1
ELEMENTOS CONCEPTUALES SOBRE PROBABILIDAD

Inicialmente, el concepto de probabilidad estuvo asociado con los juegos de azar, las creencias religiosas y aspectos filosóficos que predominaron hasta el siglo XV. Luego paulatinamente se fue dando un tratamiento matemático al azar con los trabajos de Tartaglia, Cardano, Galileo, Pascal, Fermat y Huygens, relacionados con problemas de juegos y apuestas. A finales del siglo XVII y durante el siglo XVIII con la participación de matemáticos como Bernoulli, De Moivre, Bayes y Laplace se planteó la concepción clásica de probabilidad (Hacking, 1975; Belhouse, 1993, 2004). Con el trascurrir del tiempo, esta concepción se tornaría poco satisfactoria para los científicos por sus escasas aplicaciones y se plantearían otras alternativas como la concepción frecuencial ya abordada por Bernoulli en su obra *Ars Conjectandi* escrita en 1713 y luego tratada por Von Mises (1928) o la concepción subjetiva originada en los trabajos de Bayes (Vásquez, 2014).

Sin embargo, en el año de 1933, el matemático Kolmogórov axiomatizó la teoría de la probabilidad , quien decantó los trabajos de Caratheodory, Fréchet y Borel y usó la teoría de la medida para dicho propósito (Khrennikov, 2014). Hoy la probabilidad es una teoría matemática que tiene múltiples aplicaciones en distintos campos del conocimiento humano. La teoría de probabilidad se puede entender como un conjunto de axiomas que posibilitan el diseño de una o varias formas de calcular numéricamente la posibilidad de que un suceso ocurra. Para este propósito es conveniente definir experimentos aleatorios, espacios muestrales, eventos y espacios de probabilidad sobre los cuales sea posible calcular probabilidades para determinados eventos. En este capítulo se proporcionan y ejemplifican los conceptos básicos que se deben abordar en un curso inicial de probabilidad.

1.1 Conceptos usuales en probabilidad

En este apartado, se presentan los conceptos de experimento aleatorio, espacio muestral y eventos; así mismo, se indican ejemplos alusivos a fin de orientar al lector hacia el desarrollo de las actividades de estudio independiente.

1.1.1 *Experimento aleatorio*

Un experimento aleatorio es aquel en el cual a priori o de antemano no se puede determinar el resultado del experimento (Lindgren, 1993; Blanco, 2004). En el presente texto, un experimento aleatorio se denotará con ξ.

Ejemplo 1.1 ξ: se ha extraído de manera fortuita un artículo del estante de un centro comercial a fin de comprobar si este resultará o no con el peso que se anuncia en su etiqueta; antes de pesarlo no se puede anticipar si tendrá o no el peso anunciado; es decir, no es posible anticipar cuál será el resultado exacto que se va a obtener, pero sí se podría establecer el conjunto de los posibles resultados.

Ejemplo 1.2 ξ: un partido de fútbol debe decidirse con lanzamientos desde el punto de penalización y el último jugador está listo para lanzar. Pedro considera que el jugador convertirá su lanzamiento en gol, mientras que Juan cree que no; de antemano no se puede garantizar cuál será el resultado que se va a obtener.

Ejemplo 1.3 ξ: se lanza un dado justo una vez cuyas caras están marcadas con una cantidad de puntos correspondientes a los números 1, 2, 3, 4, 5, y 6. Rosa considera que el dado mostrará cinco puntos en su cara visible hacia arriba y sus amigos creen que resultarán las otras cantidades de puntos. Una vez más, no se puede establecer en cuál cara del dado apuntará hacia arriba, pero se podría establecer el conjunto de los resultados posibles.

1.1.2 *Espacio muestral*

Sea ξ un experimento aleatorio, al conjunto de todos los posibles resultados de ξ se le denomina el espacio muestral del experimento. El espacio muestral se denota con Ω (Lindgren, 1993; Blanco, 2004).

Ejemplo 1.4 ξ: se selecciona al azar una unidad del producto A para analizar si resultará defectuosa o no. El espacio muestral estará conformado por dos resultados:

$$\Omega = \{d, n\}$$

donde *d* representa que la unidad escogida resultó defectuosa y *n* no defectuosa.

Ejemplo 1.5 ξ: se realizará una prueba psicológica a una persona escogida al azar para determinar si presentará un coeficiente intelectual bajo (*cib*), si es normal (*cin*) o si resultará con un coeficiente intelectual alto (*cia*), entonces el conjunto de posibles resultados está dado por:

$$\Omega = \{a, n, b\}$$

En este ejemplo, se ha simbolizado con *a* un coeficiente intelectual alto, con *n* en la eventualidad de que resulte normal y con *b* un coeficiente intelectual bajo.

Ejemplo 1.6 ξ: se observa el número de personas que posiblemente transiten por un puente peatonal peligroso por día en la ciudad de Bogotá. El espacio muestral es,

$$\Omega = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \}$$

Ejemplo 1.7 ξ: se desea determinar el número de clientes que llegan a la cola de una entidad financiera por hora en la ciudad de Cali. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ \}$$

Ejemplo 1.8 ξ: duración (en tiempo continuo) de una bombilla eléctrica de la marca T. El espacio muestral es:

$$\Omega = \{x \in R : x \geq 0\}$$

donde *x* es el tiempo de duración de la bombilla mencionada y *R* es el conjunto de los números reales.

Ejemplo 1.9 ξ: se seleccionan aleatoriamente tres artículos de un proceso productivo para analizar si resultarán defectuosos o no defectuosos. El correspondiente espacio muestral es:

$$\Omega = \{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$$

donde *d*: artículo defectuoso, *n*: artículo no defectuoso.

Con frecuencia, para obtener el espacio muestral se recurre a la elaboración de un diagrama de árbol, el cual es una representación gráfica que permite visualizar los posibles resultados del experimento aleatorio (Chernoff y Zazkis, 2011). La Figura 1.1 posibilita la determinación del espacio muestral correspondiente al experimento de seleccionar tres artículos de un proceso productivo para analizar si son defectuosos o no defectuosos.

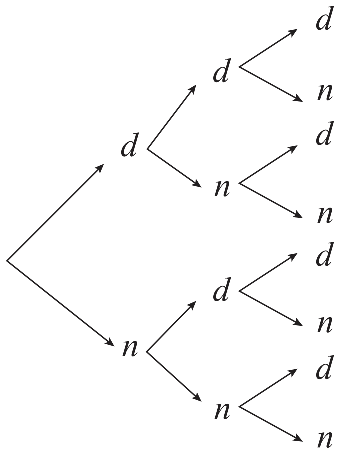

Figura 1.1 Diagrama de árbol

El anterior diagrama de árbol también puede dibujarse con las ramas hacia arriba o con las ramas hacia abajo, obteniéndose los mismos ocho resultados posibles.

Ejemplo 1.10 ξ: se lanzan dos dados justos (no cargados) simultáneamente, ¿cuántos y cuáles resultados son posibles? Hay 36 resultados posibles, el espacio muestral es el siguiente:

$$\Omega = \left\{ \begin{matrix} (1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6) \\ (3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4)\ (3,5)\ (3,6)\ (4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6) \\ (5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4)\ (5,5)\ (5,6)\ (6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6) \end{matrix} \right\}$$

Retomando los ejemplos 1.1, 1.2 y 1.3 sus correspondientes espacios muestrales son:

$\Omega =$ {*si tiene el peso anaunciado, no tiene el peso anunciado*} = {*s,n*}

$\Omega =$ {*si hace gol, no hace gol*} = {*s,n*}

$\Omega =$ {*1, 2, 3, 4, 5, 6*}

1.1.3 *Clases de espacios muestrales*

Sea ξ un experimento aleatorio y Ω el espacio muestral correspondiente al experimento ξ, el espacio muestral Ω se llama discreto si Ω es un conjunto finito o numerable. El espacio muestral Ω se denomina espacio muestral continuo si Ω es un conjunto infinito no numerable (Lindgren, 1993; Blanco, 2004).

