CONCEPCIONES Y CREENCIAS DE LOS PROFESORES EN EL OBJETO SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: CARACTERIZACIÓN DE LA DIMENSIÓN EPISTÉMICA

CESAR ALEJANDRO GARZÓN ROBELTO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
TUNJA
2020

CONCEPCIONES Y CREENCIAS DE LOS PROFESORES EN EL OBJETO SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES: CARACTERIZACIÓN DE LA DIMENSIÓN EPISTÉMICA

CESAR ALEJANDRO GARZÓN ROBELTO

Trabajo de grado, requisito parcial para optar el título de Magister en Educación Matemática, dentro del marco del proyecto de investigación con código SGI número 2672 del Grupo Álgebra y análisis UPTC.

Directora: Dra. OMAIDA SEPÚLVEDA DELGADO

FVTVRVM ÆDIFICAMVS

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

TUNJA

2020

A mis padres Salvador y Méryda

Por haberme inculcado siempre el estudio y a nunca desfallecer.

A Rosalba y Magdaly

Por su paciencia y amor incondicional.

Agradecimientos

Mis más profundos agradecimientos a:

A la Dra. Omaida Sepúlveda Delgado por ser la persona que acepto dirigir esta tesis de maestría en su inicio, y me regaló sus ideas para el desarrollo de la misma, gracias por sus grandes concejos y aportes durante el proceso de formación, por su plena disposición y toda su paciencia en la realización de esta investigación.

A todo el grupo de docentes que conforman el programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, por su entrega y compromiso durante el proceso de formación.

A mis compañeros Miguel, Diego y Sergio que sin duda alguna, ofrecieron su amistad y apoyo en todo momento, por sus ánimos, sus concejos y su colaboración ante las inquietudes durante el desarrollo de la investigación.

Agradezco a mi familia, especialmente a mis padres quienes nunca dejaron de creer en mí y quienes siempre me han apoyado de manera absoluta en todas las decisiones de mi vida.

A mi esposa Rosalba, por su apoyo incondicional en mis ideas sin importar cuales son, a Magdaly por haber llegado a mi vida.

Índice de Contenidos

Índice de Figuras

Índice de Tablas

Introducción

Desde las primeras civilizaciones, la humanidad ha intentado dar respuesta a situaciones problemas presentes en los diferentes contextos vivenciales de las personas, llegando a desarrollar numerosas técnicas para trabajar con el objeto matemático que hoy se conoce como los Sistemas de Ecuaciones Lineales. Bajo esta perspectiva se realiza un estudio con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿Qué concepciones y creencias tienen los profesores de matemáticas del desarrollo histórico-epistemológico del objeto sistema de ecuaciones lineales, respecto a los significados pretendidos en los procesos de enseñanza de este objeto matemático? en esta dirección la investigación acoge como marco teórico y metodológico al Enfoque Ontosemiotico del Conocimiento y la Instrucción matemáticos – EOS, basada en un paradigma interpretativo conduciendo el estudio a un enfoque de investigación cualitativo de tipo descriptivo – exploratorio y fenomenológico.

El desarrollo del trabajo se estructura en 6 capítulos: en el primer capítulo, se muestra el análisis de investigaciones enfocadas a describir la compresión de los Sistemas de Ecuaciones Lineales - SEL, según las secuencias didácticas diseñadas para la enseñanza de este objeto matemático e investigaciones basadas en estudios sobre los significados de los objetos matemáticos: ecuación y ecuación lineal en dos incógnitas, donde se resalta la complejidad de la emergencia de los conceptos matemáticos y las implicaciones en el aprendizaje de los estudiantes. Posteriormente, se presenta la descripción de la problemática, dividido en dos secciones: la descripción del problema y la formulación del problema, para llegar a establecer la pregunta de investigación del estudio. Finalmente, se describen los objetivos de la investigación y la justificación del estudio.

En el segundo capítulo, se presentan las herramientas y nociones teóricas con las cuales se desarrolla la investigación: el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), descrito por Godino y colaboradores. Este marco teórico propone un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos, los cuales hacen parte de las dimensiones del conocimiento didáctico matemático (CDM) del profesor de matemáticas, además se especifican los conceptos relacionados con la visión de las concepciones y creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, respecto a un marco general (Thompson 1992; Ponte 1994; Pajares 1992; Llinares 1991).

En el tercer capítulo, se presenta la metodología con la cual se desarrolló la investigación; el estudio se ajusta en un paradigma interpretativo y un enfoque de investigación cualitativa el cual es adecuado para el desarrollo del estudio. También, se describe el diseño y las fases de la investigación que permitieron dar cumplimiento al objetivo general y a los objetivos específicos. En este sentido, se describen las unidades de análisis que permiten caracterizar la dimensión epistémica del conocimiento del profesor en cuanto al objeto SEL y en relación con los significados de referencia que usa el profesor para establecer el significado pretendido y su correcta implementación en el aula de clase y finalmente, en el apartado se dan a conocer las técnicas e instrumentos de recolección de información y las técnicas para el análisis de los datos.

En el cuarto capítulo, se presenta cómo se concibe al conocimiento didáctico matemático del profesor propuesto por Godino (2009) y su relación con el significado global del objeto matemático según la identificación de los sistemas de prácticas desarrolladas a lo largo de la historia, para ello se inicia con la reconstrucción del estudio histórico-epistemológico del objeto SEL, partiendo de la problemática de identificar las situaciones problemas de la realidad, que involucran los SEL en las diferentes épocas de la humanidad: época antigua, edad media, edad moderna y edad contemporánea. El estudio histórico-epistemológico se utiliza para caracterizar el significado global del objeto SEL, a partir de la identificación de los sistemas de prácticas matemáticas, y las configuraciones epistémicas; esto permite llegar a la caracterización de los significados parciales del objeto matemático. En esta dirección, se muestra cómo las configuraciones epistémicas se relacionan entre sí de acuerdo a los significados parciales, permitiendo realizar el esquema del significado global del objeto SEL y finalmente, se realiza el análisis conceptual del objeto SEL para describir los elementos y conceptos básicos afines con el objeto matemático SEL y su relación con las matrices y los determinantes; para llegar a los esquemas de la estructura conceptual y al significado global de referencia del objeto sistemas de ecuaciones lineales.

El quinto capítulo, trata del diseño del cuestionario que permitió analizar las concepciones y creencias del profesor de matemáticas de grado noveno; el uso de los significados parciales y las implicaciones didácticas en cuanto a los significados pretendidos por el profesor, para esto se describe el cuestionario de preguntas en donde se indaga por la configuración epistémica que construye el profesor; su pensamiento variacional y las implicaciones en la enseñanza ante situaciones problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL. Además, se establecen las categorías de análisis para el cuestionario y se presentan los resultados obtenidos del análisis al cuestionario.

En el sexto capítulo, se realiza el análisis a los resultados de la investigación, donde se muestran los principales aportes, los cuales permitieron dar respuesta a la pregunta de investigación y a los objetivos trazados para la investigación; se describen las actividades realizadas para el desarrollo de las fases de la investigación que permitieron dar cumplimiento al logro del objetivo general del estudio, el cual corresponde a caracterizar las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas respecto a los significados de referencia identificados en el desarrollo histórico-epistemológico del objeto sistema de ecuaciones lineales y a los significados pretendidos por ellos para los procesos de enseñanza del objeto. Por último, se presenta las apreciaciones hechas por el autor al estudio histórico-epistemológico del objeto SEL y a los métodos de solución para los mismos.

Capítulo 1. Marco Investigativo

"No hay certeza en la ciencia si no se puede aplicar una de las ciencias matemáticas."
Leonardo da vinci (1452-1519)

En el presente capítulo, se muestra el análisis de investigaciones desde dos perspectivas. En primer lugar, se presentan los trabajos de investigación enfocados en describir la compresión de los Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL), en diversas secuencias didácticas diseñadas para la enseñanza de este objeto matemático, además se presentan investigaciones enfocadas directamente en la realización del análisis de textos. En segundo lugar, se describen las investigaciones basadas en estudios sobre los significados de los objetos matemáticos: ecuación y ecuación lineal en dos incógnitas, donde se resalta la complejidad en la emergencia de los conceptos matemáticos y las implicaciones para el aprendizaje de los estudiantes en el aula de clase. Se presentan estos estudios, como parte de la evidencia de la problemática que presenta el objeto SEL, tanto para su enseñanza como en su aprendizaje.

A continuación, se establece el planteamiento del problema, dividido en dos secciones: la descripción del problema y la formulación del problema, para llegar a la pregunta de investigación del estudio. Finalmente, se describen los objetivos de la investigación y la justificación al estudio.

1.1. Antecedentes

Las presentes investigaciones se sustentan en el aporte teórico de estudios que se han realizado en torno a los SEL, ya que al hacer el rastreo bibliográfico, se observa que han sido muchos los trabajos que se relacionan con este objeto matemático. Se da relevancia a los estudios que se consideran como antecedentes importantes para la presente investigación, ya sea porque la temática que abordan se relacionaba con la del presente trabajo o porque sus resultados dieron una visión más amplia del tema en cuestión. De esta forma, con el análisis de las investigaciones en el objeto de los SEL, se evidencia la importancia del estudio del objeto matemático, centrado en la caracterización de la dimensión epistémica como una de las componente del Conocimiento Didáctico Matemático del profesor, según el modelo definido por Godino (2009).

1.1.1. Estudios en la comprensión del objeto Sistemas de Ecuaciones Lineales

En esta sección se presenta un análisis a investigaciones relevantes acerca del objeto de los SEL y su conjunto solución. Un primer estudio donde se profundiza en el objeto SEL, específicamente en las *solucione*s, es el de Ochoviet (2009), titulado: "Sobre el concepto de *solución* de un sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas." La investigación se realiza en una institución educativa privada de Uruguay con varios grupos de estudiantes de edades entre los 14 - 15 años y 17 - 18 años. En el estudio se evidencia que los estudiantes centran su atención en el aprendizaje de los métodos de resolución de los SEL con dos variables: cuando la enseñanza del tema se inicia a través de los sistemas 2×2 para luego retomar sistemas más grandes, la autora se cuestiona si ¿Es adecuada esta opción didáctica para lograr una reflexión en torno al concepto *solución* de un sistema que se construye? ¿Favorece posteriormente la comprensión del concepto de *solución* de un SEL con mayor número de ecuaciones e incógnitas o por el contrario obstaculiza visiones más generales y abstractas? (Ochoviet, 2009). En el estudio se plantean dos objetivos: el primero consiste en explorar el objeto de sistema y de *solución* de un SEL que construyen los estudiantes de enseñanza secundaria con edades entre 14-15 y 17-18 años. Como segundo objetivo, en el estudio se propone diseñar una secuencia de enseñanza y actividades para el aprendizaje del concepto *solución* de un SEL que tenga en cuenta los datos obtenidos a partir del primer objetivo. Con estos objetivos se pretende identificar las dificultades que presentan los estudiantes al momento de interpretar los SEL y específicamente la *solución* de un sistema que está ligada a la interpretación del número de soluciones del mismo.

Ochoviet (2009) utiliza una metodología a la que denomina "Metodología interactiva", en la cual la investigadora trabaja conjuntamente con otros docentes en forma experimental, con diferentes grupos de alumnos lo cual lleva a conciliar investigación y práctica educativa, con el fin de que el saber producido en la investigación sea un saber ajustado a la práctica y no un saber elaborado desde la teoría. Por tanto Moschokovich y Brenner (2000) citado en Ochoviet (2009) declara que la investigación "integra un paradigma naturalista" (p. 61).

Entre las conclusiones de la investigación se resalta, que de acuerdo con el primer objetivo, se determina que el objeto *solución* de un SEL influye en el objeto de SEL con 2 variables y esto se transforma en un obstáculo para visones amplias o más generales al momento de abordar SEL (3×3, 4×4, 3×2 entre otros), por lo que se recomienda enseñar la ecuación lineal observando el número infinito de soluciones que tiene y luego estudiar los SEL, pero con actividades que conduzcan a analizar el número de soluciones en los SEL. En relación con el segundo objetivo, se concluye que el diseño de la secuencia didáctica produjo en la mayoría de estudiantes una mejor estructuración del concepto de solución de un sistema de ecuaciones, ya que las situaciones didácticas diseñadas ponen en juego diferentes modos de pensamiento estructural en los estudiantes. Se afirma, que los estudiantes elaboraron un determinado objeto de SEL con dos variables a partir de la forma en la cual fue presentado el objeto matemático y de ello, se infiere que el diseño didáctico con el que se presentan los diferentes tópicos influye en su aprendizaje.

Una segunda investigación que hace referencia a la comprensión de las nociones de los SEL y sus soluciones es la desarrollada por Manzanero (2007), en su tesis de maestría titulada: “Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la Teoría APOE”, en ella la autora se enfoca en el estudio del aprendizaje del concepto de conjunto solución de un SEL, donde se observan las dificultades y estrategias que presentan los estudiantes al momento de abordar dicho objeto. Los objetivos de la investigación se centran en la ejecución de investigaciones empíricas donde realiza entrevistas a 6 alumnos del nivel superior, con el fin de observar las construcciones mentales que hacen los estudiantes para el concepto de conjunto solución de SEL, de acuerdo a una descomposición genética dando sugerencias didácticas para la enseñanza del concepto SEL.

La descomposición genética que utiliza Manzanero (2007), propone como conceptos que el estudiante debe haber construido primero, para llegar a comprender el concepto de conjunto solución de un SEL: conjunto, función, ecuación, igualdad y espacio vectorial, en una estructura de proceso. Se aclara que al momento de realizar las entrevistas, los estudiantes acababan de ver el tema de espacios vectoriales en el curso.

En el estudio se utiliza la teoría APOE para describir las formas de conocer y los mecanismos de construcción de los conceptos. La metodología es experimental, basada en las entrevistas a los 6 estudiantes de educación superior a los que se les aplicaron cuestionarios y entrevistas individuales. En este estudio además de realizar la descomposición genética se analiza el conjunto de las construcciones mentales denominadas esquemas que los estudiantes pueden desarrollar para la comprensión del concepto conjunto solución de SEL. Como conclusión, se menciona que hay ciertas dificultades en la comprensión del concepto conjunto solución de un sistema de ecuaciones: dificultades especialmente con la parametrización. Así mismo la autora establece que en las respuestas de los estudiantes se detecta una gran inseguridad; ningún estudiante llegó a una concepción de objeto para el concepto de conjunto solución y pocos de ellos mostraron haber construido la estructura mental de proceso solución, en particular en el caso de los sistemas con tres variables.

Otro aspecto importante que se resalta corresponde a la interpretación y manipulación de las variables, en los problemas con matrices: la mayoría de los estudiantes mostraron no haber interiorizado sus acciones para construir el proceso de transformación de la matriz a la forma escalonada reducida; ya que presentaban dificultades para expresar el conjunto solución del sistema equivalente. Algunos estudiantes tenían problemas para interpretar la equivalencia de los sistemas de ecuaciones, mientras que otros no tomaban en consideración el papel de los parámetros en el sistema que resultaba, para poder interpretar las condiciones que se debían cumplir para que el sistema presentara un determinado tipo de solución. Finalmente, otros no llegaron a dar las condiciones que debían cumplir los parámetros para los casos de solución pedidos.

De las investigaciones presentadas se concluye que ellas permitieron entender en cierta forma, como los estudiantes comprenden los conceptos de solución y conjunto solución de los SEL, pero se evidencia que en estos estudios mencionados no se realizan estudios de tipo histórico y epistemológico que especifiquen el origen y el significado del objeto de investigación. De estos planteamientos surge la necesidad de realizar un análisis histórico-epistemológico del objeto de SEL. Se presentan ahora, los estudios centrados en el diseño e implementación de secuencias didácticas y el estudio de libros de texto para el objeto sistemas de ecuaciones lineales.

1.1.2. Investigaciones en la comprensión del objeto sistemas de ecuaciones lineales, a partir de propuestas didácticas

Se analizan en esta sección algunas investigaciones orientadas al diseño de estrategias pedagógicas implementadas para la enseñanza del objeto SEL. En primer lugar, se encuentra el estudio realizado por Segura (2004) titulado: "Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica", esta investigación hace referencia a la construcción y ampliación de una secuencia didáctica para facilitar el aprendizaje y la solución de sistemas de ecuaciones lineales al conjugar en ella situaciones que, además, implican un trabajo en diferentes registros de representación semiótica. La base para elaborar la secuencia, según Segura (2004), se centra en el aprendizaje, es decir, se establece la necesidad de plantear al alumno actividades que lo induzcan a pasar por situaciones de acción, formulación y validación sobre la explicación de problemas que atañen a la aprehensión de los objetos matemáticos (Teoría de las Situaciones Didácticas). La investigación presentaba como objetivo: Diseñar y poner a prueba una secuencia de enseñanza donde se involucre una actividad que le permita al alumno hacer matemática y logre los niveles de comprensión cada vez más complejos, es decir, que vuelva asequible el aprendizaje y solución de los objetos SEL, con miras a propiciar comportamientos matemáticos y cognitivos en el quehacer de los alumnos, haciendo que el tratamiento y pasaje de registros de representación sea el eje alrededor del cual gira la construcción de las actividades.

La metodología utilizada en esta investigación fue la ingeniería didáctica de Artigue (1995), que se caracterizó por tener un esquema experimental basado en las relaciones didácticas en clase (concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza) y se diferenció de otras que también recurren a la experimentación en clase porque utiliza la validación interna, que se apoya en la comparación entre los análisis a priori y a posteriori de la secuencia. Esta investigación toma como marco teórico la teoría de los registros de representaciones semióticas de Duval (1999) considerando los registros: el lenguaje natural, el lenguaje gráfico y el lenguaje algebraico. La secuencia de enseñanza se implementó con alumnas de 15 años (tercer año de enseñanza media en el sistema escolar argentino del instituto Santa María Goretti, institución privada de carácter confesional de la provincia de Mendoza).

Entre los resultados de la investigación se encuentra el modelo seguido para desarrollar el trabajo, el cual consideraba tomar un objeto matemático y seleccionar de diferentes teorías e investigaciones en didáctica de la matemática, los elementos necesarios para diseñar una secuencia de enseñanza que previera desarrollos en el campo matemático y cognitivo. Los comportamientos que se querían generar en torno a un objeto matemático, permitieron definir las intenciones didácticas propuestas y a partir de ellas, concebir una secuencia de enseñanza donde se propusiera a los alumnos que plantearan preguntas y dieran argumentos durante su desarrollo; actividades de tal índole fueron esenciales para que los alumnos pusieran en juego herramientas matemáticas y llegaran a valorar las estrategias utilizadas. No solo interesó en el estudio, que las alumnas llegaran a obtener un resultado o respuesta final en primera instancia, sino también que las fundamentaran para que, al momento del debate, aceptaran refutar sus argumentos.

La autora establece que la secuencia de aprendizaje constituye una sucesión de actividades que, a su vez, daban pie a otras tareas. No provocaban grandes desviaciones, y permitían que todos los alumnos pasaran por los mismos problemas ofreciendo la oportunidad de explorar tanto distintas formas para afrontarlos, como argumentaciones para justificar los resultados. Otro de los resultados de la investigación de Segura (2004) se presenta al subsanar algunos fenómenos descritos en las investigaciones citadas, como la desarticulación entre los SEL y su solución. Una vez logrado esto, se continuó con el curso normal de enseñanza en el orden natural tanto histórico como matemático, es decir, se inicia con los sistemas y se pasa a la solución como se hizo en la secuencia. También, a partir de la solución de un sistema de ecuaciones, se evita que los alumnos la identifiquen como resultado estricto a la derecha del signo igual (fenómenos descritos en las investigaciones realizadas por Panizza, et al., (1999). Al término de la aplicación de la secuencia, la autora afirmó que se pudo observar un logro en las intenciones didácticas propuestas con respecto al objeto matemático involucrado, resultado de la confrontación del análisis a priori y a posteriori. También se afirma que el manejo de los tres registros de representación, facilitó al estudiante la identificación del objeto matemático logrando la apropiación del concepto.

En el mismo sentido, se destaca la investigación de Figueroa (2013) en su tesis titulada: “Resolución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas”. La autora aplicó y analizó los resultados de una secuencia didáctica orientada a estimular en los estudiantes de cuarto año de secundaria el desarrollo de la capacidad de resolver problemas con SEL en dos variables y contribuir a que superaran las dificultades que suelen presentarse mediante la creación de problemas y el uso de la herramienta informática GeoGebra. El objetivo que plantea

Figueroa (2013) en la investigación se centra en diseñar una propuesta didáctica para fortalecer en los alumnos las habilidades de resolución de problemas relacionados con los SEL en dos variables, apoyado en la creación de problemas y el uso adecuado del software en geometría dinámica GeoGebra. La metodología de la investigación corresponde a la ingeniería didáctica de Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995), en donde se desarrollan 4 fases; el diseño de la secuencia didáctica se hace en el marco teórico de la Teoría de las Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) y se proponen actividades para que los estudiantes pasen por situaciones de acción, formulación y validación, al momento de resolver problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. El análisis de los resultados se realiza según la teoría de los registros de representación semiótica de Duval (1993) (TRRS). Esta secuencia fue aplicada a alumnos de cuarto año del nivel educativo. Entre los resultados obtenidos, se consideró de vital importancia que para la creación de problemas que no son usuales en la educación básica, se diseñen secuencias didácticas grupales, pues estas facilitan mejor la comprensión y solución de la secuencia didáctica. Las experiencias observadas en el desarrollo de la secuencia didáctica llevaron a esta conclusión, ya que el desarrollo de la secuencia de forma individual, llevaba a que el estudiante presentara mayores dificultades al comprender el objeto sistemas de ecuaciones lineales.

Otro de los resultados según Figueroa (2013) fue la creación de problemas cuya solución se obtiene resolviendo un sistema de ecuaciones lineales dado: esto se presenta como una actividad que contribuye a estimular la habilidad de resolver problemas que involucraran sistemas de ecuaciones. La actividad no era usual para los estudiantes, pero fue asumida con entusiasmo ya que provienen de clases magistrales en donde la interacción por parte del estudiante era poca. Por otra parte en el diseño de actividades de aprendizaje para los sistemas de ecuaciones lineales, se enfatizó en las conversiones – en ambos sentidos – entre los registros gráficos y algebraicos, esto con el fin de dar una mejor comprensión y análisis de los resultados obtenidos de la secuencia didáctica. En el marco de los sistemas de ecuaciones lineales, el software de GeoGebra pudo usarse no sólo para visualizar las ecuaciones y para resolver los sistemas, sino para resolver problemas, contextualizados o no; en particular, problemas relacionados con la variación de los parámetros de las ecuaciones del sistema. De esta investigación se concluye que es necesario incluir en la secuencia didáctica, situaciones que induzcan al alumno a pasar por las fases de acción, formulación, validación e institucionalización en actividades individuales y grupales para lograr un aprendizaje matemático y en particular un aprendizaje de los SEL con 2 variables, además, se propone enfatizar en las conversiones entre los registros gráficos y algebraico y viceversa para mejorar en los resultados.

Otra investigación relevante es la de Trejo y Camarena (2009) en su artículo titulado “Problemas contextualizados: Una estrategia didáctica para aprender matemáticas”, aquí las autoras argumentan que las instituciones educativas diariamente forman profesionales para atender un mercado laboral cambiante y competitivo; para que a lo largo de la vida profesional lleguen a dar soluciones a problemas reales, donde integren los conocimientos adquiridos en su formación con conocimientos matemáticos básicos y un caso particular se encuentran los SEL con dos incógnitas, los cuales pueden ayudar a modelar fenómenos reales en el área de competencia de tecnología de alimentos.

La metodología implementada para realizar el estudio, se dividió en dos etapas: en la primera fase, se realiza una investigación con profesores del área técnica y egresados, para determinar el objeto matemático que más se empleaba en el ámbito laboral y/o profesional, encontrándose que los SEL con dos incógnitas fue el más utilizado para problemas de mezclas de sustancias. La segunda fase se centró en experiencias de aula con problemas contextualizados propuestos a nueve estudiantes voluntarios del programa de tecnología de alimentos, donde los estudiantes planteaban conjeturas e incorporaban sus conocimientos para trabajar en diferentes registros de representación semiótica (verbal, algebraico y gráfico). La secuencia didáctica se relacionaba con el contexto de un laboratorio químico donde se preparaban mezclas de sustancias azucaradas, con el fin de realizar una nueva mezcla a partir de algunas mezclas existentes.

El marco teórico utilizado fue el de la Teoría de las representaciones semióticas de Duval (1999), debido a que la coordinación de varios registros de representación semiótica resultaba fundamental para una asimilación conceptual del objeto; se establece que es necesario que el objeto no se llegue a confundir con sus representaciones, pero que debe ser reconocido en cada una de ellas (Trejo et al., 2009).

Como resultados las autoras concluyen que los problemas contextualizados dotan de significado a las matemáticas al mostrar la aplicabilidad en la vida profesional o laboral a los estudiantes, despertando en ellos interés por su estudio. Además al trabajar con problemas contextualizados donde involucran los registros gráficos, los estudiantes logran pasar del registro gráfico al algebraico y viceversa pero cuestionan por que hacerlo para usos prácticos, debido a que solo con el registro algebraico se puede dar solución a los problemas planteados.

Estas investigaciones son de gran relevancia para el desarrollo de las actividades académicas, ya que las propuestas didácticas como conjunto de actividades organizadas, sistematizadas y jerarquizadas, posibilitan el desarrollo de conceptos, habilidades y actitudes en el estudiante; pero, se evidencia que en estas investigaciones de igual forma, no se hacen estudios históricos-epistemológicos del objeto de investigación, donde nuevamente nace la preocupación de hacer un estudio a partir de la emergencia del objeto SEL.

A continuación se presenta una investigación realizada en el análisis de libros de texto.

1.1.3. Investigaciones relacionadas en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, en los libros de texto

En la investigación de Pozas y Alves (2017) titulada: "Los implícitos en el discurso tecnológico-teórico en dos libros de álgebra lineal", se presenta la caracterización del estudio de los SEL en dos libros de álgebra lineal. Esta exploración retoma el estudio de las praxeologías en torno a matrices, función determinante y SEL. El objetivo del estudio fue describir y analizar las organizaciones matemáticas relativas a los SEL que se proponen en dos libros de texto muy utilizados en carreras de ingeniería de las universidades publicas argentinas (Pozas y Alves, 2017). Las autoras consideraron que en el nivel universitario los libros de texto: Álgebra lineal, una introducción moderna de David Poole e Introducción al álgebra lineal de Howard Antón, están en todo proceso de estudio y son elementos fundamentales para la actividad en el aula; se establece en el estudio, que en ocasiones se llegaban a convertir en el esquema conceptual de la clase, ya que en ocasiones muestran lo que debe ser considerado como relevante para la disciplina, como los problemas y las formas de resolverlos.

La investigación se desarrolló bajo la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) la cual propone modelizar cualquier actividad humana en términos de praxeologías, pero en el caso de la actividad matemática las autoras lo denominaron praxeología matemática u organización matemática. Otro elemento teórico que tomaron en cuenta fue la noción de *cuadro*, la cual se define como la constitución de objetos de una rama de las matemáticas; las relaciones entre dichos objetos; sus diversas formulaciones y las imágenes mentales posiblemente asociadas a estos objetos y sus relaciones (Douady, 1992). Para completar el análisis de los tipos de tareas, las autoras hacen referencia a los niveles de conocimiento de los estudiantes y establecen unas faces que se identifican como: nivel técnico, nivel movilizante y nivel disponible (Robert, 1997). La metodología utilizada para lograr el objetivo de la investigación corresponde a un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo. Además, las autoras adoptaron la propuesta de Lüdke y André (1986), quienes consideran la investigación documental como una parte esencial de un proceso sistemático de investigación cualitativa, constituyéndose en una estrategia operacional donde se observa y se reflexiona sistemáticamente sobre realidades; usando para ello diferentes tipos de documentos, comenzaron por la recolección y análisis de los documentos, luego la elaboración de un instrumento de análisis y la selección de una muestra de 5 libros de texto. Como consideraciones finales las autoras manifiestan que en relación al método Gauss y siguiendo a Rogalski (1994) citado en Pozas y Alves (2017):

> El discurso tecnológico-teórico debería provocar cuestionamientos que se conviertan en problemas para los estudiantes y que justifiquen la introducción de conceptos de álgebra lineal. Por ejemplo, Dado un sistema de ecuaciones que ha sido llevado a la forma escalonada ¿Cuáles ecuaciones son realmente útiles? (p. 408)

Lo que indica que ambos libros de texto vinculan el método Gauss, y lo usan tanto sobre un sistema dado, como sobre la matriz aumentada del sistema, siendo ambos adecuados para desarrollar el método: ambos autores privilegian el trabajo sobre la matriz aumentada, explicando las operaciones elementales hechas sobre los renglones, por lo que el método Gauss es directo en el sentido de que conduce directamente a la solución si existe, en un numero finito de pasos. Otra consideración por parte de las autoras es que en ambos libros de texto, el discurso tecnológico-teórico relativo a los SEL está dirigido al estudio de ciertos conceptos y técnicas para que el estudiante comience un curso de álgebra lineal con buenas bases. De igual forma, en el estudio se establece que muchos de los conocimientos necesarios para resolver el tipo de tareas que se analizaron en los libros de texto no fueron abordados en la escuela secundaria en Argentina, lo que indica que comenzar un curso de álgebra lineal utilizando libros diseñados por instituciones extranjeras podría convertirse en otro problema tanto para el profesor como para el estudiante.

Según el estudio presentado, se infiere que es necesario hacer una revisión de los libros de texto para la enseñanza del álgebra lineal, analizando cómo se pueden promover los significados parciales del objeto SEL; esto dará mejores herramientas a los docentes para el desarrollo de las prácticas de aula.

1.1.4. Estudios en el significado de los objetos matemáticos

A continuación se presentan dos estudios que presentan resultados relevantes para la investigación. El primero, se relaciona con un análisis fenomenológico, histórico y epistemológico de nociones relacionadas con los SEL y tiene como objetivo: Determinar los fenómenos de los cuales emergen algunas nociones algebraicas; y la segunda investigación analiza la relación que hacen los estudiantes entre las soluciones de una ecuación en dos variables y las soluciones de un sistema lineal del cual la ecuación forma parte.

Estos estudios desarrollan propuestas didácticas para la enseñanza secundaria. Primero se presenta el estudio desarrollado por Torres (2010), y a continuación el de Panizza, Sadovsky y Sessa (1999). En estos estudios se trabajan los objetos ecuación algebraica y ecuación lineal, objetos que se relaciona con el objeto de los SEL.

En el tema del significado de los objetos matemáticos, Torres (2010) en su tesis:

“Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela” desarrolla un análisis fenomenológico, histórico y epistemológico de las nociones relacionadas con las ecuaciones lineales, ecuaciones algebraicas y los SEL. El problema de investigación planteado surge del reconocimiento de la existencia de una problemática general en la escuela, identificada como el paso del pensamiento aritmético al algebraico. Esta investigación tiene como objetivo, comprender los fenómenos de enseñanza de los objetos algebraicos y específicamente de las ecuaciones. El estudio histórico parte del hecho que los conceptos matemáticos son algo que no preexiste a nuestra experiencia sino que es la actividad matemática la que los crea, en particular la actividad matemática de los matemáticos (Puig, 2001); en este sentido, en el estudio se evidencian los fenómenos que organiza el objeto ecuación.

Los resultados de la investigación se derivan del análisis al libro de al-Khwarizmi en álgebra, obra de principios del siglo IX cuando por primera vez en la historia aparece el álgebra como una disciplina autónoma y en posesión de su nombre, marcando así una corriente de investigación posterior. A partir del texto de al-Khwarizmi se da cuenta de aspectos del origen del álgebra. En la época de al-Khwarizmi, aparece la teoría de las ecuaciones y el análisis indeterminado, todo esto antes de la traducción de la aritmética de Diofanto. (Torres, 2010).

En una segunda fase del estudio histórico, se presenta el desarrollo de las ideas algebraicas que corresponden al renacimiento, con los trabajos Del Ferro, Tartaglia, Ferrari y Cardano, donde la atención se dirige a la solución de ecuaciones de grado mayor que 2, fundamentalmente las ecuaciones de tercer grado. Se analiza, la obra del Ars Magna de Cardano de 1545, que es considerado el libro matemático más importante del siglo XVI, donde se muestran los métodos de resolución de las ecuaciones cúbicas y cuarticas, acompañadas de las demostraciones geométricas de estos métodos, que dan cuenta de los fenómenos que organiza el objeto ecuación a través del estudio de la naturaleza de las raíces de estas ecuaciones algebraicas y de los métodos de solución de dichas ecuaciones, los problemas que se solucionan y el campo numérico de trabajo (Torres , 2010).

En una tercera fase de la investigación se presenta el trabajo de Descartes en relación con las ecuaciones. Se analizan los fenómenos que organiza este objeto matemático en este periodo importante de la historia de las matemáticas, expuesto a través de la obra del filósofo francés. En el trabajo de Descartes, los fenómenos organizados por el objeto ecuación corresponden a problemas geométricos con magnitudes de diferente naturaleza.

Entre los aspectos más importantes del estudio, relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las ecuaciones, se encuentra la relación entre magnitudes geométricas, números y álgebra expresadas de distintas formas a través de la historia: se plantea que esto puede ser una fuente de contextualización para las ecuaciones en la iniciación de su estudio y así la resolución de problemas se podría presentar como un ámbito de producción de conocimiento.

La segunda investigación de Panizza, Sadovsky y Sessa (1999), titulada “La ecuación lineal con dos variables: entre la unicidad y el infinito”. Las autoras presentan el trabajo de seis estudiantes en relación al tema ecuación lineal en dos variables. Los estudiantes habían elaborado previamente la concepción de ecuaciones como igualdades numéricas en las que las letras designan números a ser encontrados ya que habían estudiado recientemente los sistemas de ecuaciones 2×2. Las autoras se preguntaron si los estudiantes podrían concebir una ecuación con dos variables, aislada de los sistemas de ecuaciones; si serían capaces de otorgar entidad al objeto ecuación de dos variables y al mismo tiempo reconocerlo como parte de un sistema de ecuaciones lineales y cómo enfrentarían la situación de que una ecuación puede tener infinitas soluciones, teniendo en cuenta la concepción de las letras como incógnitas que habían elaborado previamente.

Al estudiar la propuesta de enseñanza actual y usual en Argentina, en la que el álgebra se introduce en el primer año de secundaria a través de ecuaciones de primer grado con una incógnita, evidencian que, a partir del conjunto de tareas elaboradas por los alumnos, elaboran una concepción donde la ecuación es una igualdad numérica y las letras son números a descubrir. Por lo que plantean la siguiente pregunta de investigación: ¿Cuál sería la influencia de dicha concepción en la comprensión de otros objetos de enseñanza que aparecen más adelante?, anticipándose al hecho de que los alumnos tendrían dificultades para tratar objetos algebraicos con infinitas soluciones o aun con varios, como las ecuaciones con dos o más variables y ecuaciones de grado mayor que uno.

El objetivo de la investigación según (Panizza et al., 1999) fue identificar condiciones de apropiación del álgebra elemental en alumnos de la escuela media, cuando tratan de pasar de la aritmética al álgebra, mediante una encuesta exploratoria designada a indagar sobre las representaciones de los alumnos acerca de ecuaciones, variables e incógnitas. Estas encuestas fueron realizadas a 95 estudiantes de 2° a 5° año de una escuela pública de la ciudad de Buenos Aires Argentina. Este trabajo se realiza en el marco teórico de la Teoría de las situaciones de Brousseau (1986) y como metodología para el desarrollo de la investigación se apoyaron en la Ingeniería didáctica de Artigue (1988).

En este problema de investigación se hace referencia a que tradicionalmente en la escuela se trabajan los sistemas de ecuaciones donde el número de ecuaciones es igual al número de las incógnitas, pero cuando se les pregunta a los estudiantes por la solución de una ecuación con dos variables, se presentan dificultades para comprender que tiene un conjunto de infinitos pares de números (lo cual está en amplia relación con el concepto de función). En este sentido Panizza et al. (1999), señalan que el paso de una concepción aritmética a una algebraica, parece ocurrir cuando se comprende la letra, no sólo como incógnita sino como variable. Al respecto, estos autores puntualizan que:

> La noción de incógnita, en cambio, no resultaría eficaz para interpretar el rol de las letras en una ecuación con dos variables, objeto éste que debería ser comprendido si los sistemas lineales fueran concebidos como un conjunto de condiciones independientes que deben cumplirse simultáneamente. (p. 459)

Del análisis a las entrevistas realizadas a los estudiantes, las autoras concluyen que la unicidad de la solución en una ecuación lineal depende de si ésta es asumida en forma independiente y del dominio como tal del conjunto solución. Por su parte, cuando se aborda un sistema de ecuaciones, se tienen tres casos: (1) solución única, (2) un conjunto vacío de soluciones y (3) infinitas soluciones, las cuales dependen de las características que tengan cada una de las ecuaciones que intervienen en el sistema, tanto en número de variables y ecuaciones, como en las relaciones en sus parámetros. Otra conclusión importante de la investigación es que la ecuación lineal con dos variables no es reconocida por los estudiantes como un objeto que define un conjunto de infinitos pares de números.

De los estudios presentados se concluye que es necesario presentar situaciones-problema (fenómenos-contextos de uso del objeto) a los estudiantes buscando la comprensión del objeto matemático.

1.2. Planteamiento del problema

1.2.1. Descripción de la problemática

Desde el inicio de la humanidad, en el campo de las matemáticas se ha venido estudiando el origen, evolución y las diferentes aplicaciones del objeto matemático: sistemas de ecuaciones lineales, ya que han sido utilizados para resolver problemas en diferentes épocas de la humanidad. En el libro *"La matemática en nueve capítulos"* (Ribnikov, 1987) menciona el problema N° 18 donde se propone que si, 9 lingotes de oro pesan tanto como 11 lingotes de plata, y si se intercambian los lingotes de uno en uno, entonces el peso del oro y la plata se diferencian en 13 lan (16 lan son iguales a 1 tzin) y se preguntaban ¿Cuánto pesa respectivamente un lingote de oro y uno de plata? En la misma dirección, se mencionan algunos de los problemas de la Aritmética de Diofanto, tales como: "Dados dos números, buscar un tercero tal que los productos de cada uno de ellos por la suma de los otros dos estén en progresión aritmética" (Rey y Babini, 1985, p. 77). Otro problema que fue tomado de una tablilla babilónica plantea la resolución de un sistema de ecuaciones en los siguientes términos: $\frac{1}{4}$ de anchura más longitud da 7 manos y la longitud más anchura da 10 manos. ¿Cuánto es la altura y cuanto la longitud? Sin duda alguna, son muchos los problemas que los matemáticos desde la antigüedad hasta nuestra época, han resuelto y que de una u otra manera han dado inicio a la evolución y consolidación del significado global del objeto matemático SEL.

A nivel internacional se evidencian las investigaciones con el objeto matemático de estudio, en la línea de Didáctica de la Matemática, en cuanto a la comprensión del objeto por los estudiantes (Ochoviet, 2009; Manzanero, 2007; Torres, 2011; Panizza, Sadovsky, y Sessa, 1999; Segura, 2004; Figueroa, 2013; Trejo y Camarena, 2009; Pozas y Alves, 2017). Se establece, que las investigaciones revisadas, carecen de estudios históricos y epistemológicos completos para reflejar la emergencia de los significados parciales del objeto matemático SEL.

Bajo los argumentos descritos, se evidencia la necesidad de realizar un estudio histórico-epistemológico sobre el objeto matemático SEL, ya que es poca la literatura encontrada donde se aborde el tema en esta dirección. De otra parte, se encuentran estudios, donde se trabaja el objeto matemático desde la perspectiva teórica del Análisis didáctico (Rico, 2013) con el fin de implementar en forma idónea procesos de instrucción con estudiantes de noveno grado de educación secundaria. Con la realización del estudio epistemológico del objeto matemático, se pretende evidenciar la emergencia de unos significados parciales del objeto matemático SEL, considerados como elementos necesarios para evaluar los significados implementados por el docente en el proceso de aprendizaje a lo largo del proceso de instrucción del objeto matemático.

Un aspecto necesario para llegar a la construcción del significado global del objeto SEL, es el análisis fenomenológico del objeto matemático desde la postura de Freudenthal (1983), cuyas bases teóricas proporcionan elementos que llevan a la consolidación del significado global del objeto matemático SEL y a la identificación de los fenómenos que este objeto organiza: por tanto, se hace necesario vincular el análisis fenomenológico y el significado del objeto matemático con los conocimientos del profesor y más específicamente con sus concepciones y creencias, para que el docente, pueda transmitir al estudiante unos significados del objeto de estudio (Godino, 2009) que le den sentido al objeto y por tanto pueda llegar a la comprensión del mismo. Específicamente, los significados parciales y los fenómenos, organizan la enseñanza, y por tanto se utilizan para diseñar e implementar tareas de aprendizaje; de igual forma se deberían seleccionar unos recursos adecuados y otros elementos denominados por Rico (1997), como los organizadores del currículo, los cuales comprenden factores que condicionan la enseñanza y el aprendizaje. Bajo estos argumentos, se propone que los profesores realicen en forma consciente y bajo un marco teórico, la revisión de los libros de texto que utilizan para guiar sus procesos de enseñanza, en la búsqueda de una idoneidad epistémica, y de igual forma para tener herramientas que le permitan solucionar los conflictos u obstáculos que se les presentan a los estudiantes (González y Sierra, 2004).

1.2.2. Formulación del problema de investigación

Según la descripción del problema y dada la importancia que tienen los SEL en el currículo Colombiano, surge la necesidad de analizar el conocimiento del contenido matemático de los profesores, entendido como el conocimiento de la dimensión epistémica en el modelo propuesto por Godino (2009) en cuanto al conocimiento adquirido en el proceso de formación como docentes y al conocimiento fruto de su experiencia, en relación con el objeto SEL para relacionarlo con las creencias y concepciones que tienen para abordar la enseñanza de este objeto matemático, en relación con los significados parciales del objeto, identificados a partir de un estudio histórico-epistemológico y fenomenológico de los SEL. Así mismo , el significado Global del objeto SEL se relaciona con el conocimiento del profesor, en la identificación de las problemáticas que dieron origen a los diversos métodos de solución de los sistemas de ecuaciones lineales, cuyas concepciones llegaron a influir en el desarrollo de los procesos de instrucción del objeto matemático SEL, esto es, cuando se consideran los diferentes tipos de significados resultado de un sistemas de prácticas en la historia de donde emerge el objeto matemático. Se recoge así, una visión pragmática que influye en las concepciones y por tanto, en el conocimiento del profesor como un sistema de creencias que intervienen en los procesos de enseñanza. Por lo tanto, se plantea la pregunta que conduce al logro del objetivo general del estudio:

¿Qué concepciones y creencias tienen los profesores de matemáticas del desarrollo histórico-epistemológico del objeto sistemas de ecuaciones lineales, respecto a los significados pretendidos en los procesos de enseñanza de este objeto matemático?

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, se plantea como objetivo principal del trabajo la reconstrucción del significado global del objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales, a partir del cual se establecen los significados de referencia del objeto matemático para luego, indagar a los profesores y caracterizar la dimensión epistémica del conocimiento del profesor. Seguidamente, se realiza el análisis de los libros de texto para llegar a identificar los significados pretendidos para la implementación de los procesos de instrucción. Para esto, se buscan evidencias encaminadas a validar esta reconstrucción, mediante un análisis semiótico de textos, estudiando libros de historia de la matemática; textos de matemáticas de bachillerato y los conocimientos de los profesores de educación básica secundaria, para hacer “visibles" algunas concepciones y creencias de los profesores al momento de implementar procesos de enseñanza. Bajo estos argumentos, se describen los objetivos, que permiten realizar el estudio según la estructuración en diversas fases las cuales dan respuesta a la pregunta planteada.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Caracterizar las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas respecto a los significados de referencia identificados en el desarrollo histórico-epistemológico del objeto sistemas de ecuaciones lineales y a los significados pretendidos por ellos para los procesos de enseñanza del objeto matemático.

1.3.2. Objetivos específicos

OE1. Reconstruir el significado global del objeto SEL, por medio del estudio histórico-epistemológico de las prácticas matemáticas según el origen, evolución y naturaleza del objeto matemático.

OE2. Caracterizar el significado global de referencia del objeto Sistemas de ecuaciones lineales a partir del análisis teórico del objeto matemático.

OE3. Diseñar e implementar el cuestionario sobre las concepciones y creencias de los profesores respecto al objeto SEL.

OE4. Describir las concepciones y creencias de profesores de Matemáticas de grado 9, respecto al uso de los significados parciales del objeto SEL para la implementación de los procesos de instrucción.

OE5. Analizar las implicaciones didácticas que trae la concepción de los profesores en cuanto al significado de referencia y el significado pretendido del objeto SEL.

1.4. Justificación

La Didáctica de las Matemáticas tiene como fin específico de investigación, el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas que llevan a una mejora en dichos procesos (Godino, Batanero y Font, 2007). Por tal razón, la didáctica de las matemáticas tiene en cuenta el análisis de la naturaleza de los contenidos matemáticos, dados en las instituciones escolares. Este análisis es necesario desde el punto de vista ontológico y epistemológico, para abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje de objetos difusos o indefinidos (Godino et al., 2007).

Según Godino, Batanero y Font (2007), la tipología básica de significados, con relación a los significados institucionales, lleva a identificar un significado referencial considerado como:

> Significado de referencia: corresponde a los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar el significado pretendido. En una institución de enseñanza concreta este significado de referencia será parte del significado holístico del objeto matemático. La determinación de dicho significado global requiere realizar un estudio epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión, así como tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dicho objeto (p.5).

En esta sentido, el trabajo de investigación presenta estudios de diferente naturaleza: matemáticos, históricos-epistemológicos y didácticos, los cuales permiten reconstruir el significado global del objeto matemático SEL, el cual corresponde a la totalidad de los sistemas de prácticas personales que se pueden realizar con el objeto matemático (Godino, Batanero y Font, 2007). En este sentido, la noción de sistema de prácticas, es de utilidad para ciertos análisis de tipo macrodidáctico, para comparar la forma como se adoptan los conocimientos matemáticos en los diferentes tipos de marcos institucionales o contextos de uso. De igual forma, es necesario analizar seis tipos de entidades primarias: situaciones – problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos; estas entidades se relacionadas entre sí formando configuraciones epistémicas o cognitivas, cuyo análisis nos informa del significado parcial del objeto matemático y de igual forma de la “anatomía de un texto matemático” (Font, Godino, 2006). Estas configuraciones permiten el análisis de libros de texto de matemáticas enfocados al grado noveno donde se introducen los SEL, de forma que este análisis permite a su vez la planificación del proceso de instrucción del objeto, y junto con el significado global posibilitan corregir errores u obstáculos epistemológicos y semióticos que se pueden presentar durante el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

Por otra parte, García, Azcárate, y Moreno (2006) definen las creencias del profesor de matemáticas como ideas poco elaboradas, generales o específicas, las cuales forman parte del conocimiento que posee el docente, pero que carecen de rigor para mantenerlas e influyen de manera directa en su desempeño. Por otro lado, los mismos autores definen las *concepciones* del profesor de matemáticas, como la estructura que cada profesor de matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes. Esto indica que las creencias del profesor están fundamentadas más en lo empírico o intuitivo, mientras que las concepciones son producto del razonamiento y entendimiento de un determinado concepto. Bajo estos los argumentos, se hace necesario analizar las implicaciones de estas concepciones y creencias respecto al conocimiento del profesor de matemáticas para el objeto SEL, en la búsqueda de la identificación de los significados de referencia del objeto SEL, y las implicaciones en el diseño de los procesos de enseñanza del objeto matemático.

