantes que el volumen de la pirámide es $v_{pirámide} = \frac{1}{3} area_{base} * altura$. Obteniendo:

$$v_{pirámide} = \frac{1}{3} \left(\frac{p \times a}{2} \right) \times altura = \frac{p \times a \times h}{6}$$

Siendo, p (perímetro de la base poligonal del prisma), a el apotema (segmento perpendicular trazado desde el centro del polígono regular al punto medio de cualquiera de sus lados) y h altura del prisma

Habilidades de visualización puestas en juego por los estudiantes de grado noveno R1.

En esta sección se muestran las habilidades de visualización, acciones y respuestas que los estudiantes utilizan en este reto.

Cabe resaltar que la R1 se enmarcan en el tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales propuesto por Gonzato & et ál. (2013) clasificada en la interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales. Es decir que este tipo de tarea permite al estudiante convertir un sólido en otro por medio de la composición y descomposición de sus partes, construir sólidos partiendo de unidades de patrón elegidas (conteo de elementos).

Desde la perspectiva de la tarea de visualización se obtiene que todos los grupos construyeron la pirámide y el prisma con bases poligonales diferentes para cada grupo y alturas congruentes a partir de la representación plana del objeto tridimensional; la acción utilizada es la de construir un

objeto tridimensional a partir de su representación plana y el tipo de respuesta es de construcción y dibujo, en esta respuesta ellos elaboraron las representaciones planas (orientación por parte del profesor) con las medidas asignadas por la docente.

Habilidades de Comunicación. Esta habilidad requiere identificar relaciones entre distintas unidades de medida, unidades de la misma magnitud y determinar su pertenencia.

Las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A2 en esta habilidad fueron:

Todos los grupos identificaron la relación existente entre el volumen de la pirámide y el prisma, además, la pirámide es la unidad de medida más apropiada para establecer determinar la equivalencia entre estos dos sólidos.

Habilidades de Razonamiento. Esta habilidad está relacionada con generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el volumen de algunos sólidos esta habilidad se evidencia en las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A2 fue:

- Todos los grupos justificaron la validez del procedimiento a través de la repetición de la experiencia (más de tres veces) con diferente base poligonal, generalizando la expresión a través de la prueba de la fórmula con el material concreto.

Habilidades de Resolución. Esta habilidad concierne a establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volumen. Además, involucra tareas de medición reconociendo que el procedimiento para determinar el volumen no es único.

Las acciones puestas en juego por los estudiantes para resolver la A1 fueron:

- Algunos grupos hacen uso de propiedades geométricas de manera implícita en el desarrollo de sus retos, cuando justifican las preguntas formuladas en el R1.
- Reconocen que no existe un único patrón en unidades de medición, en esta caso para el volumen
- Usaron de manera pertinente los materiales utilizados en estos retos para determinar el volumen de los sólidos creados por ellos.
- Usaron la tarea de comparación de medida y determinaron la relación existente entre el volumen de estos dos sólidos.

Actividad 4. Distinguiendo el volumen de otras magnitudes

Esta actividad se desarrolló en el laboratorio de física de la IERD Cacicazgo, se llevó a cabo con la participación de 24 estudiantes que trabajaron en grupos de 3 integrantes en una sesión de clase de matemáticas de dos horas. Los grupos están abreviados por la letra G y su respectivo número al que corresponde. (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7 y G8)

A continuación, se muestran las habilidades de visualización, el tipo de tarea de aprendizaje a la que pertenece la actividad, y se muestran evidencias de lo realizado por los estudiantes en el reto propuesto en esta actividad. Aquí los estudiantes utilizarán material concreto para determinar la relación entre las unidades lineales con unidades de medidas cúbicas.

Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 4- Reto 1

Las tareas de aprendizaje que se relacionan con este tipo de actividades son de *comparación* capacidad – volumen, esta tarea busca encontrar la relación existente entre las unidades del volumen y las unidades de la capacidad, también con otras magnitudes. Tarea de *medida* orientada a identificar el sistema de medida en que se trabaja y cuando más apropiado utilizar una unidad de medida. Desde la perspectiva *numérica* se evidencia cuando se da la medida de un volumen en un sistema y se puede expresar en otro sistema de medidas.

Para nuestra actividad en este reto se buscaba realizar la medición de una cantidad de agua utilizando instrumentos de medida como botellas, jeringas, vasos (onzas). Usando instrumentos de medición, podemos dar la medida práctica aproximada de volumen de un objeto en términos de capacidad y masa. Este tipo de tareas permite obtener aproximaciones del valor de una onza en mililitros (unidades de capacidad-masa), la relación de un litro en centímetros cúbicos.

1. Tome la jeringa y llénela de agua, vacíe esta cantidad en uno de los vasos plásticos, realice esta actividad las veces que sean necesarias hasta llenar el vaso. ¿cuántos mililitros de agua son necesarios para llenar el vaso de $\frac{1}{8}$ onzas?
200 ml. ¿cuánto equivale aproximadamente una onza en mililitros?
28,57
2. ¿Cuántos vasos con agua son necesarios para llenar la botella de 1 litro? 5 vasos. Si no son exactos el número de vasos haga uso de la jeringa para que vierta el contenido que le haga falta en la botella y pueda estimar un valor exacto
3. Tome la botella de litro llena de agua y vierta este líquido en el cubo de arista de 10 cm el cubo. ¿Qué capacidad y volumen tiene el cubo dentro de él?
Tiene la capacidad de 1000 cm^3 , 1000 ml .
4. De acuerdo a la experiencia anterior se puede deducir que un cubo de volumen 1 dm^3 tiene capacidad para contener dentro de él 1000 cm^3 o 1000 ml o 1 litro .

Imagen 27. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de G3 con relación a P (1 a 4)

5. En la figura se muestran dos de las presentaciones de agua cristal.

5 Litros



300 ml



- a) Natalia quiere vaciar el agua del garrafón de 5 litros en botellas de 300 ml. ¿Cuántas botellas utilizará Natalia?


17. $5000 \div 300 = 16,666$ necesito hacer 17 botellas y nos poner la otra 100 ml para llenarla.

- b) ¿Cuántos cm^3 de agua hay en 20 botellas de 300 ml? 6000 cm^3

Imagen 28. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de G3 con relación a P (1 a 5)

1. Tome la jeringa y llénela de agua, vacié esta cantidad en uno de los vasos plásticos, realice esta actividad las veces que sean necesarias hasta llenar el vaso. ¿cuántos mililitros de agua son necesarios para llenar el vaso de ~~7~~ onzas?
200 ml ¿cuánto equivale aproximadamente una onza en mililitros?
28,571428
2. ¿Cuántos vasos con agua son necesarios para llenar la botella de 1 litro? 5 vasos. Si no son exactos el número de vasos haga uso de la jeringa para que vierta el contenido que le haga falta en la botella y pueda estimar un valor exacto
3. Tome la botella de litro llena de agua y vierta este líquido en el cubo de arista de 10 cm el cubo. ¿Qué capacidad y volumen tiene el cubo dentro de él?
La capacidad que tiene es de 1000 ml o sea es decir 1000 cm³ y esto dice que ml es lo mismo a cm³
4. De acuerdo a la experiencia anterior se puede deducir que un cubo de volumen 1 dm³ tiene capacidad para contener dentro de él 1 L o 1000 ml o 1000 cm³

Imagen 29. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de G1 con relación a P (1 a 4)



5 Litros

300 ml

- a) Natalia quiere vaciar el agua del garrafón de 5 litros en botellas de 300 ml. ¿Cuántas botellas utilizará Natalia?
Utilizara 16 botellas y una de 200 ml
- b) ¿Cuántos cm³ de agua hay en 20 botellas de 300 ml? 6000 cm³
- c) ¿Natalia quiere saber cuántos dm³ hay en 2 garrafones y medio? Explíquense a Natalia como debe realizar este cálculo.
2 garrafones y medio equivale a 12.5 dm³ entonces Natalia sabe que 1000 ml es igual a 1 dm³ entonces ella sabiendo el nº de litros lo multiplica por 1000 y le da la cantidad de dm³.

