UN ACERCAMIENTO A LOS NÚMEROS DE CONDICIÓN

Astrid Yesenia Mesa Juya[1]
[1]*Grupo de Investigación de Álgebra y Análisis, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas y Estadística, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia.* astrid.mesa@uptc.edu.co
Álvaro Calvache Archila[2]
[2]*Grupo de Investigación de Álgebra y Análisis, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas y Estadística, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja, Colombia. alvaro.calvache@uptc.edu.co*

Desde su creación, las computadoras se han convertido en una herramienta fundamental en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo, el hecho de que éstas sólo pueden almacenar y procesar una cantidad finita de información ha llevado a muchos matemáticos a estudiar los posibles errores que se pueden derivar de esta situación. En [10], Von Newmann menciona cuatro posibles fuentes de error que resultan al usar el método de eliminación como una herramienta en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. Una de las fuentes de error que menciona Von Newmann, es la limitación en la precisión que tienen las computadoras al realizar las operaciones elementales, este tipo de error es llamado error de redondeo y se produce porque las computadoras trabajan con un sistema de aritmética finita, ver [6]. Esto implica que si A es una matriz invertible, entonces, al hallar la inversa de A con la ayuda de una computadora, en realidad lo que se está haciendo es hallar la inversa de la matriz $A + \Delta A$, en donde, ΔA es una perturbación de la matriz A, lo que implica que al calcular la inversa de una matriz se obtiene un error, que en muchos casos es lo suficientemente pequeño para dejarlo pasar, sin embargo en muchos casos el error puede causar serios problemas pues la solución que se obtiene en la computadora puede estar muy lejos del valor real.

En un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$, con A invertible, se puede usar las normas matriciales para monitorear el tamaño del error en la solución que se encuentra.

En [5] y [2] se define el número de condición de una matriz A como, $k(A) = |||\ A\ ||| * |||\ A^{-1}\ |||$, en donde $|||\cdot|||$ es una norma matricial. Teniendo en cuanta el número de condición de una matriz, se dice entonces, que una matriz está bien condicionada si $k(A)$ es un valor pequeño cercano a uno. Si una matriz cuadrada A está bien condicionada, entonces, al resolver el sistema $Ax = b$, usando aritmética finita, se obtiene una solución muy cercana a la solución real.

De acuerdo a todo lo mencionado anteriormente, surgió una pregunta natural, ¿cómo usar las normas matriciales para monitorear el error de redondeo que se produce al usar una herramienta tecnológica en la solución de un sistema de ecuaciones lineales? Para dar respuesta a esta pregunta se desarrolló un proyecto, enmarcado en la investigación formativa, en el que se hizo un trabajo de búsqueda y reconocimiento de los conceptos de norma matricial y números de condición, en algunos textos de análisis matricial y análisis numérico.

Tomando como punto de partida las definiciones principales, el proyecto se enriqueció, adjuntando ejemplos y algunas propiedades que satisfacen las normas matriciales y los números de condición, además de un algoritmo hecho en Matlab que permite refinar la aproximación de la solución de un sistema de ecuaciones lineales, que se resuelve usando el método de Gauss Jordan y aritmética de t dígitos.

Como resultado final se obtuvo un documento monográfico en el que se presentan de forma organizada y clara los conceptos de norma matricial, números de condición, unas clases especiales de matrices, tales como, las matrices hermitianas, unitarias y normales. Finalmente, la relación entre la norma matricial de una matriz A y su número de condición.

Referencias

1. B. Richard, F. J. Douglas, *Numerical Analysis* (Ed.: Brooks/cole), **2011,** vol. 9, United State.
2. H. Roger, J. Charles, *Matrix analysis,* (Ed.:Cambridge university press), **2013,** vol. 2, New York.
3. IEEE computer society, *IEEE Standard for a floqting point arithmetic,* IEEE Std. **2008.**
4. N. John, G. H. H., *Numerical inverting of matrices of high order,* American mathematical society, **1994**, No. 53, 1021-1099.