Los ejemplos 1.3, 1.4, 1.5, 1.9 y 1.10 corresponden a espacios muestrales finitos y los ejemplos 1.6 y 1.7 a espacios muestrales infinito numerables o contables; en consecuencia, los mencionados ejemplos son espacios muestrales discretos. El ejemplo 1.8 corresponde a un espacio muestral continuo por tratarse de un conjunto infinito no numerable o no contable.

1.1.4 *Concepto intuitivo de evento*

Sea ξ un experimento aleatorio y Ω su espacio muestral, de manera intuitiva, un subconjunto E de Ω para el cual se pueda asignar una *medida* numérica de su posibilidad de ocurrencia se denomina evento. Es de anotar que no todo subconjunto de un espacio muestral es un evento (Kolmogórov, 1956). Los eventos se denotan con letras mayúsculas.

Ejemplo 1.11 Utilizando el experimento aleatorio mencionado en el ejemplo 1.9, cuyo espacio muestral es:

$$\Omega = \{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$$

Se determinan los siguientes eventos:

E: a lo más resulte un artículo defectuoso.

$$E = \{dnn, nnd, ndn, nnn\}$$

F: como mínimo un artículo resulte no defectuoso.

$$F = \{ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$$

G: como máximo tres artículos resulten defectuosos.

$$G = \{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\} = \Omega$$

Cuando un evento resulta igual al espacio muestral se lo denomina evento seguro, tal como ocurre con el evento *G*.

H: como mínimo cuatro artículos resulten no defectuosos al seleccionar aleatoriamente tres artículos de un proceso productivo.

$$H = \{\ \} = \phi$$

Cuando un evento resulta vacío se llama evento imposible, tal como ocurre con el evento *H*.

I: como mínimo tres artículos resulten defectuosos

$$I = \{ddd\}$$

Ejemplo 1.12 Utilizando el siguiente espacio muestral:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1)\ (1,2)\ (1,3)\ (1,4)\ (1,5)\ (1,6)\ (2,1)\ (2,2)\ (2,3)\ (2,4)\ (2,5)\ (2,6) \\ (3,1)\ (3,2)\ (3,3)\ (3,4)\ (3,5)\ (3,6)\ (4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6) \\ (5,1)\ (5,2)\ (5,3)\ (5,4)\ (5,5)\ (5,6)\ (6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6) \end{Bmatrix}$$

Determinar los siguientes eventos para los cuales:

E: la primera componente resulte un número par mayor que dos

$$E = \{(4,1)\ (4,2)\ (4,3)\ (4,4)\ (4,5)\ (4,6)\ (6,1)\ (6,2)\ (6,3)\ (6,4)\ (6,5)\ (6,6)\}$$

F: la primera y la segunda componente de cada pareja resulten ser números pares

$$F = \{(2,2)\ (2,4)\ (2,6)\ (4,2)\ (4,4)\ (4,6)\ (6,2)\ (6,4)\ (6,6)\}$$

G: la primera y la segunda componente de cada pareja resulten ser números pares e iguales

$$G = \{(2,2)\ (4,4)\ (6,6)\}$$

H: la primera y la segunda componente de cada pareja resulten ser iguales

$$H = \{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (5,5)\ (6,6)\}$$

J: la primera sea igual a siete veces la segunda componente

$$J = \{\ \}$$

1.2 Concepción axiomática de probabilidad

El tratamiento axiomático de la probabilidad se inicia en la primera década del siglo XX con los aportes de Baire, Caratheodory, Lebesgue, Fréchet y Borel utilizando elementos de la teoría de la medida y la teoría de conjuntos, luego Kolmogórov escribió su libro "Fundamentos de la teoría de la probabilidad" (*Grundbegriffe der Wahrsecheinlichkeitsrechnung*) publicado en 1933, en el cual se define de manera rigurosa el concepto de probabilidad tanto para espacios de dimensión finita como infinita. A continuación, se mencionan los axiomas de la teoría de la probabilidad en el sentido de Kolmogórov (1956):

Axioma 1: los eventos forman un $\sigma -$ álgebra $\Im$; es decir, una clase cerrada respecto de las operaciones de unión, intersección y complemento de conjuntos numerables de eventos y del límite de sucesiones de eventos, o sea,

a) Si $E_j \in \Im,\ j = 1,2,...$ entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \Im$

b) Si $E_j \in \Im,\ j = 1,2,...$ entonces $\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j \in \Im$, y $\lim_{j \to \infty} E_j \in \Im$

Axioma 2: $\Omega \in \Im$

Axioma 3: asociado a cada evento $E \in \Im$, existe un número real no negativo, $P(E)$, al que se denominará probabilidad de ocurrencia del evento E

Axioma 4: la probabilidad de que ocurra al menos uno de los eventos incluidos en el espacio muestral es igual a uno, $P(\Omega) = 1$

Axioma 5 (de aditividad): sean E_1 y E_2 eventos incompatibles, es decir, tales que no pueden presentarse en forma simultánea ($E_1 \cap E_2 = \phi$), entonces se verifica que,

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Axioma 6 (teorema de continuidad): Dada una sucesión monótona de eventos $E_i \subset E_{i+1},\ i = 1,2,3,...$, entonces se verificará que $\lim_{i \to \infty} P(E_i) = P(\lim_{i \to \infty} E_i)$

En este apartado se desglosan y ejemplifican los elementos asociados con el concepto de probabilidad desde el enfoque axiomático, entre ellos, el concepto de sigma álgebra espacio medible y eventos, medida de probabilidad y espacio de probabilidad incluyendo algunas propiedades.

1.2.1 *El concepto de sigma álgebra*

El concepto que se indica a continuación involucra los axiomas 1 y 2 de Kolmogórov. Sea $\Omega \neq \phi$. Una familia $\Im$ de subconjuntos del espacio muestral Ω se denomina un sigma (σ) álgebra sobre Ω, si se cumplen los siguientes axiomas:

i) $\Omega \in \Im$

ii) Si $E \in \Im$ entonces $E^c \in \Im$

iii) Si $E_1, E_2, ... \in \Im$ entonces $\bigcup_{j=1}^{\infty} E_i \in \Im$

Ejemplo 1.13 Sea $\Omega = \{s, n\}$ un espacio muestral, las colecciones de subconjuntos de Ω siguientes son $\sigma -$ álgebras:

$$\Im_1 = \{\phi, \Omega\}$$

$$\Im_2 = \{\phi, \{s\}, \{n\}, \Omega\}$$

A la familia de subconjuntos de Ω denotada con $\Im_1$ y conformada por el evento imposible y el evento seguro se le denomina $\sigma -$ álgebra trivial.

A la colección $\Im_2$ correspondiente al conjunto de partes de Ω se le llama $\sigma -$ álgebra total y se constituye en el $\sigma -$ álgebra más grande que se puede construir sobre Ω.