Imagen 30. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de G1 con relación a P (5) (a, b y c)

El grupo G1 no realizó un correcto uso de la tarea de aprendizaje volumen *aritmización* y *medida* (relacionada con la capacidad – capacidad) con la cantidad de botellas necesarias, pero hacen un correcto uso de la relación entre la unidad fundamental y uno de los submúltiplos de la capacidad. De acuerdo con el patrón de medida asignado en la pregunta P (5a) ellos mencionaron que necesitan solo 16 botellas de 300 ml y deben conseguir otra de 200 ml. No asimilan que

pueden hacer uso de otra botella de 300 ml sin importar que haga falta 100 ml para que está quede completamente llena.

Habilidades de visualización puestas en juego por los estudiantes de grado noveno en A4

Cabe resaltar que la A4 se enmarcan en el tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales propuesto por Gonzato & et ál. (2013) clasificada en la interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales. Es decir que este tipo de tarea permite al estudiante reconocer y transformar las unidades de medidas lineales en unidades de medidas cúbicas y viceversa. Para el desarrollo de esta tarea es necesario conocer las equivalencias entre unidades de capacidad y volumen.

Habilidades de Comunicación. Esta habilidad requiere identificar relaciones entre distintas unidades de medida, unidades de la misma magnitud y determina su pertenencia.

Las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A4 en esta habilidad fueron:

- Siete grupos identificaron la información obtenida de la experiencia realizada mediante la relación de unidades de capacidad con unidades de volumen. Es decir reconocen que una magnitud puede expresarse en diferentes unidades de medida y establecen su relación. Por otro lado un grupo se le dificulto relacionar la cantidad de agua que le cabía al cubo de volumen 1 dm^3 con la igualdad de 1 litro, 1000 mililitro, 1000 cm^3 , alcanzan a relacionar que 1 litro es igual a 1000 cm^3 reconocen esa magnitud como única unidad de medida
- Tres grupos identificaron que unidades son más apropiadas para aplicar en situaciones de contexto.
- Seis grupos identificaron que una onza es aproximadamente 30 ml con la experiencia realizada al utilizar las jeringas.
- El tipo de respuesta utilizado por los grupos es de tipo verbal y numérica.

Habilidades de Razonamiento. Esta habilidad está relacionada con generalizar procedimientos de cálculo para encontrar la relación entre unidades lineales y unidades de medidas cúbicas.

La acción que los estudiantes usaron para resolver la A4 fueron:

A través de la experiencia con el material concreto se les facilitó a la mayoría de los grupos encontrar las relaciones entre un mismo sistema de unidades $1000\text{cm}^3 = 1\text{ dm}^3$, entre un sistema lineal refiriéndose al de las unidades de capacidad con las unidades de medida del volumen trabajadas en esta experiencia $1000\text{cm}^3 = 1\text{ dm}^3 = 1000\text{ ml} = 1\text{L}$.

La mayoría de los grupos relaciona una medida de capacidad con una unidad usada en la masa. Los grupos determinan que 1 onz esta entre 28 a 32 ml esta conclusión basados en su experiencia realizada.

Habilidades de Resolución. Esta habilidad concierne a establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volumen. Además, atañe a la tarea de resolver problemas de medición utilizando de manera pertinente instrumentos y unidades de medida.

Las acciones puestas en juego por los estudiantes para resolver la A4 fueron:

- Utilizaron adecuadamente los instrumentos de medida que les permitieron determinar algunas relaciones entre los sistemas de medida.
- Reconocieron que este método es otra manera de determinar la relación que se puede encontrar entre unidades de volúmenes y capacidad. No es único el procedimiento de determinar las relaciones entre unidades de medida.

Cabe resaltar, algunas soluciones que presentaron cuatro integrantes de diferentes grupos (G1, G5, G6 y G7) respectivamente con relación a la **P (5a)**. Esta pregunta fue modificada con respecto al sujeto y el número de garrafones a desocupar en las botellas de 300 ml. A continuación se presenta la pregunta cómo se les enuncia a los estudiantes y se identifican que tipos de tareas de aprendizaje de volumen respuestas y acciones utilizan los integrantes de cada uno los grupos.



<p>David quiere vaciar el agua de los dos garrafones que se muestran en la figura, en botellas de 300 ml. ¿Cuántas botellas de 300 ml necesita David? Justifique su respuesta.</p>	<p style="text-align: center;">5 Litros 5 Litros</p>  <p style="text-align: center;">300 ml</p>  <p style="text-align: center;">...</p>
--	--

Imagen 31. Pregunta **P (5a)** modificada A4- R (1) del y aplicada a varis estudiantes de grado noveno después de tres meses de desarrollados los restos haber desarrollado

Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización relacionada con la comparación entre capacidades de la Actividad 4- Pregunta (5a)

necesita 34 botellas de 300 ml.
para vaciar los 2 garrafones porque
34 botellas equivale a 10200 ml.
sobran 200 ml.

Transcripción:

Necesita 34 botellas de 300 ml, para vaciar los dos garrafones porque 34 botellas equivalen a 10200 ml y sobran 200 ml.

Imagen 32. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de un integrante del G6 (IG6) con relación a P (5a) modificada.

David quiere vaciar el agua de los dos garrafones que se muestran en la figura, en botellas de 300 ml. ¿Cuántas botellas de 300 ml necesita David? Justifique su respuesta.

1000 ml = 1 Litro
5000 ml = 5 Litros
P/ ne ceo vacia entre 16 y 17 botellas de 300 ml por garrafon litro

5 Litros 5 Litros

300 · 32 = 9600 ml
300 · 34 = 10200 ml
P/ en total necesita 300 ml 34 botellas por mucho y por menor necesita 32 ✓

300 · 16 = 4800 ml
300 · 17 = 5100 ml

Imagen 33. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de un integrante del G1 (IG1) con relación a P (5a) modificada.

Para los integrantes de los grupos G6 y G1 (IG6 y IG1) se puede evidenciar que hacen uso de un razonamiento correcto, puesto que comprendieron de manera adecuada el contexto de la tarea de aprendizaje volumen de *medida* y *aritmización*, además, realizaron una *comparación* adecuada entre algunas unidades de capacidades (múltiplos y submúltiplos)

Para estos IG6 e IG1 evidenciaron que mostraron las habilidades de visualización con sus acciones y respuestas mencionadas a continuación:

Habilidades de visualización puestas en juego por el integrante IG6 e IG1

Habilidad de comunicación. Esta habilidad está relacionada con la identificación entre la relación entre distintas unidades de medida de cantidades de la misma magnitud y la determinación pertinente de la respuesta a la situación planteada.

Respuestas otorgadas por el IG6 e IG1 se especifican a continuación:

- Identificaron la información relacionada con la medición en la situación que involucraba magnitudes relacionadas con la capacidad
- Establecieron las relaciones entre el litro y el mililitro
- Determinaron la cantidad apropiada de las botellas de 300 ml que eran necesarias.

Habilidad de razonamiento. Esta habilidad está centrada en generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el volumen de algunos sólidos.

