COMUNICACIÓN BREVE
SOBRE UNIFORMIDADES DEFINIDAS POR CUBRIMIENTOS Y COMPLETADO FIBRA A FIBRA

Héctor Antonio Ricaurte Moncaleano
Magister en Ciencias Matemáticas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
harimo26@yahoo.com

Resumen

Basado en el artículo " Fibrewise covering uniformities and completions "de los autores Y.Konami y T. Miwa, se estudian versiones fibradas de espacios uniformes, cubrimientos uniformes y espacios uniformes generalizados para mostrar la equivalencia entre las topologías generadas por una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra y por una estructura uniforme fibra a fibra. Además se presenta una construcción del completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibra a fibra.

Palabras clave: Uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra, uniformidad generalizada fibra a fibra, completado fibra a fibra.

Abstract

Based on the paper " Fibrewise covering uniformities and completions " by Konami and Miwa, we study fibrewise versions of uniform spaces, uniform covers and generalized uniform spaces for show equivalences between the topologies generated by fibrewise covering uniformities and fibrewise uniform structures. Also, we present a construction of the fibrewise completion of a fibrewise g-uniform space.

Key words: Fibrewise covering uniformity, fibrewise generalized uniformity, fibrewise completion.

INTRODUCCIÓN

La teoría de espacios uniformes fibra a fibra fue investigada y desarrollada en gran parte por I. M. James en su libro " Fibrewise Topology " (1989), donde él presenta los conceptos de la teoría clásica de espacios uniformes aplicados a los espacios uniformes fibra a fibra y a estos últimos los dota de su correspondiente topología uniforme fibra a fibra. La estructura uniforme fibra a fibra que poseen los espacios uniformes fibra a fibra es una versión fibrada de los espacios uniformes definidos en la Topología General.

Otros autores como Willard (1968) y Engelking (1989) en sus libros respectivos General Topology, presentan otra manera de definir estructuras uniformes, no solo desde la perspectiva de entornos, sino bajo el concepto de cubrimiento uniforme, y aquellas estructuras se conocen como uniformidades definidas por cubrimientos.
Los autores Y.Konami y T. Miwa (2008), presentan la versión fibrada de uniformidades definidas por cubrimientos algo no visto en el libro de James (1989) para definir una uniformidad por cubrimientos fibra a fibra. Para ello, los autores presentan el concepto de par conjugado de cubrimientos y lo adaptan a la teoría de espacios semi-uniformes y espacios uniformes generalizados presentada en el libro de Morita y Nagata (1989). Konami y Miwa presentan esta nueva adaptación como estructura semi-uniforme fibra a fibra y estructura uniforme generalizada fibra a fibra, creando los espacios semi-uniformes fibra a fibra y los espacios generalizados uniformes fibra a fibra.

En los espacios uniformes generalizados fibra a fibra se definen conceptos como b-filtro de Cauchy, b-filtro estrictamente de Cauchy, b-filtro estrella, b-filtro estrella débil, éste último se utiliza para definir un espacio completo fibra a fibra y el completado fibra a fibra, conceptos que permiten construir una completación fibrada de un espacio uniforme generalizado fibra a fibra (espacio g-uniforme fibra a fibra).

DESARROLLO

Esta comunicación corresponde a mi disertación de tesis de maestría y se refiere al estudio sobre la teoría de uniformidades definidas por cubrimientos fibra a fibra presentada en el artículo Fibrewise covering uniformities and completions (2008), cuyos autores desarrollan para extender la teoría de espacios uniformes fibra a fibra dada por James (1989). Es decir, James describe los espacios uniformes fibra a fibra en términos de entornos que tienen un significado similar al que tienen en la teoría clásica de espacios uniformes, mientras que Konami y Miwa introducen la versión fibrada de cubrimientos uniformes, los cuales son otra manera de estudiar la teoría de espacios uniformes.

Dada una estructura uniforme fibra a fibra se puede construir una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra y además sus topologías generadas son iguales. Recíprocamente, para una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra y bajo la condición de regularidad sobre el espacio base, podemos obtener una estructura uniforme fibra a fibra en donde sus correspondientes topologías generadas son equivalentes.

Los profesores Konami y Miwa (2008), también desarrollan la teoría de espacios uniformes generalizados fibra a fibra (resp. espacios semiuniformes fibra a fibra) que es la versión fibrada de los espacios uniformes generalizados (resp. espacios semiuniformes) introducidos por Morita y Nagata (1989). Así, se estudia la noción de un completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibra a fibra y se muestra una construcción del mismo.