La colección:

$\Im_3 = \{\phi, \{s\}, \Omega\}$ no es un $\sigma -$ álgebra sobre Ω, puesto que $\{s\}^c = \{n\} \notin \Im_3$

Ejemplo 1.14 Sea $\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$ el espacio muestral conformado por todos los resultados posibles al lanzar una moneda dos veces, exceptuando que caiga de filo, donde *s: sello c: cara*. Las colecciones de subconjuntos de Ω siguientes son $\sigma -$ álgebras:

$$\Im_1 = \{\phi, \Omega\}$$

$$\Im_2 = \{\phi, \{cc\}, \{cs, sc, ss\}, \Omega\}$$

$$\Im_3 = \{\phi, \{cc, cs\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$$

$$\Im_4 = \{\phi, \{cc, cs, sc\}, \{ss\}, \Omega\}$$

$$\Im_5 = \left\{ \begin{array}{l} \phi, \{cc\}, \{cs\}, \{sc\}, \{ss\}, \{cc, cs\}, \{cc, sc\}, \{cc, ss\}, \\ \{cs, sc\}, \{cs, ss\}, \{sc, ss\}, \{cc, cs, sc\}, \{cc, cs, ss\}, \\ \{cc, sc, ss\}, \{cs, sc, ss\}, \{cc, cs, sc, ss\} \end{array} \right\}$$

La familia de subconjuntos de Ω que se indica a continuación,

$$\Im_6 = \{\phi, \{cc, cs\}, \{ss\}, \Omega\}$$

no corresponde a un σ –álgebra sobre Ω, puesto que

$$\{ss\}^c = \{cc, cs, sc\} \notin \Im_6$$

$$\{cc, cs\}^c = \{sc, ss\} \notin \Im_6.$$

Un σ – álgebra muy importante para luego definir variables aleatorias reales es el σ – álgebra de Borel, la cual corresponde a la menor σ – álgebra definida sobre el espacio muestral $\Omega = R$ que contiene a todos los intervalos de la forma $(-\infty, x]$ con $x \in R$, se denota con β (Blanco, 2004).

1.2.2 *Espacio medible y eventos*

Sea $\Omega \neq \phi$ y $\Im$ un σ – álgebra sobre Ω, la pareja $(\Omega, \Im)$ se denomina espacio medible. De manera formal, a los elementos del σ – álgebra $\Im$ se les llama eventos. A continuación se mencionan algunas operaciones con eventos y se caracterizan algunos de ellos.

1.2.2.1 Operaciones con eventos

Si $\Im$ es un σ – álgebra sobre Ω, *E y F* son eventos de $\Im$ entonces se pueden definir los siguientes eventos:

i) $E \cup F$ es un evento de $\Im$ que indica que E o F, o ambos ocurren.

ii) $E \cap F$ es un evento de $\Im$ que indica que E y F ocurren a la vez.

iii) E^c es un evento de $\Im$ que indica que no ocurre F.

iv) $E-F$ es un evento de $\Im$ que indica que E ocurre pero F no ocurre.

v) $E\Delta F=(E-F)\cup(F-E)$ es un evento de $\Im$ que indica que sucede E o sucede F pero no ocurren los dos a la vez.

Ejemplo 1.15 Sea el espacio muestral del ejemplo 1.11, conformado por los siguientes resultados:

$\Omega=\{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$

Sea, $\Im$ el sigma álgebra correspondiente al conjunto partes de Ω, entonces se pueden definir los siguientes eventos:

E: que a lo más resulte un artículo defectuoso.

$$E=\{dnn, nnd, ndn, nnn\}$$

Entonces,

$$E^c=\{ddd, ddn, dnd, ndd\}$$

F: que como mínimo un artículo resulte no defectuoso.

$$F=\{ddd, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$$

Además,

$$F^c=\{ddd\}$$

A continuación se determinan los siguientes eventos:

i) $E\cup F=\{ddd, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$

ii) $E\cap F=\{dnd, nnd, ndnn, nnn\}$

iii) $E^c=\{ddd, ddn, dnd, ndd\}$

iv) $E-F\ \{\ \}$

v) $E-F=\{ddn, dnd, ndd\}$

vi) $E\cup F^c=\{dnn, nnd, ndn, nnn, ddd\}$

vii) $E\,\Delta\,F=(E-F)\cup(F-E)=\{ddn, dnd, ndd\}$

1.2.2.2 Eventos mutuamente excluyentes

Si $\Im$ es un $\sigma -$ álgebra sobre Ω, *E y F* son eventos de $\Im$ entonces se dice que *E y F* son mutuamente excluyentes si $E \cap F = \phi$.

Ejemplo 1.16 El espacio muestral que contiene los posibles resultados de analizar si la asignatura de Estadística será aprobada o reprobada por dos estudiantes es,

$$\Omega = \{aa, ar, ra, rr\}$$

Donde *a:* aprobar la asignatura de estadística, *r*: reprobar la asignatura de estadística.

Ahora, sea, $\Im$ el sigma álgebra correspondiente al conjunto partes de Ω, se definen los eventos:

E: por lo menos los dos estudiantes aprobarán la asignatura de estadística.

F: por lo menos los dos estudiantes reprobarán la asignatura de estadística.

Los eventos anteriores están conformador por los siguientes resultados:

$$E=\{aa\}$$

$$F=\{rr\}$$

Luego, se cumple que:

$$E \cap F = \{\ \} = \phi$$

En consecuencia, se concluye que los eventos *E y F* son eventos mutuamente excluyentes.

1.2.3 *Medida de probabilidad*

El concepto que se indica en seguida involucra los axiomas 3, 4, 5 y 6 de Kolmogórov.

Sea $(\Omega, \Im)$ un espacio muestral medible y una función de conjunto,

$$P : \Im \rightarrow R$$

Tal que:

i) $P(E) \geq 0$ para todo $E \in \Im$

ii) $P(\Omega) = 1$.

iii) Si $E_1, E_2, ...$ es una sucesión de eventos en $\Im$ tales que $E_i \cap E_j = \phi$ para todo $i \neq j$ entonces,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

La función P se llama una medida de probabilidad sobre el espacio muestral Ω. A la tripleta ordenada $(\Omega, \Im, P)$ se le denomina un espacio de probabilidad sobre Ω.

1.2.3.1 Propiedades de una medida de probabilidad

Las propiedades se indican a continuación basan en lo expuesto por Lindgren (1993) y su comprobación es una versión dada por los autores del presente texto.

Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω, entonces:

i) Para todo $E \in \Im$ se cumple que $P(E^c) = 1 - P(E)$.

ii) $P(\phi) = 0$.

iii) Para todo $E, F \in \Im$, $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap \mathrm{F})$.

iv) Si $E, F \in \Im$ y $E \subset F$ entonces $P(E) \leq P(F)$.

v) Si $P(E) = 0$ entonces $P(E \cap F) = 0$.

vi) $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$.

v*ii)* Para $E, F \in \Im$ se cumple que, $P(E \cap F) \leq P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$.

viii) Si $E, F \in \Im$ y $E \subset F$ entonces $P(F - E) = P(F) - P(E)$.

ix) Si $E_1, ..., E_n \in \Im$ y $E_i \cap E_j = \phi$ para todo $i \neq j$ entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

Es conveniente señalar que en las anteriores propiedades reposa el denominado cálculo de probabilidades.