Esta investigación igualmente pretende mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de los SEL ya que la realización del estudio del significado global del objeto, los análisis a los libros de texto y el análisis del conocimiento del profesor de matemáticas, aportan elementos conceptuales fundamentales para establecer la relación entre fenómenos y concepto, por esto, esta clase de estudios tal como lo plantea Freudenthal (1983), se hace para servir a la organización de la enseñanza, lo cual significa, que estos análisis están al servicio de la didáctica y para el diseño curricular, específicamente.

Capítulo 2. Marco Teórico

"Los hombres de la Antigüedad cambiaban
el nombre de sus métodos de problema en problema,
de manera que no daban ninguna explicación específica,
no hay manera de decir cuáles son sus bases o su origen teórico"

Yang Hui (1238-1298)

El presente capítulo está estructurado en tres apartados. En el primero de ellos se presentan las herramientas y nociones teóricas en las cuales se desarrolla la investigación: el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), descrito por Godino y colaboradores. Este marco teórico propone un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor, los cuales hacen parte de las dimensiones del conocimiento didáctico matemático (CDM) del profesor de matemáticas, el cual se describe en el segundo apartado del capítulo. En el tercer apartado, se especifican los conceptos relacionados con la visión de las concepciones y creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, respecto a un marco general (Thompson 1992; Ponte 1994; Pajares 1992; Llinares 1991).

2.1. Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS)

Para el desarrollo de esta investigación, se adopta el marco teórico del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: marco desarrollado en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007, 2019). Este marco teórico incluye un modelo epistemológico sobre las matemáticas, con bases antropológicas y socioculturales, un modelo cognitivo, con bases semióticas de índole pragmatista y un modelo instruccional que precisa nociones teóricas desarrolladas y adaptadas de otras teorías que integran este enfoque. El EOS se ha trabajado desde el año 1994 y nace del análisis a diversas teorías, al considerar que no hay respuesta clara, satisfactoria y compartida entre ellas (Teoría de las Situaciones Didácticas - TDS, Teoría Antropológica de lo didáctico- TAD, Dialéctica Instrumento – Objeto: DIO y Juego de Marcos JM, Teoría de los Campos Conceptuales - TCC) al problema epistemológico (en matemáticas y en Didáctica de las Matemáticas) sobre los fundamentos teóricos de la investigación en didáctica de la matemática (Sepúlveda, 2018, p.44).

Según Godino, Batanero y Font (2019), en este enfoque se asume la pertinencia y potencial utilidad de avanzar hacia la construcción de un sistema teórico, que permita abordar de manera articulada los *problemas epistemológicos, ontológicos, semiótico-cognitivos y educativos* implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Según Sepúlveda (2018) el problema epistemológico se refiere al objeto matemático, como entidad cultural o institucional, y se complementa con el problema cognitivo, es decir, el objeto como entidad personal, por tanto el problema epistemológico se formula en los siguientes términos ¿Qué es el objeto matemático SEL? o de manera similar ¿Qué significa el objeto matemático SEL, para el profesor de educación básica y media en el contexto colombiano?

Para dar respuesta a la pregunta se siguen los argumentos de Godino y Batanero (1994) los cuales parten de la definición dada por Chevallard (1991) respecto a objeto matemático y aclaran las nociones introducidas por la TAD, para hacerlas operativas y establecer las semejanzas, diferencias y relaciones con otras herramientas conceptuales contempladas en la actualidad como son, por ejemplo, las concepciones y el significado. En este sentido se da respuesta a la pregunta planteada: El objeto SEL, corresponde al sistema de prácticas operativas y discursivas que el profesor debe poder realizar para dar solución a las situaciones problemas relacionadas con el planteamiento y solución de sistemas de ecuaciones lineales (significado Global, entendido como la identificación de la mayoría de las prácticas matemáticas y el significado referencial, entendido como el sistema de prácticas que utiliza el profesor para el diseño de sus procesos de instrucción, según el currículo y los libros de textos). Al respecto, Godino (2012) considera que es necesario precisar entonces las nociones de prácticas matemáticas y explicar la naturaleza de los objetos matemáticos y proponer un uso técnico para la noción de significado que sea de utilidad en los estudios didácticos.

Para desarrollar los análisis epistemológicos y cognitivos en didáctica de las matemáticas y específicamente en la visión del EOS, se abordan las nociones de Sistemas de prácticas, Configuración de objetos y procesos (Godino, Batanero y Font, 2007), herramientas teóricas que permiten realizar un análisis al detalle y a la vez constituyen elementos que llevan a estructurar el conocimiento didáctico matemático que tiene el profesor.

A continuación se describe algunas de las herramientas teóricas de EOS necesarias para el desarrollo de la investigación.

2.1.1. Sistemas de prácticas

En el marco del enfoque EOS, la noción de *Sistema de Practicas* tiene gran relevancia desde dos puntos de vista: el epistemológico y el didáctico. Con esta noción se asume y se hace operativo el supuesto antropológico sobre las matemáticas el cual es el pilar del enfoque EOS. Para hablar de sistemas de prácticas, Godino et al., (1994) llaman "practicas a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas" (p.334). Estas prácticas son realizadas por una persona o compartidas en el interior de una institución y entonces se originan las nociones de sistemas de prácticas personales y sistema de prácticas institucionales, las cuales define Godino et al., (1994) como:

> Un sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartirlas en el seno de una institución (p.337). Los sistemas de prácticas personales asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas. (p. 339)

En Godino y Batanero (1994), se introducen las nociones primitivas de problema, práctica, objeto y significado. Dado que un objeto matemático, en su versión institucional se concibe como un "emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas" (p. 335), la pregunta por el significado de un objeto se resuelve indicando que es el "sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado" (p. 338). "Esta noción de significado permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional" (p. 338). Según Godino, Font, Wlihelmi y Lurduy (2011), los sistemas de prácticas dan respuesta a la pregunta de naturaleza semiótica ¿qué significa un objeto matemático? y a la pregunta de naturaleza ontológica ¿qué es el objeto matemático?

2.1.2. Objetos emergentes de los sistemas de prácticas

En el enfoque ontosemiotico EOS se asumen los presupuestos de la epistemología pragmatista y los objetos se derivan de las prácticas matemáticas, es decir, se considera que los objetos matemáticos son emergentes de un sistema de prácticas, pero ¿qué se entiende por objeto matemático? Desde el interaccionismo simbólico, se entiende como objeto o entidad matemática a todo aquello que puede ser indicado, todo lo que puede señalarse o a la cual puede hacerse referencia, cuando hacemos, comunicamos o aprendemos matemáticas (Blumer 1982, p. 7). Para Chevallard (1991), citado en Godino et al., (1994) un objeto matemático corresponde a:

> Un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito. (p. 332).

En las prácticas matemáticas intervienen símbolos, gráficos, etc., a estos elementos se les llama *objetos ostensivos* y conceptos, proposiciones, etc., los cuales se conocen como *objetos no ostensivos*: estos objetos son evocados al hacer matemáticas y son representados en forma textual, oral, gráfica e incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas emergen nuevos objetos que provienen de las mismas y dan cuenta de su organización y estructura. Ahora los sistemas de prácticas pueden ser personales o institucionales; así, si los sistemas de prácticas son compartidos en el interior de una institución, entonces los objetos emergentes se considerarán como *"objetos institucionales"*, mientras que si tales sistemas corresponden a una persona, entonces serán considerados *"objetos personales"* (Godino et al., 1994; Godino et al., 2007).

Para Godino et al., (1994) un *objeto institucional* es "un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de un sistema de prácticas institucionales en un campo de problemas. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos del objeto institucional" (p. 338). Mientras que un *objeto personal* "es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas" (p. 339).

Según Godino et al., (1994) los objetos institucionales son progresivos a lo largo del tiempo. En un momento dado es reconocido como tal objeto por la institución, pero incluso después de esta etapa sufren transformaciones progresivas según se va ampliando el campo de problemas asociado, mientras que la emergencia del objeto personal es progresiva a lo largo de la historia del sujeto, como consecuencia de la experiencia y el aprendizaje.

Como señala Godino et al., (2007), en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (lenguaje, símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos, etc.) que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones simples que componen el sistema de prácticas son satisfactorias; en este sentido el EOS propone la siguiente *tipología de objetos matemáticos primarios* descritos en Godino et al., (2007, p. 130):

- *Elementos lingüísticos* (términos, expresiones, notaciones, gráficos,…) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, etc.)
- *Situaciones-problemas* (aplicaciones matemáticas y extra-matemáticas, ejercicios,…)
- *Conceptos- definición* (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función,…)
- *Proposiciones* (enunciados sobre conceptos,…)
- *Procedimientos* (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo,…)
- *Argumentos* (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos deductivos o de otro tipo,…)

La emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar en los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos y argumentación. Además, estos seis tipos de objetos, son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc. Estos objetos primarios están relacionados entre sí formando redes más complejas de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, denominadas configuraciones epistémicas (sección **2.1.4** y **2.2.3**).

2.1.3. Significados de los objetos matemáticos

En el enfoque EOS se concibe el significado de los conceptos matemáticos, desde una perspectiva pragmático – antropológica. Según Pino-Fan (2013) el significado de un objeto matemático se define como el *sistema de prácticas operativas y discursivas* que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problemas en las que dicho objeto interviene. A la vez, estas prácticas pueden ser concebidas desde dos puntos de vista dependiendo de quien las realice; si son llevadas a cabo por una persona, se pondrán en evidencia los significados personales, o bien, si son compartidas en el seno de una institución, darán lugar a los significados institucionales, entendiendo por institución un grupo de personas involucradas en una misma situación problemática. En cualquier caso, es importante considerar que cuando la acción se dirige a una actividad de resolución de problemas, más que hablar de una práctica matemática, se considera el sistema de prácticas matemáticas (institucionales y personales). En este sentido, el significado del objeto matemático según Godino et al., (1994) es visto como:

> "El *significado de un objeto institucional*, es el sistema de prácticas instituciones asociados al campo de problemas de las que emerge el objeto institucional en un

momento dado*"* (p. 340).

Esta noción de significado institucional es un constructo relativo a la institución y dependiente estocásticamente del tiempo y a su vez, permite introducirse en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y la dependencia institucional. En correspondencia con el significado institucional, Godino et al., (1994) introducen la noción de significado de objeto personal de la siguiente manera:

> *"Significado de un objeto personal* es el sistema de prácticas personales de una persona para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto personal en un momento dado*"* (p. 341)

Algunos sistemas de prácticas se consideran como *primarios*, por su carácter extensivo (particular), esto hace referencia a que resuelven ciertos tipos de situaciones-problemas con métodos y procedimientos particulares. Los sistemas de prácticas primarios se agrupan en sistemas más genéricos en los cuales se pueden abordar situaciones-problemas más generales. Este proceso continúa por niveles, hasta llegar a la formalización del objeto matemático. La consideración conjunta de los elementos y sus relaciones, conforman el Significado epistémico global del objeto matemático.

La relatividad socio epistémica y cognitiva de los significados, conocidos como sistema de prácticas, y su utilización en el análisis didáctico de los procesos instruccionales lleva a la tipología básica de significados como se muestra en la Figura **2.1**. En relación a los significados institucionales Godino et al., (2007) propone los siguientes tipos:

- Implementado (sistema de prácticas efectivamente implementadas por el docente en un proceso de estudio específico).

- Evaluado (subsistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes).
- Pretendido (sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio).
- Referencial (sistema de prácticas que se usa como referencia para elaborar el significado pretendido).

Este *significado de referencia* será parte del significado global del objeto matemático escogido en función de la institución concreta. Para los significados personales la tipología es la siguiente:

- Global (corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que es capaz de manifestar potencialmente el sujeto relativas a un objeto matemático).
- Declarado (prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional).
- Logrado (prácticas manifestadas que son conformes con la pauta institucional establecida).

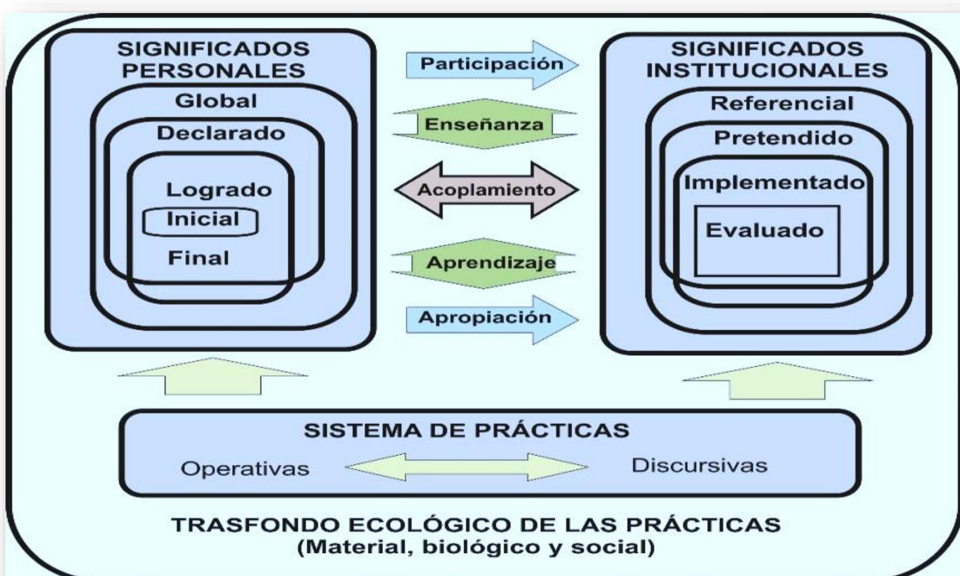


Figura 2.1 Tipos de Significados Institucionales y Personales Interpretados como Sistema de Prácticas. Fuente: (Godino et al., 2007)

Según Pino-Fan (2013) el significado global de referencia se define a partir de dos nociones: significado global, también denominado holístico u holo-significado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático y significado de referencia, entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio (Pino-Fan, Godino y Font, 2011). Para una institución de enseñanza el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático.

2.1.4. Configuración Epistémica

Los sistemas de prácticas resultan útiles para un análisis de tipo macrodidáctico, cuando se quieren describir los conocimientos matemáticos en diversos entornos institucionales o en los contextos de uso. Para hacer un análisis más *fino* de la actividad matemática, según Godino et al., (2007) en el EOS se ha introducido la tipología de los objetos matemáticos primarios antes mencionados (lenguajes, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos). Estos objetos están relacionados entre sí formando redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, lo que en el EOS se conoce como *configuraciones* que pueden ser *socio-epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales).

Godino, Contreras y Font, (2006) proponen el constructo Configuración Epistémica de la siguiente manera:

> Se llama Configuración Epistémica al sistema de objetos que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación problema. El análisis epistémico será la caracterización de las configuraciones epistémicas, su secuenciación y articulación. Dentro de cada configuración se definen unidades de análisis más elementales según los estados de la trayectoria, las que son llamadas unidades epistémicas. Las distintas oraciones que componen la crónica de un proceso de instrucción son numeradas

correlativamente para su referencia y se denominan unidades naturales de análisis (p. 51)

Para diseñar una práctica matemática e interpretar sus resultados, es necesario poner en funcionamiento ciertos conocimientos que (Godino et al., 2007) consideran como:

> Los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas) de igual forma se analiza el uso de los lenguajes: verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de *conceptos*, *proposiciones* y *procedimientos* que intervienen en la elaboración de *argumentos* para decidir si las acciones simples que componen la práctica, y ella en tanto acción compuesta, son satisfactorias. (p. 6)

En consecuencia, cuando un agente realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado formado por la tipología de los objetos primarios, articulado en una *configuración epistémica* como se muestra en la Figura **2.2** (Font y Godino, 2006, p. 69).

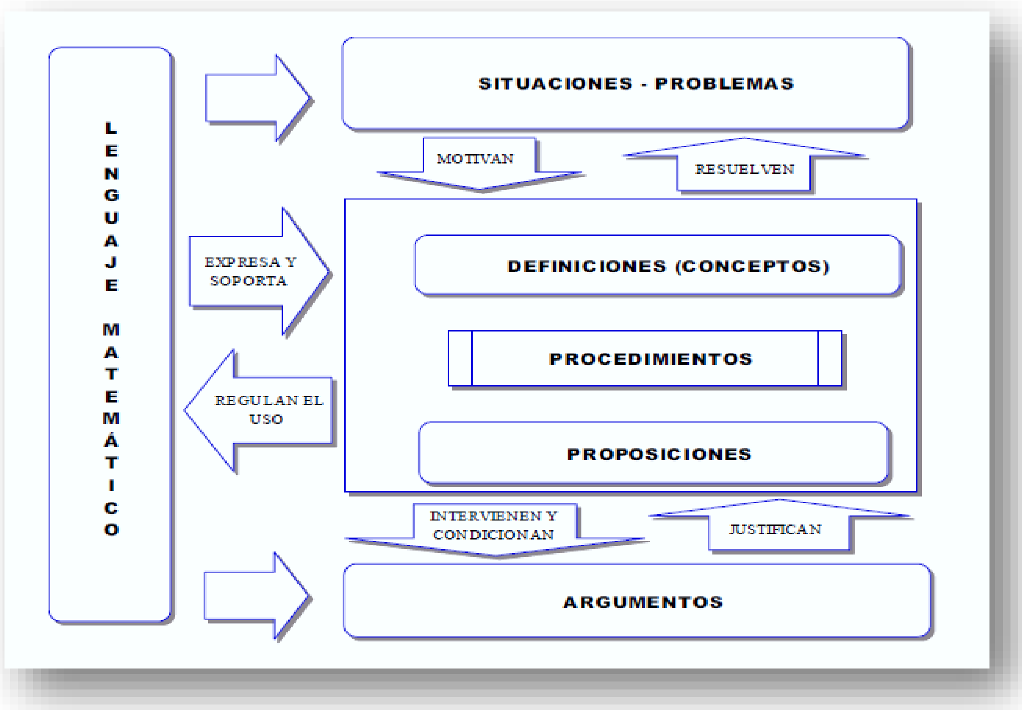


Figura 2.2 Configuración Epistémica. (Fuente: Font y Godino, 2006)

La emergencia de los objetos primarios considerados, llevan asociados respectivamente los procesos de problematización, comunicación, definición, algoritmización, enumeración y argumentación presentados en la Figura **2.2.** Otros procesos como la resolución de problemas y la modelización se ven en este enfoque como mega-procesos, e implican la intervención y la activación de los procesos mencionados. Las situaciones-problemas y las prácticas realizadas para resolver problemas, tienen un papel central, así como la dependencia de los contextos institucionales en los que tienen lugar.

El análisis de la actividad matemática requiere de la elaboración de una tipología de objetos y procesos matemáticos. Estas configuraciones (ver, Figura **2.3**) responden a la identificación de los diferentes tipos de objetos y procesos que intervienen y emergen en las prácticas matemáticas que se realizan para dar solución a situaciones – problemas (Godino, Batanero y Font, 2019). El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar los objetos: problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos, argumentos, que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio.

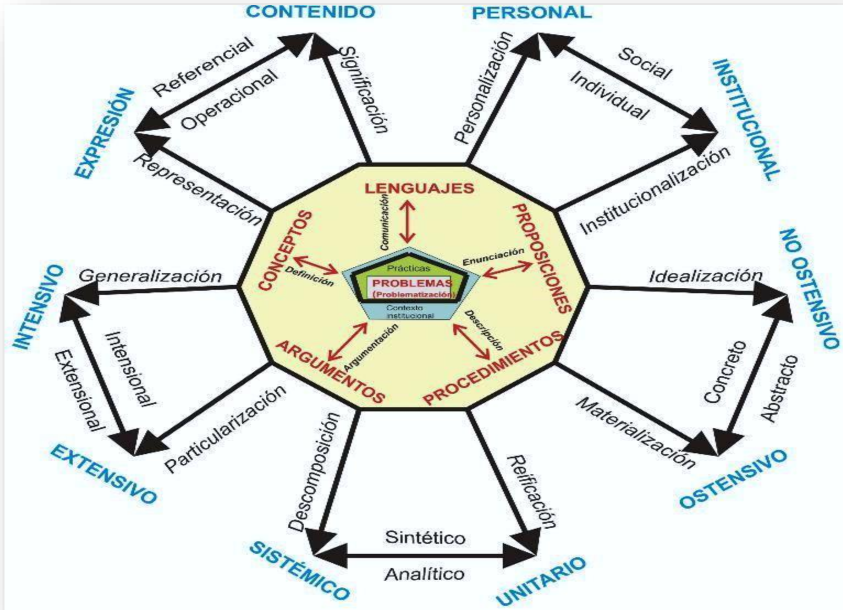


Figura 2.3 Configuración Ontosemiótica de Prácticas, Objetos y Procesos. (Fuente: Godino et al., 2019).

Godino et al., (2019) mencionan que la configuración ontosemiótica permite articular las nociones de práctica, objeto y proceso, así como las dualidades desde las cuales se pueden considerar dichas nociones para el análisis institucional y personal de la actividad matemática.

2.2. Estudio del Conocimiento del profesor

El tema del Conocimiento del profesor, en las últimas décadas, se ha centrado en la identificación de algunas de sus componentes o dimensiones, lo cual ha sido reconocido como una línea general de estudio en la preparación de docentes y un tema importante de investigación en educación matemática; ya que la principal razón es que el desarrollo del pensamiento y competencias matemáticas de los estudiantes dependen esencialmente de los conocimientos, competencias, habilidades de sus profesores (Pino-Fan, 2013).

El trabajo fundamental de Shulman (1986, 1987) sobre el conocimiento del contenido pedagógico, o Pedagogical Content Knowledge (PCK) ha jugado un papel importante en el desarrollo de perspectivas basadas en categorías de este conocimiento que conectan el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento pedagógico, y muestran la forma de presentar el tema y hacer que sea comprensible para los estudiantes. Shulman (1986) propuso tres categorías que conforman el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido y conocimiento curricular. El PCK, es descrito por Shulman como "aquel que va más allá del conocimiento de la materia en sí misma a la dimensión del conocimiento de la materia para la enseñanza". En otro trabajo posterior Shulman (1987) amplía sus ideas y propone siete categorías del conocimiento del profesor que hacen posible la enseñanza, a saber "categorías del conocimiento base:

> ***1)*** *Conocimiento del contenido*. ***2)*** *conocimiento pedagógico general*; que se refieren a esos principios y estrategias generales que ayudan a la gestión y organización de la clase y que aparecen para hacer trascender el contenido. ***3)*** *conocimiento curricular*; comprensión de los materiales y programas que sirven como 'herramientas de trabajo' para los profesores. ***4)*** *conocimiento pedagógico del contenido (PCK)*; como una amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional. ***5)*** *conocimiento de los estudiantes y sus características;* ***6)*** *conocimiento de los contextos educativos*; que va desde el funcionamiento del grupo o la clase, el gobierno y financiamiento de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y ***7)*** conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación. (p. 8)

Shulman señala que de las siete categorías antes mencionadas, el *conocimiento pedagógico del contenido (PCK),* resulta de especial interés puesto que identifica el "cuerpo distintivo" de conocimiento para la enseñanza, pues representa la mezcla de contenido y pedagogía en la comprensión de cómo un tópico particular, problema o tema se organiza, representa y se *adapta* atendiendo a la diversidad de intereses y habilidades de los estudiantes, y se presenta para su enseñanza (Pino-Fan, 2013).

Recientemente la noción de "Conocimiento matemático para la enseñanza" "Mathematical Knowledge for Teaching-(MKT)" ha sido introducida en el campo en diversos trabajos, por Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Ball y Schilling, 2008), entre otros, y ha sido definido como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). Este conocimiento está conformado por dos grandes categorías que a su vez están conformada en subcategorías del conocimiento: 1) *conocimiento del contenido*, que incluye conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático; y 2) *conocimiento pedagógico del contenido*, conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza, y conocimiento del currículo los cuales se pueden ver en forma más clara en la Figura **2.4**.

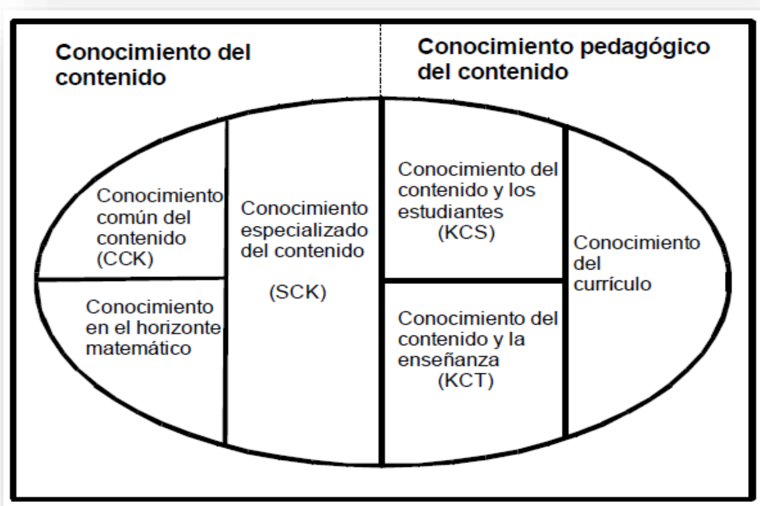


Figura 2.4 Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). (Fuente: Hill, Ball y Schilling, 2008).

Según Godino (2009) la distinción entre el *conocimiento común del contenido* (CCK) y el *conocimiento especializado del contenido* (SCK) consiste en que, mientras el primero refiere al conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático, o incluso un sujeto adulto con suficiente conocimiento, está capacitado; el segundo refiere por ejemplo a realizar un ordenamiento de las secuencias con que podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico. Para esta última acción, es posible que un sujeto adulto o inclusive un matemático, no tenga necesariamente la competencia ni la posibilidad de llevarla a cabo. El profesor de matemáticas debe tener un conocimiento más avanzado del contenido específico que lleve a formular cuestiones tales como ¿Puede tener consecuencias matemáticas conflictivas algo que se ha dicho de manera explícita o implícita? ¿Es esto interesante e importante desde el punto de vista matemático? ¿Hay alguna desviación en las ideas matemáticas tratadas? Tales cuestiones se refieren a los aspectos del conocimiento matemático del profesor como *conocimiento en el horizonte matemático*. En otras palabras, se trata del conocimiento que aporta perspectiva a los profesores para su trabajo.

El *conocimiento del contenido y de los estudiantes* (KCS) se define como "el conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento sobre como los estudiantes piensan, conocen o aprenden este contenido particular" (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 375). Por otra parte, Ball, Thames y Phelps (2008) mencionaban que el *conocimiento del contenido y la enseñanza* (KCT) es:

> La combinación entre el conocimiento sobre la enseñanza y el conocimiento sobre las matemáticas. Muchas de las tareas matemáticas de enseñanza requieren un conocimiento matemático para el diseño de la instrucción. Los profesores secuencian contenidos particulares para la instrucción. Los profesores eligen los ejemplos para comenzar con el proceso y los ejemplos que usan para ayudar a los estudiantes a profundizar en el contenido. Los profesores evalúan las ventajas y desventajas instruccionales de las

> representaciones usadas para la enseñanza de ideas específicas e identifican los diferentes métodos y procedimientos permisibles en el proceso de instrucción. Cada una de esas tareas requiere una interacción entre una comprensión matemática específica y una comprensión de los aspectos pedagógicos que afectan el aprendizaje de los estudiantes. (p. 401)

Finalmente el *conocimiento del currículo* (KCC) se relaciona con el conocimiento de los contenidos, fines, orientaciones curriculares, materiales y recursos disponibles para la enseñanza y le permiten al profesor guiar su práctica y seleccionar las tareas adecuadas para el aprendizaje de sus estudiantes. A lo largo del desarrollo del conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido se utiliza con frecuencia el término *conocimiento*, pero ¿Qué es conocimiento? ¿Cómo influye en la enseñanza de las matemáticas? Según la RAE el término *conocimiento*, corresponde a una acción y efecto de conocer, entendimiento, inteligencia y razón natural. Pero desde la mirada de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992), el *conocimiento* corresponde a la relación de alguien (persona o institución) con un objeto. Pino-Fan (2013) infiere que el término *conocimiento* en educación matemática apunta a una aproximación al conocimiento del profesor como una integración cognitiva del conocimiento científico y conocimiento práctico, provenientes de diferentes dominios científico-prácticos.

Es por eso que el *conocimiento* cobra sentido cuando se hacen estudios sobre el pensamiento del profesor en base a: a) el profesor es un sujeto reflexivo, racional, que toma decisiones, emite juicios, tiene creencias y genera rutinas propias de su desarrollo profesional; b) los pensamientos del profesor influyen sustancialmente en su conducta e incluso la determinan, es decir, estos pensamientos dieron paso a una preocupación por el conocimiento del profesor (Pino-Fan, Evaluación de la Faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la Derivada (Tesis Doctoral), 2013).

En la literatura no se encuentra una definición intencional de *conocimiento,* lo que se observa es una aproximación extensional; es decir, se intenta especificar los componentes de dicho conocimiento (tal como la propuesta de Ball y colaboradores).

Por otra parte Godino (2009) argumenta que los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías muy generales (globales) y considera que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Ello permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos del profesor de matemáticas, lo que lo lleva a presentar un modelo teórico sobre el conocimiento didáctico que tome en cuenta las categorías de análisis de los modelos anteriores, y lo enriquece con unos niveles de análisis más finos de manera sistemática acorde al tratamiento del tema a estudiar (Godino, 2009).

2.2.1. Modelo del conocimiento didáctico matemático del profesor

El modelo del *Conocimiento Didáctico-Matemático* (CDM) se define en el enfoque EOS como la "fusión de las conceptualizaciones del MKT y PCK" por lo que:

> El CDM viene a ser la trama de relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios y los procesos de significación, que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas del profesor, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones problemáticas para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes. (Pino-Fan,

Godino y Font, 2010, p. 209)

Godino (2009) propone un sistema de categorías de análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor articulados de manera coherente en el EOS ya que las nociones teóricas de este enfoque son un conjunto de herramientas de análisis y reflexión de los procesos de enseñanza y aprendizaje y pueden ser utilizadas por los profesores para indagar sobre su propia práctica.

2.2.2. Facetas y niveles del CDM

La didáctica tiene como objetivo analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con: el contenido, estudiantes, profesor, medios tecnológicos, que puestos en el interior de un contexto institucional y social determinado, condicionan y hacen posible la realización de los procesos educativos. Para llevar esto a cabo estos procesos, es necesario adoptar modelos teóricos específicos para cada uno de los componentes del sistema ya que estos componentes interactúan entre sí, por lo que se hace necesario identificar las distintas facetas intervinientes. Para analizar el conocimiento del profesor, el EOS propone el modelo denominado "Modelo del conocimiento didáctico–matemático" el cual se compone de seis facetas o dimensiones involucradas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de tópicos específicos de matemáticas, según Godino (2009):

- *Epistémica*: Conocimientos matemáticos relativos al contexto institucional en el que se realiza el proceso de estudio y la distribución en el tiempo de los diversos componentes del contenido (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
- *Cognitiva:* Conocimientos personales de los estudiantes y progresión de los aprendizajes.
- *Afectiva*: Estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de cada estudiante con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

- *Mediacional*: Recursos tecnológicos y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.
- *Interaccional*: Patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuenciación orientada a la fijación y negociación de significados.
- *Ecológica*: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico, etc. que soporta y condiciona el proceso de estudio.(p. 21)

En este marco teórico se consideran como claves las facetas epistémica y cognitiva y postula para ellas un punto de vista antropológico y semiótico: la matemática como actividad humana que adquiere significado mediante la acción de las personas ante situaciones-problemas, específicos. Además, se concede relevancia a las demás facetas (afectiva, mediacional, interaccional y ecológica) ya que condicionan los aprendizajes y la enseñanza (Godino, 2009).

2.2.3. Análisis semiótico de un texto matemático

El análisis semiótico de un texto matemático en el enfoque EOS, corresponde a una técnica analítica que permite determinar los significados institucionales y personales puestos en juego en los procesos de instrucción matemática la cual se complementa con el análisis de los objetos primarios (componentes de la configuración epistémica). Godino (2002) identifica cada uno de los objetos los cuales forman categorías de análisis para el trabajo matemático:

> El *Lenguaje*, el cual se encuentra constituido por términos, expresiones, notaciones, gráficas. En un texto intervienen en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático puede usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico) se describen otros objetos no lingüísticos.
>
> Las *Situaciones* corresponden a los problemas más o menos abiertos, aplicaciones extra matemáticas o intra matemática, ejercicios. Son las tareas que inducen la actividad matemática.
>
> Los *Procedimientos*, operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo. Son las acciones del

> sujeto ante las tareas matemáticas.
>
> Los *Conceptos* son dados por las definiciones o descripciones por ejemplo: numero, punto, recta, media, función…
>
> Las *Propiedades* son las propiedades o atributos de los objetos mencionados y suelen darse como enunciados.
>
> Las *Argumentaciones* pueden ser deductivas o de otro tipo. Se usan para validar y explicar las proposiciones. (p. 6)

Estos seis tipos de objetos se califican como matemáticos, porque se ponen en juego en la actividad matemática y son los constituyentes primarios de otros objetos más complejos u organizaciones matemáticas, como los sistemas conceptuales, teorías, etc. Las entidades lingüísticas tienen un papel representacional – se ponen en lugar de las restantes – y también instrumental; es decir, se ven como instrumentos de la actividad matemática. Aunque mucha actividad matemática es mental, poco podríamos avanzar en el trabajo matemático si no tuviéramos el recurso de la escritura, la palabra y los restantes registros materiales. Las situaciones-problemas son las promotoras y contextualizadoras de la actividad matemática, y junto con las acciones (algoritmos, operaciones, procedimientos) constituyen el componente práctico de las matemáticas, la acción dirigida a un fin (Godino, 2002, p. 6).

Esta *tipología de los objetos primarios* lleva a la formación de *configuraciones epistémicas*, las cuales son herramientas que ayudan al análisis de la complejidad de los objetos matemáticos y los sistemas de prácticas de donde emergen estos objetos en distintos contextos de uso. Un objeto matemático puede tener varias configuraciones epistémicas las cuales a su vez llevan asociadas un significado parcial distinto para dicho objeto matemático (Font y Godino, 2006).

El *análisis semiótico* de un texto matemático, según Godino (2002) se define como la descomposición en unidades, la identificación de las entidades puestas en juego y las relaciones que se establecen entre los mismos por parte de los distintos sujetos. El criterio para definir las unidades de análisis es el cambio de elemento de significado, esto es, cuando se cambia de problema a estudiar dentro del campo de problemas considerado: se pasa del enunciado del problema al desarrollo de una técnica, el empleo de una notación, al uso o identificación de una propiedad, o a la descripción, sistematización y validación de las soluciones. Es decir, se tiene presente en la delimitación de las unidades de análisis, los momentos en los cuales se ponen en juego alguno de los seis elementos introducidos en el enfoque teórico EOS (Godino, 2002).

Según Godino (2002) para aplicar esta técnica se requiere disponer de los textos con la planificación instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a pruebas de evaluaciones aplicadas, lo que conlleva a la indagación sistemática de los significados puestos en juego a partir de la transcripción del proceso y de cada una de las partes en que se puede descomponer dicho texto en donde intervengan matemáticas.

En el modelo CDM Godino (2009) incluye seis *facetas* o dimensiones con herramientas útiles para su análisis, los cuales se activan al momento de realizar el proceso de enseñanza y aprendizaje en tópicos específicos de matemáticas:

Epistémica: es el conocimiento didáctico-matemático sobre el propio contenido, es decir, la forma particular en que el profesor de matemática comprende y conoce las matemáticas (significados institucionales implementados). Sería equivalente a lo que Ball et al., (2008) denominan conocimiento especializado del contenido matemático aunque en nuestro caso el EOS aporta un desglose analítico de sus elementos constituyentes.

Cognitiva: implica el conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje.

Afectiva: incluye los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

Mediacional: es el conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.

Interaccional: refiere al conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula.

Ecológica: implica las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática.

Todas estas facetas forman parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la medida en que tales procesos ponen en juego algún contenido matemático. Así, el profesor de matemáticas necesariamente tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo donde imparte, pero también debe poder articular esos conocimientos con los correspondientes a niveles posteriores (Giacomone, 2018).

Para cada una de estas facetas o dimensiones se contemplan, a su vez, diversos niveles que permiten el análisis de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales Godino (2009):

> Nivel 1. *Identificación de prácticas matemáticas y didácticas*: descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.

Nivel 2. *Identificación de objetos y procesos matemáticos y didácticos:* descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.

Nivel 3. *Identificación del sistema de normas y metanormas:* identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.

Nivel 4. *Valoración de la idoneidad interaccional del proceso de instrucción:* identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica. (pp. 21-22)

En la Figura **2.5** se observa cómo interactúan las facetas y los niveles del conocimiento del profesor, mencionadas.

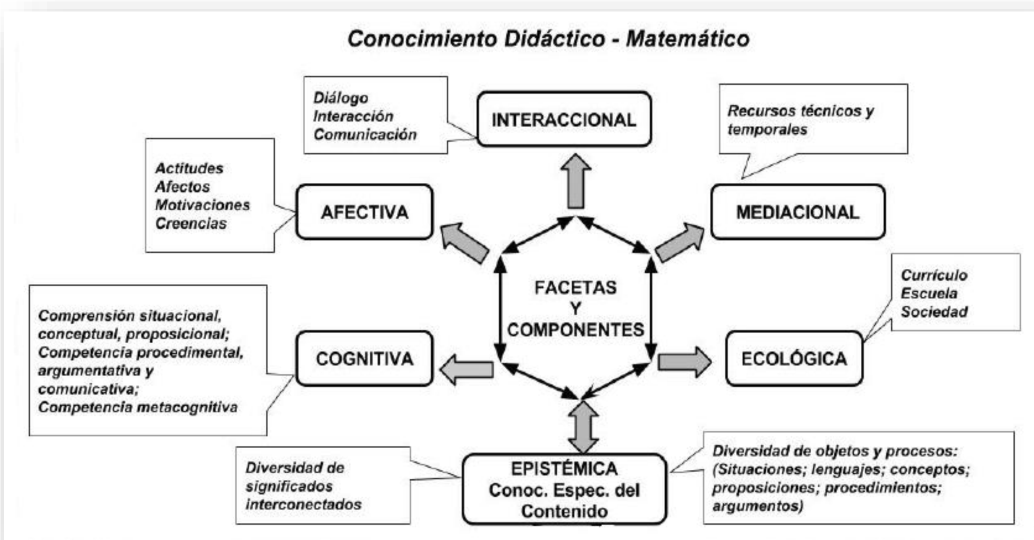


Figura 2.5 Facetas y Componentes del Conocimiento del Profesor. Fuente: (Godino, Batanero, Font y Giacomone, 2016, p. 292)

El modelo propuesto por Godino (2009), en el enfoque EOS, además de las diferentes facetas y niveles de análisis, propone una serie de pautas o consignas (ítems de evaluación o propuestas de actividades) que permitan valorar el conocimiento didáctico-matemático en los profesores. Así la *faceta epistémica* del conocimiento didáctico matemático, motivo de análisis de este estudio, requiere tener en cuenta la diversidad de significados parciales de los objetos matemáticos y su interconexión. Pero además, la descripción de tales significados implica el reconocimiento de las configuraciones ontosemióticas correspondientes. Como resultado de estas interacciones, el CDM se presenta como un modelo mucho más rico que brinda herramientas específicas para el análisis de todos los factores que influyen en un proceso de instrucción (Giacomone, 2018). La propuesta para el análisis del CDM, se tiene se muestra en la Tabla **2.1** (Godino, 2009, p. 25).

Tabla 2.1
Conocimiento Común, Especializado y Ampliado del Contenido Matemático

Faceta Epistémica	**Consigna**	
Conocimiento común:	Resuelve la tarea	
Conocimiento Especializado:	Elabora la configuración de objetos y procesos puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:	
	Tipos de problemas:	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado.
	Lenguajes:	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
	Procedimientos:	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales)
	Conceptos Propiedades:	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
	Argumentos:	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento Ampliado:	*Conexiones:*	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados

Fuente: (Godino 2009, p. 25)

2.3. Concepciones y creencias de los estudiantes de formación matemática en el objeto SEL

Para Trejo y Camarena (2011), las concepciones del profesor, se establecen de acuerdo a la historia personal, experiencia y forma de pensar; su posición frente a la práctica docente, podría posibilitar o dificultar el acceso al conocimiento por parte de los estudiantes. En esta dirección, Thompson (1992) caracteriza las *concepciones* como una estructura mental general, que abarca creencias, significados, conceptos, preferencias y gustos. En el mismo sentido, Ponte (1994), argumenta que las *concepciones* corresponden a marcos organizadores de forma implícita de conceptos, con naturaleza esencialmente cognitiva y que condicionan la forma en que se afrontan las tareas.

Asimismo, Azcárate y Moreno (2003) definen una *concepción* como una síntesis de las definiciones dadas por Ponte (1994), Thompson (1992) y Llinares (1991), con una acepción cognitivista del término, que se acerca más a la idea de conocimiento y creencias del profesor:

> Las *concepciones* son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza especialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. El carácter subjetivo es menor en cuanto se apoyan sobre un sustrato filosófico que describe la naturaleza de los objetos matemáticos (p. 267).

Las creencias según Pajares (1992), son las verdades personales indiscutibles sustentadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía que tiene un fuerte componente evaluativo y afectivo. Las creencias se manifiestan a través de declaraciones verbales o de acciones (justificándolas). En este sentido, tanto las concepciones como las creencias tienen un componente cognitivo; la distinción entre ambas reside en que las *creencias* se mantienen con plena convicción, son consensuadas y tienen procedimientos para valorar su validez, y las *concepciones* no (Thompson, 1992). Asimismo, Gómez (2000) entiende como *creencias matemáticas* a una de las componentes del conocimiento subjetivo implícito del individuo sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje; conocimiento que está basado en la experiencia.

Esta dicho por los autores como Gómez (2000), Ponte (1994), Thompson (1992), Pajares (1992) y Llinares (1991), que al describir las concepciones y creencias de los profesores que enseñan matemáticas, se comprenden y caracterizan los modos que tienen de interpretar la enseñanza y el aprendizaje en el aula de clase para detectar las acciones y conceptos en los que se sustentan y las tendencias de pensamiento que comparten, es decir, bajo estos argumentos las concepciones y creencias se relacionaran con el desarrollo cultural y personal de cada profesor de matemáticas en su proceso de análisis de los significados personales e institucionales utilizados para describir los fenómenos cognitivos (Godino et, al. 2007).

En este sentido, las concepciones y creencias de los profesores que enseñan matemáticas se articularán en el enfoque EOS, al relacionarse con los sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a tipos de problemas que usa el docente de manera personal o que comparte en el seno de una institución (personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas que contienen rasgos particulares, condicionados por reglas y modos de funcionamiento), para su actuación ante los tipos de situaciones problemáticas (Godino y Batanero, 1994). Asimismo las concepciones y creencias se articulan con los diferentes tipos de significados descritos en el enfoque EOS, gracias a la relatividad socioepistémica y cognitiva en los diferentes procesos del análisis didáctico y por tanto, las concepciones y creencias se pueden enmarcar o analizar de acuerdo con los significados institucionales y personales del docente en el desarrollo de los sistemas de prácticas relacionadas con el objeto matemático SEL. (Godino et al., 2007).

Capítulo 3. Metodología

“*Investigar es ver lo que todo el mundo ha visto,*
y pensar lo que nadie más ha pensado”

Albert Szent-Györgyi (1893-1986)

En el presente capítulo se presenta la metodología con la cual se desarrolló la investigación en 4 apartados. En el primer apartado, se especifica el paradigma interpretativo donde se apoya la investigación y el enfoque de investigación cualitativa el cual se ajusta al desarrollo del estudio. En el segundo apartado se definen: el diseño y las fases de la investigación para el logro del objetivo general y los objetivos específicos. En el tercer apartado se describe la unidad de análisis que permite caracterizar la dimensión epistémica del profesor en cuanto al objeto SEL y a los significados de referencia que usa el profesor para conformar el significado pretendido e implementarlo en el aula de clase y finalmente, en el cuarto apartado se dan a conocer las técnicas e instrumentos de recolección de la información los cuales permiten el análisis de los datos que posteriormente se convertirán en información.

3.1. Paradigma y enfoque de la investigación

El propósito de la investigación realizada, conduce a caracterizar las concepciones y creencias de un grupo profesores de matemáticas de grado noveno respecto a la identificación de los significados de referencia y significados pretendidos para diseñar, implementar y evaluar los diferentes procesos de enseñanza relacionados con el objeto matemático de los sistemas de ecuaciones lineales. El marco teórico y metodológico del que se apoyó la investigación corresponde al Enfoque Ontosemiotico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos – EOS (Godino et al., 1994; Godino et al., 2007).

En este sentido, la investigación se enmarca dentro del paradigma interpretativo, según Pérez (1994) citado por Ricoy (2006). Este paradigma interpretativo, intenta construir una reflexión desde la praxis, conformando la realidad de hechos observables y externos, por significados e interpretaciones elaboradas del propio sujeto, a través de una interacción con los demás, dentro de la globalidad de un contexto determinado, haciendo énfasis en la comprensión de los procesos desde las propias creencias, valores y reflexiones. Como el paradigma interpretativo tiene un carácter cualitativo, esto lleva a que la investigación se desarrollara bajo un enfoque de investigación cualitativa, la cual orienta a comprender la forma en que los individuos perciben y experimentan los diferentes fenómenos que los rodean, explorándolos desde la perspectiva, interpretación y significados de los participantes en un ambiente natural o en relación con un contexto determinado (Hernández, Fernández y Baptista 2014).

El enfoque ontosemiotico - EOS tomado como marco teórico - metodológico, permitiendo que el docente indague sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, los procesos de constitución teórica de los objetos matemáticos, por medio de las herramientas teóricas propias del EOS, accediendo a analizar los sistemas de prácticas (personales-institucionales) para mejorar los procesos de instrucción en el aula (significados pretendidos), buscando que el profesor de matemáticas llegue a reconocer o reconstruir los significados parciales de cada objeto matemático, proponiendo estrategias didácticas encaminadas a lograr la construcción de los objetos matemáticos por parte de sus estudiantes (Godino y Batanero, 1994).

3.2. Diseño y fases de la investigación

3.2.1. Diseño de la investigación

El trabajo investigativo tiene énfasis en las características propias del diseño fenomenológico el cual corresponde a "explorar, describir y comprender las experiencias de las personas con respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias" (Hernández, Fernández, y Baptista 2014, p. 493). En este aspecto, Van Manen (1990) citado por Hernández, Fernández, y Baptista (2014) menciona algunas de las características que conforman la fenomenología hermenéutica así:

> Se concentra en la interpretación de la experiencia humana y los textos de la vida. No sigue reglas específicas, pero es producto de las interacciones entre: *a) definir un fenómeno, b) estudiarlo y reflexionar sobre el, c) descubrir categorías y temas esenciales del fenómeno, d) describirlo e interpretarlo mediante diferentes significados aportados por los participantes.* (p. 494).