Comenzaremos con esbozar algunos preliminares de la teoría de espacios uniformes.

Definición 1. Willard (1968)(Espacio Uniforme). Un espacio uniforme es la pareja $(X, \mathfrak{D})$ donde X es un conjunto no vacío y $\mathfrak{D}$ es un filtro sobre $X \times X$ que satisface los siguientes axiomas:

- Si $D \in \mathfrak{D}$ entonces $\Delta \subset D$, donde $\Delta = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$.
- Para cada $D \in \mathfrak{D}$ existe $E \in \mathfrak{D}$ tal que $E \circ E \subset D$, donde la operación $\circ$ viene dada por
    - $U \circ V = \{(x,y) \in X \times X : \exists z \in X, (x,z) \in V \wedge (z,y) \in U\}$, $U, V \subseteq X \times X$, vemos que $\circ$ es una extensión de la noción de composición de funciones.
- Si $D \in \mathfrak{D}$ entonces $D^{-1} \in \mathfrak{D}$, aquí D^{-1} es la relación inversa de D.

Los elementos D de $\mathfrak{D}$ se llaman entornos y a $\mathfrak{D}$ se le conoce como uniformidad sobre X

Ejemplos 1. Willard (1968)

- Sea X un conjunto no vacío y sea $\mathfrak{D} = \{U \subseteq X \times X : \Delta \subset U\}$. La pareja $(X, \mathfrak{D})$ es un espacio uniforme discreto debido a que a $\mathfrak{D}$ se le conoce como uniformidad discreta.
- $X \neq \emptyset$, $\mathfrak{D} = \{X \times X\}$. La pareja $(X, \mathfrak{D})$ es un espacio uniforme y $\mathfrak{D}$ es la uniformidad trivial

Definición 2 Bourbaki (1966) (Sistema fundamental de entornos). Un sistema fundamental de entornos de una uniformidad $\mathfrak{D}$ sobre X es cualquier subcolección $\mathcal{E}$ de $\mathfrak{D}$ tal que para cada $D \in \mathfrak{D}$ existe $E \in \mathcal{E}$ tal que $E \subset D$. Es decir $\mathcal{E}$ actúa como una base de filtro para la uniformidad $\mathfrak{D}$.

De manera similar a los filtros, se puede generar una Uniformidad a partir de una subcolección de ella la cual actúa como sistema fundamental de entornos.

Definición 3. Dados $x \in X$ y $D \in \mathfrak{D}$, definimos el subconjunto de X, $D[x] = \{y \in X : (x,y) \in D\}$. Es decir $D[x]$ es el conjunto formado por las segundas componentes de los elementos de un entorno.

Teorema 1 (Sistema fundamental de vecindades). Para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{V}(x) = \{D[x]: D \in \mathfrak{D}\}$ es un sistema fundamental de vecindades en $x \in X$, haciendo de X un espacio topológico. Si $\mathcal{E} \subset \mathfrak{D}$ es un sistema fundamental de entornos, la colección $\mathcal{V}'(x) = \{E[x]: E \in \mathcal{E}\}$
genera la misma topología para X.

Ahora podemos definir un espacio topológico uniforme.

Definición 4 (Espacio topológico uniforme). La topología asociada a la uniformidad $\mathfrak{D}$ es la topología uniforme $\tau_{\mathfrak{D}}$ generada por $\mathfrak{D}$. Un espacio topológico (X, τ) es un espacio topológico uniforme o uniformizable, si $\tau = \tau_{\mathfrak{D}}$ para alguna uniformidad $\mathfrak{D}$ sobre X.

Otra forma de presentar espacios uniformes es por medio de cubrimientos uniformes.

Definición 5 (Cubrimiento uniforme). Un cubrimiento $\mathcal{U}$ de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{D})$ es un cubrimiento uniforme si para cada elemento de $\mathcal{U}_{\mathfrak{D}} = \{D[x]: x \in X\}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $D[x] \subset U$.

Decimos que un cubrimiento $\mathcal{U}$ de X refina al cubrimiento $\mathcal{V}$ de X y escribimos $\mathcal{U} < \mathcal{V}$, si y solo si cada $U \in \mathcal{U}$ está contenido en algún $V \in \mathcal{V}$.

Definición 6. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de X y $A \subset X$, la estrella de A con respecto a $\mathcal{U}$ es el conjunto $St(A, \mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U}: U \cap A \neq \emptyset\}$.