1.2.3.2 Comprobación de propiedades

i) Para todo $E \in \Im$ se cumple que $P(E^c) = 1 - P(E)$

Como E y E^c son eventos mutuamente excluyentes, se puede escribir que:

$$\Omega = E \cup E^c$$

$$1 = P(\Omega) = P(E \cup E^c) = P(E) + P(E^c)$$

$$1 = P(E) + P(E^c) \ .$$

De la anterior expresión resulta que:

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

ii) $P(\phi) = 0$

Puesto que,

$$\phi = \Omega^c$$

aplicando la parte *i)* resulta,

$$P(\phi) = P(\Omega^c) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$$

iii) Para todo $E, F \in \Im$ se cumple que,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap \mathrm{F})$$

En efecto, como $E - F$ y $E \cap F$ son eventos mutuamente excluyentes, tales que

$$E = (E - F) \cup (E \cap F)$$

entonces,

a) $P(E) = P(E - F) + P(E \cap F)$

Implica que,

$$P(E) - P(E \cap F) = P(E - F)$$

Además $F - E$ y $E \cap F$ son eventos mutuamente excluyentes, tales que

$$F = (F - E) \cup (E \cap F)$$

Entonces,

b) $P(F) = P(F - E) + P(E \cap F)$

Implica que,

$$P(F) - P(E \cap F) = P(F - E)$$

Pero $E - F$, $F - E$ y $E \cap F$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$E \cup F = (E - F) \cup (F - E) \cup (E \cap F)$$

c) $P(E \cup F) = P(E - F) + P(F - E) + P(E \cap F)$

Utilizando los resultados de la parte derecha en *a)* y *b)* se tiene que *c)* se transforma en:

$$P(E \cup F) = P(E) - P(E \cap F) + P(F) - P(E \cap F) + P(E \cap F)$$

Finalmente, simplificando resulta,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

iv) Si $E, F \in \Im$ y $E \subset F$ entonces $P(E) \leq P(F)$

Puesto que $E \subset F$, los eventos E y $F - E$ son mutuamente excluyentes, tales que

$$F = E \cup (F - E)$$

$$P(F) = P(E) + P(F - E)$$

Pero $P(F - E) \geq 0$, luego la igualdad anterior es equivalente con:

$$P(F) \geq P(E)$$

es decir,

$$P(E) \leq P(F)$$

v) Si $P(E) = 0$ entonces $P(E \cap F) = 0$

$$E \cap F \subseteq E$$

$$P(E \cap F) \leq P(E) = 0$$

pero

$$P(E \cap F) \geq 0$$

entonces,

$$0 \leq P(E \cap F) \leq 0$$

Lo anterior implica que,

$$P(E \cap F) = 0$$

vi) $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$

Como $E - F$ y $E \cap F$ son eventos mutuamente excluyentes, tales que

$$E = (E \cap F) \cup (E - F)$$

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E - F)$$

por propiedades de los conjuntos, se tiene que $E - F = E \cap F^c$ y reemplazando en la expresión anterior, resulta:

$$P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$$

v*ii)* Para $E, F \in \mathfrak{I}$ se cumple que,

$$P(E \cap F) \leq P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$$

Puesto que,

$$(E \cap F) \subseteq (E \cup F)$$

a) $P(E \cap F) \leq P(E \cup F)$

Pero,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

como

$$P(E \cap F) \geq 0$$

$$P(E \cup F) \leq P(E) + P(F)$$

Sustituyendo en *a)* se obtiene:

$$P(E\cap F)\le P(E\cup F)\le P(E)+P(F)$$

viii) Si $E,F\in\Im$ y $E\subset F$ entonces $P(F-E)=P(F)-P(E)$.

Debido a que si $E\subset F$, los eventos E y $F-E$ son mutuamente excluyentes, entonces,

$$F=E\cup(F-E)$$

$$P(F)=P(E)+P(F-E)$$

$$P(F)-P(E)=P(F-E)\ .$$

ix) Si $E_1,...,E_n\in\Im$ y $E_i\cap E_j=\phi$ para todo $i\neq j$ entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(E_i)$$

Por la propiedad *iii)* de los axiomas de medida de probabilidad, se cumple que,

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(E_n)$$

Como por hipótesis, $E_1,...,E_n\in\Im$ y $E_i\cap E_j=\phi$ para todo $i\neq j$, considerando $E_{n+1}=\phi, E_{n+2}=\phi,...\in\Im$ resulta,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(E_i)=\sum_{i=1}^{n}P(E_i)$$

1.2.3.3 Ley de Probabilidad total

Si $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de eventos mutuamente excluyentes dos a dos, tales que la unión de ellos es igual al espacio muestral Ω entonces la mencionada sucesión se denomina una partición del espacio muestral. En este caso para el evento $F\in\Im$, la probabilidad total de que ocurra F se calcula de la siguiente manera,

$$P(F)=\sum_{n=1}^{\infty}P(F\cap E_n)$$

1.3 Concepción clásica de probabilidad

Una primera aproximación al concepto de probabilidad se hace en el libro titulado *Ars Conjectandi*, así (Bernoulli, 1968),

> La probabilidad de un evento es la razón del número de casos igualmente probables que lo favorecen entre el número total de casos posibles igualmente probables bajo las circunstancias.

Años más tarde, este concepto fue formalizado por el matemático De Moivre, ampliado y afinado por Laplace (1985/1814), p. 28) para luego plasmarlo en la siguiente definición, conocida como probabilidad clásica:

> La probabilidad de un suceso que puede ocurrir en un número finito de resultados es una fracción con denominador el número de todos los casos posibles y con numerador el número de casos favorables al suceso de interés.

La mencionada cita, se puede interpretar de la siguiente forma: la probabilidad de un evento o suceso que puede ocurrir solamente en número finito de modos se define como el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles, siempre y cuando todos los resultados posibles sean igualmente probables o equiprobables; es decir tengan la misma verosimilitud (Alexander y Kelly, 1999). Este concepto ha presentado un reducido número de aplicaciones debido a que exige contar con un conjunto finito de resultados posibles verosímiles; es decir, el concepto de equiprobabilidad es inaplicable a espacios muestrales de dimensión infinita en la medida que la suma infinita de constantes así sean muy pequeñas no será igual a 1.

Hoy el concepto de probabilidad clásica es un caso particular de la concepción axiomática; en consecuencia es posible definir los denominados espacios de probabilidad laplacianos como se indica a continuación.
Un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ se denomina espacio de probabilidad laplaciano, si $\Omega \neq \phi$ es finito, el $\sigma -$ álgebra $\Im$ es igual al conjunto partes de Ω, es decir $\Im = \wp(\Omega)$ y $P(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{\#\Omega}$ para todo punto $\omega \in \Omega$

La medida de probabilidad P se llama distribución laplaciana en Ω.

Ahora, si $(\Omega, \Im, P)$ es un espacio de probabilidad laplaciano y $E \subseteq \Omega$, entonces,

$$P(E) = P\left(\bigcup_{\omega \in E} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in E} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{Cardinal\ de\ E}{Cardinal\ de\ \Omega}$$

En este contexto, si $|E|$ representa el número de casos favorables al evento E y si $|\Omega|$ es el número de casos posibles, entonces,

$$P(E) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ E}{Número\ de\ casos\ posibles} = \frac{\#E}{\#\Omega}$$

La anterior expresión recoge la definición dada por Laplace.

Ejemplo 1.17 Se compran tres artículos, uno después de otro, los cuales pueden resultar defectuosos o no defectuosos, el espacio muestral está formado por los siguientes resultados:

$$\Omega = \{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd, nnn\}$$

Ahora, sea, $\Im$ el sigma álgebra correspondiente al conjunto partes de Ω, se definen los siguientes eventos:

E: que a lo más salga un artículo defectuoso entre los tres artículos comprados.
F: que a lo más salgan dos artículos no defectuosos entre los tres artículos comprados.