El diseño fenomenológico hermenéutico permite realizar una exploración, descripción y reflexión de los significados parciales del objeto matemático SEL, ayudando a reconstruir el significado global del objeto SEL que debe conocer el profesor para la enseña en grado noveno, permitiendo así el logro de los objetivos propuestos en cuanto a la caracterización de las creencias y concepciones del profesor de noveno grado y los significados pretendidos para la enseñanza del objeto SEL.

3.2.2. Fases de la investigación

El presente estudio se estructura en la realización de cinco estudios principales: **1)** Estudio histórico-epistemológico del objeto SEL; **2)** Caracterización del significado global del objeto Sistemas de ecuaciones lineales en base a: situaciones problemas, configuraciones epistémicas y significados parciales; **3)** Caracterización del significado global de referencia presentado por los libros de texto para la enseñanza de los SEL; **4)** Diseño y aplicación del cuestionario para analizar la dimensión epistémica de un grupo de profesores de matemáticas en grado 9 sobre la enseñanza de los SEL; **5)** Análisis de las implicaciones que tienen las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas de grado 9 sobre los significados pretendidos en los procesos de instrucción.

Fase I. Estudios Preliminares

Corresponde a la realización del *estudio histórico-epistemológico del objeto SEL*, el cual se realizó mediante un riguroso análisis documental, a partir de la revisión de libros de historia de las matemáticas, tesis doctorales, tesis de maestrías, artículos de investigación científica e investigaciones relacionadas con el objeto SEL; en el cual se evidencian los orígenes, evolución y la naturaleza del objeto SEL en las diferentes culturas de la humanidad, clasificando el estudio según los 4 periodos de la historia *(época antigua, edad media, edad moderna y edad contemporánea)*. En esta fase el estudio es de tipo descriptivo, ya que se busca especificar propiedades y características importantes (de los sistemas de prácticas) de cualquier fenómeno (solución de problemas con sistemas de ecuaciones lineales), describiendo las tendencias de un grupo o población (las culturas de la humanidad) (Hernández, Fernández y Baptista 2014). En esta fase se da cumplimiento al objetivo específico:

OE1. Reconstruir el significado global del objeto SEL, por medio del estudio histórico-epistemológico de las prácticas matemáticas según el origen, evolución y naturaleza del objeto matemático.

Fase II. Análisis semióticos

Corresponde a: **1)** el estudio del *análisis semiótico a situaciones problemas relacionadas con los SEL*, mediante la técnica del análisis semiótico de textos matemáticos (Godino, 2002), donde se caracterizan 8 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico (fase I); a cada situación problema se le analizó la tipología de los objetos primarios inmersos en la solución del problema, generando una configuración epistémica y a esa configuración se le asignó un significado parcial del objeto matemático SEL. El estudio arrojó 8 significados parciales del objeto SEL que permitieron conformar lo que se conocen en el enfoque ontosemiotico como el *significado global del objeto sistemas de ecuaciones lineales.* Esta fase es de tipo descriptivo-exploratorio, pues buscó especificar las propiedades y características de los objetos o fenómenos de lo cual no se había abordado antes. (Hernández, Fernández y Baptista 2014). **2)** Corresponde al estudio del *análisis conceptual del objeto sistemas de ecuaciones lineales,* el cual se realizó con la revisión sistemática de 6 libros de texto sobre la enseñanza del álgebra lineal y 1 libro de texto para la enseñanza de las matemáticas en el grado noveno; en el análisis teórico sobre el objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales, se describieron los elementos y conceptos básicos relacionados con este objeto matemático; ya sea por las propiedades asociadas al conjunto solución de un sistema lineal dado, o por las relaciones establecidas entre los elementos que constituyen los SEL y permiten llegar al análisis de su solución. Del estudio histórico-epistemológico del objeto SEL se evidenció que ellos se encuentran ligados a problemas reales y de la matemática, donde además, emergen otros objetos matemáticos como las matrices y los determinantes. En este sentido la comprensión de estas fuentes documentales permitió conformar lo que se conoce en el enfoque ontosemiotico EOS el *significado global de referencia del objeto sistemas de ecuaciones lineales.* El alcance de esta fase es de tipo descriptivo-exploratorio.

En esta fase se da cumplimiento al objetivo específico:

OE2. Caracterizar el significado global referencial del objeto Sistemas de ecuaciones lineales a partir del análisis teórico del objeto matemático.

Fase III. Diseño e implementación de problemas históricos

Esta fase se denomina *diseño, e implementación de problemas históricos*; en este estudio se implementaron tres situaciones problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico (fase I). La primer situación-problema llamada *Tamaño de terrenos* y la segunda situación-problema llamada: *grupo de personas y compra de animales,* corresponden al periodo 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C). El propósito de implementar las situaciones-problemas es el de obtener un sistema de prácticas matemáticas institucionales para su implementación con un grupo de docentes, y así, reflexionar sobre el conocimiento de los docentes sobre el contenido matemático, es decir se analiza la dimensión epistémica del conocimiento del docente, respecto al significado global del objeto SEL (fase II), y el significado global referencial del objeto SEL (fase II) y el significado institucional pretendido por los docentes a los diferentes procesos de instrucción en cuanto al objeto sistemas de ecuaciones lineales. En el mismo sentido la tercer situación problema llamada *Teorema I* corresponde al periodo 3: Edad Moderna (1453 d.C – 1789 d.C: siglo XV-XVIII). Esta situación-problema fue propuesta con el fin de analizar el conocimiento didáctico matemático del profesor en su subcomponentes del conocimiento común del contenido y el conocimiento ampliado, que pueden ser usadas para la valoración de situaciones introductorias en los procesos de instrucción, o también como la auto-evaluación y reflexión del profesor sobre aspectos importantes de su propia práctica docente. El alcance de esta fase es de tipo exploratorio. En esta fase se da cumplimiento al objetivo:

OE3. Diseñar e implementar el cuestionario sobre las concepciones y creencias de los profesores respecto al objeto SEL.

Fase IV. Análisis de los sistemas de prácticas matemáticas

En esta última fase se reflexiona sobre las implicaciones que puede tener el implementar los diferentes significados pretendidos en el aula de clase basados en las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas de grado 9. Se buscó entender como estas concepciones y creencias pueden impactar directamente en la aprehensión de los alumnos respecto al objeto matemático SEL. El análisis sistemático de las diferentes practicas matemáticas se llama dentro del enfoque ontosemiotico EOS, la identificación de los significados institucionales (referencial, pretendido) del profesor (Godino, 2007). Esta fase corresponde a un estudio de tipo descriptivo ya que permitió una exploración y descripción de las características de los significados personales e institucionales del profesor de matemáticas de grado noveno. En esta fase se da cumplimiento a los objetivos específicos:

OE4. Describir las concepciones y creencias de profesores de Matemáticas de grado 9, respecto al uso de los significados parciales del objeto SEL para la implementación de los procesos de instrucción.

OE5. Analizar las implicaciones didácticas que trae la concepción de los profesores en cuanto al significado de referencia y el significado pretendido del objeto SEL.

A continuación se presenta la relación entre las diferentes fases de la investigación:

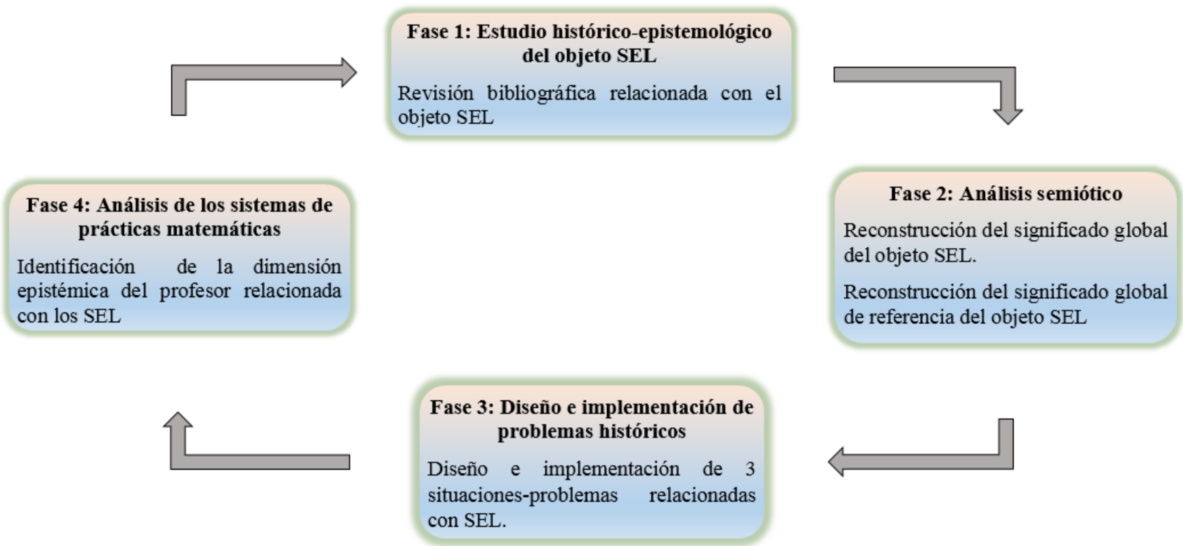


Figura 3.1 Fases de la Investigación. Fuente: (Elaboración Propia).

3.2.3. Relación entre objetivos y fases la investigación

Esta investigación centro su atención en la pregunta de investigación: ¿Qué concepciones y creencias tienen los profesores de matemáticas del desarrollo histórico-epistemológico del objeto sistemas de ecuaciones lineales, respecto a los significados pretendidos en los procesos de enseñanza de este objeto matemático? cuyo interrogante fue resuelto con el logro de los objetivos específicos propuestos. Por lo tanto se menciona la relación entre las fases de la investigación y las actividades que se realizaron para el logro de los objetivos planteados.

Fase I: Estudios preliminares

OE1. Reconstruir el significado global del objeto SEL, por medio del estudio histórico-epistemológico de las prácticas matemáticas en base a su origen, evolución y naturaleza del objeto matemático.

***A*ctividades realizadas para el logro del objetivo específico OE1**

Realización de un análisis documental a libros de historia de las matemáticas, tesis doctorales, tesis de maestrías, artículos de investigación científica e investigaciones relacionadas con el objeto SEL; analizando los orígenes, evolución y la naturaleza del objeto SEL.

- Clasificación del estudio histórico-epistemológico en los 4 periodos de la humanidad *(época antigua, edad media, edad moderna y edad contemporánea)*, para identificar los sistemas de prácticas matemáticas realizadas, en las diferentes culturas de la humanidad relacionadas con los SEL.
- Identificación de 8 situaciones-problemas emergentes de las prácticas matemáticas encontradas en el estudio histórico-epistemológico en las diferentes culturas de la humanidad.

Fase II: Análisis semiótico

OE2. Caracterizar el significado global referencial del objeto Sistemas de ecuaciones lineales a partir del análisis teórico del objeto matemático.

***A*ctividades realizadas para el logro del objetivo específico OE2**

- Realización del análisis semiótico de textos matemáticos a 8 situaciones-problemas relacionadas con los objetos SEL, encontrados en los 4 periodos de la humanidad.
- Reconstrucción de 8 configuraciones epistémicas teniendo en cuenta la tipología de los objetos primarios, en el desarrollo de las 8 situaciones-problemas. Reconstrucción del significado global del objeto SEL, en base a las 8 situaciones-problemas y los significados parciales del objeto SEL emergentes de las 8 configuraciones epistémicas. Análisis conceptual a 6 libros de texto de enseñanza del álgebra lineal y 1 libro de texto para la enseñanza de las matemáticas en el grado noveno.

- Identificación de los diferentes significados de referencia relacionados con el objeto SEL, encontrados en el análisis conceptual.
- Interpretación de los diferentes métodos de solución para SEL, con las 8 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL.
- Reconstrucción del significado global referencial del objeto SEL, en base a los diferentes significados de referencia encontrados en los libros de texto analizados.

Fase III: Diseño, e implementación de problemas históricos

OE3. Diseñar e implementar el cuestionario sobre las concepciones y creencias de los profesores respecto al objeto SEL.

***A*ctividades realizadas para el logro del objetivo específico OE2**

- Diseño de 3 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico relacionados con el objeto SEL por medio de un cuestionario.
- Implementación del cuestionario a la unidad de análisis.

Fase IV: análisis de los sistemas de prácticas matemáticas

OE4. Describir las concepciones y creencias de profesores de Matemáticas de grado 9, respecto al uso de los significados parciales del objeto SEL para la implementación de los procesos de instrucción.

OE5. Analizar las implicaciones didácticas que trae la concepción de los profesores en cuanto al significado de referencia y el significado pretendido del objeto SEL.

***A*ctividades realizadas para el logro del objetivo específico OE4**

- Análisis de la dimensión epistémica en cuanto al sistema de prácticas matemáticas realizadas por los profesores durante el desarrollaron del cuestionario.

- Determinación del conocimiento didáctico matemático del profesor en cuanto a su subcomponente del conocimiento común del contenido y el conocimiento especializado.
- Análisis del proceso investigativo

3.3. Unidad de análisis

Hernández, Fernández, y Baptista (2014) aseguran que para estudios cualitativos: "el tamaño de la muestra no es importante desde una perspectiva probabilística, pues el interés del investigador no es generalizar los resultados de su estudio a una población más amplia. Lo que se busca en la indagación cualitativa es profundidad". (p. 384)

Como el trabajo investigativo tiene un énfasis en las características propias del diseño fenomenológico, siguiendo los argumentos de Hernández, Fernández y Baptista (2014) quienes establecen que el diseño de estudio fenomenológico propone un tamaño de muestra sugerido de 10 casos. En este sentido para el desarrollo de esta investigación fue conveniente indagar sobre la experiencia de 3 profesores Licenciados en matemáticas, en diferentes sectores educativos en educación secundaria (públicos y privados), con el fin de entender la naturaleza del fenómeno de análisis, es decir, el estudio referente a los conocimientos, concepciones y creencias sobre el objeto SEL; la utilización de los significados de referencia utilizados en los diferentes procesos de instrucción y el análisis a la dimensión epistémica del conocimiento del profesor relacionada con el objeto SEL, llegando así al logro de los objetivos de la investigación.

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección y análisis de datos

Para Hernández, Fernández y Baptista (2014) "el propósito de la recolección de datos en la investigación cualitativa no es medir variables para llevar a cabo inferencias y análisis estadísticos, si no obtener datos que se conviertan en información" (p. 396).

En este sentido, se describen las diferentes técnicas e instrumentos utilizados para la recolección y análisis de la información que permitieron caracterizar las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas de grado noveno respecto a la identificación de los significados pretendidos en cuanto al objeto SEL, según las fases metodológicas planteadas, en la siguiente tabla:

Tabla 3.1
Técnicas e instrumentos para la recolección de datos

Fases de la investigación	Recolección de datos Técnica	 Instrumento	Instrumento para el análisis de la información
Fase I: Estudios preliminares.	Análisis documental	Revisión sistemática de libros de historia de las matemáticas y diferentes investigaciones relacionadas con SEL como tesis doctorales, tesis de maestría y artículos de investigación científica.	Análisis a 8 sistemas de prácticas matemáticas realizadas por diferentes civilizaciones de la humanidad.
Fase II: Análisis semiótico.	Análisis semiótico	Análisis semiótico de textos matemáticos a 8 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL. Construcción de 8 configuraciones epistémicas del objeto SEL en las diferentes épocas de la humanidad.	Reconstrucción del significado global de referencia del objeto sistemas de ecuaciones lineales.
	Análisis conceptual	Análisis conceptual a 6 libros de texto de enseñanza del álgebra lineal y 1 libro de texto para la enseñanza de las matemáticas en el grado noveno. Interpretación delos diferentes métodos de solución para SEL, con las 8 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL.	Reconstrucción del significado global del objeto SEL en base a las 8 situaciones-problemas y los significados parciales del objeto SEL emergentes de las 8 configuraciones epistémicas.
Fase III: Diseño, e implementación de problemas de históricos.		Cuestionario con 3 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto sistema de ecuaciones lineales.	Configuraciones hechas en el estudio histórico-epistemológico a las 3 situaciones-problemas.

			Configuraciones epistémicas realizadas por la unidad de análisis.
Fase IV: análisis de los sistemas de prácticas matemáticas.	Análisis semiótico	Evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático del profesor de grado noveno.	Dimensión epistémica del profesor en su subcomponente del conocimiento común del contenido y el conocimiento especializado sobre el objeto sistemas de ecuaciones lineales.

Fuente: (Elaboración propia)

Capítulo 4. Estudio epistemológico del objeto Sistemas de Ecuaciones Lineales

"La Historia de las Matemáticas pone de manifiesto la dimensión cultural de las Matemáticas y su notable impacto en la Historia del Pensamiento"
Anónimo

El presente capítulo se divide en cuatro apartados. En el primer apartado se presenta como se concibe al conocimiento didáctico matemático del profesor propuesto por Godino (2009) y su relación con el significado global del objeto matemático según los sistemas de prácticas desarrolladas a lo largo de la historia; el segundo apartado se inicia con el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL, partiendo de la problemática de identificar situaciones de la realidad, que involucran los SEL en las diferentes épocas de la humanidad: época antigua, edad media, edad moderna y edad contemporánea. En el tercer apartado se muestra como las configuraciones epistémicas se relacionan entre sí de acuerdo a los significados parciales, permitiendo realizar el esquema del significado global del objeto SEL. En el cuarto apartado se realiza el análisis conceptual del objeto SEL para describir los elementos y conceptos básicos relacionados con este objeto matemático SEL que están relacionados con las matrices y los determinantes, además se presentan los esquemas de la estructura conceptual y el significado global de referencia del objeto sistemas de ecuaciones lineales.

4.1. EL Conocimiento Didáctico Matemático del profesor y su relación con el significado global del objeto SEL

El estudio epistemológico del objeto SEL permite caracterizar la dimensión epistémica del CDM del profesor, en su subcomponente del Conocimiento común del contenido (CCC) y al Conocimiento ampliado del contenido matemático. Por tanto, para llegar a la caracterización de esta dimensión se plantea la pregunta ¿Qué significados parciales puede utilizar el profesor para solucionar problemas relacionados con el objeto SEL buscando que sus prácticas didácticas sean idóneas? En este sentido, los significados parciales del objeto SEL, permitirán dar solución a problemas relacionados con tareas propias del álgebra lineal relacionadas con el objeto SEL. Se coloca como hipótesis en el enfoque EOS, que el profesor de matemáticas debe tener un conocimiento del objeto SEL, en la subcomponente del CCC respecto al objeto SEL, el cual se relaciona con dar solución a tareas concretas que puede realizar el profesor en el desarrollo de un programa para grado noveno en las temáticas relacionadas con los SEL (Godino, 2009). Bajo esta perspectiva, el profesor de matemáticas de grado noveno, debería además de poder resolver tareas o situaciones problemas de grado noveno, tener un conocimiento más amplio que le permita movilizar la mayoría de los significados parciales asignados al objeto SEL, en la búsqueda de una idoneidad didáctica que le permita llevar a los alumnos a la comprensión de este objeto: es decir, si el docente reconoce o reconstruye los significados parciales de cada objeto matemático, llegará a proponer y diseñar estrategias didácticas encaminadas a lograr la construcción de los objetos matemáticos por parte de sus estudiantes (Godino y Batanero, 1994, p. 341).

Bajo estos argumentos, el conocimiento ampliado del contenido CAC, se relaciona con las conexiones que puede realizar el profesor para realizar las diferentes generalizaciones de las tareas y conexiones con temáticas de la misma matemática y de otros campos como la economía, la administración, las ciencias básicas y en general las ingenierías. En el modelo del CDM, se define otra subcomponente de la dimensión epistémica denominada el Conocimiento especializado del contenido, la cual se relaciona con el desarrollo del proceso de enseñanza, por parte del profesor.

Entonces, el estudio de los significados de los objetos matemáticos aparece como un problema de investigación formulado por la pregunta: ¿Qué es el objeto sistemas de ecuaciones lineales?, es decir ¿Cuáles son los significados parciales asociados al objeto matemático? (problema epistemológico). Para dar respuesta a estas preguntas es necesario conocer lo que debía comprender el profesor de grado noveno, sobre el objeto matemático SEL (significados declarados). Para llegar a caracterizar el significado global del objeto matemático SEL, considerado como el conjunto de los significados parciales y sus relaciones, se parte del estudio epistemológico del objeto matemático, dentro del cual se reconstruyen e identifican los significados parciales del objeto SEL, al igual que del estudio matemático o análisis conceptual del objeto partiendo de libros de texto de la matemática, y del contexto curricular para los SEL de grado noveno (Godino, Batanero y Font, 2007).

A partir de estos estudios se establecen o identifican unos significados pretendidos, implementados y evaluados por el docente, todos estos significados se encuentran dentro del gran significado global del objeto matemático. Para potenciar o desarrollar el conocimiento común del contenido matemático del docente, el conocimiento ampliado y por tanto el especializado, en un primer momento se deber llegar a reconstruir e identificar el significado global del objeto matemático, a partir de la exploración sistemática de los contextos de uso del objeto y de los sistemas de prácticas donde se pone en juego el objeto matemático; es decir, el docente debería llegar a identificar el gran sistema de prácticas matemáticas que puede implementar para el desarrollo de sus procesos de instrucción. (Godino, Batanero y Font, 2007) y en este sentido lograr una idoneidad didáctica en la dimensión epistémica del conocimiento del profesor, en cuanto al objeto matemático de los SEL.

4.2. Estudio epistemológico e histórico del objeto sistemas de ecuaciones lineales

El hombre desde siempre ha buscado la forma de solucionar problemas como parte del proceso evolutivo, producto de experiencias en su diario vivir. Según Godino y Batanero (1994), Lester (1980), identifica un problema como:

> *"una situación en la que se le pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución".*
>
> En el mismo sentido, Simón (1978) describe que *"un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea pero no puede llevarla a cabo. Tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido completada satisfactoriamente"* (p. 333).

En este punto, surgen cuestiones como: ¿Qué problemas se resolvieron en la antigüedad relacionado con los SEL?, ¿En qué contexto se desenvolvían dichos problemas?, ¿Qué métodos utilizaron en la solución de estos problemas? Estas preguntas son de carácter epistemológico y se responden con la construcción del "Estudio histórico-epistemológico del objeto SEL". Este estudio se estructura según los 4 periodos de la humanidad:

Periodo 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C)

Periodo 2: Edad Media (476 d. C – 1453 d. C: siglo V-XV)

Periodo 3: Edad Moderna (1453 d. C – 1789 d. C: siglo XV - XVIII)

Periodo 4: Edad Contemporánea (1789 d.C – actualidad: siglo XVIII - Actualidad)

En cada período se identifican los sistemas de prácticas de las diferentes culturas en cuanto a la solución de problemas relacionados con el objeto SEL; estas situaciones problemas se examinan mediante el análisis a la tipología de los objetos primarios, generando configuraciones epistémicas y cada configuración se relaciona con un significado parcial del objeto SEL, los cuales conforman el significado global del objeto SEL. En este sentido se describen los aportes encontrados en la emergencia del objeto SEL.

4.2.1. Periodo 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C)

En las civilizaciones antiguas los problemas se relacionaban con la distribución de cosechas, problemas de áreas de terrenos, cálculos de volúmenes, compra y venta de animales, problemas de equivalencia entre metales, problemas de repartición de pan y cerveza, todos ellos vistos como SEL. Muchos historiadores de la matemática (Boyer, 1986; Collette,2000; Rey y Babini, 1985; Kline, 1992; Ribnikov, 1987) mencionan que en general los orígenes del álgebra se encuentran en el trabajo de diversos pueblos de la antigüedad como Egipto, Grecia, Babilonia, y tenían como finalidad resolver ecuaciones de primer y segundo grado (Saenz, 1994).

Configuración Epistémica 1.1 (CE1.1): Problemas de áreas de terrenos

Situación – Problema: Los babilonios (c. 2100 a.C)

En un primer momento, en Rey y Babini (1985) se describe un problema concreto relacionado con una situación que ha llegado a nuestros tiempos de una de las famosas *tablillas de Croquetta*, que data del último periodo sumerio hacia el año c. 2100 a.C. en la cultura babilónica.

Problema 1.1: Tamaño de un terreno

Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas cuadradas. Uno produce granos en razón de $\frac{2}{3}$ *de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en razón de* $\frac{1}{2}$ *saco por yarda cuadrada. Conociendo la diferencia del producido de la cosecha que es de 500 ¿Cuál es el tamaño de cada campo?*

En la notación actual este problema corresponde a la solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} x + \ y = 1800 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y \ = 500 \end{cases}$$

Con solución $x = 1200 \quad y = 600$.

Solución:

Rey y Babini (1985) exponen en las notas complementarias dedicadas a los babilonios la solución al problema que denominamos tamaños de un terreno de la siguiente manera:

> La marcha que sigue el calculista no es clara y aparentemente presupone el método de la falsa posición. El calculista comienza admitiendo que las dos parcelas son iguales (a la semisuma 900) y con esta hipótesis falsa llega al valor erróneo de la diferencia de producido: 150 (es decir $\frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ de 900). Para compensar el error de $350 = 500 - 150$ reconoce, sin decirlo, que ese error es los $\frac{7}{6}$ (suma de $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$) del valor que, sumado y restado al dato inicial erróneo, dará la extensión de parcelas. Para obtener aquel valor deberá dividir 350 por $\frac{7}{6}$, operación que, por la presencia del factor 7, las tablas no facilitan; el calculista obvia la cuestión preguntándose simplemente por cuanto debe multiplicar $\frac{7}{6}$ para obtener 350; su respuesta es obvia: 300 y este dato sumado y restado a 900, da los valores de las incógnitas. Es fácil ver que, aún con un lenguaje de valores erróneos, la marcha del proceso es la que hoy seguirá si se introducen los valores $x = 900 + z$, $x = 900 - z$ y se calcula z de acuerdo con la segunda ecuación. (p. 11)

Análisis semiótico a la configuración CE1.1 (Rey y Babini, 1985):

Se observa que la solución del problema pertenece a un conjunto de situaciones donde se utilizan los ***términos**:* suma, diferencia, producido, división, factor, incógnita, igualdad de parcelas, hipótesis falsa, valores erróneos y extensión de parcelas que corresponden a los

elementos lingüísticos, algunos de ellos utilizados como ***algoritmos*** o ***procedimientos*** para mostrar la determinación de una cantidad desconocida de una relación dada. Los babilonios de esta época no disponían de una álgebra simbólica para dar la solución de las tareas matemáticas y la forma de resolver este tipo de problemas corresponde al ***procedimiento*** o método de la falsa posición como presupone el calculista.

Respecto a la solución dada al problema por el calculista, se evidencia el uso del ***argumento*** "*se asume que las dos parcelas son iguales (a la semisuma 900)*" argumento que es propio del método de la falsa posición, llegando a encontrar un valor erróneo que se compensa por medio de los *procedimientos* para encontrar la solución del problema, otro argumento corresponde a "*por cuanto debe dividir* $\frac{7}{6}$ para obtener 350" este argumento se debe a que las tablas no favorecían la multiplicación por el factor 7 . Entre los ***conceptos*** previos utilizados en la solución del problema se encuentran: suma, resta, multiplicación, división. No se evidencia el uso de ***proposiciones*** en el desarrollo dado por el calculista, pues las proposiciones corresponden a los enunciados sobre los conceptos.

Interpretación dada por el autor de la tesis al método de la falsa posición:

Una forma de abordar el problema con la notación actual y desde el método de la falsa posición seria la siguiente:

a) Se supone que el área de cada campo es 900, es decir, la mitad de 1800

$$900 + 900 = 1800$$

b) Con esta hipótesis, se llega al valor erróneo de la diferencia de producido que en este caso es de 150

$$\frac{2}{3}(900) - \frac{1}{2}(900) = 600 - 450 = 150$$

c) Para compensar el error de $350 = 500 - 150$ reconoce sin decirlo que ese error son los

$\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\ =\frac{7}{6}$ de la suma de las dos razones de saco por yarda cuadrada del valor que, sumado y restado al dato inicial erróneo (900), dará la extensión de los campos, de modo que se trata de encontrar el valor de a

$\frac{2}{3}(x+a)-\frac{1}{2}(y-a)\ =500$ que se puede expresar como

$\frac{2}{3}x-\ \frac{1}{2}y\ +\frac{7}{6}a=500$, luego

$\frac{7}{6}a=500-\ \left(\frac{2}{3}x-\ \frac{1}{2}y\ \right)$ partiendo de la suposición inicial $\frac{2}{3}x-\ \frac{1}{2}y\ \ =150$

$$\frac{7}{6}a=500-150$$

$$\frac{7}{6}a=350$$

para despejar a se divide 350 por $\frac{7}{6}$, operación que por la presencia del factor 7, las tablillas no lo facilitan, por lo tanto el calculista se pregunta que por cuanto se debe multiplicar $\frac{7}{6}$ para obtener 350 y así encuentra la respuesta: $a=300$

d) Luego suma y resta el valor encontrado $a=300$ a los 900 que es la suposición hecha al inicio, y por tanto se llega a la solución del problema.

$x=900+300=1200$

$y=900-300=600$

En adelante en el presente documento, **SITPRO** hace referencia a Situación Problema, **CE** significa Configuración Epistémica y **SIGP** se entiende como Significado Parcial. Se establece la configuración epistémica generada por la situación problema y se identifica la emergencia del significado parcial asociado a dicha configuración. En la Tabla **4.1** se especifican estos elementos correspondientes a la SITPRO 1.1.

Tabla 4.1

Emergencia del Significado Parcial 1.1

SITPRO 1.1	Tamaño de terrenos
CE 1.1	Problemas de áreas de Terrenos
SIGP 1.1	Método de la falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2

En esta dirección Luzardo y Peña (2006) mencionan que los babilonios hacia el año c. 2000 a. C. contribuyeron al surgimiento del álgebra a tal punto que sus aportaciones fueron consideradas dentro de los avances más notables en la historia de las matemáticas, pues los babilonios sabían resolver problemas donde involucraban la solución de sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones cuadráticas, usando completación de cuadrados o sustitución, así como también ecuaciones cúbicas y bicuadráticas e incluso sistemas de ecuaciones lineales y no lineales tales como:

$$\begin{cases} x \pm y = a \\ x^2 \pm y^2 = b \end{cases} \qquad \begin{cases} x \pm y = a \\ xy = b \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + y + cz = d \\ mx + ny + p = h \\ rx + sy + qz = o \end{cases}$$

Estos avances están plasmados en tablillas de arcilla, que los babilonios exponían a altas temperaturas y es así como hoy estas tablillas son aún objeto de estudio. En estas tablillas se encuentran instrucciones explícitamente verbales para solucionar ecuaciones Luzardo y Peña (2006).

Sin embargo hay varios problemas que no tratan objetos específicos o cosas concretas sino que son de tipo algebraico, que por la forma de estar escritos son equivalentes a resolver ecuaciones lineales del tipo $\{x + ax = b,\ \ x + ax + bx = c\}$ siendo a, b y c números conocidos y x es el desconocido. A este número desconocido se le llamaba “aha” o montón (Boyer, 1986, p. 37).

Otro de los problemas que resolvían los babilonios, según Kline (1992) es el siguiente: "*encontrar dos números si se conoce su suma (o su diferencia) y su producto"* (p. 26). Para problemas más complicados, es decir, como la solución a ecuaciones cuadráticas los algebristas babilónicos tendían a reducir y transformar ecuaciones a una forma típica o conocida (ecuaciones lineales) o disponían en efecto de la fórmula para resolver ecuaciones. Otro problema como el de hallar dos números, dados su suma y su producto se reducía de manera sencilla a problemas de ecuaciones cuadráticas. Dado que los babilonios no conocían los números negativos, nunca consideraron las posibles raíces negativas de las ecuaciones de segundo grado.

Por otra parte Kline (1992) señala que los babilonios:

> Llegaron a resolver problemas concretos que conducían a sistemas de cinco ecuaciones con cinco incógnitas. […] Los problemas algebraicos aparecen formulados y resueltos de manera completamente verbal, sin utilizar símbolos especiales. A menudo aparecen palabras como *us* (longitud), *sag* (anchura) y *aŝa* (área) utilizadas para representar las incógnitas, no por que dichas incógnitas representen necesariamente tales cantidades geométricas, sino porque muchos problemas algebraicos surgieron de situaciones geométricas y la terminología geométrica acabo por imponerse como terminología corriente. Un ejemplo de la manera en que se utilizaban estos términos para representar las incógnitas, así como la forma en que aparecen formulados los problemas puede ser el siguiente: He multiplicado la longitud por la anchura y el área es 10. He multiplicado la longitud por ella misma y he obtenido un área. El exceso de la longitud sobre la anchura lo he multiplicado por sí mismo y el resultado por 9 y esta área es el área obtenida multiplicando la longitud por ella misma. ¿Cuáles son la longitud y la anchura? (p. 27)

Es evidente, argumenta Kline (1992), que aquí las palabras longitud, anchura y área son simplemente nombres cómodos para las dos incógnitas y su producto, respectivamente.

En la actualidad se escribe este problema como:

$$\begin{cases} xy = 10 & (1) \\ 9(x-y)^2 = x^2 & (2) \end{cases}$$

La solución puede conducir a una ecuación de cuarto grado en x, en donde faltan x^3 y x, por lo que corresponde a una ecuación bicuadrada, que puede ser resuelta como una ecuación cuadrática en x^2, esta forma como los antiguos babilonios lo resolvían.

Solución dada por el autor de la tesis:

a) Se resuelve el cuadrado en la ecuación $9(x-y)^2 = x^2$

$$9(x^2 - 2xy + y^2) = x^2$$

b) Se hacen las operaciones correspondientes:

$$8x^2 - 18xy + 9y^2 = 0$$

c) Se despeja y de la ecuación (1) y se sustituye en la ecuación (2)

$$8x^2 - 18x\left(\frac{10}{x}\right) + 9\left(\frac{10}{x}\right)^2 = 0$$

d) Se realizan las operaciones indicadas:

$$8x^2 - 180 + \frac{900}{x^2} = 0$$

e) Se multiplicó toda la ecuación por x^2:

$$8x^4 - 180x^2 + 900 = 0$$

f) Transformándose en una ecuación bicuadrática que puede ser resuelta como una ecuación cuadrática:

$$8x^2 - 180x + 900 = 0$$

g) Se soluciona la cuadrática

$$x_1 = 15 \quad x_2 = \frac{15}{2}$$

h) Como la ecuación es bicuadrática, se pueden hallar las otras soluciones:

$$x_1 = \sqrt{15} \quad x_2 = -\sqrt{15} \quad x_3 = \sqrt{\frac{15}{2}} \quad x_4 = -\sqrt{\frac{15}{2}}$$

Análisis epistémico a la solución dada por el autor de la tesis:

En la solución de la ecuación de cuarto grado producto de la reducción del sistema de ecuación no lineal, se mencionan los términos: cuadrado, despeje de ecuación, multiplicación, cuadrática, que corresponde a los ***elementos lingüísticos*** usados por el autor de la investigación para la solución del problema. Entre los ***conceptos*** previos utilizados se encuentran multiplicación, división, ecuación cuadrática, nociones útiles para la solución del problema. En cuanto a la solución de la ecuación bicuadrática sobresalen los algoritmos que corresponden a los ***procedimientos*** necesarios para dar solución al problema. No se evidencia el uso de ***argumentos*** ni de ***proposiciones.***

Configuración Epistémica 1.2 (CE1.2): Problemas sobre el peso de metales por el método de las dos situaciones erróneas

Situación Problema: Civilización China *"La Matemática en nueve capítulos"*

Por otra parte la evolución de los conocimientos científicos en la antigua China tiene mucha relevancia histórica desde hace siglos, puesto que los matemáticos chinos siguieron la tradición de los babilonios y nos legaron los primeros métodos del pensamiento lineal. Ribnikov (1987) en su libro *historia de las matemáticas*, comenta la afirmación del matemático historiador chino Ling Wang que los conocimientos matemáticos de los chinos se remontan al siglo XIV a.C. y su obra más importante aunque el tercero por orden cronológico es el tratado de los *"Nueve capítulos sobre el arte Matemático* "o también llamada *"La Matemática en nueve capítulos",* publicados durante la Dinastía Han (c. 206 a. C – c. 220 d. C). Esta obra fue concertada por el científico Chuan Tsanom en el año 152 a. C. y fue probablemente el libro matemático que tuvo más influencia en China (Collette, 1986).

Este documento está compuesto por 9 secciones, y contiene 250 problemas sobre agricultura, agrimensura, posesión de bienes, el cálculo de longitudes y superficies, solución de ecuaciones y propiedades de los triángulos rectángulos. El aparato VII llamado "Exceso-Defecto" tratan situaciones problemicas que conducen a ecuaciones lineales, sistemas ecuaciones lineales, y se elabora el método de sus resoluciones, que coincide con el método de las dos situaciones erróneas (regla de la falsa posición), pero tal método no está formulado en forma precisa y tiene muchas variaciones de carácter particular. Además se encuentra un esbozo del método *"fan-chen"* este es conocido como el método de las matrices o la eliminación gaussiana en la resolución de ecuaciones lineales simultáneas, que son tratadas en la sección VIII (Ribnikov, 1987).

Según Ribnikov (1987) un problema característico de la sección VII es el siguiente:

Problema 1.2: Repartición de cantidades desconocidas

9 lingotes de oro pesan tanto como 11 lingotes de plata. Si se intercambian los lingotes de uno en otro, entonces el peso del oro y la plata se diferenciarán en 13 lan (16 lan son iguales a 1 tzin). ¿Cuánto pesan respectivamente un lingote de oro y uno de plata? (p. 34)

Este problema de determinación de los pesos de los lingotes de oro y plata se reduce a la solución del sistema de ecuaciones (en notación actual) como el siguiente:

$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

Solución: según Ribnikov (1987) el sistema es resuelto con la ayuda de la regla de las dos situaciones erróneas o método de la doble falsa posición, el cual consiste en:

a) Tomar $x_1 = 3$ tzin y $x_2 = 2$ tzin.

Con el valor asignado a x_1 y x_2, se determina el peso de un lingote de plata que corresponde a: $y_1 = 2\frac{5}{11}$ tzin y $y_2 = 1\frac{7}{11}$tzin.

b) Se sustituyen estos valores en la segunda ecuación en la cual todos los miembros están trasladados al lado izquierdo, dando respectivamente el defecto $z_1 = \frac{-49}{11*16}$ tzin y el exceso $z_2 = \pm\frac{15}{11*16}$ tzin.

c) Ahora el verdadero valor de x se encuentra por la regla:

$$x = \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{z_2 - z_1}$$

Y es igual a $2\frac{15}{64}$ tzin.

d) Por tanto $y = 1\frac{53}{64}$ $\quad x = 2\frac{15}{64}$ tzin.

Interpretación dada por el autor de la tesis:

a) Sea el sistema que representa el problema en notación moderna y con el método de la falsa posición:

$$\begin{cases} 9x = 11y \\ 8x + y + 13 = 10y + x \end{cases} \approx \begin{cases} 9x = 11y \\ 9y - 7x = 13 \end{cases}$$

b) Se toma $x_1 = 3$ tzin y $x_2 = 2$ tzin.

c) Se reemplazan los valores en la ecuación $9x = 11y$ para encontrar y_1 y y_2 respectivamente:

$9x = 11y$	$9x = 11y$
$9(3) = 11y$	$9(2) = 11y$
$y = \frac{27}{11} \approx 2\frac{5}{11}\ tzin$	$y = \frac{18}{11} \approx 1\frac{7}{11}\ tzin$

d) Se sustituyen los valores x_1, x_2 y y_1, y_1 en la ecuación $9y - 7x = 13$ respectivamente:

$9\left(\frac{27}{11}\right) - 7(3) = \frac{12}{11} \approx 1\ \frac{1}{11}\ tzin$ $\qquad$ $9\left(\frac{18}{11}\right) - 7(2) = \frac{8}{11}\ tzin$

e) Como el resultado de la segunda ecuación del sistema es $13\ lan\ \cong \frac{13}{16}\ tzin$ al convertir las unidades, se debe calcular el defecto y el exceso respectivamente:

$z_1 = \frac{13}{16} - \frac{12}{11} = -\frac{49}{176} = -\frac{49}{11*16}\ tzin$ $\qquad$ $z_2 = \frac{8}{11} - \frac{13}{16} = \pm\frac{15}{176} = \frac{15}{11*16}\ tzin$

f) Ahora el verdadero valor de x se encuentra por la regla $x = \frac{x_1z_2 - x_2z_1}{z_2 - z_1}$

$$x = \frac{3\left(\frac{15}{176}\right) - 2\left(\frac{-49}{176}\right)}{\left(\frac{15}{176}\right) - \left(\frac{-49}{176}\right)}$$

$$x = \frac{143}{64} \approx \quad 2\frac{15}{64}\ tzin$$

g) Por último se reemplaza x en la primer ecuación del sistema para obtener el valor de y:

$$9x = 11y$$

$$9\left(\frac{143}{64}\right) = 11y$$

$$y = \frac{117}{64} \approx 1\frac{53}{64}\ tzin$$

h) Por tanto la solución del sistema es:

$x = 2\frac{15}{64}\ tzin$ $\qquad$ $y = 1\frac{53}{64}\ tzin$

Análisis semiótico a la configuración (CE1.2) Ribnikov (1987):

En el desarrollo de la situación-problema planteado, se utilizan los ***concepto**s* de unidades de medida el *lan* y el *tzin* y sus conversiones; estas unidades de medida fueron utilizadas por la cultura china para el comercio de metales. La ***notación*** utilizada en la cultura china, corresponde a escribir el número entero de unidades seguido de la parte fraccionaria (menor que la unidad) que hace referencia a los ***elementos lingüísticos*** usados en esa época. En la solución presentada sobresale el objeto matemático primario de los ***procedimientos,*** ya que para la solución se utiliza el *método de las dos situaciones erróneas* que corresponde al ***método de la doble falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales***. Entonces, a partir del análisis se determinan los elementos que se relacionan en la Tabla **4.2.**

Tabla 4.2
Emergencia del Significado Parcial 1.2

SITPRO 1.2	Repartición de cantidades desconocidas
CE 1.2.	Problemas sobre el peso de metales por el método de las dos situaciones erróneas
SIGP 1.2	Método de la doble falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Fuente: (Elaboración propia)

Configuración Epistémica 1.3 (CE1.3): Problemas por exceso y defecto

En la sección VII de la obra *Nueve capítulos sobre el arte Matemático*, se resuelven varios problemas referidos a la compra de ciertos bienes por un grupo de personas, se trata de determinar un número de personas y la cantidad de dinero gastado entre todos a partir de una serie de datos llamados exceso y defecto. Uno de los problemas planteados es el reescrito por Nieves, Borges, García, Hernández y Hernández (2004) el cual se relaciona con el nombre de la sección (exceso y defecto).

Problema 1.3: Grupo de personas y compra de animales

Un grupo de personas compran en conjunto unas gallinas. Si cada persona dio 9 wen, quedarían 11 wen de sobra después de la compra. Si, en cambio, cada persona contribuye con 6 wen, quedaran 16 wen a deber. ¿Cuántas personas hay en el grupo y cuál es el costo de las gallinas?

Solución: En términos algebraicos, llamando a las dos contribuciones a y a', b como el *exceso* (el dinero que sobra) y b' será el *defecto*, es decir, (lo que deben), la solución propuesta es la siguiente:

a) $\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} ab' & a'b \\ b & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 66 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} ab' & + & a'b \\ b & + & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 27 \end{pmatrix}$

d) El costo total de las gallinas es $\frac{ab'+a'b}{a-a'} = \frac{210}{3} = 70$

e) El número total de personas es $\frac{b+b'}{a-a'} = \frac{27}{3} = 9$

Interpretación dada por el autor de la tesis:

Este problema se soluciona de la siguiente manera:

a) Se colocan las cantidades dadas, es decir, el dinero con el cual el grupo de personas compran las gallinas (a y a') en la primera fila, el “exceso” b y el “defecto” b' en la segunda fila mediante un arreglo matricial, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Luego se multiplica estos cuatro valores en forma cruzada, pero estos productos se colocaran en la fila 1; la fila 2 que corresponde al exceso y defecto queda igual:

$$\begin{pmatrix} ab' & a'b \\ b & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 66 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

c) A continuación se suman los valores de cada fila:

$$\begin{pmatrix} ab' & + & a'b \\ b & + & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & + & 66 \\ 11 & + & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 27 \end{pmatrix}$$

d) Se procede a hacer el cociente entre las sumas realizada en la primera fila y la diferencia entre el dinero con el cual compran las gallinas:

$$\frac{ab' + a'b}{a - a'} = \frac{210}{3} = 70$$

e) De manera análoga, se hace el cociente entre la suma realizada en la segunda fila (suma del exceso y defecto) y la diferencia entre el dinero con el cual compran las gallinas:

$$\frac{b + b'}{a - a'} = \frac{27}{3} = 9$$

f) Luego el costo total de las gallinas corresponde a 70 wen y 9 es el número de personas que hay en el grupo, encontrando así la solución a la situación problema.

Análisis semiótico a la interpretación dada por el autor de la tesis:

En primer lugar, se evidencia que las ***notaciones y expresiones*** utilizadas en la cultura China para la solución de problemas de exceso y defecto, corresponden a escribir los datos del problema en un arreglo matricial de números. Los *términos* exceso y defecto junto con las notaciones y expresiones mencionadas hacen referencia a los ***elementos lingüísticos*** utilizados para expresar y soportar los ***procedimientos*** en la solución del problema. En este sentido otro *procedimiento* importante según (Maza, 2009) es el de "multiplicación cruzada" el cual pertenece propiamente al método de solución. Las instrucciones encontradas en la solución del problema corresponden a la utilización de los ***conceptos:*** multiplicación cruzada, cociente, suma y diferencia de cantidades. En cuanto al ***método*** de solución, es explicado como cuentas a realizar con los coeficientes (datos del problema) y no se evidencia el uso de ***proposiciones,*** puesto que corresponde a un *procedimiento* para hallar la solución al problema. En la solución presentada sobresale el objeto matemático primario de los ***procedimientos,*** ya que la solución se da utilizando el **método de exceso y defecto utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales en la cultura China**.

Solución dada por Nieves, Borges, García, Hernández y Hernández (2004):

Según los autores, el problema puede reformularse como un sistema de ecuaciones de dos incógnitas siendo $\boldsymbol{x}$ el número de personas, $\boldsymbol{y}$ el costo de las gallinas, $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}'$ serán las contribuciones hechas por las personas, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}'$ será el *exceso* y el *defecto* respectivamente. Entonces el problema se plantea de la siguiente manera:

$$\begin{cases} ax - cy = b \\ a'x - c'y = -b' \end{cases} \qquad \begin{cases} 9x - y = 11 \\ 6x - y = -16 \end{cases}$$

Se puede observar que el **método** o procedimiento sugerido aquí, es un caso particular de la regla de Cramer para la solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas donde $c = c'$. (ver, sección **4.4.4.**). Entonces, a partir del análisis se determinan los elementos que se muestran en la Tabla **4.3.**

Tabla 4.3

Emergencia del Significado Parcial 1.3

SITPRO 1.3	Grupo de personas y compra de animales
CE 1.3	Problemas por exceso y por defecto
SIGP 1.3	Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura china

Fuente: (Elaboración propia)

En esta dirección Ruiz (2003), comenta que en la sección VIII del libro *Nueve capítulos sobre el arte Matemático*, se aborda la solución de los sistemas de ecuaciones simultáneas con 2 o 3 incógnitas, por medio de tablas con un método semejante al matricial, una manera similar al método de eliminación (en Occidente, se llamaría de Gauss), que incluso se puede decir que es una forma de la regla de Cramer donde se evidencia que en esta cultura china estuvieron presentes los métodos de solución de los SEL varios siglos antes que los europeos los desarrollaran (método de exceso y defecto).