Definición 7 (Refinamiento estrella). Decimos que un cubrimiento $\mathcal{U}$ es un refinamiento estrella de un cubrimiento $\mathcal{V}$ (escribimos $\mathcal{U}^* < \mathcal{V}$) si $\{St(U, \mathcal{U}): U \in \mathcal{U}\} < \mathcal{V}$.

El siguiente teorema permite relacionar los cubrimientos uniformes y los entornos de una uniformidad sobre X.

Teorema 2. La colección μ de todos los cubrimientos uniformes de un espacio uniforme $(X, \mathfrak{D})$ satisface las propiedades siguientes:

- Si $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mu$ entonces para algún $\mathcal{U}_3 \in \mu$, $\mathcal{U}_3 < \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_3 < \mathcal{U}_2$.
- Si $\mathcal{U} < \mathcal{U}'$ y $\mathcal{U} \in \mu$ entonces $\mathcal{U}' \in \mu$.

De manera recíproca, dada cualquier familia μ de cubrimientos de un conjunto X que satisface las anteriores propiedades, la colección de todos los conjuntos $D_{\mathcal{U}} = \{U \times U: U \in \mathcal{U}, \mathcal{U} \in \mu\}$ es un sistema fundamental de entornos para una uniformidad sobre X, cuyos cubrimientos uniformes son precisamente los elementos de μ.

Ahora se presentan las versiones fibradas de espacios uniformes y cubrimientos uniformes dadas por James (1989) y por Konami & Miwa (2008) respectivamente.

Definición 8 (Conjunto fibrado sobre un conjunto base). Un conjunto fibrado X (rep. espacio topológico) sobre un conjunto base B (resp. espacio topológico) es la tripleta (X, p, B) donde $p: X \to B$ es una función (resp. continua) que no necesariamente es sobreyectiva.

Definición 9 (Fibra sobre $b \in B$). Para cada $b \in B$, el conjunto $X_b = p^{-1}(b) \subset X$ es la fibra sobre b.

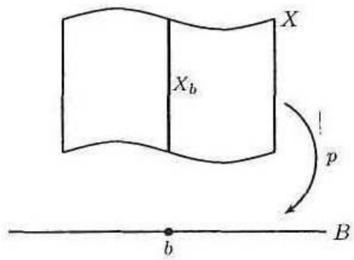

Figura 1. Fibra sobre b

Si $W \subseteq B$ entonces se define $X_W = p^{-1}(B)$.

Definición 10 (Función Fibrada). Dados (X, p, B), (Y, q, B) dos conjuntos fibrados sobre un mismo espacio base B y dada φ una función entre los espacios X e Y. La función φ es fibrada si $p = q \circ \varphi$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p = q \circ \varphi"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Figura 2. Función Fibrada

Definición 11 (Topología fibra a fibra). Sea B un espacio topológico, X un conjunto fibrado sobre B, una topología fibra a fibra sobre el conjunto fibrado X, es cualquier topología sobre X tal que la proyección $p: X \to B$ es continua.

Definición 12 (Espacio topológico fibra a fibra). Un espacio topológico fibra a fibra sobre un espacio topológico B es un conjunto fibrado X con una topología fibra a fibra.

Ejemplos 2. James (1989)

- Si X es un espacio topológico discreto, B un espacio topológico cualquiera y $p: X \to B$ una función, entonces p es continua y (X, p, B) es un espacio topológico fibra a fibra.
- B es un espacio topológico fibra a fibra sobre sí mismo, con la función identidad como proyección.
- El producto $B \times T$ con T espacio topológico y π_1 la primera proyección, es un espacio topológico fibra a fibra.
- En general, cualquier función continua $p: X \to B$ entre dos espacios topológicos X y B, convierte a su dominio en un espacio topológico fibra a fibra. Por ésta razón a la topología fibrada se le conoce como topología de las funciones continuas.

De forma similar a la Definición 1 se obtiene la versión fibrada de espacio uniforme.

Definición 13 (Espacio uniforme fibra a fibra). Sea B un espacio topológico, X un conjunto fibrado sobre B, la pareja (X, Ω) es un espacio uniforme fibra a fibra con Ω un filtro sobre $X \times X$ si Ω satisface los siguientes axiomas:

- Si $D \in \Omega$ entonces $\Delta \subset D$. A cada elemento D de Ω se le llama también entorno.
- Si $D \in \Omega$ entonces para cada $b \in B$ existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y un entorno $E \in \Omega$ tales que, $X_W^2 \cap E \subset D^{-1}$ con $X_W^2 = X_W \times X_W$.
- Si $D \in \Omega$ entonces para cada $b \in B$ existen $W \in \mathcal{V}(b)$ y un entorno $E \in \Omega$ tales que, $(X_W^2 \cap E) \circ (X_W^2 \cap E) \subset D$.