Los eventos anteriores se pueden expresar de la siguiente forma:

$$E = \{dnn, ndn, nnd, nnn\}$$

$$F = \{ddd, ddn, dnd, dnn, ndd, ndn, nnd\}$$

$$P(E) = \frac{número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ E}{número\ de\ casos\ posibles} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(F) = \frac{7}{8}$$

Otros resultados son:

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$P(F^c) = 1 - P(F) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

Como $E \cap F = \{dnn, ndn, nnd\}$ entonces

$$P(E \cap F) = \frac{3}{8}$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap \mathrm{F}) = \frac{1}{2} + \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = 1$$

Debido a que $E - F = \{nnn\}$ entonces,

$$P(E - F) = \frac{1}{8}$$

Puesto que $F - E = \{ddd, ddn, dnd, ndd\}$ entonces,

$$P(F - E) = \frac{4}{8}$$

Ejemplo 1.18 Si $P(E) = 0.55$, $P(F) = 0.58$ y $P(E \cap F) = 0.24$, entonces: $P(E \cup F) = ?$, $P(E^c) = ?$, $P(F^c) = ?$, $P(E - F) = ?$

Puesto que,

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap \mathrm{F})$$

$$P(E \cup F) = 0.55 + 0.58 - 0.24 = 0.89$$

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - 0.55 = 0.45$$

$$P(F^c) = 1 - P(F) = 1 - 0.58 = 0.42$$

Como $P(E - F) = P(E \cap F^c)$ y usando la propiedad *vi)* de una medida de probabilidad: $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F^c)$ resulta que,

$$P(E - F) = P(E) - P(E \cap F) = 0.55 - 0.24 = 0.31$$

1.4 Probabilidad condicional

Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω y sea F un evento en $\Im$ talque $P(F) > 0$, sea E un evento en $\Im$ entonces la probabilidad de E una vez ha sucedido F está dada por (Lindgren, 1993),

$$P(E / F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

A la anterior expresión se le denomina probabilidad condicional de E dado F .

Nótese que si $E \cap F = \phi$ entonces $P(E / F) = 0$. El recíproco no es cierto.

De la definición de probabilidad condicional se tiene que,

$$P(E \cap F) = P(E / F)P(F)$$

A la expresión anterior se le llama regla de multiplicación para eventos dependientes.

Ahora, si $E_1,...,E_n \in \Im$ con $P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_{n-1}) > 0$ entonces

$$P(E_1 \cap E_2 \cap ... \cap E_n) = P(E_1)P(E_2 / E_1)P(E_3 / E_1 \cap E_2)...P(E_n / E_1 \cap E_2 \cap ... E_{n-1})$$

En los ejemplos que se proporcionan a continuación, se asume que se está trabajando en el contexto de un espacio de probabilidad.

Ejemplo 1.19 El siguiente ejemplo se ha adaptado de Feller (1993). La licitación enviada por la compañía JJ para la construcción de un edificio en la ciudad C, será estudiada por la Junta Directiva del departamento de planeación de dicha ciudad para su revisión y posible adjudicación. La probabilidad de que la licitación sea estudiada es de 0.94, la probabilidad de que la licitación sea estudiada y adjudicada es de 0.84. ¿Cuál es la probabilidad de que la licitación será adjudicada dado que fue estudiada?

Para realizar el cálculo de dicha probabilidad, se definen los siguientes eventos:

E : la licitación será adjudicada a la compañía JJ.

F : la licitación será estudiada por la Junta Directiva, entonces $P(F) = 0.94$.

$E \cap F = F \cap E$: La licitación será estudiada y adjudicada, entonces $P(E \cap F) = 0.84$

$$P(E / F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.84}{0.94} = 0.8936$$

La probabilidad de que la licitación presentada por la compañía JJ sea adjudicada dado que fue estudiada por la Junta Directiva del departamento de planeación de la ciudad C es de 0.8936, es decir del 89.36%.

Ejemplo 1.20 La probabilidad de que el proyecto H haya resultado bien planeado es del 0.92, la probabilidad de que dicho proyecto haya sido bien planeado y que será bien ejecutado es del 0.81, ¿cuál es la probabilidad de que ese proyecto será bien ejecutado, dato que resultó bien planeado?

A fin de lograr el cálculo de la probabilidad requerida, se definen los siguientes eventos:

E: el proyecto H será bien ejecutado.

F: el proyecto H resultó bien planeado, entonces $P(F) = 0.92$.

$E \cap F = F \cap E$: el proyecto H resultó bien planeado y será bien ejecutado, entonces $P(E \cap F) = 0.81$

Luego,

$$P(E/F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.81}{0.92} = 0.8804$$

Por lo tanto, la probabilidad de que el proyecto H será bien ejecutado, dado que resultó bien planeado es de 0.8804, es decir del 88.04%.

1.5 Eventos independientes

Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω y sean F, E eventos en $\Im$ tal que $P(F) > 0$, E y F son eventos (estadísticamente) independientes si

$$P(E/F) = P(E)$$

Lo anterior indica que la ocurrencia de F en nada afecta a la probabilidad de ocurrencia del evento E (Lindgren, 1993). Nótese que si $P(E) > 0$ y E y F son independientes entonces F y E son independientes.

Como en general se cumple que,

$$P(E \cap F) = P(E/F)P(F)$$

entonces reemplazando $P(E/F) = P(E)$ en la anterior igualdad resulta la denominada ley de multiplicación para eventos estadísticamente independientes.

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

La anterior expresión se denomina ley de multiplicación para eventos independientes.

1.6 Teorema de Bayes

Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω y sean F, E eventos en $\Im$ tales que $P(E) > 0$, $P(F) > 0$ entonces (Canavos, 1988):

$$P(E/F) = \frac{P(F/E)P(E)}{P(F/E)P(E) + P(F/E^c)P(E^c)}$$

Utilizando el concepto de probabilidad total se puede escribir:

$$P(F) = P(F/E)P(E) + P(F/E^c)P(E^c)$$

por lo tanto,

$$P(E/F) = \frac{P(F/E)P(E)}{P(F)}$$

1.6.1 *Consecuencia del teorema de Bayes*

Sea $E_1, E_2, \ldots$ una partición de Ω con $P(E_i) > 0$ para todo *n*, entonces para todo F evento de $\Im$ tal que $P(F) > 0$ se cumple que,

$$P(E_i / F) = \frac{P(F/E_i)P(E_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(F/E_i)P(E_i)}$$

Ejemplo 1.21 Una empresa productora del artículo TT tiene tres puntos de producción A, B, C, donde el 65% de las unidades del artículo TT se produce en el punto A, el 20% en el punto B y el 15% en el punto C. Por circunstancias de mantenimiento de sus máquinas se están produciendo algunas unidades del artículo TT defectuosas. Sin embargo, el 90% de las unidades del producto que provienen de A resulta de buena calidad, el 75% de las que provienen de B es de buena calidad y el 60% de las que provienen de C es de buena calidad, si se selecciona aleatoriamente una unidad del producto TT, ¿cuál es la probabilidad de que resulte de buena calidad? Determinar la probabilidad de que si la unidad resultó de buena calidad haya sido producida en el punto C. ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo TT resulte de no buena calidad? Determinar la probabilidad de que si la unidad resultó de no buena calidad haya sido producida en el punto B

Se definen los siguientes eventos:

E :la unidad del artículo TT seleccionada aleatoriamente resultará de buena calidad.
A :unidades del artículo TT producidas en el punto A.
B :unidades del artículo TT producidas en el punto B.
C :unidades del artículo TT producidas en el punto C.