Respuestas otorgadas por el IG6 e IG1 se consideran a continuación:

- Explicaron por qué la cantidad de botellas necesarias a través de la descomposición de la capacidad de las botellas pequeñas determinando la cantidad correcta de botellitas.
- Justificaron la validez del procedimiento realizado en la obtención del volumen total.

Habilidad de resolución. Esta habilidad se focaliza en los siguientes aspectos: primero en la resolución de problemas de medición utilizando de manera pertinente instrumentos y unidades de medida. En segundo lugar Establece y utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volúmenes.

Respuestas otorgadas por el IG6 e IG1 se mencionan a continuación:

- Reconocieron que el procedimiento para determinar volúmenes no es único. Además, uso diferentes estrategias para determinar la cantidad correcta de botellas que permitieran vaciar la cantidad total del volumen de las garrafas.
- Explicaron la pertinencia del problema en el cálculo necesario de las botellas de 300 ml de acuerdo a las condiciones dadas en la situación planteada.

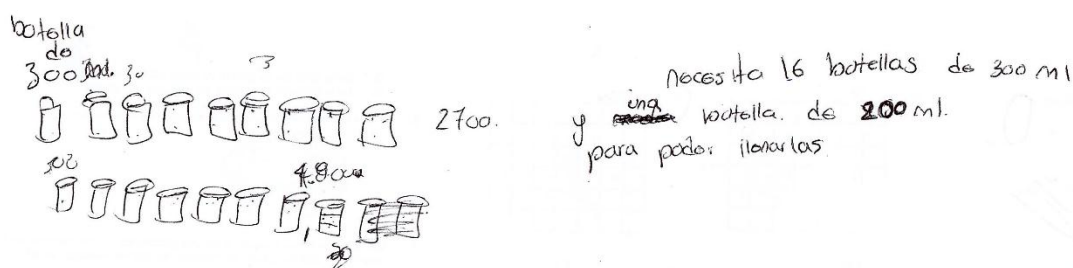


Imagen 34. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de un integrante del G7 (IG7) con relación a P (5a) modificada.

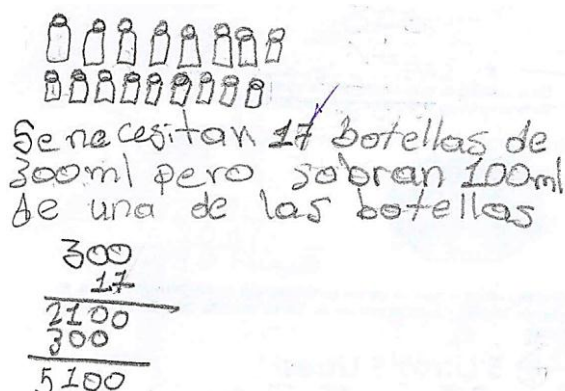


Imagen 35. A4- R (1) Ejemplo de respuesta de un integrante del G5 (IG5) con relación a P (5a) modificada.

Habilidades de visualización puestas en juego por el integrante IG5 e IG7

Para los integrantes de los grupos G5 y G7 (IG5 y IG7) se puede evidenciar que hacen uso del razonamiento pero al determinar el número de botellas IG7 considera que es mejor conseguir una botella que le permita guardar el contenido total y no hace uso de la tarea de volumen sobre la *percepción y estimación* de la capacidad que tiene la botella pequeña y que le puede servir para vaciar agua que le sobre siempre y cuando su contenido sea menor o igual de 300 ml capacidad de la botella pequeña.

IG5 hace un razonamiento correcto para un garrafón y se olvida de duplicar, doblar o sumar su resultado para obtener la información adecuada de la situación planteada.

En general, se presentaron dificultades en comprender de manera adecuada el contexto de la tarea de aprendizaje volumen de *medida y aritmetización*. Pero, realizaron una *comparación* adecuada entre algunas unidades de capacidades (múltiplos y submúltiplos), pero en el caso de IG5 la realiza solo para un garrafón y se le olvida concluir para los dos garrafones.

Para estos IG5 e IG7 evidenciaron que mostraron las habilidades de visualización con sus acciones y respuestas mencionadas a continuación:

Habilidad de comunicación. Esta habilidad está relacionada con la identificación entre la relación entre distintas unidades de medida de cantidades de la misma magnitud pero no determinan de manera pertinente de la respuesta a la situación planteada.

Respuestas otorgadas por el IG5 e IG7 se especifican a continuación:

- Identificaron la información relacionada con la medición en la situación que involucraba magnitudes relacionadas con la capacidad
- Establecieron las relaciones entre el litro y el mililitro
- No determinaron la cantidad apropiada de las botellas de 300 ml que eran necesarias.

Habilidad de razonamiento. Esta habilidad está centrada en generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el volumen de algunos sólidos.

Respuestas otorgadas por el IG5 e IG7 se consideran a continuación:

- Explicaron por qué la cantidad de botellas necesarias a través de la descomposición de la capacidad de las botellas pequeñas pero se les dificulta establecer la cantidad correcta de botellitas necesarias.
- No validaron correctamente la situación propuesta, pero si, utilizaron diferentes procedimientos en la obtención del volumen para uno o los dos garrafones.

Habilidad de resolución. Esta habilidad se focaliza en los siguientes aspectos: primero en la resolución de problemas de medición utilizando de manera pertinente instrumentos y unidades de medida. En segundo lugar Establece y utiliza diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volúmenes.

Respuestas otorgadas por el IG5 e IG7 se mencionan a continuación:

- Reconocieron que el procedimiento para determinar volúmenes no es único. Además, usaron diferentes estrategias y determinaron la cantidad de botellas aunque no de manera precisa si logran vaciar la mayor cantidad del volumen de las garrafas.

Actividad 5. Prácticas inusuales

Esta actividad se desarrolló en el laboratorio de física de la IERD Cacicazgo, se llevó a cabo con la participación de 24 estudiantes que trabajaron en grupos de 3 integrantes en una sesión de clase de matemáticas de dos horas. Los grupos están abreviados por la letra G y su respectivo número al que corresponde. (G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7 y G8)

A continuación, se muestran las habilidades de visualización, el tipo de tarea de aprendizaje a la que pertenece la actividad, y se muestran evidencias de lo realizado por los estudiantes en los retos propuestos en esta actividad. Aquí los estudiantes utilizarán otro procedimiento diferente a los recorridos en los retos anteriores para calcular el volumen de algunos cuerpos o sólidos de forma irregular.

Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización Actividad 5 - Reto 1

Para las preguntas **1 y 2. (P1 y P2)** a continuación se mencionan los desarrollos de tareas de aprendizaje volumen y habilidades de visualización.

Desarrollo de las tareas de aprendizaje y habilidades de visualización

Este reto se enmarca en la tarea de aprendizaje desde el punto de vista de medida y entorno físico. El propósito de esta tarea consistía que los estudiantes reconocieran la relación existente entre el volumen de un cuerpo irregular por el desplazamiento de líquidos.

En cuanto a la tarea de *medida* en la **P (1)**, la inmersión de los cuerpos sólidos se hizo a través del uso de vasos precipitados; 6 grupos tomaron como volumen de líquido inicial 150 ml para todas las mediciones y 2 grupos variaron este volumen. En el momento de incorporar cada uno de los materiales, el agua que se desplazaba en el vaso precipitado fue retirada por los estudiantes con una jeringa (cm^3); unos estudiantes la utilizaron para recoger el agua hasta llegar al volumen inicial escogido por el grupo y otros determinaban el valor más cercano que tenía el agua en el vaso precipitado y con la jeringa tomaban la medida del agua sobrante con el fin de determinar de el volumen del líquido final y a su vez, el volumen del sólido utilizado.