A Ω también se conoce como estructura uniforme fibra a fibra.

Similarmente al Teorema 1 se tiene la versión fibrada de vecindad, sistema fundamental de vecindades y por ende de topología uniforme fibra a fibra $\tau_\Omega = \{A \subset X_W : \forall x \in A, A \in \mathcal{V}'(x)\}$ aquí $\mathcal{V}'(x) = \{X_W \cap D[x] : W \in \mathcal{V}(b),\ D \in \Omega\}$.

Konami y Miwa (2008) definen el concepto de par conjugado de cubrimientos, de refinamiento estrella de pares conjugados de cubrimientos, sistema de pares conjugados de cubrimientos de las bandas fibradas $\{X_W\}_{W \in \tau_B}$ y otras nociones, que les permiten definir el espacio uniforme por cubrimientos para el caso fibrado.

Definición 14 (Espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra). Sea X un conjunto fibrado sobre B (rep. Espacio topológico fibra a fibra sobre B), $\mu = \{\mu_W\}_{W \in \tau_B}$ un sistema de pares conjugados de cubrimientos de $\{X_W\}_{W \in \tau_B}$. Se dice que el par (X, μ) es un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra o que el sistema $\mu = \{\mu_W\}_{W \in \tau_B}$ es una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra si cumple con los siguientes axiomas:

- Si $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$ es un par conjugado de cubrimientos de X_W y si existe $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') \in \mu_w$ tal que $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') < (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$, entonces $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_w$.
- Para cada $(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}'_i) \in \mu_w$, $i = 1{,}2$, existe $(\mathcal{U}_3, \mathcal{U}'_3) \in \mu_w$ tal que $(\mathcal{U}_3, \mathcal{U}'_3) < (\mathcal{U}_i, \mathcal{U}'_i)$ $i = 1{,}2$.
- Para cada $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_w$ y cada $b \in W \subset B$, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}')$ es un refinamiento estrella del par conjugado $(\mathcal{U}, \mathcal{U}')$.
- Para cada $(\mathcal{U}, \mathcal{U}') \in \mu_w$ y cada $b \in W \subset B$, existen $W' \in \mathcal{V}(b)$ y $(\mathfrak{U}, \mathfrak{U}') \in \mu_{W'}$ tales que $W' \subset W$ y $(\mathfrak{U}', \mathfrak{U}) < (\mathcal{U}, \mathcal{U}')$.
- Para $W' \subset W$ se tiene $\mu_{W'}$ contiene a la restricción de μ_w con respecto a $X_{W'}$.

Se observa que los dos primeros axiomas de la Definición 14 son una extensión de las dos propiedades del Teorema 2.

Dado un espacio uniforme fibra a fibra se puede construir una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra, y recíprocamente dado un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra y bajo la condición de regularidad sobre el espacio base B podemos construir una estructura uniforme fibra a fibra.
Estos resultados están plasmados en las proposiciones:

Proposición 1. Sea (X, Ω) un espacio uniforme fibra a fibra entonces el sistema de pares conjugados de cubrimientos $\{\mu(\Omega)_W\}$ es una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra.

Aquí los pares conjugados de cubrimientos de la banda X_W del sistema $\{\mu(\Omega)_W\}$ tienen la forma:
Para cada entorno $D \in \Omega$ y cada abierto W del espacio base B, $\mathcal{U}(D, W) = \{D^{-1}[x] \cap X_W : x \in X_W\}$, $\mathcal{U}'(D, W) = \{D[x] \cap X_W : x \in X_W\}$ así $(\mathcal{U}(D, W), \mathcal{U}'(D, W))$ es un par conjugado de cubrimientos de X_W.

Proposición 2. Sea B un espacio topológico regular y sea $(X, \mu = \{\mu_W\})$ un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra. Entonces la colección Ω_μ es una estructura uniforme fibra a fibra.

