REPRESENTACIÓN APROXIMADA DE ATRACTORES DE SISTEMAS ITERADOS DE FUNCIONES

(Explorando en Ambientes de Geometría Dinámica)

Suárez S. Publio [i]
Grupo Pirámide en Educación Matemática
psuarez2002@hotmail.com

1. Resumen

El cursillo está basado en una propuesta didáctica para representar y modelar de manera aproximada en el plano, los atractores de fractales autosemejantes y sus familias, usando el ambiente de geometría dinámica proporcionado principalmente por el Cabri Geometry. Se inicia con una contextualización teórica describiendo una clasificación de Sistemas Iterados de Funciones (IFS´s), desde los fractales autosemejantes clásicos, hasta las familias de fractales conocidas como superfractales. A partir de las nociones elementales de geometría euclidiana, geometría cartesiana, geometría vectorial y de la geometría de las transformaciones (ver [1]), de manera particular de la noción de afinidad regular contractiva, se construyen representaciones aproximadas de los fractales de Pitágoras, curvas y estrellas fractales y varios ejemplos de superfractales, empleando las macroconstrucciones como opciones para simular procesos recursivos e iterativos en espacios discretos, además de evidenciar algunos aspectos de la relación entre arte y geometría.

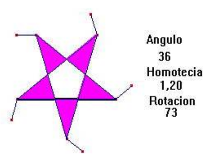
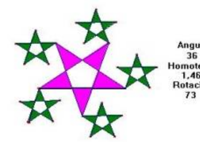
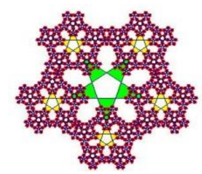
Palabras clave: *Geometría fractal de la naturaleza, sistemas iterados de funciones (IFS's), representación, estrategia didáctica, aprendizaje.*

2. Los sistemas iterados de funciones

Una formalización bien conocida propuesta en [7] por Hutchinson en su trabajo sobre fractales y autosimilaridad, proporciona un sustento matemático de los fractales autosemejantes generados por sistemas iterados de funciones [18], por sus siglas en inglés (IFS's). El fractal asociado con un IFS, se representa con el atractor. Las afinidades contractivas permiten estructurar y clasificar los diversos tipos de sistemas iterados de funciones que subyacen como modelos matemáticos de los fractales autosemejantes. Las clases de sistemas iterados de funciones (IFS´s), entre ellos los IFS´s con probabilidades y los IFS recurrentes, se afianzan como temáticas fundamentales para modelar los fractales escalantes. Una clasificación de sistemas iterados de funciones planteada en [21], ha sido construida en el ámbito teórico, la cual comprende: los sistemas iterados de funciones clásicos (IFS's), los sistemas iterados de funciones con probabilidades (PIFS's), los sistemas iterados de funciones recurrentes (RIFS's), los sistemas iterados de funciones locales (LIFS's), los sistemas iterados de funciones de un solo espacio (ssLIFS's), los fractales v-variables y los superfractales (ver [3]). Dicha taxonomía pretende entre otras cosas, mejorar los modelos matemáticos para representar de manera realista los objetos de la naturaleza.

3. Construcción de fractales con Cabri: fractal estrella 5P

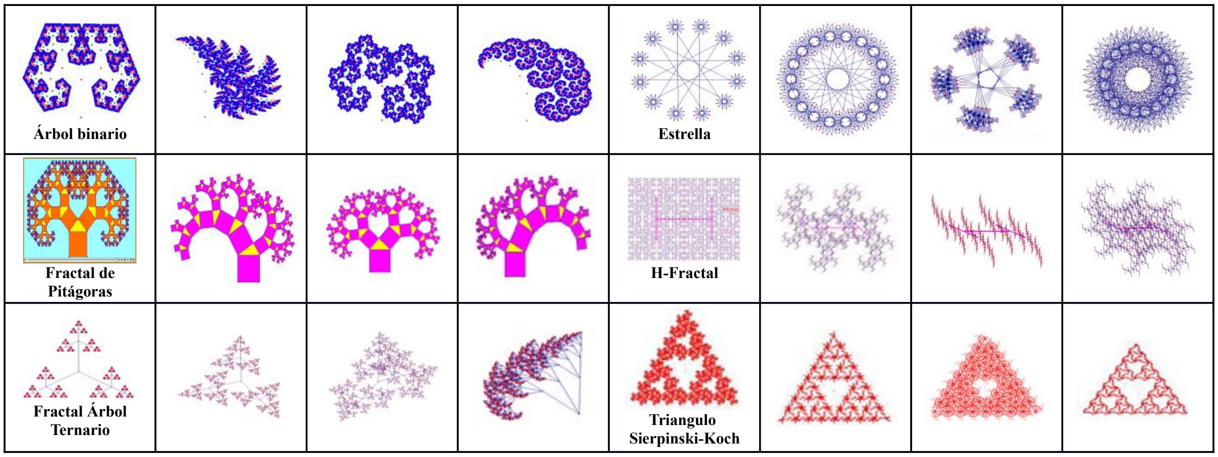
Se describe inicialmente y a manera de ejemplo, la forma de construir la estrella fractal de cinco puntas (5P). La estrella 5P, dibujada como una poligonal cerrada, a partir de un segmento y considerando un ángulo de treinta y seis (36) grados (ver [10]). Se define una primer macro, con dos parámetros, la longitud del segmento y un ángulo específico (Ver gráfica 1). El orden en que se escogen los puntos iniciales para definir la macro es importante para darle una orientación fija a la construcción. Una segunda macro auxiliar con dos parámetros, permite determinar un segmento trasladado a partir del original, en cada punta de la estrella: el primer parámetro es un factor de homotecia, respecto al segmento semilla y el segundo parámetro es el ángulo de rotación (Ver gráfica 2). Una tercera macro que se construye, graba el mecanismo de reproducción del fractal estrella de cinco puntas, con la cual se puede dibujar la aproximación del fractal, en el nivel deseado. Se pueden grabar macros intermedias de niveles más altos, por ejemplo nivel tres o cuatro, para agilizar el proceso de representación aproximada del atractor.