En esta pregunta el G1y G8 hicieron uso de la equivalencia entre las unidades de capacidad y unidades de volumen, esto se evidencio cuando se solicita el volumen del sólido irregular y expresan sus respuestas en centímetros cúbicos. Al respecto Olmo, Moreno & Gil (1993) mencionan que este aspecto es el más importante de la transformación por inmersión.

Volumen de la probeta <i>Vaso precipitado</i>	Sólidos irregulares				
Volumen del líquido inicial	150ml	150ml	150ml	150ml	150 ml
Volumen del líquido final	Trozo de borrador	Un frijol,	Un garbanzo,	Una ciruela pasa	Una piedra pequeña
	113 cm ³	151 cm ³	52,1 cm ³	160 cm ³	154 cm ³
Volumen del sólido irregular	13 cm ³	1 cm ³	20,1 cm ³	10 cm ³	4 cm ³

Imagen 36. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G1 con relación a **P (1)** Tarea de medida- entorno físico

El G3 y G6 no realizan la equivalencia entre medidas lineales y cúbicas. Se refieren al volumen del sólido en unidades de capacidad. Consideran que las unidades más adecuadas para medir un cuerpo son las de tipo lineal.

Volumen de la probeta	Sólidos irregulares					
Volumen del líquido inicial	150 ml	150 ml	150 ml	100 ml	100 ml	100 ml
Volumen del líquido final	Trozo de borrador	Un frijol,	Un garbanzo,	Una ciruela pasa	Una piedra pequeña	
	167 ml	150,2 ml	150,2 ml	155,2	152 ml	190 ml
Volumen del sólido irregular	17 ml	0,2 ml	0,2 ml	5,2 ml	2 ml	40 ml

Imagen 37. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G6 con relación a P (1) Tarea de medida- entorno físico

Los demás grupos solo se limitan a usar la tarea de medida enfocada a dar una respuesta numérica y no tienen en cuenta las unidades de medidas de capacidad (múltiplos o submúltiplos) ni las unidades de medidas relacionadas con el volumen (múltiplos o submúltiplos) en la solución del reto. Aquí surge otro tipo de tarea donde los estudiantes asocian el volumen de un cuerpo a un número.

Volumen de la probeta	Sólidos irregulares					
Volumen del líquido inicial	150	150	150	150	150	
Volumen del líquido final	Trozo de borrador	Un frijol,	Un garbanzo,	Una ciruela pasa	Una piedra pequeña	
	176,2	150,1	150	156,1	156,1	
Volumen del sólido irregular	16,2	0,1	0	6,1	6,1	

Imagen 38. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G7 con relación a P (1) Tarea de medida- entorno físico

En cuanto a la tarea de *medida* en la **P (2)**, la inmersión de los cuerpos sólidos se hizo a través del uso de baldes, los grupos identificaron que la unidad de medida de cada balde esta expresada en litros y con la experiencia realizada en la actividad 4, trabajan estas unidades en mililitros.

Cabe resaltar, que en el momento de introducir cada uno de los cuerpos en el balde el desplazamiento del agua efectuado por el volumen del cuerpo fue recogido por los estudiantes a través del uso de vasos precipitados (*ml*) y una jeringa (cm^3) hasta llegar al volumen inicial escogido por cada grupo con el fin de determinar el volumen del líquido final en el balde y así completar la información solicitada en la tabla de la actividad.

En esta pregunta el G1 y G6 utilizan la equivalencia entre las unidades de capacidad en su unidad fundamental de medida y un submúltiplo con las unidades de volumen, esto se evidencio cuando se solicita el volumen del sólido irregular y expresan sus respuestas en centímetros cúbicos. Además, en la medida inicial usan la medida fundamental de la capacidad.

Volumen de la taza o balde	Sólidos irregulares				
Volumen del líquido inicial	4 Lt	4. Lt.	150ml	125ml	4000 ml
Volumen del líquido final	Papaya	Guatila	Papa	Banano DORADO	Manzana
	4.925 ml	4367ml	250ml	250ml	4212.4ml
Volumen del sólido irregular	425 cm^3	367 cm^3	100 cm^3	125 cm^3	212.4 cm^3

Imagen 39. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G1 con relación a **P (2)** Tarea de medida- entorno físico

El G2, G3, G4, G5 y G8, trabajan las unidades de medida de capacidad en su mayoría del desarrollo, para el caso de las dos primeras medidas la expresan en uno de los submúltiplos del litro lo que evidencia que tienen claras las equivalencias entre estas dos unidades de medida. Consideran que las unidades más adecuadas para determinar el volumen de un cuerpo son las de tipo lineal.

G7 persiste en dar sus respuestas de manera numérica y no tiene en cuenta ningún tipo de unidades.

Volumen de la taza o balde	Sólidos irregulares					
Volumen del líquido inicial	4000 ml	4000 cm ³	4000 ml	4000 ml	4000 ml	4000 ml
Volumen del líquido final	Papaya 4925 ml	Guatila 4367 ml	Papa 221 ml	Banano Dorazno 250 ml	Manzana 4242,4	5075 ml
Volumen del sólido irregular	925 ml	367 ml	46 ml	250 ml	212,4 ml	1070 ml

Imagen 40. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G5 con relación a P (2) Tarea de medida- entorno físico

Además, **P1**, **P2** y **P3** se clasifican en la **tarea de entorno físico** de acuerdo al concepto de volumen basado en el principio de Arquímedes. En esta tarea el volumen de un objeto es la cantidad de agua desplazada cuando el objeto está sumergido en el agua.

La **P3** es de tipo abierta, en la que se le solicita al estudiante redactar un párrafo de lo aprendido en la A5. Algunas de estas respuestas se evidencian a continuación:

3. Redacte un párrafo sobre lo aprendido en la realización de este reto. Nosotros como equipo aprendimos a desarrollar actividades, como hallar el volumen de diferentes frutas y de diferentes maneras, también a comprender la similitud que existe entre un litro mil milímetros, cm³ y dm³ que es igual.

Transcripción: Nosotros como equipo aprendimos a desarrollar actividades, como hallar el volumen de diferentes frutas y de diferentes maneras, también a comprender la similitud que existe entre un litro, mil milímetros (mililitros), cm³ y dm³ que es igual.

Imagen 41. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G6 con relación a P (3) Tarea de medida- entorno físico

3. Redacte un párrafo sobre lo aprendido en la realización de este reto. Lo que aprendimos a hacer, Brian es a medir el volumen de un cuerpo, la fruta, cuando se introduce al agua, podemos observar lo que se eleva en el agua, en cantidad y aprender a saber la cantidad en total de un cuerpo en el agua, podemos saber su volumen en cm³.

Transcripción: Lo que aprendimos es a medir el volumen de un cuerpo, la fruta, cuando se introduce al agua, podemos observar lo que sube en el agua en cantidad y aprendimos a saber la cantidad en total de un cuerpo en el agua, podemos saber su volumen en cm^3

Imagen 42. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G8 con relación a P (3) Tarea de medida- entorno físico

*Aprendimos que al sumergir un objeto en un fluido siempre lo que suba verticalmente podemos determinar el volumen del objeto sumergido...

Transcripción: Aprendimos que al sumergir un objeto en un fluido siempre lo que suba verticalmente podemos determinar el volumen del objeto sumergido.

