Uptc
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
ACREDITACIÓN INSTITUCIONAL
DE ALTA CALIDAD
MULTICAMPUS
RESOLUCIÓN 3910 DE 2015 MEN / 6 AÑOS
VIGILADA MINEDUCACIÓN

RiUPTC
Repositorio Institucional
UPTC

repositorio.uptc@uptc.edu.co

Departamento de
Innovación
Académica

COMUNICACIÓN BREVE

ACERCA DE LAS SOLUCIONES NO TRIVIALES PARA UN PROBLEMADE DIRICHLET ASINTÓTICAMENTE LINEAL

Mireya García
Maestría en Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

Resumen

En particular el problema de Dirichlet con condición de frontera, genera una ecuación diferencial relacionada con el operador laplaciano, el estudio de esta ecuación al ser ligada con los espacios de Sobolev y el teorema espectral para operadores compactos, muestra que la ubicación del espectro con respecto a la diferencial de la no linealidad del problema de Dirchlet genera múltiples soluciones; y la teoría de grado en este caso sirve para justificar la existencia de estas soluciones, además de brindar información sobre su naturaleza. En este trabajo se demuestra que el problema elíptico semilineal tiene por lo menos tres soluciones no triviales, de las cuales una es positiva, otra negativa y la tercera cambia de signo, mediante el Teorema de Paso de Montaña y el grado de Leray Schauder

Palabras clave: Problema elíptico semilineal, cambio de signo de las soluciones, grado de Leray Schauder.

Abstract

In particular, the Dirichlet problem with boundary condition, generates a differential equation related Laplace operator, the study of this equation to be linked with Sobolev spaces and the spectral theorem for operators compact, shows that the location of the spectrum with respect to differential nonlinearity Dirchlet problem of generating multiple solutions; and the degree theory in this case serves to justify the existence of these solutions, in addition to providing information about its nature. This paper shows that the semilinear elliptic boundary problem has at least three nontrivial solutions, one of which is positive.

Key words: Semilinear elliptic boundary problema, Sign-changing solutions, Leray Schauder degree.

INTRODUCCIÓN

En particular el problema de Dirichlet con condición en la frontera genera una ecuación diferencial relacionada con el operador laplaciano, el estudio de esta ecuación al ser ligada con los espacios de Sobolev y el teorema espectral para operadores compactos, muestra que la ubicación del espectro con respecto a la diferencial de la no linealidad del problema de Dirichlet genera múltiples soluciones. La teoría del caos sirve en este caso para justificar la existencia, además de brindar información sobre su naturaleza.

En este trabajo se estudia un problema de Dirichlet no lineal,

$$\begin{aligned} &\Delta u + f(u) = 0 \quad && en\ \Omega \\ &u = 0 && en\ \Omega \end{aligned}$$

donde Ω es un abierto acotado en R^N $(N \geq 3)$, con frontera suave, Δ el operador de Laplace y f la función $f: R \to R$ diferenciable tal que $f(0) = 0$ y también asintóticamente lineal. Sea la sucesión de valores propios $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \leq \cdots$ de $(-\Delta)$, con condición cero del abierto Ω y la sucesión de funciones propias asociadas a cada valor propio $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_k$ entonces mediante el siguiente teorema se muestra la existencia de dos soluciones de un signo (positivo, negativo, respectivamente), como primera parte, y posteriormente la existecia de otra solución no trivial que cambia de signo, al problema definido anteriormente, mediante la teoría de los espacios de Sobolev, los operadores compactos, el teorema del paso de la montaña, la teoría de grado de Leray-Shaurder es posible su prueba.

DESARROLLO

Teorema: Si $f'(0) < \lambda_1$ y $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$, con k un número entero par $k \geq 2$ entonces el problema , tiene por lo menos tres soluciones no triviales , de las cuales una es positiva, otra es negativa, y la tercera cambia de signo.

La demostración se hace mediante tres momentos, un primer momento determina que el problema de Dirichlet, posee soluciones no triviales, luego se muestra que una es positiva , la otra es negativa y finalmente se demuestra una tercera que cambia de signo. En la primera parte de la solución no trivial, consideramos el truncamiento,

$$f^+(t) = \begin{Bmatrix} f(t) & si\ t \geq 0 \\ f'(0)\,t & si\ t < 0 \end{Bmatrix}$$

Donde $F^+(t) = \int_0^t f^+(s)ds$ y se define el funcional $J^+: H \to R$donde H es el espacio deSobolev $H_0^1(\Omega)$ definido por

$$J^+(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F^+(u)\right)dx$$

Como $f'(\infty) \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ y f es sublineal, y por lo tanto $J^+(C^1(H,R))$ y su derivada está dada como

$$DJ^+(u)v = \int_\Omega (\nabla u \nabla v - F^+(u)v)dx \qquad \forall u \in H, \quad \forall v \in H,$$

Luego una solución clásica al problema planteado, es una función $u \in H_0^1(\Omega)$, entonces u es una solución débil del problema si y sólo si u es punto crítico de J^+, para mostrar la existencia de este punto crítico hacemos uso del teorema del paso de la montaña.

Definición: Condición de Palais-Smale. Sea Eun espacio de Banach, se dice que $I \in C^1(E,R)$ satisface la condición de Palais – Samale $(P-S)$, si toda sucesión $\{u_n\} C\ E$ tal que $\{I(u_n)\}\ es$ acotada y $\{I'(u_n)\}$ converge a cero, posee una subsucesión convergente.

Lema 1. Existe $\alpha > 0, y\ \rho > 0$ tales que

$$\|u\|_H = \rho \to J^+(u) \geq \alpha$$

Lema 2. Existe $\hat{u} \in H$tal que

$$\|\hat{u}\|_H > \rho \quad y \quad J^+(u) < 0$$

Lema 3. El funcional J^+ satisface la condición de $(P - S)$.

Los tres lemas anteriores y el teorema del paso de la montaña, garantizan la existencia de una solución no trivial de J^+ si se define $f(\xi) = máx\{(f(\xi), 0)\} + mín\{(f(\xi), 0)\}$ entonces la solución no negativa satisface la ecuación del problema de Dirichlet no lineal, probar la existencia de una solución positiva, bastaría demostrar la existencia de una solución no trivial de J^+ y justificar que $u(x) \neq 0$ para $x \in \Omega$. Por el principio del máximo se tiene que $u > 0$ en Ω.

De la misma manera se muestra la otra solución, la negativa.

Hasta esta parte está demostrado la existencia de dos soluciones que no cambian de sigo. En el siguiente capítulo se muestra la existencia de una tercera solución que si cambia de signo, prueba en la cual se hace necesario el uso de la teoría de grado de Leray – Schauder.

CONCLUSIONES

Se demostró que el problema de Dirichlet, con las condiciones dadas le existen al menos tres soluciones no triviales, una positiva, una negativa, y una tercera que cambia de signo.

BIBLIOGRAFÍA

Ambrosetti, G Mancini. (1979). Sharp Nonuniqueness results for some nonlineal problems, Nonlineal, *3 no(5).*

Brezis. (1984). *Analisis functional teoría y aplicaciones*. Madrid.

Bartsch, B. Z , Wang . (1996). On the existence of sign chaging solutions for semilinear Dirichlet problems. Topological Methods in Nonlinear Analysis.