ANÁLISIS DE SOLUCIONES DE ALGUNAS LEYES DE CONSERVACIÓN

Zagalo Enrique Suárez[♭] y Gilberto Perez Poblador[†]

[♭]*Grupo de Algebra y Análisis, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Av. Central del Norte, Tunja, Colombia, zagalo.suarez@uptc.edu.co,gilbertpg@hotmail.com www.uptc.edu.co*

Resumen: Se analizó el problema de Cauchy, (1), caso escalar, la propagación de singularidades, formación de ondas de choque y algunas técnicas que depuran soluciones para estimar las físicamente aceptables.

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \\ u(x,0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{1}$$

Palabras clave: *Ley de conservación, curvas características, solución débil, entropia.*

1. INTRODUCCIÓN

Situaciones físicas relacionadas con el flujo de ciertas cantidades, por ejemplo el flujo vehicular en una avenida y el flujo de líquidos o gases en algún medio se modelan a través de ecuaciones en derivadas parciales de la forma,

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{2}$$

donde $u \in \mathbb{R}$, $(t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ y f es una función definida sobre algún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.
Las ecuaciones que tienen esta forma se denominan leyes de conservación. Aquí x representa la variable espacial, t el tiempo, u la densidad de la cantidad física que se conserva y f el flujo. Si f es escalar, se dice que la ley de conservación es escalar. Para el caso escalar, se estudiaron las soluciones bajo ciertas condiciones del dato inicial y de la función f. Una dificultad que presentan estos problemas (1), es que aunque el dato inicial $u_0(x)$ sea suave, en muchos casos las soluciones no están definidas globalmente en el sentido clásico, ya que ellas o bien sus derivadas sufren discontinuidades en algún tiempo finito. En forma similar se analizaron las soluciones cuando el dato inicial no es suave.

2. TIPOS DE SOLUCIONES

Con el fin de encontrar soluciones globalmente definidas, se ha tenido que ampliar el concepto de solución clásica al de solución débil. Las definiciones 1 y 2 que se dan a continuación se han tomado de las dadas para sistemas en [2] y [3], y se han adaptado al caso escalar.

Definición 1 *(Solución distribucional): Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un campo escalar suave. Una función medible $u = u(t,x)$, definida sobre un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}$, es una solución distribucional de la de ley de conservación (2), si para cada función $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 con soporte compacto, se tiene,*

$$\iint_{t>0} (u\phi_t + f(u)\phi_x)\, dx\, dt = 0. \tag{3}$$

Definición 2 *(Solución débil del problema de Cauchy): Una función $u : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es una solución débil del problema de Cauchy (1), con $u_0 \in L_1^{Loc}(\mathbb{R})$, si u es continua como función de $[0,T]$ en $L_1^{Loc}(\mathbb{R})$, la condición inicial se satisface y la restricción de u a la banda abierta $(0,T) \times \mathbb{R}$ es una solución distribucional de la ecuación (2).*

La ampliación del concepto genera la pérdida de unicidad en la solución, lo que obliga a buscar condiciones para determinar aquellas que sean físicamente admisibles. Condiciones como la de entropía ayudan a determinar soluciones físicamente admisibles, [6].

3. Técnicas aplicadas

Para el análisis inicial del problema (1), se aplicó el método de las características, que es un método clásico utilizado en el estudio de problemas de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden, [7]. Al aplicar esta técnica al problema (1), se presentaron ciertas dificultades, en particular cuando el dato inicial presenta discontinuidades y estas se propagan por las curvas características a la solución y cuando estas curvas se cortan.

4. Resultados

Realizando un estudio analítico se establecieron condiciones que debe satisfacer el dato inicial $u_0(x)$, para que existan soluciones débiles entrópicamente admisibles del problema (1). Se representó la solución utilizando métodos numéricos.
Considerando la ley de conservación para el caso escalar,

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Con dato inicial,

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

se establece el siguiente teorema, ver [10].

Teorema 1 *Sea* $u_0 \in L_\infty(\mathbb{R})$*, y sea* $f \in C^2(\mathbb{R})$ *con* $f'' > 0$ *sobre* $\{u : |u| \leqslant \|u_0\|_\infty\}$*. Entonces existe una solución* u *del problema de Cauchy (4),(5), con las siguientes propiedades:*
(a) $|u(t,x)| \leqslant \|u_0\|_\infty \equiv M, \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$
(b) Existe una constante $E > 0$*, dependiendo solamente de:* M, $\mu = \min\{f''(u) : \quad |u| \leqslant \|u_0\|_\infty\}$, *y* $A = \max\{|f'(u)| : |u| \leqslant \ |u_0\|_\infty\}$*, tal que para todo* $a > 0, \quad t > 0$ *y* $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{u(t, x+a) - u(t,x)}{a} < \frac{E}{t} \tag{6}$$

(c) u *es estable y depende continuamente de* u_0 *en el siguiente sentido: Si* $v_0 \in L_\infty(\mathbb{R})$ *con* $\|v_0\| \leqslant \|u_0\|_\infty$ *y* v *es la correspondiente solución construdida de (4), con dato inicial* v_0*, entonces para cada* x_1 *y* $x_2 \in \mathbb{R}$ *con* $x_1 < x_2$*, y cada* $t > 0$*,*

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(t,x) - v(t,x)|\, dx < \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u_0(x) - v_0(x)|\, dx. \tag{7}$$

La expresión (7) muestra que la solución construida es estable y única, pero deja abierta la posibilidad de la existencia de otra solución que no satisfaga (7). Sin embargo se estabelce que la condición de entropía (6) implica la unicidad. Es de anotar que la propiedad (a), no es válida para sistemas, de hecho existe una mayor dificultad para encontrar existencia de soluciones para sistemas que es la obtención de estimaciones de la norma del supremo, temas que se estan trabajando por el grupo. Lo establecido en (6) puede parecer como un teorema de regularidad, en el sentido que esto implica que para un $t > 0$, la solución $u(t, \cdot)$ es localmente de variación total acotada.

Referencias

[1] APOSTOL, TOM M. Análisis Matemático. Ed. Reverté, 1998
[2] BRESSAN, Alberto. Lecture Notes on Hyperbolic Conservation Laws, 2009
[3] BRESSAN, Alberto. Hyperbolic Conservation Laws An Illustrated Tutorial, 2009
[4] BRESSAN, Alberto. Sobolev Space
[5] HAYES, Brian t and LEFLOCH, Philippe g. Non-classical shock waves In Scalar conservation laws, 2007
[6] EVANS, Lawrence C. Entropy and Partial Differential Equations.
[7] EVANS, Lawrence C. Partial Differential equations. American Mathematical society.
[8] FRITZ, John, Partial differential equations, Ed. Springer Verlag, 1978.
[9] PANOV E.Y, On weak convergence of entropy solutions to scalar conservation laws. Novgorod State University, Russia. 2007
[10] SMOLLER, J. Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, Ed. Springer Verlag, 1983