Imagen 43. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G1 con relación a P (3) Tarea de medida- entorno físico

G5 es el único grupo que relaciona la medida del volumen como una masa y G2 como un peso

3. Redacte un párrafo sobre lo aprendido en la realización de este reto.

Aprendimos que una masa puede aumentar el nivel de el agua, y que al sacar la masa se muestra lo que se redujo el, y al sacar el objeto podemos observar su volumen

Imagen 44. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G5 con relación a P (3) Tarea de medida- entorno físico

lo que nosotros aprendimos de este reto fue como medir en centímetros cúbicos de las frutas pequeñas y grandes y podíamos obtener la cantidad de lo que pesa cada fruta, tanto pequeña como grande.

Nosotros miramos que al llenar el recipiente de 4 litros de agua al poner una fruta grande el nivel del agua subía y nosotros sacábamos toda esa agua hasta que quedara los 4 litros exactos y contar toda el agua que sacamos para mirar aproximadamente cuanto pesaba esa fruta.

Imagen 45. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G2 con relación a P (3) Tarea de medida- entorno físico

Habilidades de visualización puestas en juego por los estudiantes de grado noveno

Cabe resaltar que la A5 se enmarcan en el tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales propuesto por Gonzato & et ál. (2013) clasificada en la interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales. Es decir que este tipo de tarea permite al estudiante reconocer y transformar las unidades de medidas de capacidad (múltiplos y submúltiplos) en unidades de medidas de volumen (múltiplos y submúltiplos) y viceversa. Para el desarrollo de esta tarea es necesario conocer las equivalencias entre unidades de capacidad y volumen.

Habilidades de Comunicación. Esta habilidad requiere identificar relaciones entre distintas unidades de medida, unidades de la misma magnitud y determina su pertenencia.

Las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A5 en esta habilidad fueron:

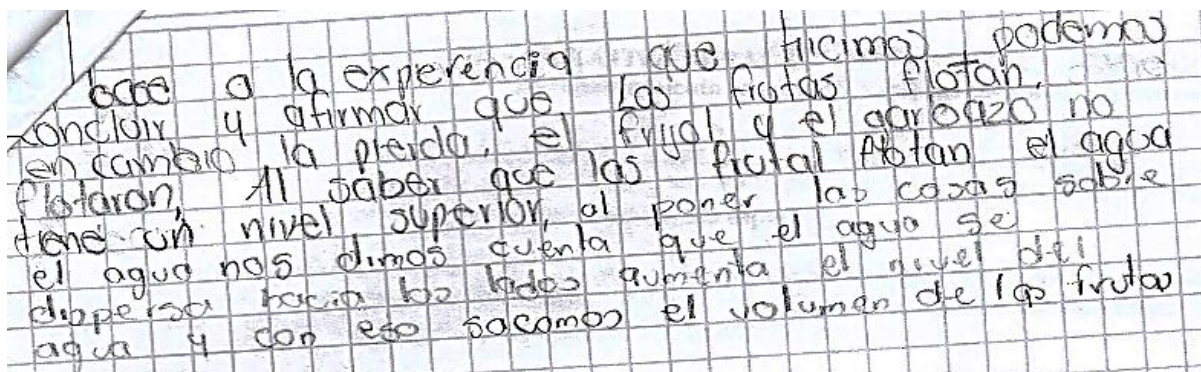
- Tres grupos identificaron la información obtenida de la experiencia realizada mediante la relación de unidades de capacidad con unidades de volumen. Es decir, reconocen que una magnitud puede expresarse en diferentes unidades de medida y establecen su relación. Por otro lado cuatro grupos solo reconocen esa magnitud como única unidad de medida y un grupo no reconoce la unidad de medida para la experiencia realizada, expresa solo cantidades numéricas.
- Seis grupos identificaron que el volumen del cuerpo se puede relacionar con el desplazamiento del líquido (Principio de Arquímedes) y algunos expresan este valor en diferentes unidades de medida.
- El tipo de respuesta utilizado por seis grupos es de tipo verbal y un grupo utiliza la respuesta de tipo numérica

Habilidades de Razonamiento. Esta habilidad está relacionada con generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el volumen de algunos sólidos esta habilidad se evidencia en la **P3**.

La acción que los estudiantes usaron para resolver la A5-P3 fue:

- G5 y G2 construyen el significado de volumen basados en la experiencia realizada asimilando que el peso y masa es lo mismo que el volumen de un cuerpo.

- Los demás grupos concluyen que el volumen de los cuerpos irregulares es representado por el líquido desplazado en cada una de sus experiencias.
- El grupo G7 generalizo que al realizar la inmersión de las frutas en el agua estas flotaban y que la piedra, el garbanzo y frijol no flotaron. Este grupo desarrolla adicionalmente una habilidad de percepción sobre la experiencia realizada, aunque no logran explicar el porqué de este fenómeno.



Transcripción: Con base a la experiencia que hicimos podemos concluir y afirmar que las frutas flotan. En cambio la piedra, el frijol y el garbanzo no flotaron. Al saber que las frutas flotan el agua tiene un nivel superior, al poner las cosas sobre el agua nos dimos cuenta que el agua se dispersa hacia los lados aumenta el nivel del agua y con eso sacamos el volumen de las frutas.

Imagen 46. A5- R (1) Ejemplo de respuesta de G7 con relación a P (3) Tarea de medida- entorno físico

Habilidades de Resolución. Esta habilidad concierne a establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volumen. Además, atañe a la tarea de resolver problemas de medición utilizando de manera pertinente instrumentos y unidades de medida.

Las acciones puestas en juego por los estudiantes para resolver la A5 fueron:

- Utilizaron adecuadamente los instrumentos de medida escogiendo el más apropiado para determinar el total del líquido desplazado y relacionarlo con el volumen del sólido utilizado.
- Reconocieron que este método es otra manera de determinar volúmenes sobre todo de cuerpos con forma irregular. Es decir, no es único el procedimiento de determinar el volumen de un cuerpo.

De acuerdo con la actividad anterior, se puede concluir que algunos estudiantes presentan falencias en determinar la relación existente entre unidades de medida lineales (capacidad) y unidades de medida (volumen).

Conclusiones

Esta experiencia encierra un proceso de reflexión que permite enriquecer nuestra labor docente, y a su vez, busca implementar soluciones que contribuyan de alguna manera a las dificultades en la conceptualización del objeto matemático volumen que muestran los estudiantes en sus procesos de aprendizaje.

El proceso investigativo es de gran importancia ya que a partir de la auto reflexión crítica el investigador realiza cuestionamientos acerca de su práctica educativa proponiendo alternativas para el desarrollo del pensamiento de los estudiantes.

La visualización es un recurso alternativo que permite formar el pensamiento espacial en los estudiantes contribuyendo a mejorar la intuición, la capacidad de entendimiento, la comprensión de los contenidos matemáticos y los contenidos en otras áreas de las ciencias.

De los resultados obtenidos se considera la importancia de implementar tareas de aprendizaje relacionadas con el volumen y la capacidad, volumen y el peso, el volumen y el área de diferentes cuerpos geométricos, ya que estas generan confusión en algunos estudiantes y no les permite determinar cuándo una unidad de medida es más apropiada que otra.

Se hace necesario implementar en el aula situaciones de contexto que involucren trabajos manipulativos y físicos en la construcción del concepto de volumen, con el fin de contrarrestar la aplicación de fórmulas.

Las actividades que involucraban conteo de unidades permitieron a los estudiantes medir el espacio ocupado y relacionar el volumen de algunos cuerpos en función del volumen de dichas unidades.