Según Luzardo y Peña (2006) el problema N° 1 de la sección VIII del libro mencionado, dio origen a un sistema de tres ecuaciones lineales el cual es resuelto por el método matricial "fan-chen" típico de las matemáticas chinas, que como ya mencionamos coincide con el actual método de eliminación gaussiana para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Problema: Problema de mezcla de granos

Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos de la primera clase, dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de la segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?

En notación moderna el sistema corresponde a:

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 & (1) \\ 2x + 3y + z = 34 & (2) \\ x + 2y + 3z = 26 & (3) \end{cases}$$

Solución:

Para Collette (1986) la regla de los chinos consistía en escribir la matriz y operar de la siguiente forma reordenando primero las ecuaciones:

a) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ \end{matrix} \qquad \begin{matrix} (3) \\ (2) \\ (1) \\ \end{matrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{bmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \\ \end{matrix}$$

Luego la última matriz proporciona las ecuaciones simplificadas

$$36z = 99$$

$$5y + z = 24$$

$$3x + 2y + z = 39$$

a partir de las cuales se determinan x, y, z.

Interpretación dada por el autor de la tesis:

El problema se resuelve por un método matricial descrito en el libro *Nueve capítulos sobre el arte Matemático* de la siguiente manera:

a) Sea el sistema de ecuaciones 3×3 que representa el problema, en términos modernos

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 & (1) \\ 2x + 3y + z = 34 & (2) \\ x + 2y + 3z = 26 & (3) \end{cases}$$

b) Con las ecuaciones del sistema, se forma un arreglo matricial de la siguiente forma: los coeficientes de la ecuación (1) se colocan en la tercer columna, los coeficientes de la ecuación (2) se coloca en la segunda columna y los coeficientes de la ecuación (3) se coloca en la primer columna, como se muestra a continuación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

c) Cabe aclarar que acá las operaciones se hacen por columna más no por fila. Por tanto, se inicia haciendo 3 veces la columna 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 \\ 3c_2 \\ c_3 \end{matrix} \quad \text{se tiene} \quad \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix}$$

d) Se hacen las siguientes operaciones por columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 26 & 102 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 - c_3 \\ c_3 \end{matrix} \quad \text{se tiene} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix}$$

e) Se continua con las operaciones por columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 26 & 63 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 \\ c_2 - c_3 \\ c_3 \end{matrix} \text{ se tiene } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

f) Se continua con las operaciones por columna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \text{ se tiene } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

g) Se hacen las siguientes operaciones por columna para hallar el siguiente cero:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \\ 78 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_3 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \text{ se tiene } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

h) Se hacen 5 veces la columna 1 y se convierte en la columna 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \text{ se tiene } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

i) Se realiza la diferencia entre la columna 1 y la columna 2 y se convierte en la columna 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \\ 40 & 1 & 1 \\ 195 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \text{ se tiene } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

j) Nuevamente se hace la diferencia entre la columna 1 y la columna 2 y se convierte en la columna 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 15 & 5 & 2 \\ 39 & 1 & 1 \\ 171 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \text{ se tiene } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

k) Nuevamente se hace la diferencia entre la columna 1 y la columna 2 y se convierte en la columna 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & 2 \\ 38 & 1 & 1 \\ 147 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} \text{ se tiene } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

l) Nuevamente se hace la diferencia entre la columna 1 y la columna 2 y se convierte en la columna 1, para hallar el cero en la primera columna y así obtener una matriz triangular:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 2 \\ 37 & 1 & 1 \\ 123 & 24 & 39 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - c_2 \\ c_2 \\ c_3 \\ \end{matrix} \quad \text{se tiene} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{pmatrix}$$

m) Ahora se escribe el sistema simplificado:

$$36z = 99$$
$$5y + z = 24$$
$$3x + 2y + z = 39$$

n) De donde se puede deducir de la primera ecuación el valor de z:

$$36z = 99$$

$$z = \frac{99}{36} = \frac{11}{4}$$

o) Se sustituye el valor de z en la segunda ecuación para obtener el valor de y:

$$5y + z = 24$$

$$5y + \frac{11}{4} = 24$$

$$y = \frac{17}{4}$$

p) Y por último se halla el valor de x en la última ecuación:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$3x + 2\left(\frac{17}{4}\right) + \frac{11}{4} = 39$$

$$3x = \frac{111}{4}$$

$$x = \frac{37}{4}$$

q) Por tanto se tiene que la medida de grano contenida en la gavilla de cada clase corresponde a:

$x = \frac{37}{4}$ de la primera clase de grano

$y = \frac{17}{4}$ de la segunda clase de grano

$z = \frac{11}{4}$ de la tercer clase de grano

Según Rey y Babini (1985) los matemáticos griegos no mostraron mayor interés por los problemas que necesitaban el planteamiento algebraico de sistemas de ecuaciones lineales a pesar de poseer un reconocido pensamiento lineal; sin embargo aproximadamente en el siglo III d. C. el álgebra greco-alejandrina alcanzó un punto interesante para la evolución de las matemáticas con Diofanto de Alejandría, del cual se desconoce con certeza su origen, pero si se tiene información sobre su vida a través de un acertijo (epígrafe) encontrado en la antología griega que contiene un rompecabezas algebraico que datan de los siglos V o VI, que al parecer concluye que Diofanto murió cuando este contaba con 84 años. (Collette, 1986)

Sepúlveda (2018) señala que algunos historiadores ubican el origen del álgebra, en la escuela de Alejandría:

> Se tiene a *Diophanto* como la figura que representa al formulador de los problemas de aritmética en términos simbólicos: el que introduce los valores determinados, representados no por números sino por letras para expresar de manera general las cantidades específicas que aparecen como incógnitas en las ecuaciones que conducen a la solución de los problemas propuestos. (p. 78)

Para Bell (1949) citado por Ruiz (2003), Diofanto (c. 275 d. C), dio soluciones esencialmente algebraicas a las ecuaciones especiales de primer grado con dos y tres incógnitas, como:

$$x + y = 100. \qquad x - y = 40.$$

Se tiene que Diofanto, había empezado a usar algunos símbolos operando con ellos. Este largo paso es notable ya que su notación algebraica, comparada con la del siglo XVII o la de hoy en día, era engorrosa con métodos de la lógica griega. Este hecho, lo sitúan entre los grandes algebristas. Su obra más importante fue Arithmetica (se supone que eran 13 libros, de los cuales sobrevivieron 6 para la historia), donde se consigna su principal contribución: el simbolismo algebraico. Se señala que el primer libro trataba problemas que conducen a ecuaciones de primer grado con una o más incógnitas. Los otros cinco libros, que sobrevivieron tratan de ecuaciones de segundo grado (Ruiz, 2003). Para Kline (1992), Diofanto resuelve ecuaciones lineales con dos incógnitas como:

$$x + y - 5 = 0.$$

> Donde da un valor a una indeterminada y resuelve la ecuación para un valor racional positivo de la otra. Reconoce que el valor asignado a la primera variable es estrictamente accidental. (En el análisis diofántico moderno solamente se calculan soluciones enteras.) Muy poco es lo hecho con este tipo de ecuaciones y el trabajo es apenas significativo puesto que las soluciones racionales positivas se calculan de golpe (p. 194)

4.2.2. Periodo 2: Edad Media (476 d. C – 1453 d. C: siglo V-XV)

En la cultura de los Hindúes se realizaron grandes estudios en el desarrollo del álgebra, según Dávila (2003, p. 28): Aryabhata (476 – 550 d. C) en el año 499 escribe un tratado llamado *Arybhathiya.* El contenido de esta obra es una síntesis de conocimientos previos relacionados con reglas de cálculo usadas en astronomía y con las matemáticas necesarias para tomar medidas (cálculo de áreas), un ejemplo de uno de sus problemas que además usa un lenguaje florido es el siguiente: *En la regla de tres, multiplica la fruta por el deseo y divide por la medida. El resultado será la fruta del deseo.*

Notemos que si en la ecuación $ax = bc$, donde a es la medida, b es la fruta y c el deseo, entonces la *fruta del deseo* seria x y en el procedimiento se establece que:

$$x = \frac{bc}{a}$$

En esta línea de tiempo, se tienen los aportes de los matemáticos europeos, quienes de alguna manera conservaron el pensamiento lineal, este es el caso del matemático italiano Leonardo de

Pisa (1180-1250) más conocido con el nombre de Fibonacci, que en el año 1202 escribe una de sus obras que es sin duda la más conocida: el Liber Abaci (libro del ábaco) (Collette, 2000). Su título en verdad no hace referencia al uso del ábaco que era popular en su época, si no en el sentido de la aritmética, pues en el muestra la importancia del nuevo sistema de numeración de los hindúes, la contabilidad mercantil, las diferentes reglas de cambios de moneda y además aparecen problemas que Fibonacci resuelve por medio de la regla de los dos errores que había aprendido de los árabes. Un problema encontrado en el *Liber Abaci* tomado de Ugarte (2011) es el relacionado con dos hombres y la venta de un caballo.

Configuración Epistémica 2.1 (CE2.1): Problemas de compra de animales e intercambio de dinero

Situación Problema 2.1: Precio de un caballo y distribución de dinero

Dos hombres desean comprar un caballo pero ninguno de ellos posee suficiente dinero para hacerlo. El primero dice al segundo: "si me das $\frac{1}{3}$ *de tus besantes puedo comprar el caballo". El segundo responde "si me das* $\frac{1}{4}$ *de tus besantes yo también tendré besantes suficientes para comprar el caballo". ¿Cuál es el precio del caballo y cuantos besantes posee cada uno de los dos hombres?*

Solución: sean $\boldsymbol{x}$ los besantes del primer hombre, $\boldsymbol{y}$ los besantes del segundo y $\boldsymbol{c}$ el precio del caballo. Se plantea el siguiente sistema de ecuaciones en notación moderna:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y \ = c \\ \frac{1}{4}x + y \ = c \end{cases}$$

Se despeja $x = \frac{8}{11}c$; $y = \frac{9}{11}c$ cuya solución más pequeña es $x = 8,\ y = 9,\ c = 11$ que es la solución dada por Fibonacci.

Interpretación dada por el autor de la tesis:

a) Sea el sistema de ecuaciones que representa el problema

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y \ = c & (1) \\ \frac{1}{4}x + y \ = c & (2) \end{cases}$$

b) Se multiplica la primera ecuación por 3 y la segunda ecuación por -12, de manera que al restar las dos ecuaciones se *elimine* la variable $\boldsymbol{x}$**:**

$$\begin{array}{r} 3x + \ y \ = 3c \\ \underline{-3x - 12y \ = -12c} \\ y \ = \dfrac{9c}{11} \end{array}$$

c) Se reemplaza el valor de y en la primer ecuación del sistema:

$$x + \frac{1}{3}y \ = c$$
$$x + \frac{1}{3}\left(\frac{9c}{11}\right) = c$$
$$x \ = \frac{8c}{11}$$

d) El conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales está dado por

$$(x, y) = \left(\frac{8c}{11}, \frac{9c}{11}\right)$$

$$(x, y) = \{\propto (8, 9)\} = \langle(8, 9)\rangle$$

e) Se denomina la solución más pequeña a $x = 8$ y $y = 9$ cuando $c = 11 = \propto$

f) Lo que indica que se trabajaron sistemas de ecuaciones lineales con soluciones múltiples.

A partir del análisis a la solución se determinan los elementos que se muestran en la Tabla **4.4.**

Tabla 4.4

Emergencia del Significado Parcial 2.1

SITPRO 2.1	Precio de animales y distribución de dinero
CE 2.1	Problemas de compra de animales e intercambio de dinero
SIGP 1.2	Método de eliminación para el caso de infinitas soluciones de un SEL

Fuente: (Elaboración propia)

A finales del siglo XV, el desarrollo de las ciencias matemáticas de las regiones de Asia Central y el Medio Oriente disminuye. Las causas de este fenómeno radicaron en el aislamiento económico que sobrevino en los amplios territorios mencionados (Ribnikov, 1987, p. 117). Pero siglos más tarde, los diferentes métodos utilizados para resolver sistemas de ecuaciones lineales fueron cambiando, al punto que permitieron el avance de una rama de las matemáticas: el álgebra lineal (Guerra, 2012).

4.2.3. Periodo 3: Edad Moderna (1453 d. C – 1789 d. C: siglo XV - XVIII)

Del análisis a las soluciones y los diferentes métodos de solución de los SEL, se estableció un fuerte impulso para conformar lo que actualmente se considera como el Álgebra lineal. Del estudio de los SEL surge la teoría de determinantes y de matrices, que datan del año 200 a.C. por los matemáticos chinos. (Ruiz, 2003)

Configuración Epistémica 3.1 (CE3.1): Problemas relacionados con el precio de telas de seda

Situación – Problema: Método de Cardano (1501 – 1576)

En el siglo XVI el filósofo matemático Gerónimo Cardano (1501 - 1576) en su obra: Ars Magna, presentó un método para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones, a la cual se le llamaba la *regula de modo* que esencialmente tiene cierta relación con la *regla de Cramer* para resolver sistemas lineales 2×2; aunque Cardano no presenta la noción formal de solución del sistema, lo enuncia y lo resuelve con palabras, es decir, retóricamente. (Luzardo y Peña, 2006). Cardano (1993) expone la regla en el siguiente problema.

Problema 3.1: Precio de piezas de seda

Siete pies de seda verde y tres de coste negro cuestan 72 denarios y al mismo precio, dos de color verde y cuatro de coste negro cuestan 52 denarios. Deseamos conocer su precio.

Solución: Divide la mayor longitud, es decir 7 pies, y el número de denarios, es decir 72, por la longitud más pequeña, es decir, 3, y multiplica los cocientes por el número de pies asumido en el segundo caso y en la segunda posición, correspondiente a la menor, y a partir del producto del número de pies reste de la longitud restante en el segundo caso, y con el resto divida la diferencia entre el precio, 2 y el producto. Resultará el valor de la mayor longitud en el primer caso. Por ejemplo, divida 7 y 72 por 3; el resultado es $2\frac{1}{3}$ y 24. Multiplique (estos) por 4, obteniendo $9\frac{1}{3}$ y 96. De $9\frac{1}{3}$ reste 2, y de 96 reste 52, dejando $7\frac{1}{3}$ y 44. Ahora divide 44 entre $7\frac{1}{3}$ y 6 resulta como el precio de un pie de seda verde. De esto surge esta breve regla.

Ahora, divida 4 por 3, es decir, por el número de pies del mismo tipo de seda en los dos casos, y este resultado $1\frac{1}{3}$ multiplicar por 7 y 72, haciendo $9\frac{1}{3}$ y 96, de donde se restan las cifras dadas para el segundo caso, que son 2 y 52, respectivamente, dejando $7\frac{1}{3}$ y 44. Divida el número de denarios, 44 entre $7\frac{1}{3}$, el número de pies y 6 se deja como el precio de pie de seda verde. De esta manera, a partir de una operación larga que involucra algo que no se conoce, puede configurar una regla muy breve. Por lo tanto, esta regla da el método y bien puede llamarse la madre de las reglas. (Cardano, 1993, p. 181)

Interpretación dada por el autor de la tesis:

Una posible interpretación al problema de Cardano con la notación moderna es la siguiente:

El sistema de ecuaciones que arroja el problema es:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 72 \\ 2x + 4y = 52 \end{cases}$$

donde x representa el costo de un pie de seda verde; y representa el costo de un pie de seda negra, entonces:

a) "*divide la mayor longitud, es decir 7 pies, y el número de denarios, es decir72, por la longitud más pequeña, es decir 3*"

$\frac{7}{3}$ y $\frac{72}{3}$ al hacer la simplificación se obtienen $\frac{7}{3}$ y 24 respectivamente.

b) "*multiplica los cocientes por el número de pies asumido en el segundo caso, corresponde al menor*"

$\frac{7}{3}\ (4)$ y $24(4)$ al multiplicar estos productos tenemos

$\frac{28}{3}$ y 96.

c) "*a partir del producto del número de pies restar de la longitud restante en el segundo caso respectivamente*"

$\frac{28}{3} - 2$ y $96 - 52$ lo que da

$\frac{22}{3}$ y 44.

d) "*y con el resto dividir la diferencia entre el precio, 2, y el producto. Dara como resultado el valor de la mayor longitud en el primer caso*"

$44 \div \frac{22}{3} = 6$ que sería el precio de un pie de seda verde.

e) A partir del resultado anterior, se pueden calcular el precio de un pie de seda negra, haciendo un reemplazo en cualquiera de las ecuaciones del sistema:

$$7x + 3y = 72$$
$$7(6) + 3y = 72$$
$$42 + 3y = 72$$
$$3y = 30$$
$$y = 10$$

f) Encontrando como solución:

$x = 6 \qquad y = 10$

Por lo que el costo de un pie de seda verde cuesta 6 denarios y un pie de seda negra cuesta 10 denarios.

Según González y González (2014), una forma de generalizar el método de Cardano es descrito de la siguiente forma:

Sea el sistema

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ dx + ey = f & (2) \end{cases}$$

Manipulación sobre coeficiente de x   **Manipulación sobre la constante c**

1) Se divide el coeficiente de la variable x y la constante c en el coeficiente de la variable y dela ecuación (1):

$$\frac{a}{b} \qquad\qquad \frac{c}{b}$$

2) Cada resultado se multiplica por el coeficiente de la variable y de la ecuación (2) del sistema:

$$\frac{a}{b} * e \qquad\qquad \frac{c}{b} * e$$

3) Ahora se resta los valores d y f de la ecuación (2), respectivamente:

$$\frac{ae}{b} - d \qquad\qquad \frac{ce}{b} - f$$

$$\frac{ae - bd}{b} \qquad\qquad \frac{ce - bf}{b}$$

4) La división entre la diferencia referida a las constantes y la diferencia referida a los coeficientes de la variable x, que resultaron del paso anterior, da como resultado el valor de la variable x:

$$x = \frac{\frac{ce - bf}{b}}{\frac{ae - bd}{b}} \qquad\qquad x = \frac{ce - bf}{ae - bd}$$

5) Para encontrar el valor de la variable y, basta con reemplazar el valor de x en la ecuación

(1).

$$ax + by \ = c$$

$$a\left(\frac{ce - bf}{ae - bd}\right) + by \ = c$$

$$by \ = c - \frac{ace - abf}{ae - bd}$$

$$by \ = \frac{ace - bdc - ace + abf}{ae - bd}$$

$$by \ = \frac{b(af - dc)}{ae - bd}$$

$$y = \frac{\frac{b(af - dc)}{ae - bd}}{b}$$

$$y = \frac{af - dc}{ae - bd}$$

En el tiempo narrado el único símbolo que existía era la representación de los números, el sistema anterior cuenta con un lenguaje simbólico actual que es anacrónico, de donde los sistemas resueltos reflejan algunas ideas básicas del álgebra, como la de igualdad, y la de unas reglas de cálculo con muestras de generalidad aunque expresadas rudimentariamente sobre casos particulares (Álvarez, 2013).

Análisis semiótico a la configuración (CE3.1): Solución dada por Cardano:

En la solución al problema de Cardano, la ***situación problema*** corresponde a encontrar el coste de un pie de seda verde y negro, lo cual activa un conglomerado de herramientas necesarias para dar solución al problema tales como los ***concepto****s* de multiplicación, resta y división, *Mayor longitud y menor longitud* lo cual hace referencia a la mayor cantidad de seda y menor cantidad de seda en el problema, se resalta que la unidad de medida utilizada en la época era el "*pie*". Cardano desarrolla un discurso que permite un acercamiento a la solución del problema sin la necesidad de trabajar con valores desconocidos, lo que hace referencia a los ***elementos lingüísticos***, los cuales tienen un estilo de presentación de explicaciones. En cuanto a los ***procedimientos*** son más de tipo operacional, es decir, se limita a realizar operaciones únicamente con los coeficientes de las ecuaciones. La solución del problema carece de ***proposiciones*** y ***argumentos***.

Según González y González (2014), la intensión de Cardano era formular un discurso (técnica) para solucionar un problema, por lo que es relévate darle importancia a los pasos que de cierta manera sustentan el método. En el desarrollo del método es posible observar una cierta relación o aplicación del método convencional que hoy conocemos como método de sustitución para la solución de SEL. Según Luzardo y Peña (2006) el método de Cardano se considera como la base para llegar a la regla de Cramer. De la solución dada a la situación problema emergen los elementos que se muestran en la Tabla **4.5.**

Tabla 4.5
Emergencia del Significado Parcial 3.1

SITPRO 3.1	Precio de piezas de seda
CE 3.1	Problemas relacionados con el precio de telas de seda
SIGP 3.1	Método de Cardano para la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Fuente: (Elaboración propia)

Antes de centrar la atención en la matemática occidental, se hace una referencia a la matemática japonesa del siglo XVII, cuyo máximo representante fue el matemático Takakasu Seki Kowa (1642 – 1708). Por lo que Álvarez (2013) menciona:

> Al perfeccionar los métodos de resolución de problemas de los matemáticos chinos del siglo XVII, Seki llego a plantearse la eliminación de incógnitas en sistemas de ecuaciones de grado superior y la formulación de resultantes, tema importante en álgebra lineal en el

> trabajo con polinomios en cuyo proceso construyó las expresiones algebraicas que identificamos como determinantes, dando además algunas de las propiedades de estas expresiones. Por ejemplo, al tratar de eliminar la incógnita de un sistema de *n* ecuaciones de grado *n-1*, Seki obtuvo que la resultante (término actual) del sistema
>
> $$\begin{cases} c + bx + ax^2 = 0 \\ f + ex + dx^2 = 0 \\ i + hx + gx^2 = 0 \end{cases}$$
>
> corresponde a $egc + ahf + bdi - dhc - bgf - aei = 0$. (p. 31)

En este sentido Luzardo y Peña (2006) mencionan que la noción de determinante apareció en Japón y Europa casi al mismo tiempo. En Japón el matemático Seki Kowa hacia el año 1693 trabaja e introduce la idea del determinante, en su obra *Métodos para resolver problemas disimulados*, sin contar con un término que corresponda a la idea de determinante, ofrece métodos generales para calcular determinantes basados en ejemplos concretos en el cual se incluyen algunos métodos matriciales expuestos en formas de tablas, siendo capaz de calcular el determinante de matrices cuadradas de orden 5. Álvarez (2013) argumenta que los trabajos de Seki kowa tuvieron una influencia limitada en su país y no llegaron a la matemática occidental, donde por los mismos años se ocupaba de asuntos parecidos el matemático Gottfried Wilhelm Leibniz, quedando sus logros inéditos en este campo.

Situación – problema: Leibniz (1646-1770)

Según Collette (2000):

> Se atribuye al alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1770) el hecho de haber sido el primero en utilizar un método para la solución de un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, anterior al método de los determinantes en el mundo occidental (p. 129).

Leibniz uso la palabra "*resultante*" en algunos de sus trabajos para ciertas sumas combinatorias de términos de un determinante, y probó varios resultados sobre dichos resultantes incluyendo uno que en esencia, es considerado como la *regla de Cramer*. Leibniz también conocía que un determinante se puede expandir usando columnas, lo que hoy se conoce como *la expansión de Laplace,* y además estudio los sistemas de coeficientes de ecuaciones, principalmente aquellos ligados a las formas cuadráticas en donde usó los determinantes y esto lo llevó al estudio de las matrices (Luzardo y Peña, 2006, p. 162).

Según Boyer (1986) en una carta fechada en 1693 y dirigida al marqués Guillaume de L'Hôpital (1661 - 1704), Leibniz explica que a veces solía usar un sistema de índices (números) para indicar las filas y las columnas en un sistema de ecuaciones lineales.

a) Leibniz presenta la notación para un sistema 3×3 como:

$$\begin{aligned} &10 + 11x + 12y = 0 \\ &20 + 21x + 22y = 0 \\ &30 + 31x + 32y = 0 \end{aligned}$$

O bien

$$\begin{aligned} &1_0 + 1_1x + 1_2y = 0 \\ &2_0 + 2_1x + 2_2y = 0 \\ &3_0 + 3_1x + 3_2y = 0 \end{aligned}$$

b) Elimina $\boldsymbol{y}$**,** multiplicando la primera ecuación por la posición $\mathbf{2_2}$ y segunda ecuación por la posición $\mathbf{1_2}$, luego se resta para obtener

$$\begin{array}{l} \quad 1_0 \cdot 2_2 + 1_1 \cdot 2_2x + 1_2 \cdot 2_2y = 0 \\ -1_2 \cdot 2_0 - 1_2 \cdot 2_1x - 1_2 \cdot 2_2y = 0 \\ \hline 1_0 \cdot 2_2 - 1_2 \cdot 2_0 + 1_1 \cdot 2_2x - 1_2 \cdot 2_1x = 0 \end{array}$$

c) De manera análoga se prosigue eliminando la variable $\boldsymbol{y}$, pero con la primera y tercera ecuación:

$$1_0 \cdot 3_2 + 1_1 \cdot 3_2x + 1_2 \cdot 3_2y = 0$$

$$\frac{-1_2 \cdot 3_0 - 1_2 \cdot 3_1 x - 1_2 \cdot 3_2 y = 0}{1_0 \cdot 3_2 - 1_2 \cdot 3_0 + 1_1 \cdot 3_2 x - 1_2 \cdot 3_1 x = 0}$$

d) Queda por eliminar $\boldsymbol{x}$ de (b y c) de los pasos anteriores:

$$1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 + 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 + 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 = 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 + 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_1 + 1_1 \cdot 2_1 \cdot 3_0$$

e) Lo que es equivalente a que:

$$\begin{vmatrix} 1_0 & 1_1 & 1_2 \\ 2_0 & 2_1 & 2_2 \\ 3_0 & 3_1 & 3_2 \end{vmatrix} = 0$$

f) El determinante nulo significaba que existía un valor $\boldsymbol{x}$ y uno $\boldsymbol{y}$ que satisfacen las tres ecuaciones del sistema original. Esta anticipación de los determinantes por parte de Leibniz no fue publicada sino hasta 1850 y tuvo que ser descubierta de nuevo medio siglo más tarde. (Boyer, 1986).

Configuración Epistémica 3.2 (CE3.2): Solución a sistemas de ecuaciones $\mathbf{2 \times 2}$, por eliminación sucesiva de incógnitas

Situación – problema: Maclaurin (1698-1746)

Hacia el año 1748 fue publicado el libro póstumo del matemático escoces Colin Maclaurin (1698 - 1746) titulado *Treatise of Algebra* (tratado de álgebra). En el capítulo XI titulado *Of the Solution of Queftions that produce Simpe Equations* (*De la solución de cuestiones que producen ecuaciones simples*, se presenta una colección escolar de problemas resueltos, unos tienen enunciados directamente matemáticos y otros son problemas de la vida cotidiana, pero todos se traducen en la formulación de un sistema de dos o tres ecuaciones. Los sistemas lineales 2×2 o 3×3 son resueltos por métodos específicos cuando son particularmente sencillos, es decir, soluciones simultáneas por *eliminación sucesiva de incógnitas*. En el capítulo XII titulado *Containing fome General Theorems for the exterminating unknown Quantities in given*

Equations (*Conteniendo algunos teoremas generales para expresar las incógnitas en ecuaciones dadas)* describe una solución alternativa mediante lo que se llama los determinantes. En el último capítulo se encuentra un enunciado de la regla que se atribuye generalmente a Cramer. (Collette, 2000, p. 170)

Según Maclaurin (1748) el "capítulo XII contiene dos teoremas rotulados Teorema I y Teorema II" (p. 82), que se transcriben literalmente con su propia notación.

Problema 3.2*: Teorema I*

Supóngase que se dan dos ecuaciones, con dos cantidades desconocidas como

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Solución dada al Teorema I dada por Maclaurin:

$$x = \frac{c\,e - b\,f}{a\,e - d\,b} \qquad y = \frac{a\,f - d\,c}{a\,e - d\,b}$$

Donde el numerador es la diferencia de los productos de coeficientes opuestos en los órdenes en las que no se encuentra y, y el denominador es la diferencia de los productos de los coeficientes opuestos tomados de los órdenes que involucran las dos cantidades desconocidas.

A partir de la primera ecuación, es evidente que:

a) $ax = c - by$ … donde $x = \frac{c - b\,y}{a}$

b) Para la segunda ecuación:

$dx = f - ey$ … donde $x = \frac{f - e\,y}{d}$

c) Por lo tanto, $\frac{c-by}{a} = \frac{f-e\,y}{d}$ y $cd - dby = af - aey$

d) De donde $aey - dby = af - cd$

e) Llegando a $y = \frac{af - dc}{ae - db}$

f) De la misma manera para x:

$$x = \frac{ce - bf}{ae - db}$$

Análisis semiótico a la configuración (CE3.2), Teorema I de Maclaurin:

En la solución presentada por el matemático Colin Maclaurin se utilizan los *términos* o *expresiones* como numerador, denominador, producto, coeficientes, diferencia, coeficientes opuestos, cantidad desconocida que corresponden a los ***elementos lingüísticos*** utilizados en la prueba del teorema. Maneja la ***definición*** de los ***concepto***s de diferencia, producto, coeficiente y cantidad desconocida (variables) permitiendo regular de algún modo el lenguaje. Y ***argumentar*** **que** la evidencia del método se fundamenta en los ***procedimientos*** que es el objeto matemático sobresaliente, una muestra de ello es el paso realizado en el literal **c,** el cual corresponde a igualar las dos ecuaciones ya despejadas respecto a la variable $\boldsymbol{x}$. Esta solución del teorema corresponde a lo que actualmente llamamos al ***método*** de solución por determinantes para un sistema de ecuaciones 2×2, siempre y cuando el determinante del sistema sea diferente de cero.

De acuerdo con la demostración del teorema I de Maclaurin y el análisis semiótico realizado, se evidencia que el método utilizado por Maclaurin tiene una gran similitud al actual método convencional denominado el método de igualación para sistemas de ecuaciones lineales. En la sección **4.4.4** se muestra dicha semejanza. Como resultado de estos análisis se identifican los elementos de la Tabla **4.6.**

Tabla 4.6

Emergencia del significado Parcial 3.2

SITPRO 3.2	Teorema I. Sistemas de ecuaciones $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ según Maclaurin
CE 3.2	Solución a sistemas de ecuaciones $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, por eliminación sucesiva de las incógnitas

SIGP 3.2	Método de determinantes de Maclaurin para la solución de sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{2 \times 2}$

Fuente: (Elaboración propia)

Configuración Epistémica 3.3 (CE3.3): Solución a sistemas de ecuaciones $\mathbf{3 \times 3}$, por eliminación sucesiva de incógnitas

Problema 3.3: Teorema II

Supongamos ahora que se dan tres cantidades desconocidas y tres ecuaciones, entonces llamamos a las cantidades desconocidas x, y e z. Para un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas:

$$\begin{cases} ax + by + cz = m & (1) \\ dx + ey + fz = n & (2) \\ gx + hy + kz = p & (3) \end{cases}$$

Demostración dada por Maclaurin al Teorema II para $\boldsymbol{z}$:

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

El numerador contiene todos los diferentes productos que se pueden hacer de tres coeficientes opuestos tomados desde todos los órdenes en los que $\boldsymbol{z}$ no se encuentra; y el denominador consiste de todos los productos que se pueden hacer de los tres coeficientes opuestos tomados desde los órdenes que contienen las tres cantidades desconocidas porque desde lo último parece que:

a) $y = \frac{an-afz-dm+dcz}{ae-db}$

b) $y = \frac{ap-akz-gm+gcz}{ah-gb}$

c) Entonces $\frac{an-afz-dm+dcz}{ae-db} = \frac{ap-akz-gm+gcz}{ah-gb}$

d) Y así:

$(an - afz - dm + dcz) \times ah - gb \times (an - afz + gbdm - gbdcz) = (ap - gm -$

$akz + gcz) \times ae - db \times (ap - akz + gbdm - gbdcz)$

e) Tomar $gbdm$ y $-gbdcz$ de ambos lados, y dividir por a, para que:

$an - dm - afz + dcz \times h - gbn - gbfz = ap - gm - akz + gcz \times e - dbp + dbkz$

f) Transponer una división para que encuentres:

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

g) los valores de x y y se encuentran de la misma manera y tienen el mismo denominador en general

$$y = \frac{ank - apf + dpc - dmk + gmf - gnc}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}$$

Análisis semiótico a la configuración (CE3.3), Teorema II de Maclaurin:

En el desarrollo de la demostración presentada por el matemático Colin Maclaurin, se utilizan los ***términos*** como numerador, denominador, productos, transposición, coeficientes y cantidad desconocida que corresponden a los ***elementos lingüísticos*** utilizados en la prueba del teorema. Se utilizan los ***concepto***s de diferencia, producto, coeficiente y cantidad desconocida (variables) permitiendo regular de algún modo el lenguaje. La manera de ***argumentar*** la evidencia del método, se fundamenta en los ***procedimientos*** que son de tipo algorítmicos, ya que es el objeto matemático sobresaliente. No se evidencia el uso de ***proposiciones*** puesto que estos son enunciados sobre los conceptos. En este caso, la solución presentada corresponde al método de determinantes de Maclaurin para la solución de un sistema 3×3 por medio de eliminación sucesiva de incógnitas y se identifican los elementos que se muestran en la Tabla **4.7**

Tabla 4.7

Emergencia del Significado Parcial 3.3

SITPRO 3.3	Teorema II. Sistemas de ecuaciones $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ según Maclaurin
CE 3.3	Solución a sistemas de ecuaciones $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$, por eliminación sucesiva de las incógnitas
SIGP 3.3	Método de determinantes de Maclaurin para la solución de sistemas de ecuaciones lineales $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$

Fuente: (Elaboración propia)

4.2.4. Periodo 4: Edad Contemporánea (1789 d.C – actualidad: siglo XVIII - Actualidad)

Boyer (1986) replica que:

> Si se recuerda el nombre del matemático Maclaurin asociado a una serie de procedimientos que él no fue el primero en descubrir, la cosa se compensa con el hecho de que uno de los descubrimientos que hizo realmente lleve el nombre de otro matemático que lo descubrió también y lo publicó posteriormente. La conocida regla de Cramer (p. 540).

Configuración Epistémica 4.1 (CE4.1): Solución a sistemas de ecuaciones por la regla de Cramer

Situación – Problema: Método de Cramer (1704 – 1752)

Según Collette (2000) el matemático suizo Gabriel Cramer (1704 - 1752) publicó en 1750 el tratado de geometría *Introduction à L'analyse des Lignes Courbes Algébriques* (Introducción al análisis de las líneas curvas algebraicas). Cramer (1750) enfoca el contenido del libro en la geometría plana, es decir, lleva la geometría analítica del plano a un nivel avanzado mediante el estudio del álgebra. En el capítulo III, Cramer enuncia que la ecuación de una curva de grado n se puede determinar si se conocen $\frac{1}{2}n(n+3)$ puntos de la misma. Para enseñar este enunciado considera las cónicas $(n = 2)$, cuya ecuación es de la forma $A + By + Cz + Dyy + Exy + Fxx = 0$. Cramer explica que para encontrar la cónica que pasa por 5 puntos de la curva, se resuelve un sistema de ecuaciones lineales de tamaño 5×5. También enuncia la regla general para resolver sistemas de ecuaciones $n \times n$. Sin embargo la regla aparece enunciada en el Apéndice I (pp. 656-659) sin ofrecer prueba alguna de la misma a lo que Cramer (1750) señala "uno da el valor de cada incógnita formando n fracciones de las cuales el común denominador tiene tantos términos como existan permutaciones de n cosas" (p. 658). En este sentido se transcribe un amplio fragmento de la regla conservando su notación:

Problema 4.1: el desmayo de extraños

Cramer (1750) dice que:

Sean las variables $z, y, x, v, \mathring{\&}c,$ y otras tantas ecuaciones

$$\begin{gathered} A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \&c. \\ A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \&c. \\ A^3 = Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \&c. \\ A^4 = Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \&c. \\ \&c. \end{gathered}$$

Donde las letras $A^1, A^2, A^3, A^4, \&c$ no marcan, como en forma ordinaria, las potencias de A, pero para el primer miembro muestra su posición conocida, del primero, segundo, tercero, cuarto y la c ecuación. Del mismo modo $Z^1, Z^2, \ldots, \&c$ son los coeficientes de z; $Y^1, Y^2, \ldots, \&c$ son los coeficientes de y; $X^1, X^2, \ldots, \&c$ son los de x; $V^1, V^2, \ldots, \&c$ son los de v; en la primera, segunda,…, y la c ecuación.

En esta notación se supone, que si solo hay una ecuación y una incógnita z; se tendrá que $z = \frac{A^1}{Z^1}$. Si hay dos ecuaciones y dos incógnitas z y y; se encontrara $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$ y $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. Si hay tres ecuaciones y tres incógnitas z, y y x; se encontrara entonces que:

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 + A^2Y^1X^3 - A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + Z^2Y^1X^3 - Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$Y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + Z^2Y^1X^3 - Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 + Z^2Y^1A^3 - Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 + Z^2Y^1X^3 - Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

El análisis a estas fórmulas proporciona la regla general. Siendo n el número de ecuaciones y de incógnitas, se encontrará el valor de cada incógnita formando n fracciones cuyo denominador común tiene tantos términos como colocaciones diversas si hay n cosas diferentes. Cada término está compuesto por las letras $Z\ Y\ X\ V$ ổc siempre escritas en el mismo orden, pero a las cuales se aplican como exponentes, las n primeras cifras colocadas de todas las maneras posibles. Entonces, cuando tenemos tres incógnitas, el denominador tiene $[1 \times 2 \times 3 = 6]$ términos, compuestos de tres letras ZYX, que reciben sucesivamente los exponentes $123, 132, 213, 231, 312, 321$. Se da a estos términos los signos + o -, de acuerdo con la siguiente regla. Cuando un exponente esta seguido en el mismo término, mediatamente o inmediatamente, por un exponente menor que el, llamaré a esto un *desacuerdo.* Se cuenta, para cada término, el número de desacuerdos: si es par o nulo, el término tendrá signo +; si es impar, el término tendrá signo -. Por ejemplo en el término $Z^1Y^2V^3$ no hay desacuerdos: este término tendrá el signo +. El término $Z^3Y^1X^2$ también tendrá signo +, porque tiene dos desacuerdos, 3 antes de 1 y 3 antes de 2. Pero el término $Z^3Y^2X^1$, que tiene tres desacuerdos, 3 antes de 2, 3 antes de 1, 2 antes1, tendrá el signo -.

Así formando el denominador común, se tendrá el valor de z dando a este denominador el numerador que se forma cambiando, en todos sus términos, Z por A. […] (pp. 657 - 658)

Análisis semiótico a la configuración (CE3.3), regla enunciada por Cramer:

El matemático Gabriel Cramer tenía gran claridad respecto a los ***términos*** como: potencias, posición, incógnita, fracción, denominador común, numerador, coeficientes, ecuación, signo, exponente, cantidad impar, lo cual hace referencia a los ***elementos lingüísticos*** que soportan y expresan algunos de los ***conceptos*** previos como ecuación, incógnita, exponentes, *desacuerdo*, numerador y denominador, utilizados en la descripción de la regla de Cramer, ya que estos condicionan el ***argumento*** de colocar el signo + o – dependiendo del desacuerdo dado entre los exponentes de un término utilizado para encontrar la solución al sistema, interviniendo en la justificación de los ***procedimientos*** que pueden llevar a la solución de una situación problema utilizando la Regla de Cramer. La descripción de la regla de Cramer se relaciona con la configuración epistémica 4.1 **Solución a sistemas de ecuaciones por la regla de Cramer.** Estos elementos se presentan en la Tabla **4.8.**

Tabla 4.8

Emergencia del Significado Parcial 4.1

SITPRO 4.1	Descripción de la Regla de Cramer
CE 4.1	Solución a sistemas de ecuaciones por la regla de Cramer
SIGP 4.1	Método de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Fuente: (Elaboración propia)

Para Boyer (1986) todo parece indicar que se aprendió más sobre el método de la resolución de SEL de Cramer que de Maclaurin, principalmente esto se sospecha, debido a la superioridad de la notación y generalización de Cramer, en la que los coeficientes literales venían afectados de superíndices, lo cual facilitaba mucho la determinación de los signos de los productos (p. 542). Al respecto, Álvarez (2013) argumenta que al cotejar ambas exposiciones es correcto deducir que a Maclaurin le faltó enunciar con suficiente claridad y extensión la asignación del signo a los términos de las fracciones, cosa que Cramer hizo de una forma más explícita. En cambio Cramer, quizás porque lo daba por conocido, no se preocupó de explicar los cálculos que llevaban a obtener dichas fracciones, cuya estructura combinatoria explicó con más claridad que su precursor inglés (p. 37).

Situación - Problema: Método de Euler (1707-1783)

Uno de los matemáticos más importantes que produjo suiza fue Leonhard Euler (1707-1783), reconocido por sus grandes contribuciones en geometría, cálculo, trigonometría, teoría de números y álgebra. Álvarez (2013) menciona que:

> Casi podría darse por sorprendente que Euler no haya aparecido al recorrer el siglo XVIII siguiendo la traza de los determinantes y los sistemas de ecuaciones lineales. Ha sido así porque, en efecto, Euler no dedicó una atención especial y decisiva a estos temas (p. 37)

Sabiendo que Cramer tenía cierto interés en determinar las ecuaciones de las curvas algebraicas mediante un número determinado de puntos en donde se involucran los sistemas lineales. Para el caso de una cubica ($n = 3$), se necesitan $\frac{1}{2}n(n+3) = 9$ puntos. Por otra parte la teoría de eliminación estudia la intersección de curvas, determinando que dos cúbicas se hacen cortar en $3^2 = 9$ puntos. Esta contradicción entre estas dos conclusiones se conoce como la *paradoja de Cramer*, de la que se ocuparon varios matemáticos, entre ellos Leonhard Euler. En uno de sus artículos titulado: *Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes* y publicado en las Memorias de la Academia de Ciencias de Berlín tomo IV en el año 1748, el cual está dividido en 23 apartados en donde hace algunas consideraciones geométricas mediante algunas proposiciones y observaciones, en varios de sus apartados (12 - 15). Euler reflexiona sobre los conjuntos de ecuaciones lineales en los cuales una ecuación depende de otra, es decir, discute el caso más simple, el lineal con igual número de ecuaciones que de incógnitas y ofrece tres ejemplos haciendo una serie de indagaciones, pero sin completar un tratamiento preciso del tema.

Según (Euler, 1748) en el apartado 12 afirma que:

> […] En primer lugar, permítanme comenzar con el caso más simple para el que dos ecuaciones pueden ser insuficientes para determinar los valores de dos incógnitas, aunque ambas aparecen en cada ecuación y ocupan solo una dimensión en cada una. Vamos a considerar estas dos ecuaciones $3x - 2y = 5$ y $4y = 6x - 10$, veremos que no es posible encontrar las incógnitas x y y: ya que al eliminar x, la otra se elimina también y

> se obtiene una ecuación idéntica, de la cual no se puede determinar nada. La razón de esta ocurrencia es en principio evidente, porque la segunda ecuación se convierte en $6x - 4y = 10$, que no es más que el duplo de la primera $3x - 2y = 5$, que no difieren en puntos. Es por esto que, decimos que para determinar dos cantidades desconocidas, es suficiente tener dos ecuaciones. Se hace necesario agregar esta restricción a la proposición de que estas dos ecuaciones sean diferentes entre sí o que una no esté ya incluida en el otro y es solo con esta restricción que dicha proposición puede ser aceptada. (p. 225)

Después de narrar la misma situación para el caso de tres variables (apartado 13) y cuatro variables (apartado 14), Euler en el apartado 15 afirma que:

> La misma circunstancia puede ocurrir con cualquier número de ecuaciones que se quiera, incluso si tenemos tantas ecuaciones como incógnitas, la primera no sería suficiente para determinar la segunda porque una de estas cantidades desconocidas permanecerá indeterminada si una de las ecuaciones propuestas está contenida en las otras. Además, dos o más cantidades desconocidas permanecerán indeterminadas si hay, entre las ecuaciones, dos o más que ya están contenidas dentro de las otras y que, en consecuencia, no contribuyen en nada a la determinación de las incógnitas. Es por eso que cuando uno dice que para determinar n cantidades desconocidas, es suficiente tener n ecuaciones que expresen sus relaciones mutuas, es necesario agregar la restricción de que todas las ecuaciones deben ser diferentes entre sí, o que ninguna esté contenida en las demás (p. 227).

Según Álvarez (2013) la idea de “estar contenida” una ecuación en otras siendo algo más que no ser una de ellas, parece indicar que Euler tenía ya una idea en cierta manera precisa de lo que hoy se conoce como dependencia lineal de las ecuaciones, es decir, Euler desarrolló grandes estudios en problemas algebraicos de tipo lineal, estos problemas formaban parte de la enorme pluralidad de temas que abarco en su carrera como matemático. Un tema que evidencia el interés por trabajos de tipo lineal fue desarrollado por Euler en el apéndice del capítulo quinto del tomo dos de *Introductio in analysin infinitorum (1748)* que corresponde a las transformaciones lineales en términos de cambios de coordenadas para llevar una forma binaria y ternaria a su expresión como suma de cuadrados.

Situación – Problema: Bézout (1730 - 1783)

El dilema de la regla de los signos siempre fue un tema de discusión para los matemáticos Leibniz, Maclaurin, Cramer entre muchos otros. Del mismo modo le sucedió al matemático francés Étienne Bézout (1730 - 1783) quien en el año 1764 publicó un trabajo titulado: *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations* con la intención de reducir la eliminación de un sistema de ecuaciones de cualquier grado con dos incógnitas a la eliminación de un sistema lineal homogéneo de un número de incógnitas a determinar, cuya resultante no es más que la expresión compleja de coeficientes del sistema que con el tiempo llegaría a llamarse "*determinante*". Álvarez (2013) indica que en la introducción del artículo, esta expresión ya la había trabajado Cramer, pero la regla de signos para confeccionarla era bastante compleja cuando se pasaba de un cierto número de incógnitas, es por ello que Bézout crea y explica un procedimiento mecánico inductivo para escribir dicha expresión y le llama 1.

En el trabajo titulado *Théorie Générale des Équations Algébriques (1779),* se describe una regla general para calcular los valores de las incógnitas en una ecuación de primer grado en un sistema lineal, por lo que Bézout (1779) en el literal 198 refiere:

> (198). Sean u, x, y, z y ổc incógnitas cuyo número es n, así como el de las ecuaciones.
> Sean a, b, c, d y ổc los coeficientes respectivos de estas incógnitas en la primera

ecuación.

a', b', c', d' y ổc los coeficientes de las mismas incógnitas en la segunda ecuación.

a'', b'', c'', d'' y ổc los coeficientes de las mismas incógnitas en la tercera ecuación y así sucesivamente.

Supongamos tácitamente que el término bien conocido de cada ecuación afecta a un factor desconocido que represento por t. Forme el producto $u\,x\,y\,z\,t$ de todas estas incógnitas escritas en el orden que desee primero; pero este orden es admitido, debe conservarse hasta el final de la operación. Intercambie sucesivamente, cada una de las incógnitas, contra su coeficiente en la primera ecuación, observando colocar el signo en cada intercambio uniforme: este resultado será, lo que yo llamo, una primera línea.