$$P(E) = P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C)$$

$$P(E) = (0.9)(0.65) + (0.75)(0.2) + (0.6)(0.15)$$

$$P(E) = 0.585 + 0.15 + 0.09 = 0.825$$

La probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo TT resulte de buena calidad es de 0.825 o del 82.5%.

$$P(C/E) = \frac{P(E/C)P(C)}{P(E/A)P(A) + P(E/B)P(B) + P(E/C)P(C)}$$

$$P(C/E) = \frac{(0.6)(0.15)}{0.825} = \frac{0.09}{0.825} = 0.109$$

La probabilidad de que si la unidad resultó de buena calidad haya sido producida en el punto C es de 0.109 o del 10.9%.
Ahora se define el siguiente evento:

F :la unidad del artículo TT seleccionada aleatoriamente resultará de no buena calidad.

$$P(F) = P(F/A)P(A) + P(F/B)P(B) + P(F/C)P(C)$$

$$P(F) = (0.1)(0.65) + (0.25)(0.2) + (0.4)(0.15)$$

$$P(F) = 0.065 + 0.05 + 0.06 = 0.175$$

Por lo tanto, la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo TT resulte de no buena calidad es de 0.175 o del 17.5%.

$$P(B/\ F) = \frac{P(F/B)P(B)}{P(F/A)P(A) + P(F/B)P(B) + P(F/C)P(C)}$$

$$P(B/\ F) = \frac{(0.25)(0.2)}{0.825} = \frac{0.05}{0.175} = 0.2857$$

Luego, la probabilidad de que si la unidad resultó de no buena calidad haya sido producida en el punto B es de 0.2857 o del 28.57%.

1.7 Espacios no laplacianos

Cuando se tiene incertidumbre total frente al problema que se está estudiando, resulta razonable asignar la misma probabilidad a cada uno de los puntos muestrales de Ω, particularmente cuando el espacio muestral es finito.

Ejemplo 1.22 ξ: se hace girar una ruleta dividida en dos sectores circulares desiguales pintada con los colores amarillo y rojo. El espacio muestral asociado es,

$$\Omega = \{a,\ r\}$$

donde a :la ruleta señalará el color amarillo, r : la ruleta señalará el color rojo. Tomando como referencia el sigma álgebra dada por

$$\Im = \wp(\Omega) = \{\phi, \{a\}, \{r\}, \{a, r\}\}$$

se puede definir la siguiente *medida de probabilidad:*

$$P : \Im \rightarrow R$$

Tal que

$$P(\{a\}) = p_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad P(\{r\}) = p_2 \geq 0$$

Entonces se debe cumplir que:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$, es decir que $p_1 + p_2 = 1$

En este caso no es adecuado asumir que $p_1 = p_2 = 0.5$; aquí ya no tiene sentido trabajar bajo equiprobabilidad o total incertidumbre, puesto que se trata de un ejemplo sobre un espacio no laplaciano.

Para cada uno de los giros de la ruleta, se tendrá que $p_1 \neq p_2$, pudiéndose tener por ejemplo que:

$$p_1 = 0.3 \text{ y } p_2 = 0.7$$

$$p_1 = 0.2 \text{ y } p_2 = 0.8$$

En otro caso, puede suceder por ejemplo que $p_1 = 9p_2$ con lo cual resulta que:

$$p_1 + p_2 = 9p_2 + p_2 = 1$$

Entonces,

$$p_1 = 0.9 \; y \; p_2 = 0.1$$

En esta misma dirección, se pueden presentar infinidad de casos dependiendo de qué tan desiguales sean los dos sectores que conforman el círculo de la ruleta. Es decir, hay infinidad de valores que pueden asumir p_1 y p_2 de tal forma que $p_1 + p_2 = 1$.

Es importante tener en cuenta que el concepto de equiprobabilidad solo puede tener sentido en espacios de probabilidad finitos.

1.8 Espacios de probabilidad discretos de dimensión infinita

En este apartado se proporcionan algunos ejemplos de espacios de probabilidad de dimensión finita e infinita, en los cuales el concepto de equiprobabilidad carece de sentido.

Si Ω es un espacio muestral discreto finito, entonces Ω puede ser expresado de la siguiente forma,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$$

Donde los ω_i para $i = 1, 2, ..., n$ son eventos elementales o simplemente puntos que conforman el espacio muestral. Para construir un espacio de probabilidad sobre Ω, se puede usar el sigma álgebra total conformada por el conjunto partes de Ω, $\Im = \wp(\Omega)$ y definir una medida de probabilidad de la siguiente manera:

$$P : \Im \to R$$

tal que

$$P(\{\omega_i\}) = p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

La función anterior debe satisfacer:

i) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}$

ii) $P(\Omega) = 1$

iii) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Aquí los p_i no necesariamente son iguales y se pueden tomar valores razonables y concordantes con algún problema real que se esté modelando.

Ejemplo 1.23 Para un evento E de Ω formado por los siguientes puntos muestrales,

$$E = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

$$P(E) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\} \cup \{\omega_3\}) = p_1 + p_2 + p_3$$

Solamente si se trabaja bajo total incertidumbre se puede asumir que $p_1 = p_2 = p_2 = \frac{1}{3}$; en este caso se estará trabajando el concepto de equiprobabilidad.

Para los demás casos puede ocurrir que $p_1 \neq p_2$, o $p_1 \neq p_3$ o $p_2 \neq p_3$ o $p_1 \neq p_2 \neq p_3$, pudiéndose tener por ejemplo que:

$$p_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{6}, \quad p_3 = \frac{1}{2}$$

$$p_1 = \frac{1}{5}, \quad p_2 = \frac{2}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}$$

En otro caso puede suceder por ejemplo que $p_1 = 3p_2$ y $p_2 = 2p_3$ con lo cual resulta que:

$$6p_3 + 2p_3 + p_3 = 1\ .$$

Entonces,

$$p_1 = \frac{6}{9},\ p_2 = \frac{2}{9},\ p_3 = \frac{1}{9}$$

Y así sucesivamente.

En general, si se tiene cualquier evento E de Ω formado por los siguientes puntos muestrales,

$$E = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\},\ \ k = 1, 2, ..., n$$

$$P(E) = P\left(\bigcup_{j=1}^{k}\{\omega_{i_j}\}\right) = \sum_{j=1}^{k} P(\{\omega_{i_j}\}) = p_{i_1} + p_{i_2} + ... + p_{i_k}$$

solo si se está trabajando bajo total incertidumbre frente al problema que se esté estudiando, resulta razonable asignar la misma probabilidad a cada uno de los puntos muestrales de Ω, lo cual implica que todos los p_i son iguales, es decir que se asume que:

$$p_i = \frac{1}{n},\ \ \text{para } i = 1, 2, ..., n.$$

Bajo estas circunstancias, para el evento,

$$E = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, ..., \omega_{i_k}\},\ \ k = 1, 2, ..., n$$

$$P(E) = P\left(\bigcup_{j=1}^{k}\{\omega_{i_j}\}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{k}{n}$$

A continuación, se considerará un espacio muestral Ω infinito contable, sobre el cual se ha definido un sigma álgebra de manera apropiada,

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}$$

y se define una medida de probabilidad de la siguiente manera:

$$P : \Im \rightarrow R$$

Tal que
$$P(\{\omega_i\}) = p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$
$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{\omega_i\}$$

La función anterior debe satisfacer:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $ii) \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Aquí los p_i no pueden ser iguales ya que no se cumpliría la anterior condición y por eso aquí la equiprobabilidad no funciona ni tiene sentido.
Para un evento E de Ω formado por los siguientes puntos muestrales,

$$E = \{\omega_1, \omega_2\}$$
$$P(E) = P(\{\omega_1\} \cup \{\omega_2\}) = p_1 + p_2 = 1 - \sum_{i=3}^{\infty} p_i \ .$$