Se hace necesario seguir trabajando actividades que fortalezcan en los estudiantes las relaciones existentes entre un sistema de medida con sus múltiplos y submúltiplos. Además la relación entre diferentes sistemas de medida ya que en estas actividades se genera demasiada confusión por parte de los estudiantes. Algunos estudiantes presentan falencias en determinar la relación existente entre unidades de medida de capacidad y unidades de medida de volumen.

La visualización favorece la construcción del concepto de volumen, pues este proceso es visto como un conjunto de destrezas, que permite formar imágenes y utilizarlas de manera efectiva en la búsqueda de una interpretación o reinterpretación geométrica de los objetos, donde se tiene en cuenta sus interrelaciones, para construir este concepto.

La mayoría de los grupos de trabajo presentan dificultad en comunicar adecuadamente la información visual percibida en cada uno de los retos, produciendo descripciones verbales con vocabulario común o cotidiano sin llegar a una formalización matemática y un adecuado uso del lenguaje matemático.

En consonancia con las investigaciones hechas en el estado del arte que abordan la visualización, la enseñanza y aprendizaje de la geometría del espacio y del objeto matemático volumen en la Educación Básica, se hace necesario incluir en los planes de estudio desde el primer período académico contenidos geométricos asociados a los diferentes pensamientos (numérico-variacional, espacial-métrico y aleatorio).

Diseñar tareas de aprendizaje que involucren: competencias (comunicación, razonamiento y resolución) que encaminen a los estudiantes hacia el desarrollo del pensamiento matemático, crítico y reflexivo. Además, estas tareas deben incorporar el uso de materiales manipulables, herramientas virtuales, entre otras, que motiven e incentivan el proceso de enseñanza y aprendizaje dentro y fuera del aula.

Se presentaron dificultades y errores de tipo cognitivo, ya que algunos grupos de trabajo coinciden que para determinar el espacio ocupado por las galletas de forma circular es necesario calcular el ancho, el largo de una galleta y luego se multiplica por la cantidad de galletas que conforman la torre. Es decir, asocian fórmulas del cálculo de áreas de algunas figuras planas para determinar el volumen.

Los estudiantes mostraron una actitud positiva al desarrollar cada uno de los retos propuestos; el material concreto generó motivación en los grupos de trabajo y contribuyó a que la clase se tornará agradable. Además, el trabajo propuesto en el desarrollo de las actividades fue de manera colectiva, lo que permitió un ambiente de confianza y de socialización en donde cada integrante

del grupo aportaba sus ideas y conocimientos; fortaleciendo el trabajo de manera conjunta, simultánea, con el objetivo de lograr las metas propuestas en cada actividad.

La mayoría de las actividades diseñadas se focalizaron a desarrollar tareas de aprendizaje de volumen desde la perspectiva geométrica, numérica, de comparación, de medida y de aritmetización. Falto elaborar actividades que permitan desarrollar en los estudiantes la estimación y la percepción, tareas fundamentales en el desarrollo del pensamiento matemático y en especial el relacionado con el espacio.

El trabajo desarrollado en el aula con la implementación de las actividades permitieron detectar varias dificultades en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, lo anterior, con lleva a que la autora de esta tesis aproveche los errores presentados y diseñe estrategias de mejoramiento.

El trabajo con cubos y galletas fue motivante, porque el hecho de manipular cuerpos de distintos tamaños, les dio la oportunidad de comparar y establecer diferencias y equivalencias entre los cubos, las galletas de diferentes tamaños. Permitiendo que los grupos detectaran cuerpos con igual volumen a pesar de tener forma diferente, justificando sus respuestas por el número total de cubos o galletas de acuerdo al caso trabajado.

Bibliografía

- Acuña, C. &. (2008). Prototypes and learning of geometry. A reflection on its pertinence and its causes. *ICMI 11*.
- Alsina Catalá, C., Fortuni Aymemí, J. & Pérez Gómez, R. . (1997). *¿Por qué geometría*. Madrid, España: Síntesis.
- Alsina, C. (2007). Educación matemática e imaginación. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(11), 9-17.
- Alsina, C., Burgués, C. & Fortuny, J. (1989). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. España: Síntesis. Madrid.
- Anwandter-Cuellar, N. (2013). Conceptions d'élèves de collège sur la notion de volume. *Petit x*(93), 53-75.
- Artigue, Michele. (2018, Julio- Diciembre 11). Epistemología y Didáctica. (Cinvestav-IPN, Ed.) *El Cálculo y su Enseñanza, Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. , 18*, 1-31.
- Barrantes, M., y Balletbo, I. (2012, Julio). Tendencias actuales de la enseñanza-aprendizaje de la geometría en educación secundaria. Artículo original. *Int. Investig. Cienc. Soc.*, 8(1), 25-42.
- Beltrán, L. & Suárez, W. (2014). Proceso de visualización en geometría, perspectiva de género. *Comunicación presentada en Encuentro Distrital de Educación Matemática. EDEME1. 1*, pp. 198-217. Bogotá, Colombia: Prácticas y propuestas innovadoras en el aula de matemáticas: realidades y desafíos. MEMORIAS.
- Bishop, A. (1992). Implicaciones didácticas de la investigación sobre visualización. *Antología en educación matemática*, 29-42.
- Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 7-16.
- Blanco, L. J., & Barrantes, M. (2003). Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. *latinoamericana de investigación en matemática Educativa*, 6(2), 107-132.

- Bonilla, S., Camargo, L., Castiblanco A. & Vanegas, Yuly. (2012). Pensamiento Espacial y Sistemas geométricos: Análisis de la propuesta de Estándares. In P. & Rojas, & A. Asociación Colombiana de Matemáticas Educativa (Ed.), *Cuaderno No. 5. Estándares Curriculares - Área Matemáticas: Aportes para el análisis* (pp. 1-80). Bogotá: Grupo Editorial Gaia.
- Burgués, C., Alsina, C., & Fortuny, J. M. (1998). Materiales para construir la geometría. Síntesis. Madrid.
- Campistrous, L., & Rizo, C. (2007). Geometría dinámica en la escuela, ¿ mito o realidad?. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 13(45), 61-79.
- Catalá, C. A. (2001). Geometría para ciudadanos tridimensionales. *Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria*, (19), 65-70.
- Clements, D. & Battista, M. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. En D. Grouws (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics*. 34-67.
- Conrado Torres, J. R. (2018, 02 10). *Universidad Externado de Colombia*. Retrieved 05 04, 2019, from https://bdigital.uexternado.edu.co/bitstream/001/1131/1/CAA-spa-2018-Analisis_e_identificacion_de_las_caracteristicas_de_los_cuerpos_que_se_generan_al_girar.pdf
- De Guzmán, M. (1996). In *El papel de la visualización. En: El Rincón de la Pizarra*. Madrid: Pirámide.
- Duarte, A. (2013). El geoplano: una alternativa para mejorarla enseñanza de la geometría. *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.*(26), 523-531.
- Echeverry, A., Camargo, L. y Gutiérrez, Á. (2017). El tránsito del plano al espacio: propuesta de modelo de diseño de tareas con Cabri 3D. (P. Perry, Ed.) *Memorias del 23° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 75-80.