Los entornos de la estructura uniforme Ω_μ tienen la forma

Para cada $(\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W$, $D(\mathcal{U},\mathcal{U}') = \cup\{U_\alpha \times U'_\alpha : (U_\alpha, U'_\alpha) \in (\mathcal{U},\mathcal{U}'), \alpha \in \Lambda\}$ así

$$\Omega_\mu = \{D \subset X \times X : \text{para}\{W_1, \cdots, W_n\} \text{ un cubrimiento abierto finito de B existen } (\mathcal{U}_i, \mathcal{U}'_i) \in \mu_{W_i}, i = 1, \cdots, n \text{ tales que } D(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}'_1) \cup \cdots \cup D(\mathcal{U}_n, \mathcal{U}'_n) \subset D\}$$

Así como existe un sistema fundamental de vecindades que genera la topología τ_Ω de una estructura uniforme fibra a fibra Ω , de manera análoga para un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra (X, μ) lo podemos dotar de una topología por medio de la colección $N_x(\mu) = \{C \supset St(\{x\}, \mathcal{U} \wedge \mathcal{U}') : (\mathcal{U},\mathcal{U}') \in \mu_W, W \in \mathcal{V}(b)\}$ que forma un sistema fundamental de vecindades para cada $x \in (X, \mu)$, donde el cubrimiento $\mathcal{U} \wedge \mathcal{U}' = \{U \cap U' : U \in \mathcal{U}, U' \in \mathcal{U}'\}$.
Luego, la topología generada por la colección $N_x(\mu)$ está descrita como $\tau_\mu = \{G \subset X : \forall x \in G, G \in N_x(\mu)\}$.

Un primer resultado es la equivalencia entre la topología de un espacio uniforme fibra a fibra τ_Ω y aquella topología generada en el espacio uniforme fibra a fibra (X, Ω) por la uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra $\{\mu(\Omega)_W\}$. Otro resultado paralelo es la equivalencia entre la topología de un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra τ_μ con el espacio base B regular y aquella topología generada en el espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra (X, μ) por la estructura uniforme fibra a fibra Ω_μ.

Este resultado se enuncia en la proposición

Proposición 3.

- Para un espacio uniforme fibra a fibra (X, Ω) se cumple que $\tau_\Omega = \tau_{\mu(\Omega)}$.
- Si B es un espacio topológico regular. Para un espacio uniforme por cubrimientos fibra a fibra (X, μ) se tiene que $\tau_\mu = \tau_{\Omega_\mu}$.

El siguiente resultado del estudio realizado en mi Trabajo final de Maestría en Matemáticas inspirado en el artículo Fibrewise covering uniformities and completions de los Profesores Konami y Miwa (2008), se refiere a la construcción de un completado fibra a fibra en una uniformidad generalizada fibra a fibra o lo que es lo mismo en un espacio g-uniforme fibra a fibra, el cual es una extensión fibrada de la noción de espacio uniforme generalizado introducido por Morita y Nagata (1989). Todas las demás nociones conducentes a definir el completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibra a fibra son versiones fibradas del completado de un espacio uniforme generalizado.
Pero la construcción del completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibra a fibra presentado por los Profesores Konami y Miwa (2008) es totalmente innovador.

Se enuncia el resultado a manera de teorema del completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibra a fibra y en estas memorias se omite su demostración ya que ésta es muy técnica. Sin embargo para los que están interesados, la demostración completa y en español está en el link
http://www.bdigital.unal.edu.co/2713/1/830219.2009.pdf

Teorema 3. $(X^*, \{(\mu_W)^*\})$ es un completado fibra a fibra de $(X, \{\mu_W\})$.

Aquí $(X, \{\mu_W\})$ denota el espacio topológico uniforme generalizado fibra a fibra y $\{\mu_W\}$ denota la uniformidad generalizada fibra a fibra.

CONCLUSIONES

1. Se muestra la construcción del completado fibra a fibra de un espacio g-uniforme fibra a fibra.
2. Una uniformidad definida por cubrimientos fibra a fibra es una uniformidad generalizada fibra a fibra.
3. Espacios uniformes fibra a fibra y espacios uniformes definidos por cubrimientos fibra a fibra son homeomorfos, con sus topologías generadas por sus correspondientes estructuras uniformes, la identidad como función continua y con la condición de regularidad sobre el espacio base.

BIBLIOGRAFÍA

Bourbaki, N. (1966). *General Topology, Part 1, Elements of mathematics*, Addison- Wesley.

Engelking, R. (1989). *General Topology*. Berlin: Heldermann Verlag.

James, I. (1989). *Fibrewise Topology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Konami, Y. & Miwa, T. (2008). Fibrewise covering uniformities and completions. Acta Math. Hungar, 119, 127-157.

Morita, K. & Nagata, J. (1989*). Extension of mappings I, in: Topics in General Topology*. Amsterdam: North-Holland. Chapter 1.

Willard, S. (1968). *General Topology*. United State of America: Addison Wesley.