Intercambie en esta primera línea, cada incógnita, por su coeficiente en la segunda ecuación, observando, como arriba, colocando el signo en cada intercambio uniforme; y tendrás una segunda línea.

Continuar de la misma manera hasta la última ecuación inclusive; y la última línea que obtienes, te dará los valores de las incógnitas de la siguiente manera:

Cada incógnita tendrá como valor una fracción cuyo numerador será el coeficiente de la misma incógnita en la última $n-$ésima línea, y que tendrá constantemente como denominador el coeficiente de la incógnita introducida t tendrá en esta misma $n-$ésima línea. (pp.172 - 173)

Bézout no explica de manera profunda la regla, pero ejemplificando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, aclara en cierta manera la forma de proceder:

(199) Sean las dos ecuaciones:

$$ax + by + c = 0$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

Pedimos el valor de x y de y. Introduzco en las dos ecuaciones la incógnita t de la siguiente manera:

$$ax + by + ct = 0$$
$$a'x + b'y + c't = 0$$

Y formamos el producto $x\ y\ t$. Cambio en este producto x en a, luego y en b, luego t en c y observando para cambiar el signo, al cambio de y, tengo esta primera línea.

$ayt - bxt + cxy$

Cambio en esta primera línea x en a', luego y en b', luego t en c', y observando el cambio prescrito para los signos, tengo esta segunda línea:

$ab't - ac'y - a'bt + bc'x + a'cy - b'cx$ donde

$(ab' - a'b)t - (ac' - a'c)y + (bc' - b'c)x$

Y por el literal (198) concluyo que:

$x = \frac{bc'-b'c}{ab'-a'b}$ $\quad y = \frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}$ (pp.173 - 174)

Es claro que Bézout cuando se refiere a "formar el producto $x\ y\ t$" indica la realización de las posibles permutaciones entre las incógnitas x, y, t según el literal (198). Bézout explica de manera análoga para los sistemas 3×3 y 4×4 en los literales (200), (204); en el (206) y comparte un ejemplo numérico en el cual no realiza procedimientos, solo muestra los resultados de la siguiente manera:

(206). Sean las tres ecuaciones:

$$2x + 4y + 5z - 22 = 0$$
$$3x + 5y + 2z - 30 = 0$$
$$5x + 6y + 4z - 43 = 0$$

Por la regla anterior tendremos la primera línea:

$2yzt - 4xzt + 5xyt + 22xyz$

La segunda línea viene dada por:

$-2zt + 11yt + 6yz - 17xt + 10xz - 106xy$

Y la tercera línea seria:

$-27t - 81y - 135x$

Consiguiendo como denominador a t el cual es -27 y se tendrá:

$x = \frac{-135}{-27}$ $y = \frac{-81}{-27}$ $z = \frac{0}{-27}$ que corresponde a

$x = 5$, $y = 3, z = 0$ (Bézout, 1779, p. 178)

Análisis semiótico al literal (206)

Bézout realiza el procedimiento por el cual se pueden encontrar los numeradores y denominadores de fracciones que expresan los valores de las incógnitas en un conjunto de ecuaciones lineales o también para encontrar la resultante de la eliminación de n cantidades de $n + 1$ ecuaciones lineales lo cual es un proceso especialmente útil cuando los coeficientes tienen valores particulares.

En este sentido González y González (2014) mencionan que el método de Bézout, como la inclusión de factores indeterminados para encontrar la *resultante* de un sistema 2×2 en forma general corresponde a:

Sea el sistema:

$$ax + by = k \qquad (1)$$
$$a'x + b'y = k' \qquad (2)$$

Se multiplica la primera ecuación por un factor indeterminado $\boldsymbol{m}$ y restamos la segunda ecuación

$$(am - a')x + (bm - b')y = (km - k') \qquad (3)$$

Para eliminar la $\boldsymbol{y}$ se anula su coeficiente:

$$bm - b' = 0 \qquad (4)$$

De (4) se obtiene la ecuación de condición para el valor de $\boldsymbol{m}$

$$m = \frac{b'}{b}$$

Ahora, reemplazando este valor $\boldsymbol{m}$ en (3) y tenemos:

$$\left(a\frac{b'}{b}-a'\right)x+\left(b\frac{b'}{b}-b'\right)y=\left(k\frac{b'}{b}-k'\right)$$

Llegando a:

$$x=\frac{kb'-k'b}{ab'-a'b}$$

Para eliminar $\boldsymbol{x}$ **,** se hace: $am-a'=0$ por lo que,

$$m=\frac{a'}{a}$$

Se reemplaza nuevamente:

$$\left(a\frac{a'}{a}-a'\right)x+\left(b\frac{a'}{a}-b'\right)y=\left(k\frac{a'}{a}-k'\right)$$

Y se obtiene que:

$$y=\frac{ak'-a'k}{ab'-a'b}$$

Ante esto González y González (2014) afirman que las fórmulas del denominador nacen de hacer el procedimiento de las permutaciones con las letras $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, que corresponden a los coeficientes de las incógnitas, acentuadas por la segunda letra y separadas por el signo menos. Se realiza el procedimiento de formar el numerador utilizando el denominador y cambiando la letra $\boldsymbol{k}$ por la letra $\boldsymbol{a}$ para la variable $\boldsymbol{x}$ y para la variable $\boldsymbol{y}$ se cambia la letra $\boldsymbol{k}$ por la letra $\boldsymbol{b}$**.** Esta forma general de solución a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas no centra su atención en las incógnitas (valores desconocidos) si no en los coeficientes, es decir, busca la manera de anular un coeficiente y automáticamente anulan la incógnita.

Los determinantes surgen como una forma organizada para realizar cálculos al momento de resolver los sistemas de ecuaciones lineales con igual número de incógnitas y de ecuaciones, es decir, los determinantes son herramientas útiles para resolver sistemas lineales y se muestran útiles también, para resolver otros tipos de sistemas de ecuaciones y problemas de diversa naturaleza. Álvarez (2013) menciona que:

> El determinante es reconocido como un algoritmo relacionado a un arreglo de números con diferentes utilidades y empieza su desarrollo sistemático como un objeto matemático en sí mismo, cuyo estudio da lugar a una teoría que vuelve sobre los problemas que la originaron, y sobre otros nuevos, tratándolos como aplicaciones. (p. 43)

Situación – Problema: Vandermonde (1735 – 1796)

Es en este sentido que el matemático francés Alexandre Théophile Vandermonde (1735 - 1796) en 1772 publicó la obra *Mémoire sur l'éliminiation,* en la cual plasmo la idea de que el cálculo de determinantes estaba simultáneamente en manos de varios matemáticos franceses, pero Vandermonde no cita los estudios realizador por sus colegas: Cramer, Bézout entre otros. En la introducción de su artículo, Vandermonde coincide en el enfoque de estudio de sus colegas: los sistemas lineales como parte de estudio de la eliminación de incógnitas en sistemas más generales y obtiene las expresiones que llegan a ser llamadas determinantes como un tipo de resultante en la eliminación. Se resalta que el término de determinante no aparece a lo largo de la obra. (Álvarez, 2013; Collette, 2000; Mendel y García, 2016; Ruiz, 2003).

El logro más significativo de Vandermonde, es el que relata el matemático historiador de los determinantes Thomas Muir (1960):

> Debemos ver el trabajo de Vandermonde en su conjunto, y notar que es el primero en dar una exposición conexa de la teoría, definiendo las funciones al margen de las conexiones en otras materias, asignándoles una notación, y a partir de allí desarrolló lógicamente sus propiedades… De los matemáticos cuyo trabajo ha sido reseñado hasta ahora, el único en condiciones de ser considerado como el fundador de la teoría de determinantes es Vandermonde (p. 24).

Situación – Problema: Gauss (1777 - 1855)

Una de las figuras matemáticas más importante del siglo XVIII fue el matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) también conocido como el príncipe de las matemáticas: este gran matemático contribuyó significativamente en muchos campos de la matemática, en especial en álgebra. Según Collette (2000), Gauss publicó en el año 1801 el tratado de: *Disquisitiones arithmeticae* en el que presenta una colección de aportaciones a la teoría de números donde sintetiza y resume todo el trabajo realizado hasta esa época. Ruiz (2003) comenta que fue Gauss en el tratado de 1801 quien había usado por primera vez el término *determinante* para el discriminante cuántico de la forma cuadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$, sin embargo el sentido que le dio al término no es el mismo que actualmente se le da, Gauss usó el término porque consideraba que el determinante, "determina" las propiedades de la forma cuadrática (Mendel y García, 2016).

Por otra parte, Gauss hizo además de su aportación a los determinantes, por medio de estudios realizados a las formas cuadráticas en teoría de números, aportaciones a los sistemas lineales, pero más desde la perspectiva de la resolución numérica que desde un enfoque general teórico. Álvarez (2013) señala que Gauss se encontró con los sistemas lineales al desarrollarlos, el método de los mínimos cuadrados en sus estudios de astronomía, es decir, utilizó este nuevo método para calcular la órbita del asteroide Ceres en 1801, tiempo después publicó en el artículo titulado: Teoría del movimiento de los cuerpos celestes en secciones cónicas alrededor del sol *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus solem ambientiem (1809)*, en el cual divulga la aplicación del método de mínimos cuadrados y da algunas observaciones sobre la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Por otra parte en 1810, Gauss desarrolló la resolución numérica de los sistemas lineales por eliminación de incógnitas en su obra: *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum*, donde introdujo el procedimiento sistemático de eliminación de incógnitas para resolver sistemas de ecuaciones lineales sin usar matrices propiamente, el cual se ha difundido como *eliminación gaussiana*. Gauss consultó la obra: *Nueve capítulos sobre el arte matemático* mencionada para el estudio de la órbita elíptica del planetoide Pallas, usando observaciones realizadas entre los años 1803 y 1809, donde habían tenido que estimar el valor de 6 incógnitas en un sistema de 6 ecuaciones lineales. En la segunda parte de la obra: *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae* de 1823, incluye un apartado donde hace consideraciones generales sobre su método. (Álvarez, 2013; Ruiz, 2003; Luzardo y Peña, 2006)

Situación – Problema: Sylvester (1814 - 1897)

En otro sentido fue el matemático británico James Joseph con el seudónimo Sylvester (1814 - 1897) quien adoptó el vocablo de *Matriz* en el año 1850, definiéndolo como un arreglo cuadrilongo de términos (Guerra, 2012). Sylvester contribuyó sobre todo al estudio de los determinantes, de una manera continua durante más de cincuenta años. Según Mendel y García (2016) una de las aportaciones principales a esta teoría consiste en un método más eficaz para eliminar la incógnita de dos ecuaciones polinómicas de grados n y m. Pero fue el matemático irlandés Henry John Stephen Smith (1826 - 1883) quien introduce en su obra *On Systems of Linear Indeterminate Equations and Congruences* publicada en 1861, la noción de matriz cuadrada, igualdad de matrices, columna, matriz aumentada y no aumentada, determinante, producto de matrices entre muchas otras (Ruiz, 2003). El interés de estos matemáticos se concentró en el estudio de la matriz y sus propiedades, pero dejaron de lado el estudio de la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Situación – Problema: Estudio de matrices Cayley (1821 - 1895)

Otro matemático que se interesó por estudiar las matrices fue el británico Arthur Cayley (1821 - 1895), (esto sucede según Collette (2000) en el año 1841) realizando investigaciones en geometría analítica en *n* dimensiones, en trasformaciones lineales que son en parte el origen de su teoría de matrices, la teoría de superficies, la teoría de determinantes y la teoría de los invariantes algebraicos. En esta última teoría al utilizar la representación rectangular para representar las transformaciones en sus estudios de invariantes algebraicos, Cayley introdujo el concepto de matriz:

> No he obtenido ciertamente la noción de matriz de ninguna manera de los cuaterniones; fue más bien a partir de un determinante o como una manera cómoda de expresar las ecuaciones:
> $x' = ax + by$
> $y' = cx + dy$ (Collette, 2000, p. 423)

La primera memoria donde se introducen las nociones básicas de las marices fue redactada en francés y publicada con el título de *Remarque sur la notation des fonctions algébriques* (observaciones sobre la notación de las funciones algebraicas) en la revista de Crelle en el año de 1855. Además, Cayley en la misma memoria esboza rápidamente la idea de matriz inversa y de la multiplicación de matrices o composición de matrices. En este artículo se usan dos líneas verticales sobre ambos lados del arreglo de los coeficientes de la matriz para denotar el *determinante,* una costumbre que se conserva hasta nuestros días. (Collette, 2000)

Cabe resaltar que en su primera memoria importante sobre el tema, titulada *Memoir on the theory of matrices* (memoria sobre la teoría de matrices) publicada en el año 1858, introduce la matriz nula, la matriz unitaria, define la suma de dos matrices, presenta dos tipos de multiplicación de matrices: la primera es multiplicación por un escalar y la segunda designa la multiplicación habitual o composición (Collette, 2000).

El interés de los matemáticos por estudiar los sistemas de ecuaciones lineales, llevan al descubrimiento de los determinantes y las matrices. Es por esto que Collette (2000) dice que:

> El estudio de los determinantes se emprendió desde mediados del siglo XVIII y proporcionó una multitud de resultados interesantes experimentados por los matemáticos que buscaban medios de expresar de una manera más fácil la solución de sistemas de ecuaciones lineales o diferenciales. Tarde o temprano debían interesarse más específicamente por la disposición rectangular de los números que aparecen en el determinante con vistas a acotar un dominio de estudio específico. Sin embargo mucho antes de que se desarrollara la teoría de matrices, los matemáticos habían descubierto ya un buen número de propiedades relativas a esta teoría. Una vez más la historia de las matemáticas revela que el desarrollo de las teorías y los conceptos no se hace necesariamente de una manera lógica, y aunque la noción de matriz precede lógicamente a la de determinante, fue esta última la que se desarrolló primero. . Como Cayley fue el primero en extraer la idea de matriz del determinante y en publicar una serie de artículos sobre esta nueva noción, es considerado generalmente como el fundador de la teoría de matrices (pp. 420-421).

Como lo demuestra la historia, los sistemas de ecuaciones lineales surgen de la necesidad de solucionar problemas concretos de las diferentes civilizaciones desde los inicios de la humanidad hasta nuestros días, descubriendo cada vez diferentes formas de solución (métodos) u otros objetos matemáticos (determinantes y matrices). A continuación se muestra la Tabla **4.9** como resumen de las diferentes configuraciones epistémicas, resultado del estudio histórico epistemológico sobre el objeto sistemas de ecuaciones lineales:

Tabla 4.9

Periodos, Problemas, Configuraciones Epistémicas y Significados Parciales del Objeto SEL

Períodos	**Situación-Problema**	**Configuración Epistémica**	**Significados Parciales del Objeto Sistemas de Ecuaciones Lineales**
I Época Antigua	SP1.1. Tamaño de terrenos	CE1.1 Problemas de áreas de terrenos	SIGP 1.1 Método de la falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2
	SP 1.2. Repartición de cantidades desconocidas	CE 1.2 Problemas sobre el peso de metales por el método de las dos situaciones erróneas	SIGP 1.2 Método de la doble falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales
	SP 1.3 Grupo de personas y compra de animales	CE 1.3 Problema de exceso y defecto	SIGP 1.3 Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura china
II Edad Media	SP 2 Precio de animales y distribución de dinero	CE 2 Problemas de animales e intercambio de dinero	SIGP 2 Método de eliminación para el caso de infinitas soluciones de un sistema de ecuaciones lineales
III Edad Moderna	SP 3.1 Precio de piezas de seda	CE 3.1 Problemas relacionados con el precio de telas de seda	SIGP 3.1 Método de Cardan para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2
	SP 3.2 Teorema I. Sistemas de ecuaciones 2×2 según Maclaurin	CE 3.2 Solución a sistemas de ecuaciones 2×2 por eliminación sucesiva de incógnitas	SIGP 3.2 Método de determinantes de Maclaurin para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2
	SP 3.3 Teorema 2. Sistemas de ecuaciones 3×3 según Maclaurin	CE 3.3 Solución a sistemas de ecuaciones 3×3 por eliminaciones sucesivas de incógnitas	SIGP 3.3 Método de determinantes de Maclaurin para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 3×3
IV Edad Contemporánea	SP 4 Descripción de la regla de Cramer	CE 4 Solución a sistemas de ecuaciones por la regla de Cramer	SIGP 4 Método de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Fuente: (Elaboración propia)

4.3. Significado Global del objeto matemático Sistemas de Ecuaciones Lineales

El estudio histórico epistemológico de la evolución del objeto SEL, da como resultado la identificación de ocho sistemas de prácticas, los cuales están asociados cada una de ellas con una configuración epistémica, la cual constituye un significado parcial del objeto sistemas de ecuaciones lineales. Estas ocho configuraciones se han denominado: ***CE 1.1*** *Problema de áreas de terrenos;* ***CE 1.2*** *Problemas sobre el peso de metales por el método de las dos situaciones erróneas;* ***CE 1.3*** *Problemas por exceso y defecto;* ***CE 2.1*** *Problema de compra de animales e intercambio de dinero;* ***CE 3.1*** *Problemas relacionados con el precio de telas de seda;* ***CE 3.2*** *Solución a sistemas de ecuaciones* 2×2*, por eliminación sucesiva de las incógnitas;* ***CE 3.3*** *Solución a sistemas de ecuaciones* 3×3*, por eliminación sucesiva de incógnitas;* ***CE 4.1*** *Solución a sistemas de ecuaciones lineales por la Regla de Cramer*.

Según Pino-Fan (2013) dentro del enfoque EOS, se sustenta una de las tantas maneras de concebir el significado de un objeto matemático: en este enfoque, desde la perspectiva pragmatista en términos de los sistemas de prácticas en donde interviene dicho objeto. Estos sistemas de prácticas están relacionados con varios tipos de situaciones problemas, de donde emergen estos distintos significados o significados parciales del objeto, y es precisamente cuando se abordan cada uno de los problemas que dan origen al surgimiento del objeto matemático, en este caso de los SEL.

En este sentido del estudio realizado se establece que el objeto matemático SEL, a lo largo de la historia, ha adoptado 8 configuraciones epistémicas que a pesar de ser distintas, algunas guardan cierta similitud y se relacionan entres si como se muestra en la Figura **4.1**. En esta figura, se han considerado cronológicamente 4 sistemas de prácticas (significados parciales) que a la vez se consideran como “primarios” ya que las configuraciones activadas en estos sistemas

(***CE1.1, CE1.2, CE1.3, CE2.1***) resuelven ciertos tipos de situaciones problemas con métodos y procedimientos particulares, es decir, tiene un carácter extensivo; sin embargo las configuraciones (***CE1.1 y CE1.2***) se consideran similares, pues al agruparlas dan origen a un significado más genérico el cual abordan situaciones problemas: significado al que se le ha denominado "Método de la falsa posición para la solución de SEL". De manera similar la configuración ***CE1.3*** conlleva al significado parcial denominado "Método de exceso y defecto para la solución de SEL en la cultura China". La configuración ***CE2.1*** se ha denominado "Método de eliminación para el caso de infinitas soluciones de un SEL".

Posteriormente Cardano desarrolla un sistema de prácticas para resolver un sistema lineal, lo que activa una configuración más general ***CE3.1*** denominada "Método de determinantes de Cardano". Del mismo modo Maclaurin realiza los sistemas de prácticas (similares entre sí) que conducen a las configuraciones formales (***CE3.2*** y ***CE3.3***) llamadas "Método de determinantes de Maclaurin para la solución de SEL". Por último Cramer apoyándose en las configuraciones (***CE3.1, CE3.2*** y ***CE3.3***) genera un nuevo *sistema de prácticas* ***CE4.1*** denominado "Regla de Cramer", cuya configuración es de carácter formal general, el cual lleva asociado una configuración que constituye la formalización del objeto SEL; significado denominado "Método de determinantes para la solución de SEL" que de acuerdo con la tipología de los objetos primarios de dicha configuración, son aplicados para la solución de problemas propios de los sistemas de prácticas: significados que reciben el nombre de "Método de la falsa posición para la solución de SEL", "Método de exceso y defecto para la solución de SEL en la cultura China", "Método de eliminación para el caso de infinitas soluciones de un SEL" como lo indican las flechas punteadas que salen de ***CE4.1.*** Los niveles de generalización de cada una de las configuraciones y la línea de tiempo, también se ilustraron en el esquema de la Figura **4.1.**

La consideración conjunta de los elementos y sus diferentes tipos de relaciones, ilustrados en la Figura **4.1** es lo que conforman el ***significado global del objeto SEL.***

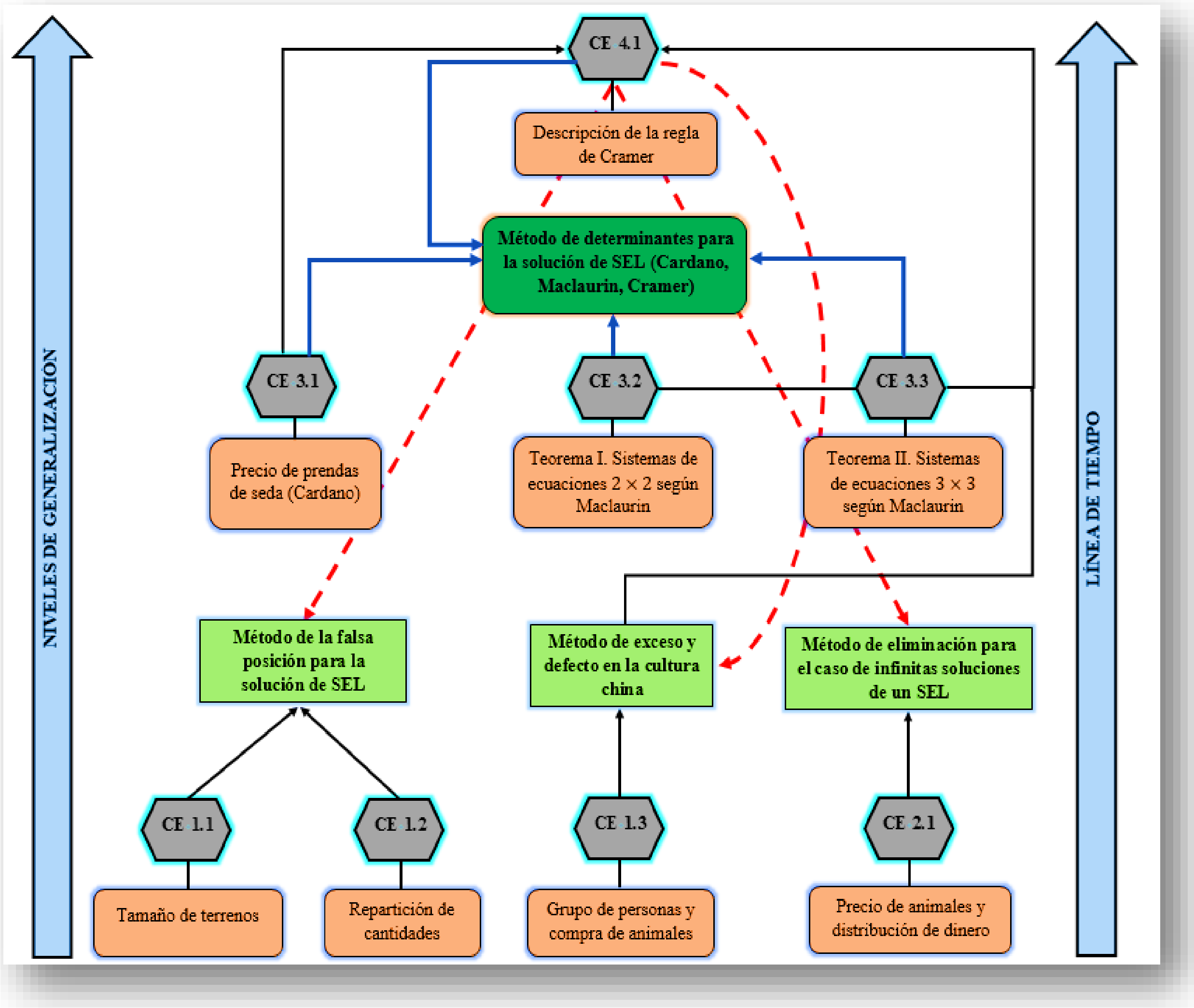


Figura 4.1 Significado Global del Objeto SEL. Fuente: (Elaboración Propia).

4.4. Análisis conceptual del objeto sistemas de ecuaciones lineales

En el análisis teórico o conceptual del objeto sistemas de ecuaciones lineales se describen los elementos y conceptos básicos relacionados con este objeto matemático; ya sea por las propiedades asociadas al conjunto solución de un sistema lineal dado, o por las relaciones establecidas entre los elementos que constituyen los SEL y permiten llegar al análisis de su solución. Del estudio histórico-epistemológico de los SEL se evidencia que ellos se encuentran ligados a problemas reales y de la matemática, a los cuales se daba solución por medio de la representación como un SEL, donde además, emergen otros objetos matemáticos como las matrices y los determinantes, los cuales se usan para encontrar y analizar la solución del sistema dado. Este análisis teórico del objeto SEL, se desarrolla tomando como referencia los libros de enseñanza en álgebra lineal tales como: Fundamentos de álgebra lineal (Larson y Falvo, 2010), Álgebra lineal (Kolman y Hill, 2006), Introducción al álgebra lineal (Anton, 2011), Álgebra lineal y cálculo en varias variables (Monsalve, 2017), (Grossman y Flores, 2012) Álgebra lineal y Álgebra lineal. Una introducción moderna (Poole, 2011). El libro: Proyecto saberes ser hacer (Sánchez, Sabogal, Buitrago, Fuentes, Patiño, Joya y Ramírez 2016) el cual es utilizado para la enseñanza de las matemáticas en el grado noveno.

A continuación se describen los diferentes tipos de definiciones que se encuentran de matrices según los libros tomados como referencia.

4.4.1. Matrices

Las matrices han significado un potente objeto que además de posibilitar una escritura organizada de datos, permite la sistematización de métodos, agilidad en cálculos y procedimientos más eficaces. “Las matrices terminan constituyéndose junto con otros conceptos del álgebra lineal en herramientas que hacen frente a la solución de problemas propios de las matemáticas o relativos a otras disciplina” (Guerra, 2012, p. 15).

En adelante ***CM*** significa Configuración Matriz.

***CM1*. Matriz (Sylvester, 1850; Cayley, 1858)**

Según Monsalve (2017), una ***matriz*** es un arreglo rectangular de mn números reales (o complejos) de la forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Donde a_{ij} se llama la *entrada* ubicada en la *i*-ésima *fila* y la *j*-ésima *columna* para esta matriz se utiliza la notación $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$, donde m es el número de filas y n el número de columnas. El tamaño de una matriz de m filas y n columnas se indica por $m \times n$. Si el número de filas de una matriz coincide con el número de columnas, entonces se considera una ***matriz cuadrada***. Las entradas $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nm}$ forman la *diagonal principal* de la matriz $\boldsymbol{A}$**.**

CM2. Otra definición de matriz dada por Poole (2011) corresponde a:

Una ***matriz*** es un arreglo en forma rectangular de números denominados las *entradas* o *element*os de la matriz, de donde los elementos serán seleccionados del conjunto R de los números reales o pueden ser seleccionados del conjunto C de los números complejos o también de Z_p donde p es primo.

El *orden* de una matriz es una descripción de los números de renglones y columnas que tiene. Una matriz es de tamaño $m \times n$ si tiene m renglones y n columnas. Una matriz de $1 \times m$ se conoce como ***matriz renglón*** o *vector renglón* y una matriz de tamaño $n \times 1$ se conoce como ***matriz columna*** o *vector columna.* Utilizaremos la notación de subíndice doble para hacer referencia a las entradas de la matriz A: la entrada de A en el renglón *i* y la columna *j* se denota mediante a_{ij}. Con esta notación, una matriz general A de $m \times n$ tiene la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

En adelante **CCM** significara Configuración Clase de Matriz.

CCM1.1 Matriz idéntica

Monsalve (2017), Larson y Falvo (2010) y Grossman y Flores (2012) definen una ***matriz idéntica*** así: una matriz cuadrada que tiene en cada una de las entradas de su diagonal principal un 1 y en las demás entradas 0 se llama *matriz idéntica.* La matriz idéntica de tamaño n se denota por $\boldsymbol{I_n}$ de la forma $\left[\delta_{ij}\right]_{n\times n}$donde

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & si \quad i=j\\ 0 & si \quad i\neq j\end{cases}$$

CCM1.2 La definición dada por Poole (2011) es:

La ***matriz identidad*** $\boldsymbol{I}_n$ de $n\times n$ es una matriz cuyos elementos de la *diagonal principal* son iguales a 1 y todos los demás son 0. Esto es

$$\boldsymbol{I}_n=(b_{ij})\ donde\ \ b_{ij}=\begin{cases}1 & si \quad i=j\\ 0 & si \quad i\neq j\end{cases}$$

CCM2.1 Matriz transpuesta

Poole (2011) define la ***transpuesta*** de una matriz $\boldsymbol{A}$ de $m\times n$ es la matriz de $\boldsymbol{A^T}$ de $n\times m$ que se obtiene cuando se intercambia los renglones y columnas de $\boldsymbol{A}$**.** Es decir, la *i*-ésima columna de $\boldsymbol{A^T}$ es el *i*-ésimo renglón de $\boldsymbol{A}$ para toda *i*.

CCM2.2 Matriz transpuesta

Kolman y Hill (2006) definen la matriz transpuesto como:

Si $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]$ es una matriz de $m\times n$, la matriz $\boldsymbol{A^T}=\left[a_{ij}^T\right]$ de $n\times m$, donde

$$a_{ij}^T=a_{ji}\qquad (1\leq i\leq n, 1\leq j\leq m)$$

Es la **transpuesta** de $\boldsymbol{A}$. En consecuencia, las entradas en cada fila de $\boldsymbol{A^T}$ son las entradas correspondientes en la columna $\boldsymbol{A}$**.**

CCM3. Matriz diagonal

La siguiente definición es tomada de Monsalve (2017), Larson y Falvo (2010) y Grossman y Flores (2012)

Una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ se llama ***matriz diagonal*** si todas las entradas que están por fuera de la diagonal principal son nulas; es decir, si $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Cabe recordar que las matrices idénticas $\boldsymbol{I_n}$ son diagonales.

CCM4. Matriz triangular

Para Monsalve (2017) y Larson y Falvo (2010), una matriz cuadrada $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$es una ***matriz triangular superior*** si todas las entradas que están por debajo de la diagonal principal son nulas; es decir si $a_{ij} = 0$ para $j < i$. Análogamente $\boldsymbol{A}$ es una ***matriz diagonal inferior*** si todas las entradas que están por encima de la diagonal principal son nulas; es decir si $a_{ij} = 0$ para $j > i$. Claramente una matriz es, simultáneamente triangular superior e inferior si, y solo si, es una matriz diagonal.

CCM5.1. Matriz inversa

Monsalve (2017) y Anton (2011), definen ***matriz inversa*** de la siguiente forma: sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$. Si existe una matriz $\boldsymbol{C}$ también $n \times n$ tal que

$$\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{I}_n$$

Entonces diremos que $\boldsymbol{A}$ es una *matriz invertible* o (no-singular) y que su *inversa* es $\boldsymbol{C}$. Se denota por $\boldsymbol{A^{-1}}$. Si la matriz $\boldsymbol{A^{-1}}$ no existe, se dice que $\boldsymbol{A}$ es *no invertible,* o que es *singular*.

CCM5.2. La definición dada por Grossman y Flores (2012) y Poole (2011), de ***matriz inversa*** es la siguiente:

Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ dos matrices de $n \times n$. Suponga que

$$\boldsymbol{AB = BA = I}$$

Si $\boldsymbol{B}$ se llama *inversa* de $\boldsymbol{A}$ y se denota por $\boldsymbol{A^{-1}}$. Entonces se tiene

$$\boldsymbol{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$$

Si $\boldsymbol{A}$ tiene inversa, entonces se dice que $\boldsymbol{A}$ es *invertible.* Una matriz cuadrada que no es invertible se denomina *singular* y una matriz invertible se llama *no singular.* Además si la matriz inversa, existe, es única. Para ello se escribe el siguiente teorema tomado de Grossman y Flores (2012):

Teorema

Si una matriz $\boldsymbol{A}$ *es invertible, entonces su inversa es única*

Demostración: suponga que $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son dos inversas de $\boldsymbol{A}$. Se puede demostrar que $\boldsymbol{B = C}$. Por definición anterior se tiene $\boldsymbol{AB = BA = I}$ y $\boldsymbol{AC = CA = I}$**.** Por ley asociativa de la multiplicación de matrices se tiene que $\boldsymbol{B(AC) = (BA)C}$**.** Entonces

$$\boldsymbol{B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C}$$

Por lo tanto $\boldsymbol{B = C}$**,** y el teorema queda demostrado. (p. 103)

CCM6. Matriz escalonada

Kolman y Hill (2006) definen: Una matriz $\boldsymbol{A}$ de tamaño $m \times n$ está en forma ***escalonada reducida por filas (renglones)*** *cuando* se satisfacen las siguientes propiedades:

- **a)** Todas las filas que constan de solos ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.
- **b)** La primera entrada distinta de cero de la fila, al leer de izquierda a derecha es un 1. Esta entrada se denomina *entrada principal o uno principal* de su fila.
- **c)** Para cada fila que no consta solo ceros, el 1 principal aparece a la derecha y abajo de

cualquier 1 principal en las filas que le preceden.

d) Si la columna tiene un 1 principal, el resto de las entradas de dicha columna son iguales a cero.

En una matriz en forma escalonada reducida por filas, los unos principales describen un patrón de escalera que desciende a partir de la esquina superior izquierda. Se dice que una matriz $m \times n$ que satisface las propiedades a), b), y c) está en la ***forma escalonada por filas.***

CCM7.1 Matriz simétrica

Para Kolman y Hill (2006), una matriz $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ cuyas entradas son números reales es ***simétrica*** si $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}$**.** Es decir, $\boldsymbol{A}$ es simétrica si es matriz cuadrada para la cual $a_{ij} = a_{ji}$. Si la matriz $\boldsymbol{A}$ es simétrica, los elementos de $\boldsymbol{A}$ son simétricos respecto a la diagonal principal de $\boldsymbol{A}$.

CCM7.2 Matriz simétrica

Para Grossman y Flores (2012) una matriz (cuadrada) $\boldsymbol{A}$ de $n \times n$ se denomina s***imétrica*** si $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{A}$. Es decir las columnas de $\boldsymbol{A}$ son también los renglones de $\boldsymbol{A}$**.**

CCM8 Matriz antisimétrica

Para Grossman y Flores (2012) una matriz cuadrada se denomina ***antisimétrica*** si $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}} = -\boldsymbol{A}$**.** Es decir $a_{ij} = -a_{ji}$.

CCM8 Matriz nula

Una matriz $\boldsymbol{A}$ se denomina nula, si todas sus entradas son iguales a 0. La matriz nula se denota por $O_{n\times n}$

A continuación se presenta la Figura **4.2** la cual corresponde a las diferentes clases de matrices según los textos de referencia.

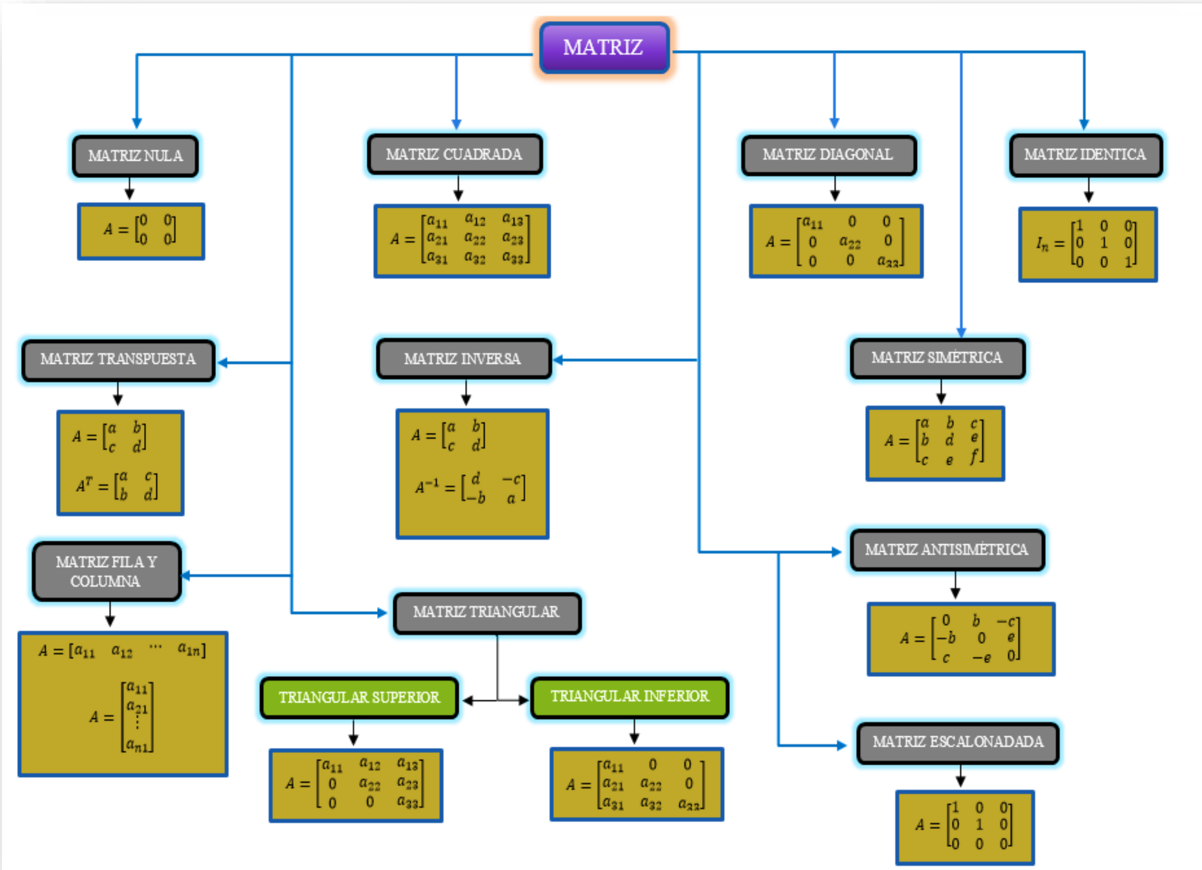


Figura 4.2 Clases de Matrices. Fuente: (Elaboración Propia).

4.4.2. Determinantes

La historia de los determinantes precede a la de las matrices, un hecho diferente a la forma cómo se enseñan hoy en día en algunos programas de álgebra lineal. Los determinantes surgieron independientes de las matrices, para resolver muchos problemas prácticos relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales, esto se evidencia en el estudio histórico y epistemológico realizado en la sección **4.2.** A continuación se dan algunas definiciones de determinante como las permutaciones y en general las dadas por libros de texto referenciados en este capítulo, utilizados en la enseñanza de álgebra lineal en educación superior.

CD1. Cálculo del determinante de una matriz cuadrada según permutaciones

Kolman y Hill (2006) definen el determinante como:

Sea $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$una matriz cuadrada. Se define el ***determinante de A*** (que se escribe $det(A)$ o $|a|$) como:

$$\det(A) = |A| \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

donde la suma varía sobre todas las permutaciones $j_1, j_2, \cdots, j_n$ del conjunto $S = \{1,2, \dots, n\}$. El signo se toma como + o – si la permutación $j_1, j_2, \cdots, j_n$ es par o impar, respectivamente.

SPD.1 Determinante según las permutaciones de los $\boldsymbol{n}$ elementos de la matriz.

Cabe aclarar que **CD** corresponde a Clase de Determinante y **SPD** significa Significado Parcial de Determinante.

CD1.1. Determinante de una matriz $\mathbf{2 \times 2}$

Grossman y Flores (2012) definen el determinante de una matriz A así:

Sea $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Entonces su ***determinante*** está dado por el valor

$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. El determinante de A se denota por *det A* o $|A|$ o

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

CD1.2. Determinante de una matriz $\mathbf{3 \times 3}$

Para Poole (2011) el determinante de la matriz 3×3 esta dado como:

Definición: Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Entonces el ***determinante*** de $\boldsymbol{A}$ es el escalar

$$\det A = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Si se denota mediante $\boldsymbol{A}_{ij}$ la submatriz de una matriz A obtenida mediante la eliminación del renglón *i* y la columna *j*, entonces la ecuación anterior se puede abreviar de la siguiente manera

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}\det \boldsymbol{A}_{11} - a_{12}\det \boldsymbol{A}_{12} + a_{13}\det \boldsymbol{A}_{13}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{3}(-1)^{1+j}\, a_{1j}\det \boldsymbol{A}_{1j}$$

CD1.2.1 Cálculo de un determinante 2×2 y 3×3 para el método de Sarrus

Anton (2011) define el determinante de una matriz $\boldsymbol{A}$ de la misma forma que lo hacen Grossman y Flores, 2012 y Poole (2011) de la siguiente manera:

a) $det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

b) $det\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$

$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

Anton (2011) menciona que es útil disponer de estas dos fórmulas para el cálculo de los determinantes 2×2 y 3×3, pero es un tanto complicado memorizar estas expresiones, lo que conlleva a utilizar lo que él denomina "artificios mnemónicos".

La fórmula a) se obtiene a partir de la multiplicación de los elementos por los que pasa la fecha que apunta hacia la derecha y de este número se resta el producto de los elementos por los que pasa la flecha que apunta hacia la izquierda de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

\- +

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

La fórmula b) se obtiene escribiendo $\boldsymbol{A}$ y se le adjuntan sus primeras dos columnas. Entonces el determinante se calcula al sumar los productos correspondientes a las flechas que apuntan hacia la derecha y restar a este número los productos de las entradas correspondientes a las flechas que apuntan hacia la izquierda

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

CD1.3. Determinante de una matriz $\boldsymbol{n \times n}$ (permutaciones)

Según Kolman y Hill (2006) define el ***determinante de una matriz $\boldsymbol{n \times n}$*** de la siguiente manera:

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$, entonces ***determinante* de $\boldsymbol{A}$**, denotado por $\det A$ o $|\boldsymbol{A}|$ está dado por:

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \sum (\pm)\, a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots\, a_{nj_n}$$

Donde la suma varía sobre todas las permutaciones $j_1\, j_2\, \ldots\, j_n$ del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. El signo se toma como + o – si la permutación $j_1\, j_2\, \ldots\, j_n$ es par o impar, respectivamente.

En cada término $(\pm)\, a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots\, a_{nj_n}$ del $\det(\boldsymbol{A})$, los subíndices de las filas aparecen en su orden natural, mientras que los subíndices de las columnas están en orden $j_1\, j_2\, \ldots\, j_n$. Como la permutación $j_1\, j_2\, \ldots\, j_n$ no es más que un reordenamiento de los número de 1 hasta n, no tiene repeticiones. En consecuencia cada término del $\det(\boldsymbol{A})$ es un producto de *n* elementos de $\boldsymbol{A}$, cada uno con su signo adecuado, en el cual hay exactamente un elemento en cada fila y exactamente un elemento en cada columna. Dado que se suma sobre todas las permutaciones del conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$, la expresión para $\det(\boldsymbol{A})$ tiene $\boldsymbol{n}!$ términos en la suma.

CD1.3.1 Para Poole (2011) el determinante de matrices $n \times n$ esta dado por:

Proposición: sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$, donde $n \geq 2$. Entonces el *determinante* de A es el escalar

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = a_{11} \det \boldsymbol{A}_{11} - a_{12} \det \boldsymbol{A}_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det \boldsymbol{A}_{1n}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} \det \boldsymbol{A}_{1j}$$

Es conveniente combinar un menor con su signo de más o menos. Para este fin se define el ***cofactor (i, j)*** de ***A*** como

$$\boldsymbol{C}_{1j} = (-1)^{1+n} \det \boldsymbol{A}_{ij}$$

Y con esta notación la definición anterior se convierte en

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \boldsymbol{C}_{1j}$$

Esta definición se conoce a menudo como el ***desarrollo por cofactores a lo largo del primer renglón.***

CD1.3.2 Determinante de una matriz $\boldsymbol{n \times n}$ (Método de los menores)

Grossman y Flores (2012), presentan la definición para el caso general del determinante de una matriz $n \times n$, eliminando algún renglón o columna de una matriz.

Definición de *menor*: Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$ y $\boldsymbol{M}_{ij}$ la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de $\boldsymbol{A}$ eliminando el renglón i y la columna j. $\boldsymbol{M}_{ij}$ se llama el ***menor ij*** de ***A.***

Definición de *cofactor*: Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$. El ***cofactor ij*** de ***A,*** denotado por $\boldsymbol{A}_{ij}$, está dado por:

$$\boldsymbol{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \left|\boldsymbol{M}_{ij}\right|$$

Esto es, el ***cofactor ij*** de $\boldsymbol{A}$ se obtiene tomando el determinante del menor ***ij*** y multiplicándolo por $(-1)^{i+j}$. Observe que:

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 & si\ i+j\ es\ par \\ -1 & si\ i+j\ es\ inpar \end{cases}$$

CD1.3.3 Determinante de una matriz $\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}$ (expansión por cofactores)

Monsalve (2017) establece que el *determinante de una matriz* $n \times n$ corresponde a:

Definición: sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$ cualquiera, y sea $\boldsymbol{A}_{1j}$ la matriz obtenida de $\boldsymbol{A}$ eliminado la primer fila y la *j*-ésima columna. El *determinante* de $\boldsymbol{A}$ esta dado por la formula

$$|\boldsymbol{A}| = a_{11}|\boldsymbol{A}_{11}| - a_{12}|\boldsymbol{A}_{12}| + a_{13}|\boldsymbol{A}_{13}| + \cdots + (-1)^{n-1}a_{1n}|\boldsymbol{A}_{1n}|$$

Esta expresión de denomina "*expansión por cofactores*". Aquí los cofactores son $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{12}, \boldsymbol{A}_{13}, \dots, \boldsymbol{A}_{1n}$. Obsérvese también la alternancia en el signo de los sumandos.