Ejemplo 1.24 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$ con el sigma álgebra total, se define la siguiente función,

$$P(\{n\}) = p_n = \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Se puede verificar que la anterior función define una medida de probabilidad, ella cumple que:

i) $p_n \geq 0$

ii) $ii) \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = -1 + 2 = 1.$

Para el evento $E = \{1, 3, 5, \ldots\}$ su probabilidad de ocurrencia es:

$$P(E) = P(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup, \ldots)$$
$$P(E) = P(\{1\}) + P(\{3\}) + P(\{5\}) + \ldots.$$
$$P(E) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1-1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = -1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = -1+2 = 1$$

$$P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{-1}}\right) \frac{1}{2^{2n}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n}$$

$$P(E) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1\right) = 2\left(\frac{1}{\frac{3}{4}} - 1\right) = 2\left(\tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{2}{3}$$

Para el evento $F = \{2, 4, 6, ...\}$ su probabilidad de ocurrencia se calcula de la siguiente manera,

$F = \{2, 4, 6, ...\} = E^c$.

Luego,

$$P(F) = P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} .$$

Para el evento finito $H = \{1, 3, 5, 7\}$ su probabilidad de ocurrencia es,

$$P(E) = P\left(\{1\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup \{7\}\right)$$

$$P(E) = P\left(\{1\}\right) + P\left(\{3\}\right) + P\left(\{5\}\right) + P\left(\{7\}\right)$$

$$P(E) = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7}$$

$$P(E) = 0.5 + 0.125 + 0.03125 + 0.0078125 \cong 0.66406$$

Ejemplo 1.25 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$ con el sigma álgebra total, se define la siguiente función,

$$P\left(\{n\}\right) = p_n = \frac{1}{e^2 - 1}\left(\frac{2^n}{n!}\right), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Analizar si la anterior función define una medida de probabilidad, de ser así calcular la probabilidad del evento $E = \{2, 4, 6\}$

Por la definición de la función P se tiene la primera condición

i) $i)\ p_n \geq 0$

Ahora,

$$ii)\quad ii)\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2-1}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\left(-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right)\right)$$

Ahora la serie de Taylor de la función $f(x)=e^x$ alrededor de cero es,

$$e^x = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Luego evaluando la anterior expresión en $x=2$, resulta:

$$e^2 = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots$$

$$e^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\ldots+\frac{2^n}{n!}+\ldots$$

Reemplazando en *ii)* se tiene,

$$iii)\quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^2-1}\left(\frac{2^n}{n!}\right) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\left(-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right)\right) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\left(-1+e^2\right)=1$$

Para el evento finito $E=\{1,3,5\}$ su probabilidad de ocurrencia es,

$$P(E) = P\left(\{1\}\cup\{3\}\cup\{5\}\right)$$

$$P(E) = P\left(\{1\}\right)+P\left(\{3\}\right)+P\left(\{5\}\right)$$

$$P(E) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\frac{2^1}{1!}+\left(\frac{1}{e^2-1}\right)\frac{2^3}{3!}+\left(\frac{1}{e^2-1}\right)\frac{2^5}{5!}$$

$$P(E) = \left(\frac{1}{e^2-1}\right)\left(2+\frac{8}{6}+\frac{32}{120}\right) = \left(\frac{1}{7.38905-1}\right)\left(2+1.3333+0.26666\right)$$

$$P(E) = \left(0.156517\right)\left(3.59996\right) \cong 0.56345$$

Actividades para el estudio independiente capítulo 1

1.1 Después de que el lector haya realizado una lectura comprensiva del capítulo 1, completar los espacios en blanco.

a) El conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se denomina ______________________________________

b) Aquel experimento en el cual a priori no se puede determinar su resultado, se llama __________________________

c) Un subconjunto del espacio muestral para el cual sea posible asignar una medida numérica de su posibilidad de ocurrencia se denomina _____________________ __________________________

d) El espacio muestral Ω se denomina espacio muestral ____________________ si Ω es un conjunto infinito no numerable.

e) La menor $\sigma -$ álgebra definida sobre el espacio muestral $\Omega = R$ que contiene a todos los intervalos de la forma $\left(-\infty, x\right]$ con $x \in R$, se denomina _________ ____________________________________

f) Si Ω denota a un espacio muestral, $\Im$ una sigma álgebra sobre Ω y P una medida de probabilidad definida sobre $\Im$, entonces la tripleta ordenada $(\Omega, \Im, P)$ se le denomina ____________________

g) Un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ se denomina espacio de probabilidad ________________si Ω es finito, el $\sigma -$ álgebra $\Im$ es igual al conjunto partes de Ω, es decir $\Im = \wp(\Omega)$ y $P(w) = \dfrac{1}{|\Omega|}$ para todo $w \in \Omega$.

1.2 Clasificar cada uno de los siguientes espacios muestrales:

a) ξ: Se escoge aleatoriamente una persona para verificar si fuma o no, $\Omega = \{s, n\}$; donde s :sí fuma, n : no fuma. __________________

b) ξ: Se observa el número de vehículos que transitan por una vía importante de cierta ciudad, $\Omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. ________________

c) ξ: Duración (en tiempo continuo) de un producto de carnes frías,

$\Omega = \{x \in R : x \geq 0\}$, donde x es el tiempo de duración del producto. ________
____

d) ξ: Seleccionar aleatoriamente dos artículos de un proceso productivo para analizar si son defectuosos o no defectuosos, $\Omega = \{dd, dn, nd, nn\}$, donde d: artículo defectuoso, n: artículo no defectuoso. ___________________________
____

1.3 De acuerdo con cada uno de los siguientes espacios muestrales, responder las preguntas correspondientes.

Si $\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$ y considerando las colecciones de subconjuntos de Ω siguientes:

$\Im_1 = \{\phi, \Omega\}$

$\Im_2 = \{\phi, \{cc\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$

$\Im_3 = \{\phi, \{cc, cs\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$

$\Im_4 = \{\phi, \{cc, cs, sc\}, \{ss\}\}$

a) La colección de eventos $\Im_1 = \{\phi, \Omega\}$ es un sigma álgebra sobre Ω denominada
____

b) La familia de eventos $\Im_2 = \{\phi, \{cc\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$ no es un sigma algebra porque
____

c) La colección de eventos $\Im_3 = \{\phi, \{cc, cs\}, \{sc, ss\}, \Omega\}$ es un _______________
____

d) La colección de eventos $\Im_4 = \{\phi, \{cc, cs, sc\}, \{ss\}\}$ no es un sigma álgebra sobre Ω debido a que _______________________________

1.4 Asumiendo que todos los puntos del espacio muestral Ω tienen la misma probabilidad de ocurrir y dados los siguientes eventos:

$E = \{cs, sc, ss\}$

$F = \{ss\}$

Calcular:

e) $P(E) = ?$

f) $P(F) = ?$

g) $P(E \cup F) = ?$

h) $P(E \cap F) = ?$

i) $P(E^c) = ?$

j) $P(E - F) = ?$

1.5 Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad sobre Ω, sean F y E eventos en $\Im$ tales que $P(E) = p$, $P(F) = q$, $P(E \cup F) = r$, demostrar que:

a) $P(E \cap F) = p + q - r$

b) $P(E - F) = r - q$

c) $P(E^c \cap F^c) = 1 - r$

d) $P(E \cup F^c) = p - r + 1$

1.6 Mostrar que si $E_1, E_2, \ldots$ es una partición de Ω con $P(E_n) > 0$ para todo n, entonces para todo F evento de $\Im$ tal que $P(F) > 0$ se cumple que,

$$P(E_n / F) = \frac{P(F / E_n)P(E_n)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(F / E_n)P(E_n)}$$

1.7. Se tienen 3 cajas con artículos dispuestos de la siguiente forma: la primera caja tiene 20 artículos de los cuales 8 son defectuosos, la segunda tiene 16 artículos de los cuales 6 son defectuosos y la tercera tiene 10 artículos de los cuales 2 son defectuosos.