			
Gráfica 1. Semilla	**Gráfica 2. Macro Intermedia**	**Gráfica 3. Macro Nivel 1**	**Gráfica 4. Estrella 5P**

La clave para construir modelos de fractales dinámicos en el ambiente gráfico de Cabri, es poder definir macros con parámetros en su construcción, que posteriormente se pueden tomar como variables para realizar las animaciones que permiten obtener la familia de fractales con la misma estructura. En la medida que aumente el número de variables, es obvio que se amplía la gamma de representaciones aproximadas de atractores obtenidos.

Se presenta a continuación una colección de modelos de fractales dinámicos, elaborados en cada caso, siguiendo un procedimiento análogo al descrito anteriormente. Al analizar los resultados obtenidos, es evidente que surge una variedad de situaciones abiertas (sin resolver), respecto a problemas métricos como áreas, longitudes laterales, formas diversas de los atractores, lugares geométricos, que son una excelente oportunidad para descubrir muchas propiedades geométricas. Con interés didáctico, en la descripción de los sucesivos modelos de fractales dinámicos no se describen los detalles, pues se busca que los estudiantes aprendan a través del descubrimiento. Las situaciones problemáticas que se plantean pretenden ser cuestionadoras, para enriquecer las experiencias de los estudiantes en el campo de las representaciones gráficas. Las construcciones se clasifican de acuerdo con el creciente grado de complejidad y en el proceso de construcción surgen elementos comunes, que se van descubriendo como regularidades que se constituirán en los primeros pasos para trabajar con estructuras fractales.

En síntesis, las representaciones expuestas permiten que el estudiante descubra las propiedades básicas en los distintos tipos de geometría usadas en las figuras construidas; mediante la simulación, determina las propiedades de la composición de traslaciones, rotaciones, simetrías, homotecias y en general de transformaciones afines. Tales construcciones son el propósito de la actividad, pero la riqueza en el manejo de las relaciones y proposiciones relativas a geometría euclideana y de las transformaciones, surge como tarea prioritaria para lograr finalmente las representaciones fractales.



4. Consideraciones finales

Esta propuesta didáctica (ver [19] y [20]), producto de la experimentación con varios grupos de estudiantes de la asignatura de geometría de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), con sede en Tunja, Boyacá, pertenecientes a la Licenciatura en Matemáticas, se plantea como una alternativa de trabajo para la construcción de conceptos relativos a la geometría fractal de la naturaleza (ver [2], [11], [14] , [15], [16], [17] y [22]), que puede ser adoptada, reformulada y enriquecida como alternativa viable en otros contextos educativos similares. Los aspectos relevantes, producto de los resultados del trabajo de investigación se pueden sintetizar en:

- En la construcción de los dibujos-dinámicos en Cabri Geometry II, descritos en este trabajo, es muy importante determinar cuáles son los parámetros elegidos mas apropiados, para dotar de mayor dinámica a tales construcciones, usando las opciones de desplazamiento y animación contenidas en el menú. De tal elección depende el éxito en la riqueza de las situaciones problemáticas planteadas y la amplitud de los sistemas semióticos que pueda proporcionar el modelo construido.
- Las situaciones problemáticas acá planteadas, se pueden tipificar como abiertas ("blandas", en el sentido de J. M. Laborde), pues obedecen a situaciones menos exigentes (en términos de cantidad de parámetros, no de complejidad). Dichas situaciones son más creativas que descriptivas, poseen características que propician la imaginación y el aprendizaje por descubrimiento (ver [8] y [9]). El uso del computador como mediador de aprendizaje implica la modificación de los problemas planteados de manera tradicional, de las preguntas y cuestionamientos, de los enfoques para su solución (ver [12]) y hasta en la interpretación de los resultados.
- Algunos atractores generados por sistemas iterados de funciones, con apariencia distinta, contienen una estructura básica común (ver [13] y [6]), la evidencia de este hecho clave, es mostrado con el desarrollo de las actividades propuestas. Las macro-construcciones, son las herramientas que permiten simular los operadores de iteración y retroalimentación en el proceso de construcción de fractales.
- Las posibilidades de estos sistemas semióticos (ver [4] y [5]) de representación externos (pizarra electrónica), son prácticamente ilimitados. Desde el espacio

discreto de la pantalla del computador (o calculadora), y de acuerdo a una buena resolución de pantalla, las representaciones gráficas son percibidas por la mente como un proceso continuo, tal vez de manera espontánea. Las familias de fractales determinadas por los parámetros establecidos o fijados en la fase de construcción, permiten explorar amplios campos en la visualización de aproximaciones de atractores correspondientes a familias de sistemas iterados de funciones en donde subyacen estructuras similares.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ALSINA, Claudi y TRILLA, Enric. Lecciones de álgebra y geometría, curso para estudiantes de arquitectura. Barcelona: Editorial Gustavo Gili S.A., 1984.

[2] BARNSLEY, Michael. Fractals everywhere. San Diego: Academic Press INC, 1988.

[3] BARNSLEY Michael, HUTCHINSON John E. and STENFLO Orjan. V -variable fractals and superfractals. Canberra: Australian National University, Department of Mathematics 2003.

[4] DUVAL, Raymond. Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali: Universidad del Valle, 1999.

[5] FONT, Vicenç. Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. Barcelona: Departamento de Didáctica de las CCEE y la Matemática de la Universidad de Barcelona, 2007.

[6] HOFSTADTER, Douglas R. Gödel, Escher, Bach. Un eterno y grácil bucle. Barcelona: Tusquets Editores, S.A, 1987.

[7] HUTCHINSON, J. E. Fractals and self-similarity. Indiana: Univ. Math. J. 30 713–749, 1981.

[8] LABORDE Colette. Soft and hard constructions with Cabri : contribution to the learning of mathematics. Bogota: XVII Encuentro de Geometría, Universidad Pedagógica Nacional, 2006.

[9] LABORDE Colette. Cabri Geometry: una nueva relación con la geometría. Grenoble: Universidad Joseph Fourier, IUFM, 1998.

[10] LAUWERIER, Hans. Fractals. New Jersey: Princeton University Press, 1987.

[11] MANDELBROT, Benoit. The fractal geometry of nature. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

[12] MORENO, Armella Luis. Argumentación y formalización mediadas por Cabri-Geometry. Bogota: Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, 2002.

[13] MASSOPUST, Peter R. Fractal functions, fractal surfaces y wavelets. San Diego: Academic Press, 1994.

[14] PEITGEN, Heinz-Otto y otros. Fractals for the classroom, part one, introduction to fractals and chaos. New York: Springer-Verlang, 1992.

[15] PEITGEN, Heinz-Otto y otros. Fractals for the classroom, strategic activities volume Two. New York: Springer-Verlang, 1992.

[16] PEITGEN, Heinz-Otto y RICHTER, P. H. The beauty of fractals. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

[17] SCHROEDER, Manfred R. Fractals, chaos, power laws. Minutes from an infinite paradise. New York: W. H. Freeman and Company. 1996.

[18] SABOGAL Sonia y ARENAS Gilberto. Una introducción a la geometría fractal. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2008.
[19] SUÁREZ, S. Publio. El aprendizaje de la geometría fractal, Tesis meritoria de magíster en educación, Universidad Pedagógica Nacional. Dirigida por Novoa, P, Alberto. Tunja: Publicaciones Universitarias, 1996.
[20] VASCO, Carlos E. Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas. Volumen I y II Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, MEN, 1992.
[21] WADSTRÖMER ,Niclas. Coding of fractal binary images with contractive set mappings composed of affine transformations. Linköping: Linköping University, 2001.
[22] WEGNER, Tim y TYLER, Bert. El mundo de los fractales, convierta los números en una realidad fractal. Madrid: Ediciones Anaya Multimedia S.A, 1995.

i *Profesor de Matemáticas, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), Tunja. Miembro del grupo de investigación PIRAMIDE, Escuela de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias (UPTC).*
Profesor Catedrático de Matemáticas. Departamento de Ciencias Básicas, Universidad Santo Tomas, Tunja (USTA-Tunja).
Estudiante