CD2.1 Teorema (cálculo del determinante por cofactores)

Sean $\boldsymbol{A}$ *una matriz* $n \times n$ *y* $\boldsymbol{A}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ *la matriz obtenida de* $\boldsymbol{A}$ *eliminando la i-ésima fila y la j-ésima columna*. Entonces

a) *Para cada fila i*

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{i+1} \quad (a_{i1}|\boldsymbol{A}_{i1}| - a_{i2}|\boldsymbol{A}_{i2}| + a_{i3}|\boldsymbol{A}_{i3}| + \cdots + (-1)^{n-1}a_{in}|\boldsymbol{A}_{in}|)$$

b) *Para cada columna j*

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{j+1} \quad \left(a_{1j}\left|\boldsymbol{A}_{1j}\right| - a_{2j}\left|\boldsymbol{A}_{2j}\right| + a_{3j}\left|\boldsymbol{A}_{3j}\right| + \cdots + (-1)^{n-1}a_{nj}\left|\boldsymbol{A}_{nj}\right|\right)$$

A cada uno de los términos de arriba de la forma $\boldsymbol{A}_{ij}$ *se le denomina un cofactor de* ***A.***

CD2.2 Teorema de expansión de Laplace

Poole (2011) muestra el siguiente teorema:

El determinante de una matriz de $n \times n$, $\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]$, donde $n \geq 2$, puede ser calculado como

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{i1}\boldsymbol{C}_{i1} + a_{i2}\boldsymbol{C}_{i2} + \cdots + a_{in}\boldsymbol{C}_{in}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{C}_{ij}$$

La cual es la *expansión por cofactores a lo largo del i-ésimo renglón*

$$\det(\boldsymbol{A}) = a_{1j}\boldsymbol{C}_{1j} + a_{2j}\boldsymbol{C}_{2j} + \cdots + a_{nj}\boldsymbol{C}_{nj}$$

$$\det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{C}_{ij}$$

la *expansión por cofactores a lo largo del j-ésimo columna* (p. 277)

Antes de iniciar con la justificación a este teorema, es necesario declarar dos lemas útiles en la demostración. Poole (2011) enuncia:

Lema 13. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de $n \times n$. Entonces

$$a_{11}\boldsymbol{C}_{11} + a_{12}\boldsymbol{C}_{12} + \cdots + a_{1n}\boldsymbol{C}_{1n} = a_{11}\boldsymbol{C}_{11} + a_{21}\boldsymbol{C}_{21} + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{C}_{n1}.$$

Lema 14. Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz de $n \times n$ y tratemos de obtener $\boldsymbol{B}$ mediante el intercambio de cualesquiera dos renglones (columnas) de $\boldsymbol{A}$. Entonces

$\det(\boldsymbol{B}) = -\det(\boldsymbol{A})$ (pp, 290 -291)

Demostración: sea $\boldsymbol{B}$ la matriz que se obtiene al mover el renglón *i* de $\boldsymbol{A}$ hacia la parte superior, mediante *i*-1 intercambios de renglones adyacentes de acuerdo con el lema 14,

$\det(\boldsymbol{B}) = (-1)^{i-1}\det A$. Pero $b_{1j} = a_{ij}$ y $B_{1j} = A_{ij}$ para $j = 1, \ldots, n$

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

De esta forma

$$\det A = (-1)^{i-1} \det B = (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \det B_{1j}$$

$$= (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \det A_{ij}$$

Lo que nos da la fórmula para el desarrollo por cofactores a lo largo del renglón i. si se aplica el lema 13, la demostración del desarrollo por columnas es semejante, de manera que podemos desarrollar por columnas en lugar de hacerlo por renglones. (Poole, 2011. pp, 292-293)

CD2.3 Calculo de un determinante en una matriz triangular (superior- inferior)

Grossman y Flores (2012) presentan el teorema para el cálculo de un determinante de una matriz triangular superior e inferior de la siguiente manera:

Teorema

Sea A una matriz $n \times n$ triangular superior o inferior. Entonces $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} \cdots a_{nn}$.

Esto es *el determinante de una matriz triangular es igual al producto de sus componentes en la diagonal principal.*

Demostración: para demostrar la parte triangular superior será hará por medio de la inducción matemática con $n = 2$. Si A es una matriz triangular superior de 2×2, entonces $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ y el $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}\,0$ a lo que es igual a $\det A = a_{11}a_{22}$. De esta forma el teorema se cumple para $n = 2$. Se supondrá que se cumple para $k = n - 1$ y se demostrara para $k = n$. El determinante de una matriz triangular superior de $n \times n$ es

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+a_{13} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{1n} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3n} - 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Cada uno de estos determinantes es el determinante de una matriz triangular superior de $(n-1) \times (n-1)$ que, de acuerdo con la hipótesis de inducción, es igual al producto de las componentes en la diagonal. Todas las matrices, excepto la primera, tienen una columna de ceros, por lo que una de sus componentes diagonales es cero. De este modo, todos los determinantes excepto el primero son cero. Por lo tanto

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} \ldots a_{nn})$$

Para la parte triangular inferior del teorema se deduce del siguiente ejemplo

Sea la matriz triangular inferior $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$

Su determinante está dado por: $\det A = a_{11}A_{11} + 0\ A_{12} + 0\ A_{13} + 0\ A_{44} = a_{11}A_{11}$

$$\det A = a_{11} \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$$

Lo que prueba que el teorema se cumple para matrices de $n \times n$. (p. 182)

Hasta el momento se ha tomado varias definiciones de determinante y algunos teoremas que se relacionan con los determinantes, a continuación se muestra un teorema donde se resume las propiedades principales que se necesitan para operar eficientemente la reducción por renglones.

CD3 Propiedades de los determinantes

Según Poole (2011) dice lo siguiente:

Teorema: Sea $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada:

- **a)** Si $\boldsymbol{A}$ tiene un renglón (columna) cero, entonces $\boldsymbol{det\ A = 0}$.
- **b)** Si $\boldsymbol{B}$ se obtiene al intercambiar dos renglones (columnas) de $\boldsymbol{A}$, entonces $\boldsymbol{det\ A = -det\ B}$.
- **c)** Si $\boldsymbol{A}$ tiene dos renglones (columnas) idénticos, entonces $\boldsymbol{det\ A = 0}$.
- **d)** Si $\boldsymbol{B}$ se obtiene al multiplicar un renglón (columna) de $\boldsymbol{A}$ por k, entonces $\boldsymbol{det\ B = k\ \ det\ A}$.
- **e)** Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ son idénticas excepto que el *i*-ésimo renglón (columna) de $\boldsymbol{C}$ sea la suma de los *i*-ésimos renglones (columna) de $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$, entonces $\boldsymbol{det\ C = det\ A + det\ B}$.
- **f)** Si $\boldsymbol{B}$ se obtiene al sumar un múltiplo de un renglón (columna) de $\boldsymbol{A}$ a otro renglón (columna), entonces $\boldsymbol{det\ B = det\ A}$. (p. 271)

La demostración a este teorema se encuentra en Poole (2011, p. 271) no se realiza por su extensión y la intención no es adentrarnos en el formalismo matemático.

4.4.3. Sistemas de ecuaciones lineales

Muchos problemas prácticos pueden plantearse como un conjunto de ecuaciones lineales o sistemas de ecuaciones lineales.

Para esto se tiene la definición (Anton, 2011): Una *ecuación lineal* corresponde a cualquier recta en el plano xy puede representarse algebraicamente por una ecuación de la forma:

$$a_1x + a_2y = b$$

donde a_1, a_2 y b son constantes reales y a_1 y a_2 no son ambas cero. Una ecuación de esta forma se denomina ecuación lineal en las variables x y y. De manera más general una ***ecuación lineal*** en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se define como aquella que se puede expresar en la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y b son constantes. Las variables de una ecuación lineal algunas veces se denominan ***incógnitas***.

Definición: a un conjunto de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas cada uno, se denomina un sistema de *m* ecuaciones lineales con *n* incógnitas.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Donde los elementos a_{ij}, con $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, n$, reciben el nombre de coeficientes del SEL, y b_i el de los términos independientes del SEL. Tanto los coeficientes como los términos independientes son en principio escalares pertenecientes a un cuerpo determinado.

En adelante **CSEL** significa *Configuración de Sistemas de Ecuaciones Lineales* y **SSEL** significara *Significado de Sistemas de Ecuaciones Lineales.*

CSEL1. Solución de un SEL

SSEL1. Solución general de un conjunto finito de ecuaciones lineales

Una sucesión de números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se denomina ***solución*** del sistema si $x_1 = s_1$, $x_2 = s_2$, ... , $x_n = s_n$.

CSEL2. Grossman y Flores (2012) consideran que un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas x y y se representa por:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ son números dados. Cada una de estas ecuaciones corresponde a una línea recta. Cualquier par de números reales (x, y) que satisface el sistema anterior se denomina la ***solución*** del sistema.

SSEL2.Solucion para un SEL como pareja ordenada

CSEL3. Para Monsalve (2017), Kolman y Hill (2006) se tiene que un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas es un sistema de la forma:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Donde los coeficientes $a_{11}, \ldots, a_{mn}$; $b_1, b_2, \ldots, b_m$, son elementos de un campo $\boldsymbol{R}$. Una solución, a este SEL es una colección de números $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ que satisfacen, simultáneamente las m ecuaciones. El conjunto de todas las soluciones del sistema se denomina ***conjunto solución*** o, algunas veces, la ***solución general***. Un sistema de ecuaciones lineales se llama *homogéneo* si todas las constantes $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son iguales a cero; en otro caso se llamara *no homogéneo*.

SSEL3. Conjunto solución general de un SEL

CSEL4. Para Larson y Falvo (2010) las matrices, se usan para representar un SEL, la matriz obtenida de los coeficientes y términos constantes de un SEL se denomina ***matriz aumentada del sistema***. A la matriz que solo contiene los coeficientes del sistema se llama ***matriz de coeficientes del sistema***, como se muestra a continuación:

Sistema

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si se expresan $\boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{B}$ como

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Entonces el sistema se puede reescribir como una ecuación matricial única

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

Las constantes $b_1, b_2, \dots, b_n$ reciben el nombre de términos independientes del sistema.

SSEL4. Sistemas de ecuaciones lineales en forma de ecuación matricial

CSEL5. Según Larson y Falvo (2010) para un sistema de ecuaciones en n variables, necesariamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

El sistema tiene exactamente una solución (*sistema compatible determinado*).

El sistema tiene un número infinito de soluciones (*sistema compatible indeterminado*).

El sistema no tiene solución (*sistema incompatible*).

SSEL5. Clases de soluciones para un SEL

4.4.4. Métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales

De manera general existen dos tipos de métodos para resolver los SEL, los métodos directos y los métodos iterativos. En esta investigación se restringe los métodos directos, de los cuales el más representativo es el método de Gauss.

La abreviatura **CSSEL** significara Configuración Solución de un Sistema de Ecuaciones

Lineales y **SSSEL** significara Significado Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales.

CSSEL1. Solución por eliminación Gaussiana

SSSEL1. Método de eliminación Gaussiana para la solución de un SEL.

Se exponen algunas definiciones para sustentar el método de eliminación gaussiana. Cuando en el proceso se transforma la matriz aumentada en una matriz escalonada reducida recibe el nombre de Gauss-Jordan.

El método de eliminación gaussiana según (Kolman y Hill, 2006) basa en eliminar de forma sistemática alguna de las variables del sistema mediante operaciones elementales de fila o de columna, para obtener un sistema equivalente, este proceso se repite hasta obtener una matriz triangular superior para usar la sustitución hacia atrás, y obtener el valor de las demás incógnitas.

Proposición: El procedimiento de eliminación gaussiana para resolver el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ es el siguiente:

1) Formar la matriz aumentada $[A \quad \vdots \quad b]$.

2) Por medio de operaciones elementales por filas, obtener una forma escalonada por filas $[C \quad \vdots \quad d]$ de la matriz aumentada $[A \quad \vdots \quad b]$.

3) Resolver el sistema lineal correspondiente a $[C \quad \vdots \quad d]$ por medio de *sustitución hacia atrás.* Las filas que constan únicamente de ceros pueden ignorarse, ya que la ecuación correspondiente será satisfecha por cualesquiera valores de las incógnitas.

Para mostrar el método de eliminación gaussiana se presenta el problema encontrado en el libro del Liber abaci, de Fibonacci, descrito en el período 2. Edad Media (476 d. C – 1453 d. C: siglo V-XV) (solución dada por el autor de la tesis).

CSSEL2. Solución de un sistema por eliminación Gaussiana

Problema: *Dos hombres desean comprar un caballo pero ninguno de ellos posee suficiente dinero para hacerlo. El primero dice al segundo: "si me das* $\frac{1}{3}$ *de tus besantes puedo comprar el caballo". El segundo responde "si me das* $\frac{1}{4}$ *de tus besantes yo también tendré besantes suficientes para comprar el caballo". ¿Cuál es el precio del caballo y cuantos besantes posee cada uno de los dos hombres?*

Solución:

a) Primero se define a $\boldsymbol{x}$ como los besantes del primer hombre (dinero), luego $\boldsymbol{y}$ corresponde a los besantes del segundo hombre y el precio del caballo está dado por $\boldsymbol{c}$. Ahora se plantea un sistema de ecuaciones lineales que será resuelto por el método de eliminación gaussiana:

$$\begin{cases} x + \dfrac{1}{3}y = c \\ \dfrac{1}{4}x + y = c \end{cases}$$

b) Se obtiene la matriz aumentada del sistema

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & c \\ \frac{1}{4} & 1 & c \end{array}\right]$$

c) por medio de operaciones elementales, se obtiene una forma escalonada por filas de la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & c \\ \frac{1}{4} & 1 & c \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} R_1 \\ -\frac{1}{4}R_1 + R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{3} & c \\ 0 & \frac{11}{12} & \frac{3}{4}c \end{array}\right]$$

d) Esta matriz aumentada corresponde al sistema lineal equivalente:

$$x + \frac{1}{3}y = c$$
$$\frac{11}{12}y = \frac{3}{4}c$$

e) Se inicia con el proceso de sustitución hacia atrás, despejando la variable $\boldsymbol{y}$ de la segunda ecuación:

$$\frac{11}{12}y = \frac{3}{4}\ c$$

$$y = \frac{3}{4}\left(\frac{12}{11}\right)\ c$$
$$y = \frac{9}{11}c$$

f) Ahora se sustituye el valor de $\boldsymbol{y}$ en la primer ecuación para obtener el valor de $\boldsymbol{x}$**:**

$$x + \frac{1}{3}y = c$$
$$x + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{11}\right)c = c$$
$$x + \frac{9}{33}c = c$$
$$x = c - \frac{9}{33}c$$
$$x = \frac{8}{11}c$$

g) la solución para el sistema de ecuaciones es:

$$x = \frac{8}{11}c \qquad y = \frac{9}{11}c$$

h) $\{(x, y)\} = \left\{\left(\frac{8}{11}, \frac{9}{11}\right)\right\}$

i) Una solución denominada pequeña corresponde a: $x = 8,\ y = 9,\ c = 11$ que es la dada por Fibonacci.

CSSEL2. Solución de un sistema por eliminación gaussiana
SSSEL2. Método de eliminación gaussiana para la solución de un SEL

CSSEL3. Solución de un sistema por reducción de Gauss-Jordan

Kolman y Hill (2006) presentan las operaciones fila permitidas de la siguiente manera:

Operaciones fila:

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $m \times n$. Las operaciones *fila* sobre $\boldsymbol{A}$ son*:*

a) Multiplicar la *i*-ésima fila de $\boldsymbol{A}$ por un escalar diferente de cero.

b) Sumar un múltiplo de la *i*-ésima fila de $\boldsymbol{A}$ por la *j*-ésima fila de $\boldsymbol{A}$**.**

c) Intercambiar la *i*-ésima y la *j*-ésima filas de $\boldsymbol{A}$**.**

Kolman y Hill (2006) definen como un complemento del método de eliminación gaussiana, este método a través de la matriz aumentada $[A \quad \vdots \quad b]$ donde se obtiene una matriz $[C \quad \vdots \quad d]$ en forma escalonada reducida equivalente por filas. El procedimiento de reducción de Gauss-Jordan para resolver el sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ corresponde a:

1) Formar la matriz aumentada $[A \quad \vdots \quad b]$.

2) Transforma la matriz aumentada $[A \quad \vdots \quad b]$ a su forma escalonada reducida por filas$[C \quad \vdots \quad d]$ mediante operaciones elementales por filas.

3) Para cada fila distinta de cero de la matriz $[C \quad \vdots \quad d]$, se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal de cada fila asociada con la entrada principal de esa fila. Las filas que constan completamente de ceros se pueden ignorar, pues la ecuación correspondiente será satisfecha por cualesquiera valores de las incógnitas.

Se plantea una posible solución al problema N° 1 de la sección VIII del libro *la matemática en nueve capítulos,* en el Periodo 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C) presentado por Luzardo y Peña (2006) el cual dio origen a un sistema de tres ecuaciones lineales que es resuelto por el método matricial “fan-chen”, y cuya única diferencia con el método conocido actualmente como eliminación de Gauss-Jordan, es que los coeficientes se listan por columnas en lugar de filas. Este problema se soluciona por el método de reducción de Gauss-Jordan para comprender la forma de aplicar el método (autor de la tesis).

Problema: *Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase , dos de la segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de la segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidas en una gavilla de cada clase?*

Solución: se plantea el sistema que corresponde al problema

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

a) Ahora se saca la matriz aumentada del sistema de ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right]\begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array}$$

b) Luego se transforma la matriz aumentada a su forma escalonada reducida por filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 39 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right]\begin{array}{c} R_1/3 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 1/3 & 13 \\ 2 & 3 & 1 & 34 \\ 1 & 2 & 3 & 26 \end{array}\right]\begin{array}{c} R_1 \\ -2R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 1/3 & 13 \\ 0 & 5/3 & 1/3 & 8 \\ 0 & 4/3 & 8/3 & 13 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ 3/5 R_2 \\ R_3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2/3 & 1/3 & 13 \\ 0 & 1 & 1/5 & 24/5 \\ 0 & 4/3 & 8/3 & 13 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2/3 R_2 + R_1 \\ R_2 \\ -4/3 R_2 + R_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/5 & 49/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 24/5 \\ 0 & 0 & 12/5 & 33/5 \end{array}\right] \begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ 5/12 R_3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/5 & 49/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 24/5 \\ 0 & 0 & 1 & 11/4 \end{array}\right] \begin{array}{c} -1/5 R_3 + R_1 \\ -1/5 R_3 + R_2 \\ R_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 37/4 \\ 0 & 1 & 0 & 17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/4 \end{array}\right]$$

c) En consecuencia, la matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 37/4 \\ 0 & 1 & 0 & 17/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/4 \end{bmatrix}$$

d) En forma escalonada reducida por filas. Por tanto el sistema lineal representado por la matriz anterior es:

$$\begin{aligned} x \quad\quad\quad &= 37/4 \\ y \quad\; &= 17/4 \\ z &= 11/4 \end{aligned}$$

e) Como solución al problema se tiene que de la primera clase de granos hay $37/4$ (unidad), de la segunda clase de granos hay $17/4$ y de la tercera clase de granos hay $11/4$.

CSSEL3. Solución de un sistema por reducción de Gauss-Jordan
SSSEL3. Método de reducción de Gauss-Jordan para la solución de un SEL

CSSEL4. Sistemas lineales e inversas

SSEL4. Solución de un sistema utilizando matriz inversa

Este método se aplica para sistemas lineales $n \times n$ y además la matriz de coeficientes necesariamente debe ser invertible, por tanto Larson y Falvo (2010) mencionan el siguiente teorema

Teorema: *Si* $\boldsymbol{A}$ *es una matriz de* $n \times n$ *invertible, entonces el sistema de ecuaciones lineales* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *tiene una solución única dada por* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

Demostración:

Sabiendo que $\boldsymbol{A}$ **es** una matriz no singular, entonces $\boldsymbol{A}^{-1}$ existe y multiplicando a ambos miembros por la izquierda de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ por $\boldsymbol{A}^{-1}$ se obtiene

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Esta solución es única, ya que si $\boldsymbol{x_1}$ y $\boldsymbol{x_2}$ son dos soluciones, se puede aplicar la propiedad de cancelación para la ecuación $\boldsymbol{Ax_1} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{Ax_2}$ para concluir que $\boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{x_2}$.

CSSEL4. Solución de un sistema utilizando la matriz inversa
SSSEL4. Método de la matriz inversa para la solución de un SEL.

CSSEL5. Solución de un sistema por método de Cramer

En Monsalve (2017) se da el siguiente teorema

Teorema (Regla de Cramer) (Monsalve, 2017)

Sean

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}$$

un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$ es la matriz de coeficientes, y $\boldsymbol{b}$ el vector columna de los términos independientes de modo que se escribe el sistema dado como $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, donde:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \boldsymbol{A}_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{A}_i$ es la matriz obtenida de $\boldsymbol{A}$ sustituyendo la j-ésima columna por la matriz $\boldsymbol{b}$**.** Si el $\det(A) \neq 0$ entonces la única solución del sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ está dada por $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ para $i = 1,2, \dots, n$,

$$x_1 = \frac{\det(\boldsymbol{A}_1)}{\det(\boldsymbol{A})}, \quad x_2 = \frac{\det(\boldsymbol{A}_2)}{\det(\boldsymbol{A})}, \dots, \quad x_n = \frac{\det(\boldsymbol{A}_n)}{\det(\boldsymbol{A})}$$

Según Poole (2011), la regla de Cramer está definida de la siguiente manera:

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz invertible de $n \times n$ y sea $\boldsymbol{b}$ un vector en $\boldsymbol{R^n}$**.** Entonces, la única solución al sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ esta dada por

$$x_i = \frac{\det(\ \boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{b}))}{\det(\boldsymbol{A})} \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

Para tener un mejor comprensión del método, el autor de la investigación plantea una posible solución al problema encontrado en la sección VII del libro: *La matemática en nueve capítulos,* donde Nieves et al. (2004) sugiere que la solución presentada en ese libro es un caso particular de la regla de Cramer para ecuaciones de dos incógnitas.

Problema: *Un grupo de personas compran en conjunto unas gallinas. Si cada persona dio 9 wen, quedarían 11 wen de sobra después de la compra. Si, en cambio, cada persona contribuye con 6 wen, quedaran 16 wen a deber. ¿Cuántas personas hay en el grupo y cuál es el coste de las gallinas?*

Solución: En primer lugar el problema se interpreta de la siguiente manera:

a) Sea $\boldsymbol{x}$ el número de personas, $\boldsymbol{y}$ corresponde al precio final de las gallinas, 9 y 6 el dinero con el que cuentan los compradores, 11 y 16 el exceso-defecto, es decir, lo que sobra y lo que quedarían debiendo por las gallinas.

b) Entonces se plantea el sistema de ecuaciones lineales en notación moderna:

$$\begin{cases} 9x - y = 11 \\ 6x - y = -16 \end{cases}$$

c) Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema:

$$\det(\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} = (9)(-1) - (6)(-1) = -3$$

d) Como el $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, entonces el sistema tiene solución y es única. Luego se calcula los determinantes del sistema.

$$\det(\boldsymbol{A}_x) = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ -16 & -1 \end{bmatrix} = (11)(-1) - (-16)(-1) = -27$$

$$\det(\boldsymbol{A}_y) = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 6 & -16 \end{bmatrix} = (9)(-16) - (6)(11) = -210$$

e) Luego se aplica la regla de Cramer para encontrar la variable x:

$$x = \frac{\det(\boldsymbol{A}_x)}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{-27}{-3} = 9$$

f) Del mismo modo se aplica la regla de Cramer para encontrar la variable y:

$$y = \frac{\det(\boldsymbol{A}_y)}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{-210}{-3} = 70$$

g) Luego la solución del problema es $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{9}$ y $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{70}$ que corresponde a 9 personas que hay en el grupo y el costo de las gallinas es de $70\ wen$.

CSSEL5. Solución de un sistema por método de Cramer
SSSEL5. Método de Cramer para la solución de un SEL

CSSEL6. Solución de un sistema por método de la doble falsa posición

Este método se basa en procedimientos aritméticos que permiten resolver ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales, y consiste en asignar dos valores a una incógnita (doble falsa posición), luego se realizan los cálculos correspondientes y se determinan los errores resultantes de la asignación de los valores a la incógnita inicial (estos errores son la diferencia entre el valor que se obtiene y el que indica la ecuación que debe resultar). A partir de estas falsas posiciones se aplica una proporcionalidad para obtener la solución de la ecuación o la solución del sistema de ecuaciones lineales Orts (2007).

Para comprender el método de la doble falsa posición el autor de la tesis ha desarrollado el problema, que según (Ribnikov, 1987, p. 34) es una situación característica encontrada en la sección VII del libro *la matemática en nueve capítulos* presentado en el periodo 1. Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C).

Problema: *9 lingotes de oro pesan tanto como 11 lingotes de plata. Si se intercambian los lingotes de uno en otro, entonces el peso del oro y la plata se diferenciarán en 13 lan (16 lan son iguales a 1 tzin). ¿Cuánto pesan respectivamente un lingote de oro y uno de plata?*

Solución: Como la solución presentada por el libro: *la matemática en nueve capítulos* no es clara, el autor de la tesis plantea una posible solución detallada, incluyendo la conversión de unidades de *lan* a *tzin* de la siguiente manera:

a) Sean las variables x que representa el peso de un lingote de oro, y sea y el peso de un lingote de plata. Como el problema puede ser resuelto por medio de un sistema de ecuaciones lineales, se plantea el sistema:

$$\begin{cases} 9x = 11y \\ (10y + x) - (8x + y) = 13 \end{cases}$$

b) Resolviendo las operaciones indicadas equivale a:

$$\begin{cases} 9x = 11y \\ 9y - 7x = 13 \end{cases}$$

c) Se propone la primera falsa posición suponiendo que $x_1 = 56\ lan$ para encontrar el valor de y_1 haciendo una sustitución en la primera ecuación del sistema:

$$9x = 11y$$

$$9(56) = 11y$$

$$y_1 = \frac{504}{11}\ lan$$

d) Ahora con los valores x_1 y y_1, se reemplazan en la segunda ecuación del sistema:

$$9y - 7x = 13$$

$$9\left(\frac{504}{11}\right) - 7(56) = \frac{224}{11} = 20\frac{4}{11}$$

e) Como la segunda condición del sistema detalla la diferencia de los intercambios de los lingotes de oro y plata que equivale a $13\ lan$, se obtiene el error (defecto).

$$z_1 = 13 - \frac{224}{11} = -\frac{81}{11} = -7\frac{4}{11}\ lan$$

f) De manera análoga se hace la segunda falsa posición suponiendo $x_2 = 28\ lan$ para encontrar el valor y_2 sustituyendo este valor en la primera ecuación del sistema:

$$9x = 11y$$

$$9(28) = 11y$$

$$y_2 = \frac{252}{11}\ lan$$

g) Ahora se utiliza los valores x_2, y_2 para determinar el error z_2 que surgen del uso de la segunda ecuación del problema:

$$9y - 7x = 13$$

$$9\left(\frac{252}{11}\right) - 7(28) = \frac{112}{11} = 10\frac{2}{11}$$

h) Como la segunda condición del sistema detalla la diferencia de los intercambios de los lingotes de oro y plata que equivale a 13 lan, se obtiene el error (exceso):

$$z_2 = \frac{112}{11} - 13 = \pm\frac{31}{11} = \pm 2\frac{9}{11}\ lan$$

i) Usando los valores $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ y aplicando la regla de tres, se obtiene el valor exacto para el peso de un lingote de oro:

$$x = \frac{x_1 z_2 - x_2 z_1}{z_2 - z_1}$$

$$x = \frac{28\left(\frac{31}{11}\right) - 28\left(\frac{-81}{11}\right)}{\left(\frac{31}{11}\right) - \left(\frac{-81}{11}\right)}$$

$$x = \frac{143}{4} = 35\frac{3}{4}\ lan$$

j) Ahora se calcula el valor exacto del peso de un lingote de plata reemplazando el valor x en la primera ecuación del sistema.

$$9x = 11y$$

$$9\left(\frac{143}{4}\right) = 11y$$

$$y = \frac{117}{4} = 29\frac{1}{4}\ lan$$

k) Por último se efectúa la conversión de unidades recordando que $16\ lan$ equivalen a $1\ tzin$:

Primero se convierte el peso de un lingote de oro

$$16\ lan \longrightarrow 1\ tzin$$

$$\frac{143}{4}\ lan \longrightarrow \frac{143}{64} = 2\frac{15}{64}\ tzin$$

l) Ahora se hace la conversión del peso de un lingote de plata

$16\ lan \longrightarrow 1\ tzin$

$\frac{117}{4}\ lan \longrightarrow \frac{117}{64} = 1\frac{53}{64}\ tzin$

m) Luego el peso de un lingote de oro y plata es de $2\frac{15}{64}\ tzin,\ 1\frac{53}{64}\ tzin$ respectivamente.

CSSEL6. Solución de un sistema por método de la doble falsa posición
SSSEL6. Método de la doble falsa posición para la solución de un SEL

CSSEL7. Solución de un sistema por métodos convencionales (grafico-algebraico)

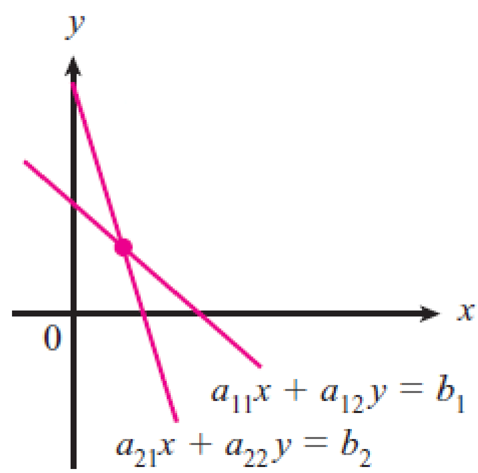
Los diferentes métodos de solución de SEL por métodos convencionales son tomados de Sánchez et al., (2016).

CSSEL7.1 Solución de un sistema por el método gráfico

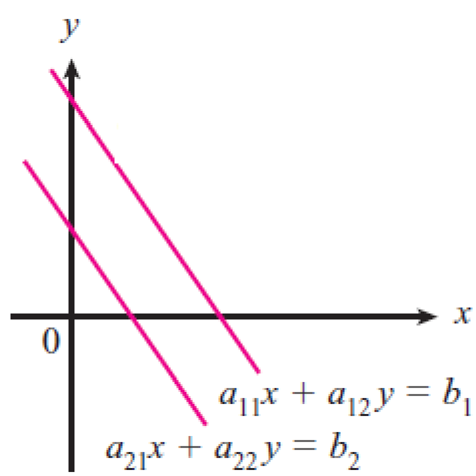
Este método consiste en representar de manera gráfica las rectas que corresponden a las ecuaciones que forman el sistema lineal, por lo general el punto de corte entre las dos rectas es la solución del sistema.

Cuando el método gráfico es utilizado para solucionar sistemas 2×2 se presentan los siguientes casos:

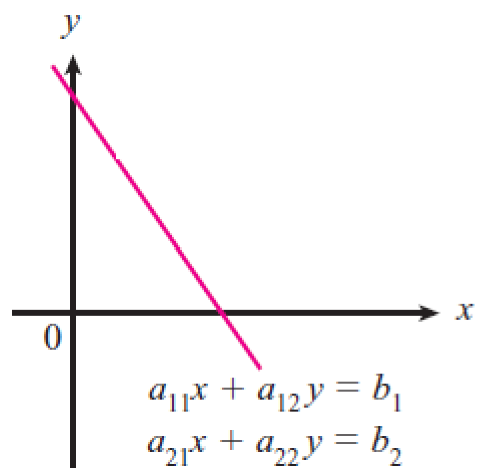
Las rectas se cortan en un solo punto: en este caso el sistema de ecuaciones tiene única solución (x, y) que corresponde a las coordenadas del punto de corte de las dos rectas, lo que recibe el nombre de sistema *determinado* o *consistente*.



Las rectas son paralelas: en este caso las rectas no tienen un punto en común, es decir, el sistema de ecuaciones no tiene solución. Así el sistema recibe el nombre de *inconsistente.*



Las rectas coinciden en todos sus puntos: en este caso el sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, lo cual recibe el nombre de sistema *indeterminado.*



CSSEL7.1 Solución de un sistema por el método grafico
SSSEL7.1 Método grafico para la solución de un SEL

CSSEL7.2 Solución de un sistema por método de sustitución

Este método como lo indica su nombre, consiste en hacer una sustitución pero antes se deben realizar ciertos procedimientos: primero se despeja una de las variables puede ser $\boldsymbol{x}$ en cualquiera de las ecuaciones dadas del SEL, en segundo lugar se *sustituye* la expresión obtenida en la otra ecuación del sistema dado, y se resuelven las operaciones indicadas. Luego se encuentra el valor de la otra variable $\boldsymbol{y}$ reemplazando, en cualquiera de las ecuaciones del sistema, el valor que se halló en el segundo paso. Y por último se verifican las soluciones en el sistema dado inicialmente.

Para dar una idea del método convencional de sustitución, se da solución al problema considerado como *tamaño de terrenos* encontrado en la Tablilla de Croquetta, presentado por Luzardo y Peña (2006) en la sección **4.2.1** del Periodo 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C) del estudio histórico de esta investigación:

Problema: *Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas cuadradas. Uno produce* *granos en razón de* $\mathbf{\frac{2}{3}}$ *de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en razón de* $\mathbf{\frac{1}{2}}$ *saco por yarda cuadrada. Conociendo la diferencia del producido de la cosecha que es de 500 ¿Cuál es el tamaño de cada campo?*

Solución: sea el sistema de ecuaciones lineales que representa el problema

$$\begin{cases} x + \ y = 1800 \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y \ \ = 500 \end{cases}$$

a) En primer lugar se despeja cualquier variable de las dos ecuaciones, para este caso se despeja la variable $\boldsymbol{x}$ de la primera ecuación y se reemplaza en la segunda ecuación:

$$x = 1800 - y$$

$$\frac{2}{3}(1800 - y) - \frac{1}{2}y \ \ = 500$$

b) Ahora se resuelven las operaciones indicadas para encontrar el valor de la variable $\boldsymbol{y}$

$$\frac{3600}{3} - \frac{2}{3}y - \frac{1}{2}y \ \ = 500$$

$$1200 - \frac{7}{6}y \ \ = 500$$

$$-\frac{7}{6}y \ \ = 500 - 1200$$

$$-\frac{7}{6}y \ \ = -700$$

$$y \ \ = \frac{-700}{-\frac{7}{6}}$$

$$y \ \ = \frac{4200}{7}$$

$$y \ \ = 600$$

c) Una vez encontrado el valor de $\boldsymbol{y}$ lo reemplazo en cualquier ecuación, por conveniencia se reemplaza en la primer ecuación del sistema:

$$x + \ y = 1800$$

$x + 600 = 1800$

$x = 1800 - 600$

$x = 1200$

d) Luego la solución al sistema es $x = 1200$ e $y = 600$ que es la solución presentada por los babilonios en el problema inicial.

CSSEL7.2 Solución de un sistema por método de sustitución
SSSEL7.2 Método de sustitución para la solución de un SEL

CSSEL7.3 Solución de un sistema por método de igualación:

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por el método de igualación se llevan a cabo los siguientes pasos: primero se despeja la misma variable en ambas ecuaciones dadas, en segundo lugar como lo indica su nombre se *igualan* las expresiones obtenidas en el paso anterior y se despeja la variable que queda, en tercer lugar, se determina el valor de la otra variable reemplazando en alguna de las ecuaciones despejadas, el valor de la variable encontrada en el paso dos, y por último se verifican las soluciones en el sistema dado.

Este método de igualación para SEL tiene gran semejanza con los cálculos que realizaba el matemático Maclaurin para encontrar la solución a sistemas 2×2, esto se evidencia en la situación problema **3.2** de la sección **4.2.3** Periodo 3, es por ello que seguimos los mismos pasos que el matemático francés, para contrastar el método:

Teorema I.

Sea el sistema $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

a) Para la primer ecuación

$$ax = c - by \quad \ldots \text{ donde } \quad x = \frac{c - b\,y}{a}$$

b) Para la segunda ecuación

$dx = f - ey$ … donde $\quad x = \frac{f - e\,y}{d}$

c) Por lo tanto $\frac{\boldsymbol{c-by}}{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{f-e\,y}}{\boldsymbol{d}}$ y $cd - dby = af - aey$

d) De donde $aey - dby = af - cd$

e) Llegando a $y = \frac{a\,f - d\,c}{ae - db}$

f) De la misma manera para x

$$x = \frac{c\,e - b\,f}{ae - db}$$

El problema al que se da solución, por medio del método convencional de igualación es el que abordo el matemático Gerónimo Cardano, en su obra Ars Magna al que denominó como *regula de modo* en la sección **4.2.3** periodo **3**: Edad Moderna (1453 d. C – 1789 d. C: siglo XV - XVIII) el cual dice:

Problema: *siete pies de seda verde y tres de coste negro cuestan 72 denarios y al mismo precio, dos de color verde y cuatro de coste negro cuestan 52 denarios. Deseamos conocer su precio.*

Solución:

Sea el sistema $\begin{cases} 7x + 3y = 72 \\ 2x + 4y = 52 \end{cases}$

a) En la primera ecuación se despeja la variable $\boldsymbol{x}$

$7x + 3\,y = 72$

$7x = 72 - 3y$ … donde

$x = \frac{72 - 3\,y}{7}$

b) Para la segunda ecuación también despejamos la variable $\boldsymbol{x}$

$2x + 4y = 52$

$2x = 52 - 4y$ … donde

$x = \frac{52 - 4y}{2}$

c) Por lo tanto podemos igualar las dos ecuaciones, ya que son iguales en la variable x

$$\frac{72 - 3y}{7} = \frac{52 - 4y}{2}$$

$2(72 - 3y) = 7(52 - 4y)$

$144 - 6y = 364 - 28y$

d) De donde $-6y + 28y = 364 - 144$

$(-6 + 28)y = 364 - 144$

$y = \frac{364-144}{-6+28}$

$y = \frac{220}{22}$

e) Llegando a $y = 10$

f) De manera análoga se hace para la variable x

g) En la primera ecuación se despeja la variable $\boldsymbol{y}$

$7x + 3y = 72$

$3y = 72 - 7x$ … donde

$y = \frac{72-7x}{3}$

h) Para la segunda ecuación también despejamos la variable $\boldsymbol{y}$

$2x + 4y = 52$

$4y = 52 - 2x$ … donde

$y = \frac{52-2x}{4}$

i) Por lo tanto podemos igualar las dos ecuaciones, ya que son iguales en la variable $\boldsymbol{y}$

$$\frac{72 - 7x}{3} = \frac{52 - 2x}{4}$$

$$4(72 - 7x) = 3(52 - 2x)$$

$$288 - 28x = 156 - 6x$$

j) De donde $-28x + 6x = 156 - 288$

$$(-28 + 6)x = 156 - 288$$

$$x = \frac{156 - 288}{-28 + 6}$$

$$x = \frac{-132}{-22}$$

k) Llegando a $x = 6$

l) Por lo que la solución al problema es

$$x = 6 \qquad y = 10$$

En donde el costo de un pie de seda verde cuesta 6 denarios y un pie de seda negra cuesta 10 denarios.

CSSEL7.3 Solución de un sistema por método de igualación
SSSEL7.3 Método de igualación para la solución de un SEL

CSSEL 7.4 Solución de un sistema por método de reducción:

Este método busca combinar las dos ecuaciones con el fin de reducir el sistema de ecuaciones lineales a una ecuación con una incógnita. Para encontrar la solución a un sistema de ecuaciones 2×2 se siguen los siguientes pasos: primero se multiplican los términos de una o ambas ecuaciones por números reales, de manera tal que los coeficientes de una de las variables en las dos ecuaciones, se diferencie únicamente en el signo. En segundo lugar se suman las ecuaciones transformadas de tal manera que se elimina una variable y se despeja la otra variable finalmente, se calcula el valor de la incógnita que falta.

Cuando se resuelve un sistema de ecuaciones lineales por el método de reducción se pueden presentar los siguientes casos:

- Si al sumar las dos ecuaciones para eliminar una variable, se elimina las dos variables, es decir, aparece la ecuación $0 = c$, donde c es una constante diferente de 0, el sistema no tiene solución, es decir, el sistema es inconsistente.
- Si al sumar las dos ecuaciones resulta la expresión $0 = 0$, el sistema tiene infinitas soluciones, es decir, el sistema es indeterminado.
- Si al sumar las ecuaciones se obtiene una expresión de la forma $x = a$, donde a es un número real, el sistema tiene solución y es única.

El problema al que se da solución fue tomado de una tablilla babilónica que es mencionado en la introducción del planteamiento del problema. Se aclara que no se encontró la solución de este problema, pero esa es la intención porque se pone a prueba el método convencional de reducción.

Problema: $\frac{1}{4}$ *de anchura más longitud da 7 manos y la longitud más anchura da 10 manos. ¿Cuánto es la altura y cuanto la longitud?*

Solución: sea el sistema que representa el problema

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \ y = 7 \\ x + \ y = 10 \end{cases}$$

a) Donde x represa la anchura y; y representa la cantidad de manos

b) Por conveniencia se multiplica la primer ecuación del sistema por -1 y se suma con la segunda ecuación

$$-\frac{1}{4}x - \ y = -7$$

$$\underline{x + \ y = 10}$$

$$\frac{3}{4}x + 0 \ = 3$$

$$x = 3 \times \frac{4}{3}$$

$$x = 4$$

c) Con el valor encontrado anteriormente, se reemplaza en la cualquier ecuación del sistema para este caso en la primer ecuación

$$\frac{1}{4}x + \ y = 7$$

$$\frac{1}{4}(4) + \ y = 7$$

$$1 + \ y = 7$$

$$y = 7 - 1$$

$$y = 6$$

d) Luego la solución del sistema es:

$x = 4$ de anchura

$y = 6$ manos

CSSEL7.4 Solución de un sistema por método de reducción
SSSEL7.4 Método de reducción para la solución de un SEL

4.4.5. Estructura conceptual del objeto matemático SEL

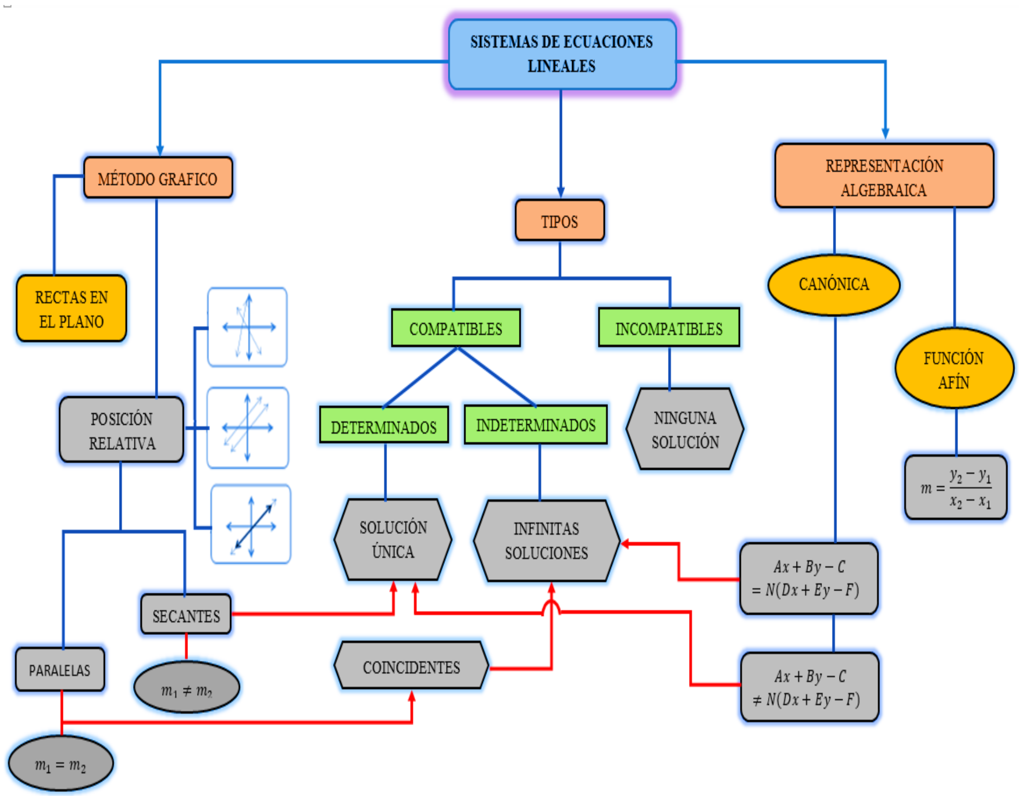


Figura 4.3 Estructura Conceptual del Objeto SEL. Fuente: (Elaboración Propia).

4.4.6. Significado global de referencia del objeto sistemas de ecuaciones lineales

El significado global de referencia del objeto sistemas de ecuaciones lineales, tiene como propósito el análisis a los sistemas de prácticas que se usan (como referencia) para elaborar el significado pretendido por el docente en cuanto a la planificación del proceso de enseñanza. Como se evidencia en la sección **4.4**, se realizó un análisis conceptual basado en 6 en libros de texto para la enseñanza del álgebra lineal y 1 libro para la enseñanza de matemáticas en el grado noveno de educación básica secundaria, permitiendo encontrar una relación directa entre el significado global del objeto sistemas de ecuaciones lineales con otros objetos matemáticos como las matrices y los determinantes, dando paso al *significado global de referencia para la enseñanza del objeto sistemas de ecuaciones lineales* el cual se representa en la Figura **4.4**:

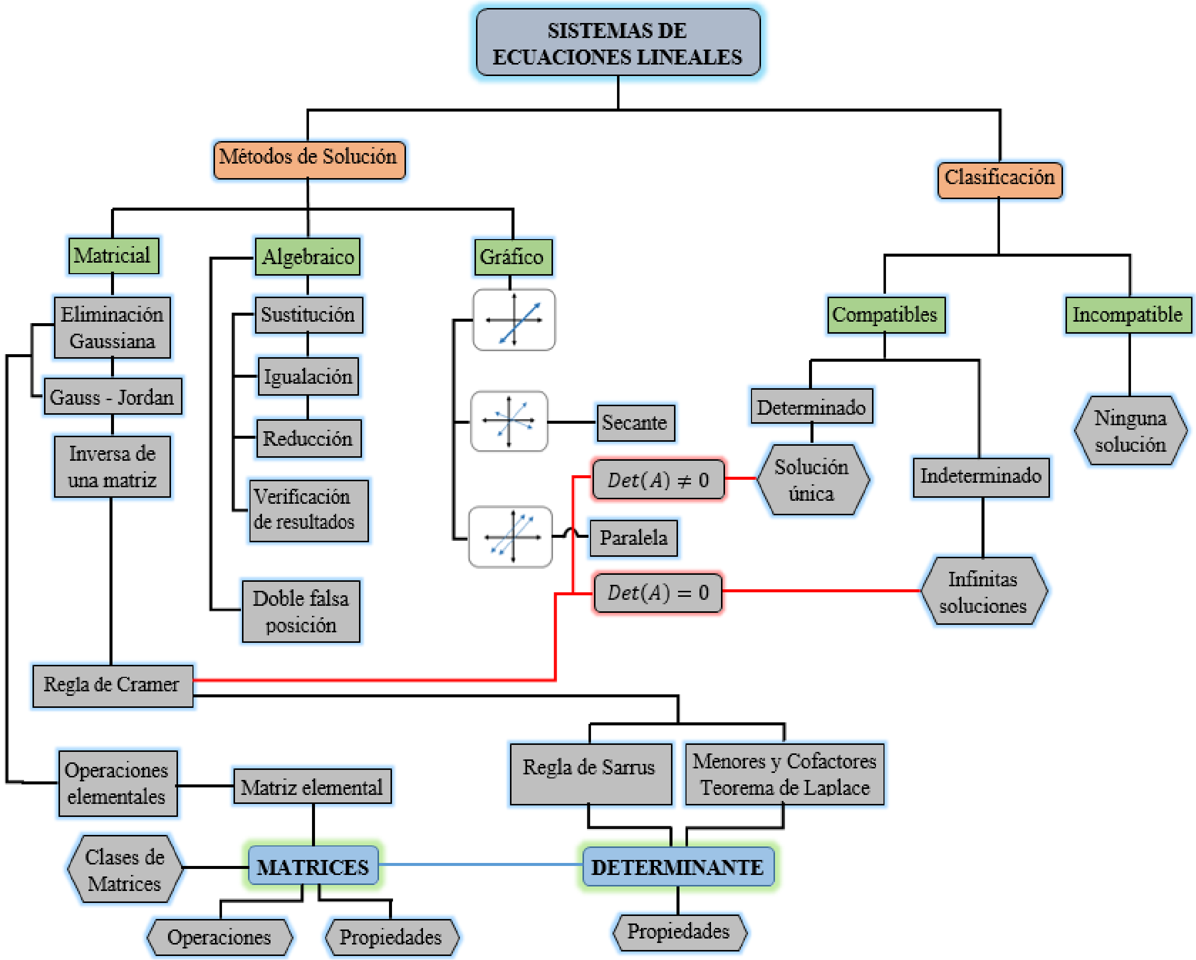


Figura 4.4 Significado Global de Referencia del Objeto SEL. Fuente: (Elaboración Propia).

