CONJUNTOS DE MEDIDA FUERTEMENTE CERO
TRABAJO DE GRADO (PREGRADO EN MATEMÁTICAS)

Daniel Muñoz Quintero
Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia
damunoz319@gmail.com

Resumen:
Un conjunto de números reales es de medida cero si puede cubrirse con familias de intervalos abiertos donde la suma de las longitudes de estos intervalos puede hacerse tan pequeña como se quiera. En un intento por clasificar estos conjuntos, Émile Borel formuló en 1919 lo que se conoce como conjuntos de medida fuertemente cero; esta noción resultó ser más fuerte que la de medida cero (*ver* [1]) *y el estudio de sus propiedades topológicas involucró nuevos tipos de conjuntos cuya existencia dependía de axiomas adicionales como la Hipótesis del Continuo* (*ver* [2]). *La pregunta sobre si todo conjunto de este tipo es contable (Conjetura de Borel) no tuvo respuesta sino hasta 1976 cuando Richard Laver demostrara que tal conjetura es un enunciado consistente con la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC).*
El objetivo del trabajo es explorar las propiedades topológicas de estos conjuntos y observar su relación con otros considerados como "pequeños".

Palabras clave: *conjunto de medida cero, conjunto de medida fuertemente cero, conjunto numerable, Conjetura de Borel, Hipótesis del Continuo.*

Cuerpo del documento

1 Primera Sección
Definiciones básicas

2. Segunda Sección
Propiedades de los conjuntos de medida fuertemente cero (m.f.c.)

En esta sección además de incluir ejemplos y propiedades básicas como preservación por funciones uniformemente continuas y uniones numerables, se incluyen teoremas importantes relacionados con la equivalencia topológica del concepto y una caracterización que relaciona conjuntos con m.f.c. y conjuntos magros o de primera categoría (Teorema de Galvin–Mycielski–Solovay).

2.1 Primera Subsección

Conjuntos de Luzin, producto de dos conjuntos con m.f.c:

Estos conjuntos se construyen mediante recursión transfinita, el teorema de la categoría de Baire y asumiendo la hipótesis del continuo, permitiendo concluir que el producto cartesiano de dos conjuntos con m.f.c. no necesariamente tiene m.f.c.

2.2 Segunda Subsección

Conjuntos concentrados de números reales, invarianza por continuidad de conjuntos con m.f.c:

Estos conjuntos se construyen en el espacio de Baire (${}^{\omega}\omega$) asumiendo la hipótesis del continuo; mediante una función específica se muestra que los conjuntos con m.f.c no se preservan por funciones continuas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BARTOSZYNSKI, T. AND JUDAH H., Set Theory: On the Structure of the Real Line, A. K. Peters, Wellesley, 1995.

[2] MILLER, A., Special Subsets of the Real Line, Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 201–233.

[3] SIERPINSKI, W., Sur le Produit Combinatoire de Deux Ensembles Jouissant de la Propiété C, Fundamenta Mathematicae, **24**, Varsovia, 1935, pp. 48-50.