- Fernández, T. (2013, Septiembre 5,6 y 7). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 19-42.
- Fernández, T. (2014). Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría. *Memorias IX Festival Internacional de Matemática*, 21-33.
- Fiorentini, Dario. & Lorenzato, Sergio. (2010). *Investigación en Educación Matemática*. AUTORES ASOCIADOS LTDA.
- Gamboa, A., & Ballesteros, A. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría, la perspectiva de los estudiantes. *Electrónica Educare*, XIV(2), 125-142. Recuperado el 30 de Julio de 2017
- Gamboa, R., & Ballesteros, E. (2009. Año 4). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática.*, 4(5), 113-136. Retrieved from <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/download/6915/6601>
- García Martínez, J. (2018). *Superficie y volumen*. Retrieved Abril 23, 2019, from https://scholar.google.es/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=Superficie+y+volumen+Jessica+Garc%C3%ADa+Mart%C3%ADnez&btnG=
- Gómez, P., Mora, M. & Velasco, C. (n.d.). Análisis de Instrucción. In *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula* (pp. 197- 268).
- Gonzato, M., Godino, J., Contreras, Á. & Fernández, T. (2013, Septiembre 5, 6 y 7). Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 311- 318.
- Gonzato, M.; Fernández, T. & Godino, J. (2011, Julio). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 99-117.

- Guillén, G., Gutiérrez, A., Jaime, A., & Cáceres, M. (1992). La enseñanza de la Geometría de los Sólidos en la E.G.B. *Memoria final del proyecto de investigación. Institución Valenciana de Estudios e Investigación "Alfonso el Magnánimo" Valencia, España*. Retrieved 12 07, 2017, from <https://www.uv.es/gutierre/archivos1/textospdf/GutOtr92.pdf>
- Gutiérrez Ángel & Jaime Adela. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxix TED* (32), 55-70.
- Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. In *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educ. Mat*, 44-59.
- Gutiérrez, A. (1998). Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. *Ema*, 3(3), 193-220.
- Gutiérrez, A. (2006). La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría. *Geometría para el siglo XXI, Síntesis, Madrid*.
- Gutiérrez, Á., & Jaime, A. (1991). El Modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la geometría. *Educación Matemática*, 3(02), 49-65.
- Gutiérrez, A., Salvador, R., & et al. (1989-1991). Modelo del Razonamiento Geométrico de Van Hiele. In *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Media basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele* (Vol. 7, pp. 11-29). Valencia: Ministerio de Educación y Ciencia C.I.D.E.
- Hernández, R., Fernández, C & Baptista, M. (2014). *Metodología de la Investigación* (Sexta edición ed.). (M.-H. Education, Ed.) INTERAMERICANA EDITORES, S.A. Retrieved from [file:///D:/usuario/Downloads/Metodologia%20de%20la%20Investigacion%20-%20Sampieri%20\(6ta%20edicion\)%20\(1\).pdf](file:///D:/usuario/Downloads/Metodologia%20de%20la%20Investigacion%20-%20Sampieri%20(6ta%20edicion)%20(1).pdf)
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGRAW-HILL.
- Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: two sides of of the coin. (C. f. Mathematics, Ed.) *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61-76.

- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, P. y J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the psychology of mathematics education*. 70-95. Retrieved from <http://matmarsarol.blogspot.com/2013/09/antologia-sobre-la-ensenanza-de-la.html>
- Hoyos, E. A. & Acosta, C. A. (2014). Mejoramiento de habilidades de visualización espacial mediante el uso de un ambiente informático. *XV Encuentro Virtual Educa Perú 2014*, (pp. 1-16).
- Martínez, M. & Solano, A. (2012). Visualización como antesala en la resolución de problemas matemáticos. *VIII FESTIVAL INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA*. Sede Chorotega, Universidad Nacional, Liberia, Costa Rica.
- MEN. (1998, Junio 7). Serie lineamientos curriculares Matemáticas. *Lineamientos curriculares- Ministerio de Educación de Colombia*. Santa Fe de Bogotá, D.C., Bogotá, Colombia: Magisterio. Retrieved Junio 27, 2018, from https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf
- MEN, Matriz de Referencia Matemáticas. Siempre día E. (2016). Retrieved from <http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/node/88958>:
http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles-352712_matriz_m.pdf
- Montoro-Medina, A., Gil-Cuadra, F. y Moreno-Carretero, M. F. (2016). Comportamiento de estudiantes de maestro al medir el volumen. *Investigación en Educación Matemática XX. SEIEM*, 355-364.
- Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S. & Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study. *Zdm*, 47(3), 377-390.
- Nieto Martín, S. (2012). *Principios, métodos y técnicas esenciales para la investigación educativa*. DYKINSON, S.L.

- Olmo, M.A. del , Moreno, M.F. & Gil, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo mas qué el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis, S.A.
- Piaget, J., Inhelder, B. y Szeminska, A. (1970). The child's conception of geometry. Londres, GB: Routledge and Kegan Paul.
- Pizarro, N., Gorgorió, N. & Albarracín, Ll. (2016, Marzo). Caracterización de las tareas de estimación y medición de magnitudes. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 91, 91-103.
- Potari, Despina & Spiliotopoulou, Vassiliki. (1996). Children's Approaches to the Concept of Volume. *Science Education*, 80(3), 341-360.
- Ramírez, R. (2012). Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático. 1- 410. Granada.
- Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. In L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, . . . M. Socas, *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Madrid: ice - Horsori. Retrieved Agosto 07, 2018, from <http://funes.uniandes.edu.co/521/2/RicoL97-2528.PDF>
- Rivera, S. (2014). Medida de área y volumen en contextos auténticos: Una alternativa de aprendizaje a través de la modelación. Caucaasia-Antioquía. Retrieved from <http://funes.uniandes.edu.co/12115/1/Rivera2014Medida.pdf>
- Rojas, O. (2009). Modelo didáctico para favorecer la enseñanza aprendizaje de la Geometría del espacio con un enfoque desarrollador. (*Doctoral dissertation, Tesis en opción al grado científico de Doctor en Ciencias Pedagógicas, Instituto Superior Pedagógico "José de la luz y caballero*). Holguí. Cuba.
- Romo, Avenilde., & Jaimes, Edgar. (2013, Octubre). Integrando el uso de habilidades espaciales y geométricas para el aprendizaje significativo del concepto de volumen de sólidos con estudiantes de dibujo técnico. *Educación científica y tecnológica*, 462-466.
- Sainz, O. (2014, Junio). La visualización en geometría: un estudio en 3º ESO. 1-48.

- Sáiz, R. M. (2003, Mayo - Agosto). Algunos objetos mentales relacionados con el concepto de volumen de maestros de primaria. *Revista Mexicana de Investigación Educativa Vol. VIII*, 8(18), 447-478.
- Sáiz, R. M. (2005). Transferencia de resultados de investigación al aula: El caso del volumen. Retrieved from <http://es.scribd.com/doc/52362622/Una-discusion-sobre-el-concepto-matematico-de-volumen-con-fines-didacticos>.
- Sáiz, R. M. (n.d.). *El Volumen ¿Por dónde empezar?* Retrieved from <http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/docs/asig4/ConfMagist.pdf>
- Sanchis, Sonia. & Guillén, Gregoria. (2013, Septiembre 5,6 7). El volumen. Observación de procesos de aprendizaje de contenidos de la enseñanza. *Investigación en Educación Matemática XVII SEIEM*, 511-522.
- Sarukkai, S. (2008). Mathematics and Visuality. *National Institute of Advanced Studies. Indian Institute of Science Campus. ICMI*.
- Suárez Moya, W. A., León Corredor, O. L. (2016, Julio- diciembre). El aprendizaje de la visualización espacial en niños y en niñas. *Revista Horizontes Pedagógicos*, 18(2), 110-119.
- Torres Ponjuán, D. (2009,, Diciembre). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. *ACIMED*, 20(6), 161-174. Retrieved 02 28, 2019, from http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1024-94352009001200005&lng=es&tlng=es.
- Van Hiele, P. M. (1957, Julio 4). *El problema de la comprensión (en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría) (tesis doctoral)*. Retrieved Agosto 09, 2018, from (Universidad de Utrecht: Utrecht, Holanda). (Traducción al español para el proyecto de investigación Gutiérrez y otros, 1991):. <https://www.uv.es/apregeom/archivos2/VanHiele57.pdf>

Villarroel, Silvia. , Sgrecia, Natalia. (2011, Noviembre). Materiales didácticos concretos en Geometría en primer año de secundaria. *NÚMEROS, revista de Didáctica de las Matemáticas* , 73-94.