Capítulo 5. Concepciones y creencias de los profesores de matemáticas en el objeto sistemas de ecuaciones lineales

"No hay nada más interesante para los seres humanos que resolver acertijos y/o problemas"
(Agustín Moreno C. 2012)

El presente capítulo se divide en dos apartados: en el primero se presenta el diseño del cuestionario para analizar las concepciones y creencias del profesor de matemáticas de grado noveno; el uso de los significados parciales y las implicaciones didácticas en cuanto a los significados pretendidos por el profesor. El segundo apartado, trata de un cuestionario de 5 preguntas en donde se pretende indagar por la configuración epistémica del conocimiento del profesor; el pensamiento variacional y las implicaciones en la enseñanza ante 3 situaciones problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL. Además se establecen las categorías de análisis para el cuestionario y los resultados obtenidos del cuestionario.

5.1. Diseño del cuestionario CCSEL

Para el logro del objetivo OE3, se realiza el diseño de un cuestionario enfocado al análisis de las concepciones y creencias del profesor de matemáticas de grado noveno, respecto al uso de los significados parciales del objeto SEL y al análisis de las implicaciones didácticas que tiene el uso de los significados pretendidos por el profesor, denominados significados de referencia, respecto a la globalidad de significados identificados para este objeto matemático SEL, significados reconstruidos a partir del Estudio Histórico Epistemológico del objeto SEL, lo cual condujo al logro de los objetivos OE4 y OE5.

Para la construcción del cuestionario se tomaron 3 situaciones-problemas encontradas y analizadas en el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL: La primera se denomina *Tamaño de terrenos* corresponde a la CE1. Problema de SEL en la cultura de los babilonios y la segunda *grupo de personas y compra de animales*, ubicada en la CE2. Problema de SEL relacionado con grupo de personas y compra de animales, corresponden al periodo 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C). La tercer situación-problema se denomina *Teorema I* corresponde al período 3: Edad Moderna (1453 d.C – 1789 d.C: siglo XV-XVIII), ubicada en la configuración CE3. Teorema I de Maclaurin, que agrupa todas las situaciones problemas de esta época Moderna.

En esta dirección el propósito de implementar las situaciones-problemas es el de obtener un sistema de prácticas matemáticas institucionales para analizar las concepciones y creencias de tres profesores de diferentes sectores educativos (público-privado), para complementar la información sobre los significados de referencia del objeto SEL, según la reflexión de los profesores en cuanto a la identificación de los significados que se deben activar en la enseñanza del objeto SEL en grado noveno. Otro aporte que se busca con la implementación del cuestionario es la caracterización o análisis del Conocimiento del Profesor, sobre el contenido matemático, esta dimensión epistémica es importante para la enseñanza como lo establece Shulman (1986,1987) y Godino (2009) en el modelo CDM. En este modelo se estructura el Conocimiento del profesor para la enseñanza de los objetos matemáticos en 6 dimensiones: *Epistémica*, motivo de reflexión del presente estudio, *Cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica.* Esta dimensión epistémica se analiza, respecto al significado global del objeto SEL; el significado global referencial del objeto SEL y el significado institucional pretendido por los docentes para la implementación de los diferentes procesos de instrucción respecto al objeto sistemas de ecuaciones lineales.

El cuestionario fue implementado a 3 profesores de diferentes sectores educativos (público-privado), los cuales voluntariamente aceptaron; el primer docente al que llamaremos Profesor 1, tiene una formación académica como Licenciado en matemáticas y cuenta con una maestría en ciencias matemáticas. Su experiencia laboral es de 25 años en instituciones públicas y privadas, actualmente es docente de planta en una institución educativa del municipio de Yopal - Casanare. El segundo docente, al que llamaremos Profesor 2 tiene una formación académica como Licenciado en matemáticas y magister en educación matemática, su experiencia docente es de 4 años en instituciones públicas y 2 años en instituciones privadas, actualmente es docente de planta en el municipio de Zetaquira - Boyacá y el tercer docente al que llamaremos Profesor 3, tiene una formación académica como Licenciado en matemáticas y Estadística, cuenta con una maestría en educación matemática y su experiencia docente es de 12 años todas en una institución educativa privada en la cuidad de Tunja.

Respecto al diseño del cuestionario que sirvió para la recolección de la información, se tiene en cuenta la importancia y necesidad de acceder a los conocimientos y creencias de los profesores que enseñan en grado noveno de forma indirecta, para evitar respuestas idealizadas de una situación real en la que subyace la necesidad de «quedar bien». Asimismo, se cuidaron otros detalles como, por ejemplo: que los profesores no se sintieran ni cuestionados ni evaluados con relación a sus conocimientos sobre los sistemas de ecuaciones lineales; y que el tiempo dedicado al cuestionario no fuera excesivo, para evitar un desinterés por el tema y la investigación en la que no tenían por qué estar especialmente interesados. Estos conocimientos de los profesores respecto al objeto SEL, refuerzan y estructuran el Conocimiento del profesor en el modelo del Conocimiento matemático para la enseñanza – MKT, propuesto por Ball y colaboradores (2001) y retomado en el modelo CDM propuesto por Godino (2009). Es decir se estudia la dimensión epistémica del CDM, para el objeto SEL, en cuanto al conocimiento sobre el contenido matemático y específicamente para la caracterización del *Conocimiento Especializado* del contenido matemático sobre los SEL (conocimiento del profesional para la enseñanza de los objetos matemáticos), al establecer los significados reales de referencia de los docentes y los significados de referencia identificados en el capítulo anterior según el análisis conceptual realizado al objeto SEL.

5.2. Cuestionario sobre concepciones y creencias de los profesores de matemáticas en el objeto sistemas de ecuaciones lineales

El cuestionario consta de 5 preguntas, donde se indaga por la configuración epistémica que forma cada situación problema, es decir, si el docente reconoce o no la tipología de los objetos primarios (*lenguajes, situación, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos*) en la solución del problema. Como segunda parte, se pregunta si el significado implícito en cada situación problema es de referencia o es un significado pretendido; un *significado institucional pretendido* corresponde al sistema de prácticas incluidas en la planificación del proceso de estudio y un *significado institucional referencial* corresponde al sistema de prácticas que se usan como referencia para elaborar el significado pretendido en una institución de enseñanza concreta: este significado de referencia es una parte del significado global del objeto matemático (Godino, Batanero y Font, 2007. p. 5).

Se cuestiona por las concepciones y creencias que tiene el profesor, en cuanto al significado de referencia del objeto matemático, según cada situación-problema relacionada con el objeto SEL, de igual forma, se aclara que lo ideal sería preguntar por más situaciones problemas, pero en este sentido, se establece que los estudios Epistemológicos dan mucha información, la cual podría ser motivo de múltiples análisis. Finalmente, se pregunta por la pertinencia de la situación problema según el análisis a los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas ya que ellos operativizan los lineamientos curriculares y establecen evidencias en cuanto al desarrollo del pensamiento variacional en relación con los sistemas algebraicos y analíticos.

5.2.1. Categorías de análisis para el cuestionario – Concepciones y Creencias de los profesores en la dimensión epistémica del objeto SEL

Categorías de análisis para la dimensión epistémica del CDM del profesor:

Para el Análisis de la Configuración epistémicas se tienen en cuenta las siguientes categorías según los resultados del estudio Histórico-epistemológico del objeto SEL, en cuanto a la identificación de configuraciones epistémicas y significados.

Tabla 5.1
Dimensión Epistémica Parte I y II

Categoría	Fase
Dimensión epistémica Parte I	Fase 2: Realiza el análisis semiótico a las situaciones problemas planteadas **CE1. Problema de SEL en la cultura de los babilonios** **CE2. Problema de SEL relacionado con grupo de personas y compra de animales** **CE3. Teorema I de Maclaurin**

Dimensión epistémica **Parte II**	Fase 2 y 3: Identifica el significado de referencia emergente de la configuración epistémica **SER1. Método de la falsa posición para SEL 2×2** **SER2. Método de exceso y defecto** **SER3. Método de Maclaurin por eliminación sucesiva de incógnitas**

Fuente: (Elaboración propia)

Dimensión epistémica – Parte I: Análisis de las configuraciones epistémicas

Para el análisis de las configuraciones epistémicas a las 3 situaciones-problemas tomadas del estudio histórico-epistemológico, se realizan 3 tablas una por cada configuración, donde se solicita realizar el análisis semiótico a la situación-problema correspondiente según la tipología de los objetos primarios. Estas configuraciones se analizan en las preguntas (P1a, P2a, P3a, P3b). Y en esta dirección se presentan algunas de las posibles respuestas o elementos de análisis a identificar en cada pregunta definida.

Configuración epistémica 1. Pregunta (P1a)

Tabla 5.2

CE1. Problema de SEL en la Cultura de los Babilonios

Situación problema 1: Tamaño de terrenos "Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas cuadradas. Uno produce granos en razón de $\frac{2}{3}$ de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en razón de $\frac{1}{2}$ saco por yarda cuadrada. Conociendo la diferencia del producido de la cosecha que es de 500 ¿Cuál es el tamaño de cada campo?" **Pregunta 1a.** De acuerdo con la solución presentada a la situación-problema, complete la siguiente tabla, según los objetos matemáticos involucrados en la solución del problema.	
Dimensión Epistémica	**Tipología de los objetos primarios**
Conocimiento Especializado	***Elementos Lingüísticos*** **L.1** Identifica los términos como: suma, resta, producido, división, factor, incógnita, igualdad de parcelas, hipótesis falsa, valores erróneos, extensión de parcelas. **L.2** Identifica y reconoce los enunciados del problema matemático. ***Nombre de la situación- problema*** Tamaño de terrenos ***Conceptos***

	C.1 Suma, resta, multiplicación y división de fracciones. **Proposiciones** **Prop.1** No se evidencia el uso de proposiciones. **Procedimientos** **Proc.1** Mostrar como determinar una cantidad desconocida da una relación dada. **Proc.2** Método de la falsa posición. **Argumentos** **Arg.1** Asumir que las dos parcelas son iguales a la semisuma 900 **Arg.2** Por cuanto debe dividir 7/6 para obtener 350. **Nombre del significado parcial emergente** Método de la falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Fuente: (Elaboración propia)

Configuración epistémica 2. Pregunta (P2a)

Tabla 5.3

CE2. Problema de SEL Relacionado con un Grupo de Personas y Compra de Animales

Situación problema 2: problema de grupo de personas y compra de animales

Un grupo de personas compran en conjunto unas gallinas. Si cada persona dio 9 wen, quedarían 11 wen de sobra después de la compra. Si, en cambio, cada persona contribuye con 6 wen, quedaran 16 wen a deber. ¿Cuántas personas hay en el grupo y cuál es el costo de las gallinas

Pregunta 2a.

Completé la siguiente tabla, según los objetos matemáticos involucrados en la solución del problema.

Dimensión Epistémica	Tipología de los objetos primarios
Conocimiento Especializado	***Elementos Lingüísticos*** **L.1** Notaciones utilizadas por la cultura China como exceso y defecto. **L.2** Arreglo matricial. **L.3** Primera y segunda fila. ***Nombre de la situación- problema*** Grupo de personas y compra de animales. ***Conceptos*** **C.1** Multiplicación cruzada, cociente, suma y deferencia de cantidades. **Proposiciones** **Prop.1** No se evidencia el uso de proposiciones. **Procedimientos** **Proc.1** Multiplicación cruzada **Proc.2** Elementos lingüísticos que expresan y soportan los procedimientos. **Proc.3** Método de exceso y defecto. **Argumentos**

	Arg.1 No se evidencian argumentos. **Nombre del significado parcial emergente** Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura china.

Fuente: (Elaboración propia)

Configuración epistémica 3. Pregunta (P3a)

Tabla 5.4

CE3. Teorema I de Maclaurin

Situación problema 3: Teorema I

Supóngase que se dan dos ecuaciones, con dos cantidades desconocidas como

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Solución dada al Teorema I dada por Maclaurin:

$$x = \frac{c\,e - b\,f}{a\,e - d\,b} \qquad y = \frac{a\,f - d\,c}{a\,e - d\,b}$$

Pregunta 3a.

De acuerdo con la solución dada por Maclaurin, complete la siguiente tabla

Dimensión Epistémica	Tipología de los objetos primarios
Conocimiento Especializado	***Elementos Lingüísticos*** **L.1** Identifica las expresiones o términos como: numerador, denominador, producto, coeficientes, diferencia, coeficientes opuestos, cantidad desconocida **L.2** Identifica y reconoce los enunciados del problema matemático. ***Nombre de la situación- problema*** Teorema I sistemas de ecuaciones $\mathbf{2 \times 2}$ según Maclaurin ***Conceptos*** **C.1** Diferencia, producto, cociente y cantidad desconocida (variables). **Proposiciones** **Prop.1** El teorema presenta la forma: si p entonces q. **Procedimientos** **Proc.1** Despejar la variable $\boldsymbol{x}$ de una ecuación. **Proc.2** Igualar dos ecuaciones. **Proc.3** Realizar operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división de números reales) **Argumentos** **Arg. 1** Se fundamentan en los ***procedimientos***

	Nombre del significado parcial emergente Método de determinantes de Maclaurin para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2

Fuente: (Elaboración propia)

Configuración epistémica 3. Pregunta (P3b)

Tabla 5.5

CE3. Teorema I de Maclaurin Pregunta 3b

Pregunta 3b. ¿Realice una comparación entre la demostración del teorema I y el desarrollo del teorema I por la regla de Cramer?	
Solución del teorema I según Maclaurin	**Solución del teorema I según Cramer**
1. Se despeja la variable $\boldsymbol{x}$ de las dos ecuaciones del sistema. 2. Se igualan las dos ecuaciones y se resuelven las operaciones indicadas, llegando al valor de la variable $\boldsymbol{y}$. 3. De manera análoga se hace para la variable $\boldsymbol{x}$, haciendo los despejes y luego las igualaciones respectivamente.	1. Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema. 2. Si el $\det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, entonces el sistema tiene solución y es única. 3. Luego se calcula los determinantes del sistema tanto para la variable x como para la variable $\boldsymbol{y}$. 4. Se aplica la regla de Cramer para encontrar la variable x. 5. Del mismo modo se aplica la regla de Cramer para encontrar la variable $\boldsymbol{y}$
La comparación se puede dar: 1) en forma retorica 2) en forma algebraica	

Fuente: (Elaboración propia)

Dimensión epistémica – Parte II: Análisis de los significados de Referencia de los textos de enseñanza

Para realizar el análisis de los significados de referencia según los textos de enseñanza, para esto se diseñan 3 tablas, en donde se consigna lo que el profesor encuestado considera pertinente respecto al significado de referencia dado (concepciones y creencias del objeto SEL). Este análisis se realiza a las preguntas (P1b, P3c, P4).

Pregunta (P1b)

Tabla 5.6

Situación Problema 1: Tamaño de Terrenos Pregunta 1b

CE1. Problema de SEL en la cultura de los babilonios **Situación problema 1: Tamaño de terrenos** **Pregunta 1b.** ¿Por qué este método no se encuentra en los textos de matemáticas de noveno grado?		
Significado epistémico 1: Método de la falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales $2x2$		
PROFESOR 1 **SI / NO**	**PROFESOR 2**. **SI / NO**	**PROFESOR 3**. **SI / NO**
Conclusión:		

Fuente: (Elaboración propia)

Pregunta (P3c)

Tabla 5.7

Situación Problema 3: Teorema I Pregunta 3c

CE3. Teorema I de Maclaurin **Situación problema 3: Teorema I** **Pregunta 3c.** Se puede concluir que el teorema I desarrollado por Maclaurin corresponde al método de igualación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Justifica tu respuesta		
Significado epistémico 3: Método de determinantes de Maclaurin para la solución de sistemas de ecuaciones lineales $2x2$		
PROFESOR 1 **SI / NO**	**PROFESOR 2**. **SI / NO**	**PROFESOR 3**. **SI / NO**
Conclusión:		

Fuente: (Elaboración propia)

Pregunta (4)

Tabla 5.8

Pregunta 4

Pregunta 4. En la siguiente tabla se presentan algunos de los diferentes métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales, complétala justificando su respuesta.			
Significado Global	**PROFESOR 1**	**PROFESOR 2**	**PROFESOR 3**.
Método de Gauss-Jordan	**SI / NO**	**SI / NO**	**SI / NO**
Método de reducción	**SI / NO**	**SI / NO**	**SI / NO**
Método de exceso y defecto	**SI / NO**	**SI / NO**	**SI / NO**

Método de la falsa posición	**SI / NO**	**SI / NO**	**SI / NO**
Eliminación Gaussiana	**SI / NO**	**SI / NO**	**SI / NO**
Método grafico	**SI / NO**	**SI / NO**	**SI / NO**
Regla de Cramer	**SI / NO**	**SI / NO**	**SI / NO**
Método de igualación	**SI / NO**	**SI / NO**	**SI / NO**
Método de Maclaurin	**SI / NO**	**SI / NO**	**SI / NO**
Conclusión:			

Fuente: (Elaboración propia)

Dimensión epistémica – Parte II: Implicaciones en la enseñanza

Para analizar las implicaciones en la enseñanza, respecto a los significados (globales - referenciales) de los objetos matemáticos, ya sean por el desconocimiento de los significados o el nivel de dificultad del método, se establecen 3 tablas para las preguntas (P1c, P2b, P2d).

Pregunta (P1c)

Tabla 5.9

Pregunta 1c

Análisis del significado 1: Método de la falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 **Pregunta 1c.** ¿Por qué no se enseña el método, se debería enseñar? Justifique se respuesta		
PROFESOR 1 **SI / NO**	**PROFESOR 2** **SI / NO**	**PROFESOR 3** **SI / NO**
Conclusión:		

Fuente: (Elaboración propia)

Pregunta (P2b)

Tabla5.10

Pregunta 2b.

Análisis del significado 2: Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura china **Pregunta 2b.**

¿Cómo docente de grado noveno enseñaría este método para la solución de ecuaciones lineales en grado noveno?		
PROFESOR 1 **SI / NO**	**PROFESOR 2** **SI / NO**	**PROFESOR 3** **SI / NO**
Conclusión:		

Fuente: (Elaboración propia)

Pregunta (P2d)

Tabla 5.11
Pregunta 2d.

Análisis del significado 2: Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura china **Pregunta 2d.** ¿Qué ventajas o desventajas trae para la enseñanza el retomar los problemas en la historia de las matemáticas que dieron origen a los objetos matemáticos? Justifique su respuesta.		
PROFESOR 1 **SI / NO**	**PROFESOR 2** **SI / NO**	**PROFESOR 3** **SI / NO**
Conclusión:		

Fuente: (Elaboración propia)

Dimensión epistémica – Parte II: Pensamiento variacional

Para el análisis del significado emergente de la situación-problema 2 en cuanto al desarrollo del pensamiento variacional a la pregunta (2c), se plantea la siguiente tabla:

Tabla 5.12
Pregunta 2c.

Análisis del significado 2: Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura china **Pregunta 2c.** ¿Puede llevar al desarrollo del pensamiento variacional? Justifique.		
PROFESOR 1 **SI / NO**	**PROFESOR 2** **SI / NO**	**PROFESOR 3** **SI / NO**
Conclusión:		

Fuente: (Elaboración propia)

Cuando el docente de matemáticas desea enseñar un nuevo método para la solución de SEL, lo hace con la intención de mejorar el aprendizaje en los estudiantes a través de problemas relacionados con las diversas culturas de la humanidad, analizando la forma en que daban solución a los diferentes problemas que se encontraban en el día a día. También lo hace con la intención de desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes de acuerdo a las diversas características que componen al pensamiento como la caracterización de la variación o el cambio en diferentes contextos y poder pasar de distintos sistemas o registros simbólicos ya sean gráficos o algebraicos.

Dimensión epistémica – Parte II: Estándares Básicos de Competencias Matemática

Para el análisis de las concepciones y creencias del profesor de matemáticas que enseña en grado noveno, de acuerdo a la relación entre las situaciones problemas y los estándares básicos de competencias se diseña la siguiente tabla para la pregunta (P5):

Pregunta (P5).

Tabla 5.13
Pregunta 5.

<table>
<tr><td colspan="3">Pregunta 5.
¿Considera que los estándares seleccionados corresponden a las situaciones problema planteadas?</td></tr>
<tr><td>EB1</td><td colspan="2">Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.</td></tr>
<tr><td>EB2</td><td colspan="2">Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.</td></tr>
<tr><td>PROFESOR 1 (SI/NO)
JUSTIFICACIÓN.</td><td>PROFESOR 2 (SI/NO)
JUSTIFICACIÓN.</td><td>PROFESOR 3. (SI/NO)
JUSTIFICACIÓN.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Conclusión:</td></tr>
</table>

Fuente: (Elaboración propia)

5.2.2. Cuestionario Concepciones y Creencias de los profesores en la dimensión epistémica del objeto SEL.

CUESTIONARIO: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES – SEL

Nombre del docente: ____

Años de experiencia docente: ____

Años de experiencia docente en cursos de grado noveno: ____________________________

Años de experiencia o semestres en cursos de álgebra lineal: ___________________________

Solicitamos su valiosa colaboración para dar respuesta a las siguientes preguntas que se relacionan con el conocimiento del contenido matemático y didáctico de los profesores en ejercicio. Cualquier sugerencia en cuanto al diseño y claridad del cuestionario por favor consignarla al final del documento. Agradecemos su ayuda y su aporte en cuanto a todos los conocimientos que tiene el docente y deben ponerse en práctica para el análisis de los contenidos matemáticos para la enseñanza en Educación Básica. La primera parte es un pequeño resumen de algunas nociones importantes para el desarrollo del presente cuestionario, que realmente consideramos sean de su conocimiento.

En primer lugar, se retoman los estándares básicos de competencias, ya que ellos operativizan los lineamientos curriculares y establecen alguna evidencia en cuanto al desarrollo del pensamiento variacional en relación con los sistemas algebraicos y analíticos. En este sentido se seleccionaron los estándares del nivel de octavo a noveno (pensamiento variacional):

EB1. Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.

EB2. Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de

ecuaciones.

1. Respecto al logro de estos estándares se retoman algunas de las situaciones problema planteadas en el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales. La primera es tomada de la Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C), y desarrollada por la cultura Babilónica, escrita en una de las *tablillas de Croqueta,* que data del último periodo sumerio hacia el año c. 2100 a.C. descrita en Rey y Babini (1985) de la siguiente manera:

Problema 1: Tamaño de un terreno

"Existen dos campos cuyas áreas suman 1800 yardas cuadradas. Uno produce granos en razón de $\mathbf{\frac{2}{3}}$ *de saco por yarda cuadrada, mientras que el otro produce granos en razón de* $\mathbf{\frac{1}{2}}$ *saco por yarda cuadrada. Conociendo la diferencia del producido de la cosecha que es de 500 ¿Cuál es el tamaño de cada campo?*

Solución:

Rey y Babini (1985) expone en las notas dedicadas a los babilonios la solución al problema dela siguiente manera:

> La marcha que sigue el calculista no es clara y aparentemente presupone el método de la falsa posición.
>
> **a)** El calculista comienza admitiendo que las dos parcelas son iguales (a la semisuma 900) y con esta hipótesis falsa llega al valor erróneo de la diferencia del producido: 150 (es decir $\frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$ de 900).
>
> **b)** Para compensar el error de $350 = 500 - 150$ reconoce, sin decirlo, que ese error es los $\frac{7}{6}$ $\left(\text{suma de } \frac{2}{3} \text{ y } \frac{1}{2}\right)$ del valor que, sumado y restado al dato inicial erróneo, dará la extensión de parcelas.
>
> **c)** Para obtener aquel valor deberá dividir 350 por $\frac{7}{6}$, operación que, por la presencia del factor 7, las tablas no facilitan; el calculista obvia la cuestión preguntándose simplemente por cuanto debe multiplicar $\frac{7}{6}$ para obtener 350; su respuesta es obvia: 300

d) El dato anterior sumado y restado a 900, da los valores de las incógnitas.

a) De acuerdo con la solución presentada a la situación-problema, complete la siguiente tabla, según los objetos matemáticos involucrados en la solución del problema:

Configuración epistémica 1. Problema de SEL en la cultura de los babilonios

¿Qué lenguaje se utiliza?	
¿Qué nombre se le puede dar a la Situación-problema?	
¿Qué conceptos se utilizan?	
¿Qué proposiciones se establecen?	
¿Qué procedimientos se evidencian?	
¿Qué argumentos se dan?	
¿Qué nombre se le asigna al significado parcial emergente?	

b) ¿Por qué este método no se encuentra en los textos de matemáticas de noveno grado?

c) ¿Por qué no se enseña el método. Se debería enseñar? Justifique su respuesta.

2. La siguiente situación problema de la vida real, fue tomada de la sección VII de la obra: *Nueve capítulos sobre el arte Matemático* escrita en la civilización China, y fue publicado durante la Dinastía Han c. 206 a. C – c. 220 d. C. (Carrera, 2009).

Situación Problema 2. Problemas de grupo de personas y compra de animales

Un grupo de personas compran en conjunto unas gallinas. Si cada persona dio 9 wen, quedarían 11 wen de sobra después de la compra. Si, en cambio, cada persona contribuye con 6 wen, quedaran 16 wen a deber. ¿Cuántas personas hay en el grupo y cuál es el costo de las gallinas?

Solución:

Este problema se soluciona de la siguiente manera:

a) Se colocan las cantidades dadas, es decir, el dinero con el cual el grupo de personas compran las gallinas (a y a') en la primera fila, el "exceso" b y el "defecto" b' en la segunda fila mediante un arreglo matricial, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

b) Luego se multiplica estos cuatro valores en forma cruzada, pero estos productos se colocaran en la fila 1; la fila 2 que corresponde al exceso y defecto queda igual:

$$\begin{pmatrix} ab' & a'b \\ b & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & 66 \\ 11 & 16 \end{pmatrix}$$

c) A continuación se suman los valores de cada fila:

$$\begin{pmatrix} ab' & + & a'b \\ b & + & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 & + & 66 \\ 11 & + & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 27 \end{pmatrix}$$

d) Se procede a hacer el cociente entre las sumas realizada en la primera fila y la diferencia entre el dinero con el cual compran las gallinas:

$$\frac{ab' + a'b}{a - a'} = \frac{210}{3} = 70$$

e) De manera análoga, se hace el cociente entre la suma realizada en la segunda fila (suma del exceso y defecto) y la diferencia entre el dinero con el cual compran las gallinas:

$$\frac{b + b'}{a - a'} = \frac{27}{3} = 9$$

f) Luego el costo total de las gallinas corresponde a 70 wen y 9 es el número de personas que hay en el grupo, encontrando así la solución a la situación problema.

De acuerdo con la solución dada:

a) Complete la siguiente tabla, según los objetos matemáticos involucrados en la solución del problema:

Configuración epistémica 2. Problema de SEL relacionado con grupo de personas y compra de animales

¿Qué lenguaje se utiliza?	
¿Qué nombre se le puede dar a la Situación-problema?	
¿Qué conceptos se utilizan?	
¿Qué proposiciones se establecen?	
¿Qué procedimientos se evidencian?	
¿Qué argumentos se dan?	
¿Qué nombre se le asigna al significado parcial emergente?	

b) ¿Cómo docente de grado noveno enseñaría este método para la solución de ecuaciones lineales en grado noveno?

c) ¿Puede llevar al desarrollo del pensamiento variacional? Justifique.

d) ¿Qué ventajas o desventajas trae para la enseñanza el retomar los problemas en la historia de las matemáticas que dieron origen a los objetos matemáticos? Justifique su respuesta.

3. La siguiente situación problema es descrita por el matemático escoces Colin Maclaurin (1698 - 1746), en su libro póstumo titulado: *Treatise of Algebra* (tratado de álgebra). En la obra se presenta una colección escolar de problemas resueltos, unos tienen enunciados directamente matemáticos y otros son problemas de la vida cotidiana.

Problema 3: Teorema I

Supóngase que se dan dos ecuaciones, con dos cantidades desconocidas como

$$\begin{cases} ax + \ by = c \\ dx + \ ey = f \end{cases}$$

Solución dada al Teorema I dada por Maclaurin:

$$x = \frac{c\,e - \ b\,f}{a\,e - \,d\,b} \qquad \qquad y = \frac{a\,f - \ d\,c}{a\,e\, - \,d\,b}$$

Donde el numerador es la diferencia de los productos de coeficientes opuestos en los órdenes en las que no se encuentra y, y el denominador es la diferencia de los productos de los coeficientes opuestos tomados de los órdenes que involucran las dos cantidades desconocidas. Porque, a partir de la primera ecuación, es evidente que:

g) $ax = c - by$ … donde $x = \frac{c - \,b\,y}{a}$

h) Para la segunda ecuación:

$dx = f - ey$ … donde $x = \frac{f - \,e\,y}{d}$

i) Por lo tanto, $\frac{c-by}{a} = \frac{f-e\,y}{d}$ y $cd - dby = af - aey$

j) De donde $aey - dby = af - cd$

k) Llegando a $y = \frac{af \,-\, dc}{ae- \,db}$

l) De la misma manera para x:

$$x = \frac{ce - \ bf}{ae - db}$$

a) De acuerdo con la solución dada por Maclaurin, completa la siguiente tabla:

Configuración epistémica 3. Teorema I de Maclaurin

¿Qué lenguaje se utiliza?	
¿Qué nombre se le puede dar a la Situación-problema?	

¿Qué conceptos se utilizan?	
¿Qué proposiciones se establecen?	
¿Qué procedimientos se evidencian?	
¿Qué argumentos se dan?	
¿Qué nombre se le asigna al significado parcial emergente?	

b) **¿**Realice una comparación entre la demostración del teorema I y el desarrollo del teorema I por la regla de Cramer?

c) Se puede concluir que el teorema I desarrollado por Maclaurin corresponde al método de igualación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Justifica tu respuesta.

4. En la siguiente tabla se presentan algunos de los diferentes métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales, complétela justificando su respuesta.

Métodos de solución de SEL	**¿Lo utiliza o los utilizaría? (responda sí o no)**	**Justificación (¿Por qué?)**
Gauss-Jordan		
Método de reducción		
Método de exceso y defecto		
Método de la falsa posición		

Método de sustitución		
Eliminación Gaussiana		
Método grafico		
Regla de Cramer		
Método de igualación		
Método de Maclaurin		

5. Dados los estándares básicos de competencias dados por el ministerio de educación nacional

Estándar básico de competencias	**Descripción**
EB1	**Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.**
EB2	**Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.**

a) ¿Considera que los estándares seleccionados corresponden a las situaciones problema planteadas? Justifique la respuesta.

5.2.3. Resultados del cuestionario Concepciones y Creencias de los profesores en la dimensión epistémica del objeto SEL.

En las siguientes tablas se caracterizaran los conocimientos: conocimiento común del contenido del objeto matemático SEL, en cada situación-problema y además se analiza si el significado emergente por parte del profesor es de referencia de acuerdo al significado pretendido, según las categorías establecidas en la sección **5.2.1**. Para el análisis de la información se hace necesario determinar un conjunto de normas establecidas necesarias para evaluar el alcance de la configuración epistémica por parte de los encuestados y evaluar los significados (global-referencia-pretendidos) usados en el desarrollo del cuestionario. Por tanto se define el acuerdo o desacuerdo de la siguiente manera:

- ✓ Posición claramente definida: **SI / NO**
- ✓ Posición no definida: **sin definir**

Dimensión epistémica – Parte I: Análisis a las configuraciones epistémicas preguntas (P1a, P2a, P3a, P3b).

Situación problema 1: Tamaño de terrenos

Pregunta 1a

Tabla 5.14

Respuestas dadas por los Docentes a la Pregunta 1a

Elementos	**Profesor 1**	**Profesor 2**	**Profesor 3**
Lenguajes	Aritmético coloquial	Verbal, simbólico	Marcha que sigue el calculista, método de la falsa posición, valor erróneo, compensar el error, extensión de parcelas, valores de las incógnitas
Nombre asignado a la Situación-problema	Tamaño de dos áreas	Hallar el área de un terreno	Relación entre producción de granos y tamaño de dos campos
Conceptos	Suma, resta, semisuma, fracción, incógnita, producto, suposición falsa.	Método, iguales, semisuma, hipótesis, diferencia, suma, dividir, factor, multiplicar, incógnita.	Marcha, falsa posición, parcelas, semisuma, hipótesis falsa, valor erróneo, hipótesis falsa, suma, resta, multiplicación, dividir.
Proposiciones	El discurso no es lógico sino descriptivo	No se evidencia el uso de proposiciones	El tamaño de un campo se halla admitiendo una hipótesis falsa

			que arroja un valor erróneo que es compensado con una suma y resta al valor inicial erróneo.
Procedimientos	Procedimientos aritméticos	Se realizan operaciones de adición, sustracción, producto y cociente en números naturales como en racionales, además se formulan igualdades numéricas.	Falsa posición, semisuma, diferencia, suma, resta, dividir, multiplicar.
Argumentos	El texto es descriptivo no argumentativo	Se plantean y desarrollan diferentes operaciones aritméticas que permiten justificar el procedimiento de solución de la situación problema	El tamaño de cada campo se obtiene al sumar y restar $\frac{7}{6}$ de 350 a 900 (hipótesis falsa) dado que al quitar una porción de un campo, esta debe ser compensada en el otro campo.
Nombre asignado al significado parcial emergente	Método de supuesto erróneo y compensación	Método de solución de sistemas de ecuaciones lineales generado a partir de un planteamiento de una hipótesis falsa	Método de la hipótesis falsa (falsa posición)

Fuente: (Elaboración propia)

La configuración epistémica realizada por el profesor 1, evidencia la dificultad en reconocer los lenguajes, pues no logra identificar los términos, expresiones o notaciones que intervienen en la solución del problema, del mismo modo sucede con los *procedimientos:* reconoce que son "procedimientos aritméticos" pero no menciona cuales intervienen en el desarrollo de la solución del problema. Además, presenta dificultad en identificar los *argumentos* pues replica que la forma en que se presenta el desarrollo del problema es un texto descriptivo más no argumentativo.

El profesor 2 argumenta que los *lenguajes* son de tipo "verbal y simbólico" pero no logra identificarlos y nombrarlos. A diferencia del profesor 3 que describe 5 frases y además explica el por qué forman parte de los elementos lingüísticos.

El profesor 3 presenta una *proposición* la cual hace referencia a la descripción de la solución de la situación-problema, que viene siendo básicamente parte de los procedimientos.

Tabla 5.15

Conclusión Pregunta 1a

Pregunta 1a.
De acuerdo con la solución presentada a la situación-problema, complete la siguiente tabla, según los objetos matemáticos involucrados en la solución del problema:

			Elementos primarios				
Profesores	**Lenguajes**	**Nombre de la situación problema**	**Conceptos**	**Proposiciones**	**Procedimientos**	**Argumentos**	**Nombre del significado parcial**
Pro1.	NO	SI	SI	NO	NO	NO	SI
Pro2.	NO	SI	SI	SI	SI	SI	SI
Pro3.	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI

Conclusión

Se puede determinar que la mayoría de los profesores tienen un alto nivel de dominio, en la identificación de *conceptos* implícitos en la solución del problema, además los tres concuerdan en la asignación de un nombre acorde a la situación problema y logran asignar el *significado parcial* de la situación problema. Más de la mitad de los profesores, logran identificar las acciones puestas en juego que corresponde a los *procedimientos* y los *argumentos*. En cuanto a los *lenguajes* la mayoría no logran reconocer los elementos lingüísticos de los cuales está dotado la solución de la situación problema.

Fuente: (Elaboración propia)

Situación problema 2: Problema de grupo de personas y compra de animales

Pregunta 2a

Tabla 5.16

Respuestas dadas por los Docentes a la Pregunta 2a

Elementos	**Profesor 1**	**Profesor 2**	**Profesor 3**
Lenguajes	Descriptivo utilizando arreglos matriciales y operaciones entre sus elementos	Verbal, simbólico	Se colocan las cantidades dadas, multiplicar cuatro valores en forma cruzada, sumar valores de cada fila, cociente entre sumas y diferencia
Nombre asignado a la Situación-problema	Hallar número de personas y precio de unas gallinas	Compra de animales por parte de un grupo de personas	Aporte de wen en la compra de gallinas
Conceptos	Matrices y operaciones entre elementos, filas y columnas	Exceso – defecto, arreglo matricial, producto, suma diferencia, cociente	Cantidad, exceso, defecto, fila, matricial, cociente, productos, gallinas
Proposiciones	No identifico proposiciones en el texto	No se evidencia el enunciado de propiedades	Para determinar el número de personas en el grupo y el costo de las gallinas se organizan los datos en una matriz, se multiplican los valores en forma cruzada, se realizan las sumas de cada fila y se dividen dichos

			resultados entre 3
Procedimientos	Algorítmicos	Operaciones de producto y adición entre los elementos de un arreglo matricial	Arreglo matricial, multiplicación en forma cruzada, suma de valores, cociente entre sumas
Argumentos	No evidencia argumentos	Se plantea un arreglo matricial de orden 2 y se realizan operaciones aritméticas con elementos del mismo que justifican la obtención de la solución	Los argumentos están sustentados en las expresiones $\frac{ab'+a'b}{a-a'}$ y $\frac{b+b'}{a-a'}$, que desde mi punto de vista sería un método generalizado para resolver sistemas 2×2
Nombre asignado al significado parcial emergente	De algoritmos entre elementos de matrices	Método de solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2 por exceso y defecto	Método de exceso y defecto

Fuente: (Elaboración propia)

En la configuración epistémica realizada por los docentes: el Profesor 1, argumenta que los *procedimientos* presentes en el desarrollo del problema son del tipo algorítmicos, pero no especifica los algoritmos o técnicas involucradas en la solución del problema, además, se le dificultó encontrar el significado emergente de la situación-problema.

El profesor 2, argumenta que los *lenguajes* son verbales y simbólicos pero no especifica los que están relacionados en la solución de la situación problema, ya que su respuesta es muy general.

El profesor 3, presenta una descripción de la solución del problema, argumentando que se trata de una *proposición*, pero en realidad esa descripción hace parte de los *procedimientos* utilizados para encontrar la solución de la situación-problema.

Tabla 5.17

Conclusión Pregunta 2a.

Pregunta 2a. **Completé la siguiente tabla, según los objetos matemáticos involucrados en la solución del problema.**
Elementos primarios

Profesores	Lenguajes	Nombre de la situación problema	Conceptos	Proposiciones	Procedimientos	Argumentos	Nombre del significado parcial
Pro1.	SI	SI	SI	SI	SI	SI	NO
Pro2.	NO	SI	SI	SI	SI	NO	SI
Pro3.	SI	SI	SI	NO	SI	NO	SI

Conclusión

Los docentes logran dar un nombre acorde a la situación-problema, además reconocen los *conceptos* involucrados en la solución, permitiendo comprender los *procedimientos* que conducen a la solución del problema. La mayoría de los docentes, logra identificar el significado emergente de la práctica matemática en cuanto a la solución del problema. La mayoría de los profesores no lograron ver que la solución del problema carecía de *argumentos.* Por último, la mayoría de los profesores logran reconocer los términos y notaciones que corresponde a los *elementos lingüísticos*, mismos que utilizaban la cultura china para dar respuesta a problemas de este tipo como el método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Fuente: (Elaboración propia)

Situación problema 3: Teorema I

Pregunta 3a

Tabla 5.18

Respuestas dadas por los Docentes a la Pregunta 3a.

Elementos	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3
Lenguajes	Algebraico	Verbal, simbólico	Dos ecuaciones con dos cantidades desconocidas, diferencia de productos. Notaciones algebraicas como: $x = \frac{c\,e - b\,f}{a\,e - d\,b}$ $y = \frac{a\,f - d\,c}{a\,e - d\,b}$
Nombre asignado a la Situación-problema	Solución general de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas	Generalización de la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2×2	Demostración de la regla de Cramer por el método de igualación
Conceptos	Matrices de coeficientes de un sistema 2×2. Expresión algebraica. Sistemas de ecuaciones lineales	Numerador denominar, producto, coeficiente, ecuación	Numerador, diferencia, producto, coeficientes, opuestos, denominador, ecuación
Proposiciones	Se hacen inferencias	No se evidencia el enunciado de propiedades	Si $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ Entonces $x = \frac{c\,e - b\,f}{a\,e - d\,b}$

			$y = \dfrac{a\,f -\ d\,c}{a\,e\ -\ d\,b}$
Procedimientos	Demostrativos	Se parte de una forma general de un sistema de ecuaciones lineales. Se despeja una variable en ambas ecuaciones. Se igualan dichas ecuaciones. Se halla el valor de dicha variable. Se repite este proceso para la otra variable.	Restas, multiplicaciones, divisiones, cálculo del determinante
Argumentos	Se utilizan equivalencias entre expresiones algebraicas	El proceso seguido se justifica mediante: despeje de las variables en una ecuación, igualación de ecuaciones y realización de operaciones aritméticas	El numerador es la diferencia de los productos de coeficientes opuestos en los órdenes en los que no se encuentra $\boldsymbol{y}$; el denominador es la diferencia de los productos de los coeficientes opuestos tomados de los órdenes que involucran las dos cantidades desconocidas
Nombre asignado al significado parcial emergente	Solución general de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas	Solución general de un sistema de ecuaciones lineales de la forma $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ dada por Maclaurin	Método por determinantes

Fuente: (Elaboración propia)

En la configuración epistémica a la situación-problema 3 realizada por el Profesor 1, evidencia la dificultad en reconocer la tipología de los objetos primarios, pues argumenta que los *lenguajes* son de tipo algebraico, es decir, generaliza más no especifica. Respecto a los *conceptos* no logra identificar lo que Maclaurin tenía definido para el desarrollo de la situación-problema, argumenta que los *procedimientos* son “demostrativos” pero le cuesta identificar el procedimiento principal que es el despeje e igualación de ecuaciones. Además no logra identificar el significado parcial emergente de la situación problema.

El Profesor 2, logra identificar los *procedimientos* encontrados en la solución, pero le falta mencionar el procedimiento más importante que corresponde al despeje e igualación de las ecuaciones del sistema, además argumenta que los *lenguajes* son verbales y simbólicos; términos que dentro del enfoque EOS son muy generales.

El Profesor 3, asigna un nombre diferente al planteado al Teorema I, pero logra identificar que la demostración del teorema es parte del inicio del método que hoy conocemos como la regla de Cramer. Respecto a las *proposiciones* el docente argumenta que una proposición es de la forma *si p entonces q*, lo que es correcto ya que las *proposiciones* según el enfoque ontosemiotico corresponden a propiedades puestas en juego en el desarrollo del problema o enunciados sobre conceptos.

Tabla 5.19
Conclusión Pregunta 3a.

Pregunta 3a.
De acuerdo con la solución dada por Maclaurin, complete la siguiente tabla

			Elementos primarios				
Profesores	**Lenguajes**	**Nombre de la situación problema**	**Conceptos**	**Proposiciones**	**Procedimientos**	**Argumentos**	**Nombre del significado parcial**
Pro1.	**SI**	**NO**	**NO**	**SI**	**NO**	**SI**	**NO**
Pro2.	**NO**	**SI**	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**
Pro3.	**SI**	**NO**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**	**SI**

Conclusión
La mayoría de los profesores lograron reconocer los *lenguajes, conceptos y proposiciones* involucrados en la situación problema, en cuanto a los argumentos los docentes lograron identificar el argumento principal que corresponde a "la igualación de ecuaciones", además la mayoría de los profesores lograron dar un nombre al significado parcial emergente de la demostración del teorema I.

Fuente: (Elaboración propia)

Configuración epistémica 3. Teorema I de Maclaurin.

Respuestas dadas por los docentes a la pregunta 3b.

Tabla 5.20
Respuesta Profesor 1 Pregunta 3b

Respuesta Profesor 1 pregunta 3b.

¿Realice una comparación entre la demostración del teorema I y el desarrollo del teorema I por la regla de Cramer?

Solución del teorema I según Maclaurin	Solución del teorema I según Cramer
En esta se aplica el méto de igualación a un sistema general 2x2 para llegar a las expresiones generales para las soluciones del sistema.	Las soluciones obtenidas por Cramer son idénticas a las obtenidas en el teorema de Maclaurin
Conclusión: El profesor 1 usa un *lenguaje retórico* adecuado en la comparación de los dos métodos, como igualación, sistema de ecuaciones y solución de un sistema. Argumenta que la solución del teorema I es idéntica a la solución por la regla de Cramer, lo que indica que el profesor tiene un conocimiento común del contenido.	

Fuente: (Elaboración propia)

CE3. Teorema I de Maclaurin

Tabla 5.21

Respuesta Profesor 2 Pregunta 3b

Respuesta Profesor 2 pregunta 3b. ¿Realice una comparación entre la demostración del teorema I y el desarrollo del teorema I por la regla de Cramer?	
Solución del teorema I según Maclaurin	**Solución del teorema I según Cramer**
Se parte de un sistema de ecuaciones lineales en la forma: $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ Se despeja alguna de las variables en ambas ecuaciones Se igualan las dos expresiones resultantes. Se despeja una de las variables, con el cual se puede hallar el valor de la otra variable, usando cualquiera de las ecuaciones iniciales. El procedimiento es análogo, si se decide iniciar con cualquiera de las variables.	Se parte de un sistema de ecuaciones lineales de la forma: $\begin{cases} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{cases}$ Se formas tres arreglos matriciales de orden 2 con los coeficientes de las variables y los términos independientes. Se halla los determinantes de dichas matrices, los cuales se usan para determinar el valor de la variable x y de la variable y.
Conclusión: El profesor 2 maneja un *leguaje específico matemático* acorde para la comparación de los dos métodos de solución, utilizando *términos* como: despeje, variables, igualar expresiones, ecuación, arreglos matriciales, coeficientes, determinantes y matrices. Mediante este lenguaje el profesor 2 logra describir los	

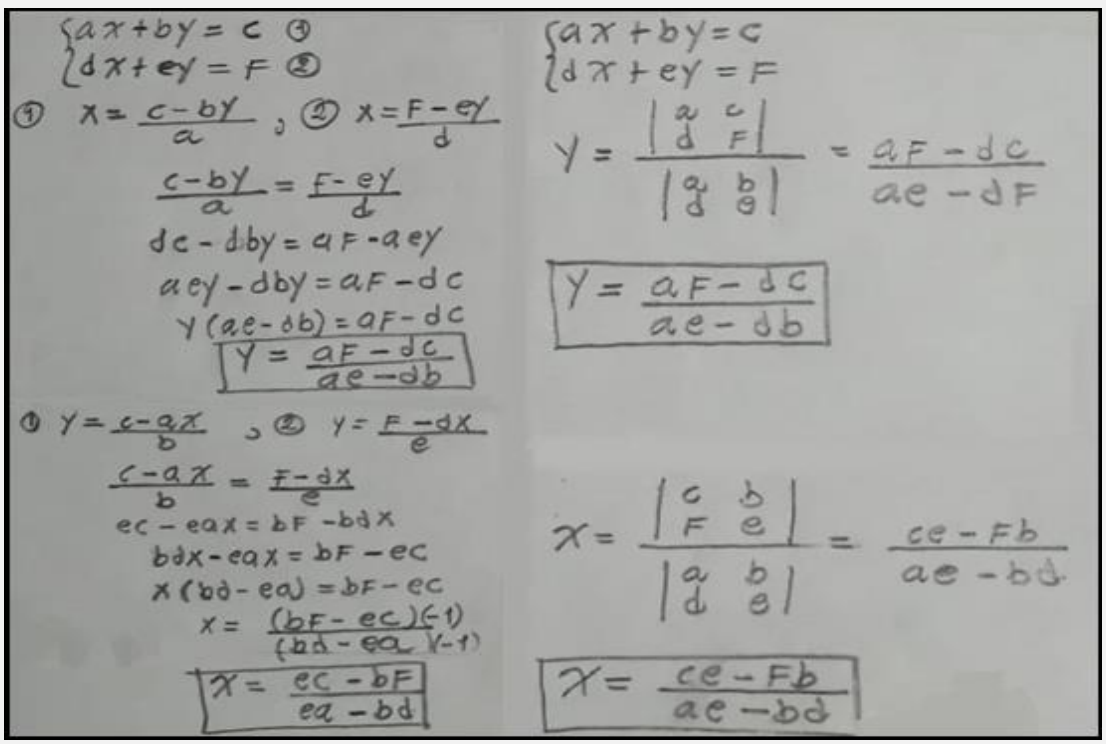
procedimientos que se deben tener en cuenta al resolver un problema relacionado con SEL, lo que conlleva a que el profesor tiene un buen conocimiento común del contenido matemático referente a los SEL.