Si se escoge una caja al azar y se extrae un artículo al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el artículo sea defectuoso?
b) Si el artículo escogido resultó defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la segunda caja?

1.8 Una fábrica productora del artículo WW tiene tres puntos de producción A, B, C, donde el 70% de las unidades del artículo WW se produce en el punto A, el 20% en el punto B y el 10% en el punto C. Por circunstancias de mantenimiento de sus máquinas se están produciendo algunas unidades del artículo WW defectuosas. Sin embargo, el 90% de las unidades del producto que provienen de A es de buena calidad, el 80% de las que provienen de B es de buena calidad y el 85% de las que provienen de C es de buena calidad, ¿cuál es la probabilidad de que al seleccionar aleatoriamente una unidad del artículo WW resulte de buena calidad? Determinar la probabilidad de que si la unidad resultó de buena calidad haya sido producida en el punto C.

1.9 ξ: se lanza una moneda una vez, sin que ella pueda caer de filo.

$\Omega = \{c, s\}$; donde c:cara, s:sello.

Si se toma como base el sigma álgebra dada por $\Im = \{\phi, \{c\}, \{s\}, \{c, s\}\}$, y definiendo siguiente *medida de probabilidad:*

$$P : \Im \to R$$

Tal que

$$P(\{c\}) = p_1 \geq 0 \quad \text{y} \quad P(\{s\}) = p_2 \geq 0$$

con

$$\Omega = \{c, s\}$$

Entonces se debe cumplir que:

i) $P(\Omega) = 1$

ii) $\sum_{i=1}^{2} p_i = 1$, es decir que $p_1 + p_2 = 1$

¿Cuáles valores son posibles para p_1, p_2?

1.10 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$ y se define la siguiente función,

$$P(\{n\}) = p_n = \frac{2}{3^n}, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Verificar si la anterior función define una medida de probabilidad. De ser así, calcular la probabilidad de los siguientes eventos: $E = \{1, 3, 5, ...\}$, $F = \{2, 4, 6, ...\}$, $H = \{1, 3, 5, 7\}$

Ejercicios para el capítulo 1

1.1 Obtener el espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio de lanzar una moneda y un dado a la vez.
Determinar los eventos:

E: El dado al caer muestra un número par.
F: El dado al caer muestra un número mayor que dos.

Obtener los siguientes eventos $E \cup F$, $E \cap F$, E^c, $E - F$.

Si se asume que todos los puntos del espacio muestral tienen la misma probabilidad de ocurrir (trabajar bajo equiprobabilidad), calcular:

$P(E) = ?$, $P(F) = ?$, $P(E \cup F) = ?$, $P(E \cap F) = ?$, $P(E^c) = ?$, $P(E - F) = ?$.

1.2 Obtener el espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio de lanzar dos dados una sola vez.

Determinar los eventos:

E: que la suma de los valores por observar en los dos dados sea igual a siete.
F: que el valor en el primer dado sea inferior al valor que se espera observar en el segundo dado.

Obtener los siguientes eventos: $E \cup F$, $E \cap F$, E^c, $E - F$.

Si se asume que todos los puntos del espacio muestral tienen la misma probabilidad de ocurrir (trabajar bajo equiprobabilidad), calcular:

$P(E) = ?$, $P(F) = ?$, $P(E \cup F) = ?$, $P(E \cap F) = ?$, $P(E^c) = ?$, $P(E - F) = ?$.

1.3 Expresar por comprensión el espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio de observar el número de pacientes que llegan a un hospital popular de la ciudad M, un día cualquiera.

1.4 Obtener el espacio muestral correspondiente al experimento aleatorio de suponer si un estudiante aprobó o no las cuatro evaluaciones que resolvió en cierta semana.

1.5 Si $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ obtener al menos cuatro colecciones de subconjuntos de Ω que correspondan a cuatro sigma-álgebras.

1.6 Determinar el espacio muestral para los siguientes experimentos aleatorios:

a) Lanzar una moneda tres veces bajo el supuesto de que la moneda no está cargada.
b) Los posibles resultados que el equipo de fútbol A podría obtener al jugar dos partidos seguidos.
c) El número de frutos por árbol de naranjo que puedan recogerse en época de cosecha en la finca de don Pedro.
d) Tiempo de duración de un electrodoméstico sin dañarse.
e) Género de la primera persona que entre al restaurante B el siguiente lunes.

1.7 Determinar en el punto 1.6 los espacios muestrales que resulten discretos.

1.8 Si el espacio muestral correspondiente al experimento de degustar un nuevo producto por dos personas diferentes es:
$\Omega = \{ss, sn, ns, nn\}$ donde s : sí gusto, n :no gusto

a) Determinar un $\sigma -$ álgebra sobre Ω.

b) Determinar los siguientes eventos, para los cuales:
  a) A: por lo menos a las dos personas les haya gustado.
  b) B: como máximo a las dos personas no les haya gustado.
  c) C: por lo menos a una persona le haya gustado.
  d) D: a lo más a una persona no le haya gustado.

c) Usando equiprobabilidad, calcular:
  a) $P(A)$
  b) $P(A \cup B)$
  c) $P(D^c)$
  d) $P((A-B) \cap (D \cup C))$

1.9 Un almacén de distribución de productos agropecuarios recibe sus insumos de tres diferentes proveedores así: El 60% del proveedor B1, el 30% del proveedor B2 y el 10% del proveedor B3. Si el 95% de los insumos que provienen de B1 resulta efectivo, el 80% de los que provienen de B2 resulta efectivo y el 65% de los que provienen de B3 también resulta efectivo. ¿Cuál es la probabilidad de que cualquier insumo recibido por el almacén no resulte efectivo?. Determinar la probabilidad de que un insumo que haya resultado efectivo provenga del proveedor B3.

1.10 Sean A y B eventos tales que $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ y $P(A \cap B) = 0.1$.

Calcular: $P(A \cup B)$, $P(A / B)$, $P(A / B^c)$, $P(A^c / A \cup B)$ y $P(A \cap B / A \cup B)$.

1.11 Se lanza una moneda corriente tres veces.

Determinar el espacio muestral y un sigma álgebra sobre dicho espacio muestral.

Si se definen los siguientes eventos:

E : a lo más salga una cara en los tres lanzamientos de la moneda.
F : por lo menos salgan dos sellos en los tres lanzamientos de la moneda.

Determinar los siguientes eventos:

a) $E \cup F$
b) $E \cap F$
c) E^c
d) $E - F$

1.12 Sea $\Omega = \{1, 2, 3, ...\}$ y la medida de probabilidad definida por,

$$P(\{n\}) = p_n = \frac{1}{e^2 - 1}\left(\frac{2^n}{n!}\right), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Calcular la probabilidad de los eventos

a) $E = \{1, 3, 5\}$
b) $E = \{1, 3, 5, 7, ...\}$
c) $E = \{2, 4, 6, 8, ...\}$