Villers, M. (2008). Algunos desarrollos en la enseñanza de la geometría. *Software de Geometría Dinámica*.

Anexos

Anexo 1. Encuesta a Docentes de la IERD Cacicazgo

La siguiente encuesta está dirigida a docentes que orientan el área de matemáticas en la IERD Cacicazgo.

Objetivo. Conocer la situación actual de la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la Educación Básica Secundaria de la institución.

1. En que grados orienta la enseñanza de las matemáticas: _____

2. Marque con una X los medios de enseñanza en geometría que generalmente utiliza en el aula de clase.

<input type="checkbox"/> Textos escolares <input type="checkbox"/> Computador <input type="checkbox"/> Origami <input type="checkbox"/> Tablero <input type="checkbox"/> Regla, escuadra, compás y transportador <input type="checkbox"/> Manipulación de cuerpos geométricos o materiales concretos	<input type="checkbox"/> Programas de Software dinámicos <input type="checkbox"/> Aplicación de fórmulas y definiciones en la solución de ejercicios. <input type="checkbox"/> plantea situaciones problemas relacionadas con el contexto <input type="checkbox"/> Otros. Cuales. _____ _____ _____ _____
---	---

3. ¿En qué período académico enseña la geometría?

<input type="checkbox"/> En todos los períodos	<input type="checkbox"/> Finalizando el año lectivo	<input type="checkbox"/> En un período. Cuál _____
<input type="checkbox"/> No la enseño. Porque razón _____		

4. ¿En la enseñanza de la geometría, cuáles son las temáticas que usted orienta en el aula de clase?

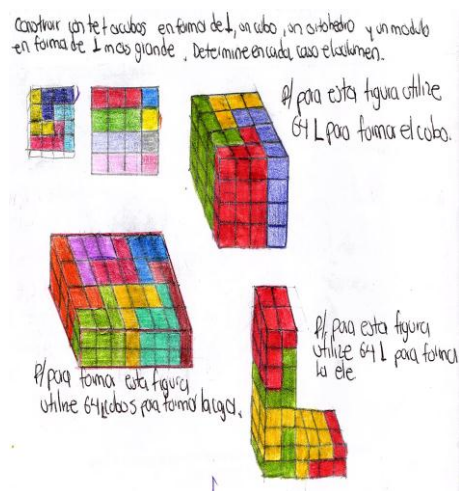
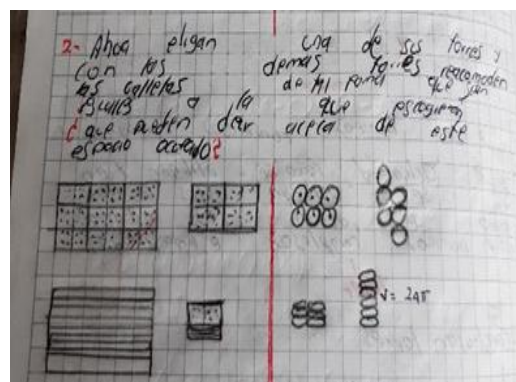
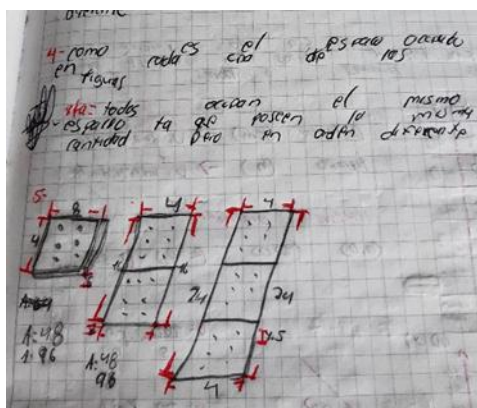
5. ¿Qué dificultades encuentra en la enseñanza de la geometría plana y espacial en la Institución?

6. ¿Qué dificultades encuentra en el aprendizaje de la geometría plana y espacial en los estudiantes?

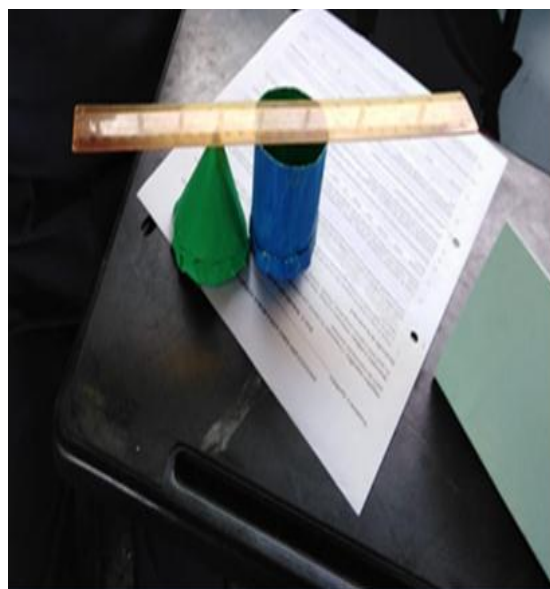
7. ¿Qué aspectos, habilidades y hábitos considera usted que deben tener los estudiantes para un aprendizaje exitoso en geometría?

Anexo 2. Evidencia fotográfica de las actividades.

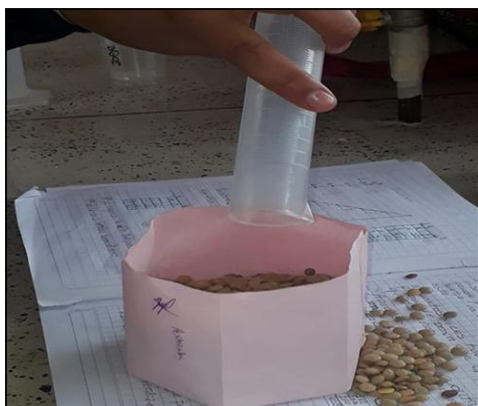
Actividad 1-Reto (1 y 2). Comparando construcciones



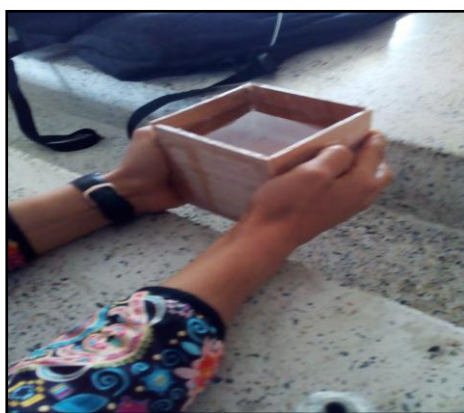
Actividad 2- Reto (1 y 2). Relación del volumen de un cilindro y cono de bases iguales y alturas congruentes



**Actividad 3. Relación del volumen de un prisma recto y una pirámide de base poligonal
igual y alturas congruentes**



Actividad 4. Comparando la unidad fundamental de la capacidad con otras unidades de medida.



Actividad 5. Determinando el volumen de algunos sólidos irregulares.