Fuente: (Elaboración propia)

CE3. Teorema I de Maclaurin

Tabla 5.22

Respuesta Profesor 3 Pregunta 3b

Respuesta Profesor 3 pregunta 3b. ¿Realice una comparación entre la demostración del teorema I y el desarrollo del teorema I por la regla de Cramer?	
Solución del teorema I según Maclaurin	**Solución del teorema I según Cramer**
	
Conclusión: El profesor 3 utiliza un *lenguaje algebraico* donde describe la solución del teorema por ambos métodos, evidenciando la igualdad en los métodos. Esto indica que el docente tiene un conocimiento común del contenido referente a los SEL.	

Fuente: (Elaboración propia)

Dimensión epistémica – Parte II: Análisis de los significados de Referencia de los textos de enseñanza. Preguntas (P1b, P3c, P4).

Pregunta 1b.

Tabla 5.23

Respuesta Pregunta 1b.

<table>
<tr><td colspan="2">CE1. Problema de SEL en la cultura de los babilonios
Situación problema 1: Tamaño de terrenos

Pregunta 1b.
¿Por qué este método no se encuentra en los textos de matemáticas de noveno grado?</td></tr>
<tr><td>Significado epistémico 1: Método de la falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2 × 2</td><td>Valoración</td></tr>
<tr><td>PROFESOR 1
Probablemente porque se prefieren otros que son mas sencillos para el estudiante y porque no son enseñados a los estudiantes que se preparan para ser profesores</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>PROFESOR 2
Considero que como no es un me'todo convencional, no es tenido en cuenta por las editoriales que elaboran libros de texto para la educación básica. Del mismo modo, la estructura de solución de la situación problema usando este me'todo se torna un poco compleja para que todos los estudiantes puedan comprenderla a cabalidad, pues no estan acostumbrados a desarrollar y explorar tareas matemáticas de este tipo.</td><td>NO</td></tr>
<tr><td>PROFESOR 3
• Porque los textos privilegian en la gran mayoria de los casos los métodos formales para resolver sistemas de ecuaciones.
• Porque el método de la Falsa posición es considerado un método intuitivo (Ensayo y error).
• Porque los libros no consideran los métodos intuitivos como medios de aprendizaje.
• Porque en la matemática escolar se da mayor importancia al resultado y no a los procesos de construcción del conocimiento.
• Porque para el texto es mas práctico dar una regla o algoritmo para resolver un problema, sin detenerse a analizar los procesos heuristicos de constitución de un objeto matemático</td><td>NO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Conclusión
La mayoría de los docentes argumentan que en los libros de texto deben “ir métodos más sencillos para el estudiante” ya que el método puede dificultar la aprensión por parte del estudiante, además los profesores 2 y 3 argumentan que las editoriales considera métodos más intuitivos como un medio de aprendizaje.</td></tr>
</table>

Fuente: (Elaboración propia)

Tabla 5.24

Respuesta Pregunta 3c.

CE3. Teorema I de Maclaurin **Situación problema 3: Teorema I** **Pregunta 3c.** Se puede concluir que el teorema I desarrollado por Maclaurin corresponde al método de igualación para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Justifica tu respuesta	
Significado epistémico 3: Método de determinantes de Maclaurin para la solución de sistemas de ecuaciones lineales $2x2$	**Valoración**
PROFESOR 1 En efecto se aplica el método de igualación para demostrar las igualdades para determinar las soluciones.	**SI**
PROFESOR 2 Considero que el procedimiento desarrollado por Maclaurin corresponde a la base fundamental del método de igualación, debido a que en este método se despeja una de las variables en las dos ecuaciones del sistema, para luego igualar estas dos expresiones, y de esta manera hallar el valor de una variable. Posteriormente, se reemplaza dicho valor en cualquiera de las ecuaciones iniciales, para hallar el valor de la variable faltante. La variación con respecto al método de Maclaurin corresponde a que en este caso, se deben realizar dos procedimientos de manera análoga, uno por cada variable.	**SI**
PROFESOR 3. Si, el teorema I desarrollado por Maclaurin es una generalización del método que conocemos hoy día como "método por igualación"	**SI**
Conclusión La mayoría de docentes argumentan que el teorema I de Maclaurin es un equivalente al método convencional de eliminación para SEL.	

Fuente: (Elaboración propia)

Pregunta 4

Tabla 5.25

Respuesta Pregunta 4

Pregunta 4.
En la siguiente tabla se presentan algunos de los diferentes métodos de solución para sistemas de ecuaciones lineales, los utiliza o los utilizaría. Justifica su respuesta.

Significado Global	PROFESOR 1	PROFESOR 2	PROFESOR 3.
Método de Gauss-Jordan	**SI**	**SI**	**SI**
Método de reducción	**SI**	**SI**	**SI**
Método de exceso y defecto	**NO**	**NO**	**SI**
Método de la falsa posición	**NO**	**NO**	**SI**
Método de sustitución	**SI**	**SI**	**SI**
Eliminación Gaussiana	**SI**	**NO**	**SI**
Método grafico	**SI**	**SI**	**SI**
Regla de Cramer	**SI**	**SI**	**SI**
Método de igualación	**SI**	**SI**	**SI**
Método de Maclaurin	**NO**	**SI**	**SI**

Conclusión

El profesor 1 no se interesa por el método de la falsa posición y el método de exceso y defecto, pues argumenta que no lo conoce y que existen algunos métodos más sencillos, a diferencia del profesor 2 que aunque no los ha enseñado, considera que podrían ayudar en el aprendizaje de los estudiantes. El profesor 3 considera que si los utilizaría en especial el de la falsa posición pues el método plantea una hipótesis para que el estudiante pueda determinar diversas estrategias para lograr la solución del problema.

Método de exceso y defecto	No	Me parece que otros métodos son mas sencillos
Método de la falsa posición	No	No lo conozco

Respuesta pregunta 4 profesor 1

Método de exceso y defecto	NO	No he usado el método, por ende no lo he enseñado. Sin embargo sería muy interesante trabajarlo con los estudiantes y descubir que ventajas y desventajas tiene.
Método de la falsa posición	NO	No he usado ni enseñado este método. Pensando a futuro podría tomarlo como opción de trabajo con los estudiantes, en la solución de situaciones problema.

Respuesta profesor 2 pregunta 4

Método de la falsa posición	SI	POR QUE ES UN MÉTODO QUE MEDIANTE UNA HIPOTESIS FALSA PERMITE AL ESTUDIANTE INTUIR, CONJETURAR Y PROBAR DIVERSAS ALTERNATIVAS PARA HALLAR LA SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.

Respuesta profesor 3 pregunta 4

Con respecto al método de Maclaurin los profesores 2 y 3 consideran utilizarlo pues así se evidencia el inicio del método convencional de igualación, favoreciendo la generalización del método para la resolución de SEL.

Los tres profesores coinciden en utilizar los métodos: Gauss-Jordan, reducción, sustitución, grafico, Cramer y método de igualación, como significados de referencia para la enseñanza del objeto SEL.

Fuente: (Elaboración propia)

Dimensión epistémica – Parte II: Implicaciones en la enseñanza. Preguntas (1c, 2b, 2d)

Pregunta 1c

Tabla 5.26
Respuesta Pregunta 1c.

Análisis del significado 1: Método de la falsa posición para la solución de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 **Pregunta 1c.** ¿Por qué no se enseña el método, se debería enseñar? Justifique se respuesta	**Valoración**
PROFESOR 1 Porque hay otros mas sencillos. Tal vez se debe enseñar a los estudiantes de didactica de las matemáticas para que aprecien la evolución de los métodos.	**NO**

PROFESOR 2 Personalmente no he enseñado este método, por las razones anteriormente descritas Si embargo, considero que puede ser una oportunidad para que los docentes podamos diseñar y proponer situaciones problema a los estudiantes, que puedan abarcarse usando este método, con el fin de explorarlo y poder determinar que efectos tiene en su aprendizaje, y del mismo modo, reflexionar sobre como enseñar adecuadamente el método.	**SI**
PROFESOR 3 • Porque en el salón de clase se privilegian los metodos formales para resolver sistemas de ecuaciones. • Porque en el salón de clase es más importante el resultado que el proceso. si se deberia enseñar porque permite al estudiante intuir, conjeturar crear hipotesis, premisas (ensayo y error) que lo llevarán a colocar en funcionamiento diversos lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos, que permitan la construcción del conocimiento	**SI**
Conclusión: La mayoría de los profesores argumentan que no se usa el método para solucionar SEL en el aula, pues a los estudiantes se les debe llevar métodos más sencillos fáciles de captar, priorizando el resultado más no los procesos involucrados en el desarrollo del método.	

Fuente: (Elaboración propia)

Pregunta 2b

Tabla 5.27

Respuesta Pregunta 2b.

Análisis del significado 2: Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura china **Pregunta 2b.** ¿Cómo docente de grado noveno enseñaría este método para la solución de ecuaciones lineales en grado noveno?	**Valoración**
PROFESOR 1 No porque no veo claramente como ha de traducir el estudiante el enunciado del problema al lenguage matricial ni el porque de las operaciones realizadas	**NO**

PROFESOR 2 Sí enseñaría este método, con el fin de que los estudiantes lo conozcan y lo puedan explorar solucionando diferentes situaciones problema que involucren sistemas de ecuaciones lineales, y de esta manera tengan un método adicional de solución.	**SI**
PROFESOR 3 Si lo enseñaria ; entre las ventajas estarian que el estudiante generalice los métodos convencionales de solución de sistemas 2x2 (reducción, igualación, sustitución, cramer y gráfico) y que determinara similitudes entre todos los métodos y diera argumentos solidos del funcionamiento de los expresiones : $\frac{-ab'+a'b}{a-a'}$, $\frac{b+b'}{a-a'}$	**SI**
Conclusión: La mayoría de los profesores argumentan que si enseñarían el método, pues favorece nuevos procedimientos como lo es trabajar con matrices.	

Fuente: (Elaboración propia)

Pregunta 2d

Tabla 5.28

Respuesta Pregunta 2d

Análisis del significado 2: Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura china **Pregunta 2d.** ¿Qué ventajas o desventajas trae para la enseñanza el retomar los problemas en la historia de las matemáticas que dieron origen a los objetos matemáticos? Justifique su respuesta.	**Valoración**
PROFESOR 1 Pienso que tiene la gran ventaja de apreciar el poder, la simplicidad y la evolución de los conceptos.	**SI**
PROFESOR 2	**SI**

Considero que la historia de las matemáticas es un elemento de gran importancia en el aprendizaje de las mismas ya que pueden destacarse elementos muy interesantes en cuanto a métodos, procedimientos, técnicas, estudios diversos sobre diferentes objetos matemáticos que desde hace muchos años han venido en constante evolución y que indiscutiblemente se hace necesario conocer todo ese proceso histórico, con el fin de lograr un mejor aprendizaje, para lo cual es importante motivar mediante tareas matemáticas a los estudiantes.	
PROFESOR 3 - Retomar los problemas que dieron paso a la emergencia de los objetos matemáticos permite al profesor reconocer los métodos intuitivos desarrollados por distintas culturas así como los desafíos y dificultades para llegar a desarrollar los métodos formales que se usan hoy día en la escuela. - Permite dar significado a los métodos formales actuales. - Permite reconocer que los objetos matemáticos emergen de la solución a problemas que han enfrentado diversas culturas. - Permite al profesor dar soporte epistemologico del funcionamiento de los métodos formales. - Al estudiante le permite comprender la forma como se han construido los objetos matemáticos. - Al estudiante le dara herramientas heurísticas de porqué y para que aprender matemáticas.	**SI**
Conclusión: Los profesores argumentan que retomar los problemas abordados en la historia ayuda a evidenciar el origen, la evolución y el desarrollo de los objetos matemáticos. Además retomar los problemas que desarrollaron las diferentes civilizaciones, permite dar significado a los métodos convencionales los cuales se trabajan en la actualidad.	

Fuente: (Elaboración propia)

Dimensión epistémica – Parte II: Pensamiento variacional. Pregunta 2c

Tabla 5.29

Respuesta Pregunta 2c.

Análisis del significado 2: Método de exceso y defecto para la solución de sistemas de ecuaciones lineales en la cultura china **Pregunta 2c.** ¿Puede llevar al desarrollo del pensamiento variacional? Justifique.	**Valoración**
PROFESOR 1	**NO**

No me parece porque no se establece un modelo que describa la relacion entre variables interdependientes	
PROFESOR 2 Considero que la utilización de este método en la solución de sistemas de ecuaciones lineales puede fortalecer el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes, ya que ellos pueden ir generalizando procesos y técnicas de solución que van fortaleciendo con la práctica.	**SI**
PROFESOR 3 - Si, porque al variar los excesos y defectos pueden representarse como funciones lineales en el plano cartesiano. - Si, porque al variar los excesos y defectos el estudiante puede llegar a establecer patrones y regularidades que le permitan generalizar procedimientos y llegar a establecer propiedades y argumentos para resolver sistemas 2x2.	**SI**
Conclusión: La mayoría de los profesores argumentan que el método de exceso y defecto para la solución de SEL, si lleva al desarrollo del pensamiento variacional, pues se dota al estudiante de otro método que puede utilizar para resolver SEL y además se evidencia la percepción y la caracterización de la variación (exceso y defecto) en problemas de este tipo.	

Fuente: (Elaboración propia)

Dimensión epistémica – Parte II: Estándares Básicos de Competencias Matemáticas. Pregunta (P5).

Tabla 5.30

Respuesta Pregunta 5.

Pregunta 5. **¿Considera que los estándares seleccionados corresponden a las situaciones problema planteadas?**	
EB1	**Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.**

EB2	**Reconoce los diferentes usos y significados de las operaciones (convencionales y no convencionales) y del signo igual (relación de equivalencia e igualdad condicionada) y los utiliza para argumentar equivalencias entre expresiones algebraicas y resolver sistemas de ecuaciones.**
PROFESOR 1 **SI**	**JUSTIFICACIÓN.** Considero que si corresponden.
PROFESOR 2 **SI**	**JUSTIFICACIÓN.** Considero que los dos estándares son acordes con las diferentes situaciones problema propuestas y analizadas, pues se involucran diferentes métodos de solución de S.E.L. y también diversos procedimientos que permiten hallar la solución de cada una de estas situaciones problema, en los que implícitamente se han usado operaciones aritméticas y manejo de expresiones algebraicas
PROFESOR 3. **SI**	**JUSTIFICACIÓN.** Sí; porque cada problema da cuenta de métodos alternativos para resolver sistemas de ecuaciones. Sí; porque en cada problema se usa explícita o implícitamente la relación de equivalencia e igualdad condicionada por ejemplo en los métodos desarrollados por Cardano y Maclaurin.
Conclusión: Los docentes argumentan que los estándares básicos de competencias en matemáticas para el objeto SEL son acordes a las situaciones problemas planteadas, pues cumplen con la intención de mostrar varios métodos de solución para SEL sin importar el nivel de complejidad del método y también permite ver los elementos que se relacionan entre sí para el desarrollo delos métodos.	

Fuente: (Elaboración propia)

Capítulo 6. Conclusiones Generales

"Cuando hombres y mujeres se ponen de acuerdo,
las conclusiones deben ser las mismas,
pero los motivos diferentes"

George Santayana (1863 – 1952)

En este capítulo se presenta un análisis a los resultados obtenidos del estudio, y los principales aportes los cuales permitieron dar respuesta a la pregunta de investigación planteada y a los objetivos específicos. Además se describen los resultados de las actividades realizadas para el logro de cada una de las fases que permitieron llegar al logro del objetivo general del estudio el cual corresponde a caracterizar las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas respecto a los significados de referencia identificados en el desarrollo histórico-epistemológico del objeto sistemas de ecuaciones lineales y los significados pretendidos por ellos en los procesos de enseñanza del objeto matemático. Por último se presenta las apreciaciones hechas por el autor al estudio histórico-epistemológico del objeto SEL y algunos métodos de solución para SEL.

6.1. Resultados de la investigación

6.1.1. Primera y segunda fase de investigación

En la *primera fase de investigación* y en la primera parte *de la segunda fase,* se realizaron las actividades para llegar al logro del objetivo específico 1 que se relaciona con la reconstrucción del significado global del objeto SEL, por medio del estudio histórico-epistemológico de las prácticas matemáticas según el origen, evolución y naturaleza del objeto matemático. Esto fue posible ya que se realizó un riguroso análisis documental a libros de historia de las matemáticas, tesis doctorales, tesis de maestría, artículos de investigación científica e investigaciones relacionadas con el objeto SEL, permitiendo clasificar el estudio en los 4 periodos de la humanidad *(época antigua, edad media, edad moderna y edad contemporánea).*

En la *época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C)* se destacó el trabajo realizado en Babilonia, a múltiples situaciones problemas relacionadas con: distribución de cosechas, problemas de áreas de terrenos, cálculos de volúmenes, compra y venta de animales, problemas de equivalencia entre metales, problemas de repartición de pan y cerveza: todos ellos relacionados con los SEL, generando así un sistemas de prácticas matemáticas de donde emergen los primeros significados parciales del objeto SEL y se relaciona con la solución dada por el Método de la falsa posición para sistemas de ecuaciones 2×2. Asimismo, en la cultura China, se desarrolló una de las obras más importantes en la historia de las matemáticas llamada: *"Nueve capítulos sobre el arte Matemático "*o también *"La Matemática en nueve capítulos"* publicado durante la Dinastía Han (c. 206 a. C – c. 220 d. C). En esta obra se encuentran situaciones problemas que fueron resueltas por SEL, y llegaron a generar distintos tipos de solución (significados parciales del objeto) tales como el método de las dos situaciones erróneas (correspondiente al método de la doble falsa posición), el método de exceso y defecto, además, se encuentra el método fan-chen que actualmente es conocido como la eliminación gaussiana en la resolución de ecuaciones lineales simultaneas.

En el ***periodo 2.*** *Edad media: (476 d. C – 1453 d. C; siglo V- siglo XV)* los Hindúes realizaron grandes estudios en el desarrollo del álgebra como el nuevo sistema de numeración favoreciendo el desarrollo de las matemáticas: en esta cultura se encuentra el planteamiento de problemas relacionados con áreas y la repartición de herencias, los cuales se traducían en la solución de ecuaciones algebraicas de grado uno y dos pero su atención no se centraba en los SEL. Sin embargo, hacia el año 1202 surge uno de los aportes europeos más importantes de la época proporcionado por Leonado de Pisa (c.1175 - 1250), el cual corresponde al texto denominado *Liber Abaci,* en esta obra se encuentran problemas de contabilidad mercantil, diferentes cambios de monedas y además aparecen problemas que Fibonacci resuelve por medio de la regla de los dos errores que había aprendido de los árabes. En dicha obra, Fibonacci soluciona una situación problema sobre el precio de un caballo y la distribución de dinero entre dos personas para la compra del caballo por el método de eliminación para el caso de infinitas soluciones de un SEL (significado parcial).

En el ***periodo 3.*** *Edad Moderna (1453 d. C – 1789 d. C: siglo XV - XVIII)* del análisis a las soluciones de los SEL y de los diferentes métodos de solución, emerge una de las ramas más importante en las matemáticas denominada *Álgebra Lineal,* donde emergen dos objetos matemáticos importantes para la solución de los SEL; las matrices y los determinantes. El matemático Gerónimo Cardano (1501 - 1576) en su obra *Ars Magna*, presenta un método de solución a un sistema lineal de dos ecuaciones que llamo *regula de modo,* que serían las bases para lo que hoy se conoce como la *regla de Cramer*. Este método consiste en hacer operaciones elementales con los coeficientes del sistema y así encontrar la solución; a este sistema de prácticas se le asocia el significado parcial denominado: *método de Cardano para la solución de SEL* 2×2. Por otra parte, hacia el año 1748 fue publicado el libro póstumo del matemático escoces Colin Maclaurin (1698 - 1746) donde se encuentran problemas de la vida cotidiana y problemas netamente matemáticos, que conducen a la formulación de sistemas lineales. La solución a los SEL eran resueltos por un método específico denominado eliminación sucesiva de incógnitas (significado parcial), al punto que en el capítulo XII se describen dos teoremas que presentan soluciones alternativas a los sistemas 2×2 y 3×3 respectivamente, lo que en la actualidad se llama método de los determinantes.

Finalmente en el ***periodo 4.*** *Edad Contemporánea (1789 d.C – actualidad: siglo XVIII - Actualidad)* el matemático suizo Gabriel Cramer (1704 - 1752) toma como referencia el trabajo realizado por Cardano y Maclaurin respecto a la solución de los SEL con base en los coeficientes del sistema, por lo que en 1750 publica el tratado de geometría: *Introduction à L'analyse des Lignes Courbes Algébriques,* en el cual se encuentra descrita la regla general para resolver sistemas de ecuaciones $n \times n$ lo cual se considera como la regla de Cramer (significado parcial). En otra dirección Leonhard Euler (1707-1783) no se interesa por resolver SEL, pero si analiza cuando dos ecuaciones son insuficientes para determinar los valores de las dos incógnitas (solución única), es decir, cuando una ecuación es combinación lineal de la otra, y por tanto surge la necesidad de agregar una restricción para que las ecuaciones a resolver fueran diferentes entre sí con el fin de encontrar los valores de las incógnitas y que el método siguiera funcionando. En esta dirección el matemático francés Étienne Bézout (1730 - 1783) describe una regla general para calcular los valores de las incógnitas de un sistema lineal muy análogo al método de Maclaurin que tiene gran similitud a lo que hoy corresponde al método convencional de reducción para sistemas de ecuaciones lineales. En el mismo sentido Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) se encontró con los sistemas de ecuaciones lineales al desarrollar el método de los mínimos cuadrados en sus estudios de geometría, es decir, utilizo este nuevo método para calcular la órbita del asteroide Ceres en 1801. Posteriormente en 1810 Gauss desarrolló la resolución numérica de los sistemas lineales por eliminación de incógnitas en su obra: *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum,* donde introdujo el procedimiento sistemático de eliminación de incógnitas para resolver sistemas de ecuaciones lineales sin usar matrices propiamente, el cual se ha difundido como *eliminación gaussiana.*

Gauss consultó la obra: *Nueve capítulos sobre el arte matemático* mencionada anteriormente, para el estudio de la órbita elíptica del planetoide Pallas, usando observaciones realizadas entre los años 1803 y 1809, donde habían tenido que estimar el valor de 6 incógnitas en un sistema de 6 ecuaciones lineales.

La segunda fase de investigación denominada análisis semiótico se dividió en dos partes: la primera trata de análisis semiótico a las 8 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL, es decir, se analizó la tipología de los objetos primarios (lenguajes, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) generando configuraciones epistémicas las cuales se le asigna un significado parcial emergente al objeto SEL.

Con el desarrollo de la fase I y la primer parte de la fase II se concluye que el objeto sistemas de ecuaciones lineales a lo largo de la historia emerge de la solución de situaciones problemas (sistemas de prácticas en diversas civilizaciones), las cuales están asociadas a 8 configuraciones epistémicas donde cada configuración se relaciona con un significado parcial del objeto SEL dando paso al significado global del objeto SEL (ver Figura **4.1**).

La segunda parte de la segunda fase de investigación centra la atención en el análisis conceptual del objeto SEL, el cual se realizó con la revisión sistemática de 6 libros de texto sobre la enseñanza del álgebra lineal y 1 libro de texto para la enseñanza de las matemáticas en el grado noveno, la cual permite dar el logro del objetivo específico 2 que se relaciona con la caracterización del significado global de referencia del objeto Sistema de ecuaciones lineales a partir del análisis teórico del objeto matemático.

En el análisis teórico sobre el objeto SEL, se describieron elementos y conceptos relacionados con este objeto matemático, ya sea por sus propiedades asociadas al conjunto solución de un sistema lineal o por las relaciones establecidas entre los elementos que constituyen los sistemas de ecuaciones lineales. Además en el estudio histórico-epistemológico (fase I) se evidencio como emergen otros objetos matemáticos como las matrices y los determinantes, por tanto se logra la identificación de sus clases, propiedades y demás elementos de los cuales están formados, al punto que se permite identificar los diferentes significados de referencia relacionados con el objeto SEL. También se logró la interpretación personal de los significados de referencia encontrados en el análisis conceptual en cuanto a los métodos de solución para SEL por medio de problemas encontrados en la fase I, permitiendo concluir con la reconstrucción del significado global de referencia del objeto SEL (ver Figura **4.4**)

6.1.2. Tercera fase de investigación

La *tercera fase de investigación* denominada diseño e implementación de problemas históricos, permitió el desarrollo de las actividades orientadas al logro del objetivo específico 3 que corresponde al diseño e implementación de un cuestionario sobre las concepciones y creencias de los profesores respecto al objeto SEL.

El cuestionario se formuló con la selección de tres situaciones problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL. La primer situación-problema llamada *Tamaño de terrenos* y la segunda situación-problema llamada: *grupo de personas y compra de animales*, corresponden al periodo 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C). La tercer situación problema llamada *Teorema I* corresponde al periodo 3: Edad Moderna (1453 d.C – 1789 d.C: siglo XV-XVIII). Con la implementación del cuestionario se pretendió identificar las concepciones y creencias del profesor de matemáticas de grado noveno, respecto al uso de los significados parciales del objeto SEL. En este sentido se formulan 5 preguntas en donde se cuestiona por la dimensión epistémica del profesor en base a las configuraciones epistémicas que realiza el docente, el análisis de los significados de referencia en los textos de matemáticas para la enseñanza del objeto SE, las implicaciones en la enseñanza de los significados parciales emergentes de las configuraciones epistémicas y finalmente, se preguntó por la pertinencia de las situaciones problemas según el análisis a los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas ya que ellos operativizan los lineamientos curriculares y establecen algunas de las evidencias en cuanto al desarrollo del pensamiento variacional en relación con los sistemas algebraicos y analíticos.

6.1.3. Cuarta fase de investigación

La *cuarta fase de investigación* denominada análisis de los sistemas de prácticas matemáticas condujo al desarrollo de las actividades propuestas para dar logro a los objetivos específicos OE4 que corresponde a describir las concepciones y creencias de profesores de Matemáticas de grado 9, respecto al uso de los significados parciales del objeto SEL para la implementación de los procesos de instrucción y el objetivo específico, OE5 analizar las implicaciones didácticas que trae la concepción de los profesores en cuanto al significado de referencia y el significado pretendido del objeto SEL.

De acuerdo con las categorías de análisis para la dimensión epistémica del CDM del profesor, y en base al desarrollo de las configuraciones epistémicas de cada situación problema se determina que los docentes reconocen la importancia a la tipología de los objetos primarios en el desarrollo de las situaciones problemas, pues mediante ello se puede identificar los elementos que conforman la solución de un problema y se identifican posibles obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes al enfrentarse a la solución de problemas relacionados con SEL.

En cuanto al análisis de los significados de referencia de los textos de enseñanza, los docentes no reconocen la importancia de identificar y conocer diferentes tipos de significados de referencia para el objeto SEL, ya que estos significados de referencia forman parte del significado pretendido del profesor y se utiliza para garantizar una buena aprensión del objeto matemático por parte de los estudiantes. Cabe resaltar que se hace necesario saber y enseñar el origen, la naturaleza y la evolución del objeto matemático SEL, para mejorar los sistemas de prácticas matemáticas en los estudiantes, es decir, se puede mostrar a los estudiantes el objeto matemático SEL como lo concebían las diferentes culturas de la humanidad y llegar a realizar un contraste de como evoluciono los SEL, los diferentes métodos de solución, el contexto en que se presentaba el objeto matemático y como se relaciona con los métodos conocidos para mejorar así las implicaciones en la enseñanza del objeto en cuestión, llevando al estudiantes a enriquecer no solo su conocimiento sino también el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos.

Bajo estos argumentos el profesor que enseña matemáticas para el grado noveno debe conocer la variedad de significados que puede tener el objeto SEL, según los diversos marcos institucionales o el contexto de uso. Por tanto, algunos de los significados institucionales que se deben considerar como significados de referencia en la planificación de los procesos de estudio son: Métodos convencionales (Grafico, sustitución, igualación, reducción), regla de Cramer, eliminación Gaussiana, método de Gauss-Jordan, método de la matriz inversa, método de la falsa posición, método de la doble falsa posición, método por exceso y defecto, método por eliminación sucesiva de incógnitas (Teorema I de Maclaurin), regula de modo (método de Cardano), sin embargo para la enseñanza del objeto SEL en el grado noveno solo se utilizan los métodos convencionales y la regla de Cramer, ya sea por su sencillez y la facilidad de enseñar de enseñanza.

Por otra parte las concepciones y creencias del profesor de matemáticas respecto al objeto matemático SEL, son en algunos casos sesgadas por los libros de texto de matemáticas que ellos toman como referencia para la realización de las clases o para la preparación de secuencias didácticas lo cual limita la enseñanza-aprendizaje del objeto SEL en los estudiantes; el currículo impuesto por las instituciones educativas o simplemente seguir un texto guía, sin buscar otras herramientas u opciones que lleven a cambiar sus creencias en pro de la enseñanza y aprendizaje del objeto SEL a sus estudiantes.

El desarrollo de las actividades para los 5 objetivos específicos lleva al cumplimiento del logro del objetivo general que corresponde a caracterizar las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas respecto a los significados de referencia identificados en el desarrollo histórico-epistemológico del objeto sistema de ecuaciones lineales y a los significados pretendidos por ellos para los procesos de enseñanza del objeto matemático.

6.2. Principales aportes de la investigación

Los principales aportes de la investigación son las siguientes:

1) El estudio realizado al objeto matemático sistemas de ecuaciones lineales, se enfocó en dos aspectos, en primer lugar el estudio histórico-epistemológico del objeto SEL del cual emergen los significados del objeto en cuestión, permitiendo una comprensión clara del objeto matemático en cuanto a su origen, naturaleza y evolución. En segundo lugar se observó cómo los libros de texto dan un tratamiento a los significados de referencia del objeto SEL y a otros elementos relacionados con el objeto matemático (matrices y determinantes). Esta información puede ser utilizada para el desarrollo de nuevas investigaciones relacionadas con el objeto SEL y las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas de grado noveno.
2) Dentro de los principales aportes inmerso en esta investigación, se encuentra en primer lugar la reconstrucción de significado global del objeto SEL (ver Figura **4.1**) resultado del estudio histórico-epistemológico del objeto SEL y en segundo lugar la reconstrucción del significado global de referencia del objeto SEL (ver Figura **4.4**) resultado de análisis conceptual a 7 libros de texto utilizados para la enseñanza del objeto SEL.
3) Finalmente se destaca la construcción, implementación y análisis del cuestionario que permitió evaluar los conocimientos y creencias del profesor de matemáticas de grado noveno, la dimensión epistémica en la subcomponente del conocimiento común del contenido para el objeto SEL, permitiendo contar con resultados originales sobre el conocimiento didáctico matemático del profesor en relación con el objeto SEL.

Como contribución del estudio se presenta el aporte en el campo de investigación en Educación Matemática, a partir de los cursos de la Maestría en Educación Matemática y resultados obtenidos a lo largo de la investigación en la línea de formación de profesores.

Garzón, C., (2020). *Significado global del objeto sistemas de ecuaciones lineales desde el enfoque EOS.* X Simposio de Matemáticas y Educación Matemática. Universidad Antonio Nariño. Bogotá- Colombia.

6.3. Apreciaciones del autor

La labor investigaba de las concepciones y creencias del profesor de matemáticas en la dimensión epistémica del objeto sistemas de ecuaciones lineales favoreció al autor de esta tesis a reflexionar en cuanto lo importante que es para el docente que llegue a conocer y especialmente a reconstruir la naturaleza del objeto matemático SEL, ya que se evidencian elementos lógicos y epistemológicos claves para los procesos de la constitución teórica del objeto SEL en el estudiante y especialmente en el profesor, lo cual posibilitan no solo una mejor comprensión del objeto, sino que revelan aspectos característicos de la actividad matemática de construcción de los objetos matemáticos, los cuales merecen ser tenidos en cuenta por el docente en sus propuestas didácticas. Además, el conocimiento del profesor en el tema del significado global del objeto SEL le permitirá en primer lugar realizar cuestionamientos sobre si los estudiantes que están en formación, asimilan el objeto matemático, al punto que mediante un análisis semiótico puede llegar a identificar la tipología de los objetos primarios que conoce el estudiante, y a la vez identificar algunos obstáculos epistemológicos y semióticos que le permitirán redireccionar el significado institucional de referencia (significado pretendido por el profesor según cada método de solución) enfocado a suplir las falencias encontradas en los estudiantes y de igual forma según este desarrollo, se deben diseñar las estrategías didácticas que lleven a la emergencia de un significado institucional muy cercano al significado global del objeto SEL.

Por otra parte es importante mencionar que el método de Cardano llamado *Regula de Modo* (ver sección **4.2.3**) es una aproximación o aplicación al método convencional denominado método de sustitución para la solución de sistemas de ecuaciones lineales, esto se evidencia en la situación-problema: Método de Cardano (1501-1576) sección **4.2.3,** donde (González y

González, 2014) proponen una generalización al problema propuesto por Cardano.

En el mismo sentido el Teorema I de Maclaurin (ver sección **4.2.3**), se asemeja al actual método convencional denominado el método de igualación para sistemas de ecuaciones lineales; esto se debe a que en la sección **4.4.4** más específicamente en la configuración solución de un sistema de ecuaciones lineales por el método de igualación - **CSSEL .7.3** se siguen los mismos pasos del Teorema I con una situación problema y se llega a la conclusión de que estos dos métodos (Teorema I y Método de igualación para SEL) son el mismo. Por ultimo cabe aclarar que tanto el método de Cardano como el método de Maclaurin fueron la base del método que hoy se conoce como Regla de Cramer (ver sección **4.2.4**).

6.4. Limitaciones del estudio

Dentro de las limitaciones de la investigación se identificaron las siguientes:

1) La unidad de análisis a la cual se le aplico el instrumento, corresponde a 3 Licenciados en Matemáticas por lo que cabe aclarar que los resultados no son generalizables, a profesores que enseñan matemáticas en el grado noveno, de las instituciones públicas y/o privadas a nivel nacional e internacional.
2) En la construcción del cuestionario, que permitió analizar el conocimiento didáctico matemático del profesor de matemáticas que enseña en noveno grado, solo se consideró el estudio de la dimensión epistémica del conocimiento del docente respecto a los significados de referencia y los significados pretendidos en el aula para el objeto matemático SEL, dejando de lado las dimensiones (cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica), pero se logró llegar al segundo nivel de análisis de la dimensión epistémica: el nivel (1) trata sobre la identificación de prácticas matemáticas y didácticas y el nivel (2) que corresponde a

la identificación de objetos y procesos matemáticos y didácticos, faltando el análisis a los niveles 3, 4, y 5.

3) Finalmente para el análisis conceptual del objeto SEL, solo se seleccionó 6 libros clásicos sobre la enseñanza del álgebra lineal y 1 libro de texto para la enseñanza de las matemáticas en el grado noveno. Respecto a este último, la mayoría de los libros tienen una gran similitud respecto a los significados de referencia para el objeto SEL, es decir, elementos y conceptos básicos relacionados con el objeto matemático, por tanto se seleccionó el más completo en cuanto a sus propiedades asociadas al conjunto solución de un sistema dado o por las relaciones establecidas entre los elementos que constituyen el objeto SEL.

Referencias

Álvarez, Y. (2013). *Introducción del álgebra lineal en España y Colombia durante la segunda mitad del s. XIX y la primera del s. XX (Tesis Doctoral).* Universidad de la Rioja, Departamento de Matemáticas y computación, Logroño.

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en educacion matemática. *Revista EMA, 8*(1), 30-46.

Anton, H. (2011). *Introducción al álgebra lineal* (6 ed.). México: Limusa Wiley.

Arias, F. (1999). *Proyecto de investigación: guia para su elaboración.* Caracas-Venezuela: Episteme.

Azcárate, C., & Moreno, M. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(2), 265-280.

Ball, D. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-24.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Bell, E. (1949). *Historia de las Matemáticas.* (R. Ortiz, Trad.) México: Fondo de Cultura Economica.

Bézout, É. (1764). Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations. *Mémories de l'Académie Paris* , 288 - 338.

Bézout, É. (1779). *Théorie Générale des Équations Algébriques.* Paris: Ph-D. Pierres.

Blumer, H. (1982). *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método.* Barcelona: Hora.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* (M. Martínez, Trad.) Madrid: Alianza Editorial.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y Metódos de la Didáctica de la Matemática.* Facultad de Matemática, Astronomía y Física: Universidad nacional de Córdoba.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoria de las situaciones didácticas.* Buenos Aires: Editorial libros del zorzal.

Campos, A. (2013). *Epistemología de la matemática.* Bogotá: Univeridad Nacional de Colombia .

Cardano, G. (1993). On the rule of method. En G. Cardano, *Ars Magna or the Rules of* (T. Witmer, Trad., Segunda ed., págs. 180-181). New York: The MIT.

Carrera, J. (2009). *Liu Hui "Nueve capítulos de la matemática china".* España: Nivola.

Chevallard, Y. (1991). Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique. (Grenoble, Ed.) *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble*.

Collette, J. (1986). *Historia de las Matemáticas I.* México: Siglo XXI Editores.

Collette, J. (2000). *Historia de las matemáticas II.* (4, Ed., & A. Casal, Trad.) Mexico: Siglo XXI Editores.

Cramer, G. (1750). *Introduction à L'analyse des Lignes Courbes Algébriques.* F Cramer & Cl Philibert.

Dávila, G. (2003). El desarrollo del álgebra moderna. Parte II: El álgebra e las ecuaciones . *Apuntes de historia de las Matemáticas, 2*(1), 27-37.

Española, R. A. (s.f.). Diccionario de la lengua española. *23*. Recuperado el 12 de 07 de 2019, de https://dle.rae.es

Euler, L. (1748). Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Mémoires* *de l'Académie des sciences de Berlín, Tom IV*, 219-233.

Farias, C., & Medeiros, A. (2004). O Método da Falsa Posição na História e na Educação Matemática. *Ciência & Educação, 10*(3), 545 - 557.

Figueroa, R. (2013). *Resolucion de problemas con sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Una propuesta para el cuarto año de secundaria desde la teoría de situaciones didácticas (Tesis Doctoral).* Pontificia universidad católica del Perú, Lima-Perú.

Font, V., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos:su uso en la formación de profesores. *Educação Matemática Pesquisa , 8*(1), 67-98.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel.

Garcia, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *9*(1), 85-116.

Giacomone, M. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico. (Tesis Doctoral).* Universidad de Granada, Granada.

Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiotico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2.3), 237-284.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los Conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*(20), 13-31.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Researches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *The Internacional Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: Implication for the Prescriptive Character of Didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42.

Godino, J., Contreras, Á., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26*(1), 39-88.

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M., & Lurduy, O. (2011). Why is the Learning of Elementary Arithmetic Concepts Difficult? Semiotic Tools for Understanding the Nature of Mathematical Objects. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2), 247-265.

Godino, J., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos . *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34*(2-3), 167-200.

Gómez, I. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático.* Madrid: Narcea.

González, J., & González, D. (2014). *Las matrices, un avance tecnológico en el estudio de las ecuaciones* . Bogotá: universidad Pedagógica Nacional.

González, M., & Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza de la secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(3), 389-408.

Grossman, S., & Flores, J. (2012). *Álgebra lineal* (Séptima ed.). México: McGraw Hill.

Guerra, A. (2012). *Propuesta para la Enseñanza de Sistemas de Ecuaciones Lineales (Tesis de*

Maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a ed.). México D: F: McGraw-Hill Education.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Joseph, G. (2011). *The Crest of the Peacoch: Non-European Roots of Mathematics* (3 ed.). New York: Princenton University Pess.

Karpinski, L. (1915). *Robert of Chester's Latin Traslation of the Algebra of Al-Khowarizmi.* London: The Macmillan Company.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad hasta nuestros dias.* (M. Martinez, J. Tarrés, & A. Casal, Trads.) Madrid: Alianza Editorial.

Kolman, B., & Hill, D. (2006). *Álgebra Lineal.* México: Pearson Educación .

Larson, R., & Falvo, D. (2010). *Fundamentos de Álgebra Lineal* (sexta ed.). México: Cengaje Learning Editores, S.A.

Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas.* Sevilla: GID-Universidad de Sevilla.

Luzardo, D., & Peña, A. (2006). Historia del Álgebra Lineal hasta los Aborigenes del Siglo XX. *Divulgaciones Matemáticas, 14(2)*, 153-170. Recuperado el 12 de Julio de 2019, de http://divmat.demat-fecluz.org/volumenes-anteriores/vol-14-no-2-2006

Maclaurin, C. (1748). *A treatise of algebra in three parts.* London: A Millar & J Nourse.

Manen, M. V. (1990). Beyond assumptions: shifting the limits of action research. *Theory Into Practice, 29*(3), 152-157. Obtenido de https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00405849009543448

Manzanero, L. (2007). *Sistemas de Ecuaciones Lineales: Una perspectiva desde la teoría APOE (Tesis de Maestría).* Centros de investigación y de estudios avanzados del IPN, Mexíco.

Maza, C. (2009). *Las matemáticas en el Antiguo Egipto. Sus raíces económicas.* Sevilla: Universidad de Sevilla.

Mendel, J., & García, C. (2016). Historia del Determinante. *Revista de la Academia Mexicana de Ciencias, 67*(1), 60 - 67. Obtenido de https://www.revistaciencia.amc.edu.mx/images/revista/67_1/PDF/Determinante.pdf

Monsalve, S. (2017). *Álgebra lineal y cálculo en varias variables* (Vol. 1). Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Muir, T. (1960). Theory of determinants in the historical order of development .

Nacional, M. d. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Nieves, M., Borges, C., García, I., Hernández, V., & Hernández, B. (2004). *Las Matemáticas Chinas.* Recuperado el 03 de Octubre de 2019, de file:///D:/Maestria/Maestria%20matematicas/Trabajo%20de%20grado%202018/las%20matematicas%20chinas/las%20matematicas%20chinas.pdf

Ochoviet, T. (2009). *Sobre el concepto de solución de un sistema de ecuaciones coon dos incógnitas (Tesis Doctoral).* Instituto Politécnico Nacional, Montevideo.

Orts, A. (2007). Resolución de problemas mediante la regla de la falsa posición: un estudio histórico. *Suma, 56*, 55-61. Recuperado el 19 de Agosto de 2019, de https://revistasuma.es/IMG/pdf/56/055-061.pdf

Pajares, F. (1992). Teachers' belief and educational research: cleaning up a messy contruct.

Review of Educational Research, 62(3), 307-332.

Panizza, M., Sadovsky, p., & Sessa, C. (1999). La ecuación lineal con dos variables:entre la unicidad y el infinito. *Enseñanza de las ciencias, 17*(3), 453-461. Recuperado el 5 de Mayo de 2018

Pino-Fan, L. (2013). *Evaluación de la Faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la Derivada (Tesis Doctoral).* Universidad de Granada, España.

Pino-Fan, L., Godino, J., & Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y el aprendizaje de la deriva. *Trabajo presentado en la XIII Escuela deInvierno en Matemática Educativa, Instituto tecnologico y de Estudios Superiores de Monterrey*, 206-213.

Ponte, J. (1994). knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En L. Bazzini, *Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the Fifth International Conference on Systematic Cooperation between theory and practice in mathematics education.* Italia.

Poole, D. (2011). *Álgebra lineal. Una introducción moderna.* México: Cengage Learning Editores.

Pozas, D., & Alves, M. (2017). Los implícitos en el discurso tecnológico-teórico en dos libros de álgebra lineal. *Acta Scientiae*, *19*(3), 395-411.

Rey, J., & Babini, J. (1985). *Historia de las Matemáticas* (Vols. 1-2). Barcelona: Gedisa .

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas.* (C. Valdés, Trad.) Moscú: Editorial Mir.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículum. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marin, L. Puig, . . . M. Socas, *La Educación Matemática en Enseñanza Secundaria* (págs. 39-59). Barcelona: ICE- Horsori.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico . *Revista iberoamericana de educación matemática*(33), 11-2.

Rico, L., Castro, E., & Romero, I. (1997). Sistemas de Representación y Aprendizaje de Estructuras Numericas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361-371.

Ricoy, C. (2006). Contribución sobre los paradigmas de investigación. *Educação. Revista do Centro de Educação, 31*(1), 11-22.

Ruiz, A. (2003). *Historia y Filosofia de las Matemáticas.* San José: EUNED.

Saenz, E. (1994). *Apuntes para el curso: Historia de las Matemáticas* . Monterrey: Universidad autonoma de nuevo leon .

Sánchez, C., Sabogal, Y., Buitrago, L., Fuentes, J., Patiño, Ó., Joya, A., & Ramírez, M. (2016). *Proyecto saberes ser hacer Matemáticas 9.* Bogotá: Santillana.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica . *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 7*(1), 49-78.

Sepúlveda, O. (2018). *El Conocimiento Didáctico Matemático del Profesor Universitario.* Tunja: Editorial UPTC.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Smith, H. J. (1861). On Systems of Linear Indeterminate Equations and Congruences. En *The Philosophical Transactions of the Royal Society of London,* (Vol. 151, págs. 293-326). Londres: Royal Society. Obtenido de www.jstor.org/stable/108738

Thompson, A. (1992). Teachers' belief and conceptions: a synthesis of the research. En G. D, *Handbook of research on methematics teaching and learning* (págs. 127-146). Nueva York: Macmillan.

Torres, L. (2010). *Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela (tesis de Maestría).* Univerisdad del Valle, Santiago de Cali.

Trejo, E., & Camarena, P. (2009). Problemas contextualizados: una estrategia didáctica para aprender matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *22*, págs. 831-841. México.

Trejo, E., & Camarena, P. (2011). Concepciones de los profesores y su impacto en la enseñanza de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* . *24*, págs. 1095-1103. México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericanode Matemática Educativa A. C.

Ugarte, A. (2011). *Fibonacci y los problemas del Liber Abaci.* Recuperado el 5 de Septiembre de 2019, de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2012/29/archivo17.pdf