EL ESPECTRO PRIMO DE LOS MÓDULOS MULTIPLICACIÓN

Diana Milena Otálora Muñoz
Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
diana.otalora11@gmail.com

RESUMEN. Un módulo M sobre un anillo conmutativo A se llama módulo multiplicación si para cada submódulo N de M existe un ideal I de A tal que $N = IM$. A su vez, se estudian los módulos Baer y los reducidos, estos últimos cumplen la propiedad de que la intersección de todos sus submódulos primos es 0. Esta clase de módulos ha sido estudiada en los últimos años por varios autores (ver por ejemplo [7]). En esta oportunidad se desea describir algunas propiedades del espacio topológico formado por el conjunto de todos los submódulos primos de un módulo multiplicación reducido M, dotado con la topología de Zariski. Algunas de estas propiedades serán ilustradas con algunos ejemplos.

ABSTRACT. An A-module M is called a multiplication module if for each submodule N of M, $N = IM$ for some ideal I of A. In this paper all rings are commutative with unity and all modules are unitary. The Baer module and the reduced module are studied, an A-module is reduced if the intersection of all prime submodules is equals to zero. Multiplication modules and reduced modules have been studied in last years (see [7]). In this opportunity, I want to describe some properties of the topologic space of all primes submodules with Zariski topology. Some properties will be showed with examples.

PALABRAS CLAVE: Módulo multiplicación, espectro primo, submódulo primo, topología de Zariski.

1. INTRODUCCIÓN. La noción de espectro primo de un A-módulo M, donde A es un anillo conmutativo con unidad, establece una relación entre dos grandes áreas de la matemática: el álgebra conmutativa y la topología, ya que a partir de un A-módulo es posible construir un espacio topológico.

El objeto de este trabajo es ilustrar algunos conceptos y propiedades básicas de los módulos multiplicación, así como el estudio del espacio topológico formado por el espectro primo de un módulo multiplicación reducido dotado de la topología de Zariski.

2. DESARROLLO DEL TEMA.

1. Definiciones y propiedades básicas

Definición 1.1 *Dado M un $A-$módulo y $N \subseteq M$, $N \neq \emptyset$. Se dice que N es un A-submódulo de M o submódulo de M, si N es subgrupo de $(M,+)$ y además $an \in N$, $\forall$ $n \in N$ y $\forall$ $a \in A$. En adelante se denotará $N \leq M$ para señalar que N es submódulo de M.*

Definición 1.2 *Un submódulo P de M es llamado primo si $P \neq M$ y siempre que $am \in P$ $\forall a \in A$ y $\forall$ $m \in M$, entonces $a \in (P : M)$ o $m \in M$.*

Dado que nuestro objeto de estudio son los módulos multiplicación y los módulos reducidos, es importante tener en cuenta algunas propiedades que cumplen tales módulos.

Proposición 1.3 *Dado M un A-módulo y $N \leq M$. Si $N = IM$ entonces $I \subseteq (N : M)$.*

Proposición 1.4 *Si M es un módulo multiplicación entonces N=$(N : M)M$ para todo submódulo N de M.*

Definición 1.5 *Un A-módulo M es un módulo Baer si para algún subconjunto X de M se cumple que Ann$(X)M = eM$, donde e es un elemento idempotente de A.*

Definición 1.6 *Un espacio totalmente disconexo es un espacio topológico (X, τ) en el que cada pareja de puntos distintos pueden ser separados por una disconexión de X, es decir, para cualesquiera $x, y \in X$, $x \neq y$, existen A, B abiertos disyuntos en el que $x \in A$ e $y \in B$ y además $A \cup B = X$.*

Ejemplos 1.7 *Dentro de los espacios totalmente disconexos tenemos:*

- *El espacio discreto*
- *El conjunto de Cantor*
- *Los espacios de Hausdorff*
- $\mathbb{Q}$ *e* $\mathbb{I}$ *como subespacios de* $\mathbb{R}$ *con la topología usual.*

Definición 1.8 *Un espacio topológico* (X, τ)*es extremadamente disconexo si cada conjunto cerrado tiene interior cerrado, o equivalentemente, si cada conjunto abierto tiene adherencia abierta.*

Proposición 1.9 *Si* (X, τ) *es un espacio extremadamente disconexo y es de Hausdorff entonces* (X, τ) *es totalmente disconexo.*

Proposición 1.10 *Sea M un módulo reducido finitamente generado. M es un módulo Baer si y solo si Spec(M) es un espacio extremadamente disconexo.*

2. Espectro primo de un módulo multiplicación

Definición 2.1 *Dado* M *un* A*-módulo y sea* $Spec(M)$ *la colección de todos los submódulos primos de* M*, llamaremos* $V(N)$ *a la colección de submódulos primos de* M *que continen a* N*, es decir,* $V(N) := \{P \in Spec(M) \mid N \subseteq P\}$*.*

Proposición 2.2 *Sean* $N, P \leq M$*, si* $N \subseteq Q$ *entonces* $V(Q) \subseteq V(N)$*.*

Proposición 2.3 *Dado* I *un ideal de* A *y* N *un submódulo de un módulo multiplicación* M*. Entonces*

$$V(N) \cup V(IM) = V(IN) = V(N \cap IM)$$

Proposición 2.4 *La familia* $\zeta = \{\ V(N) \mid N{\leq}M\ \}$ *forma una topología por cerrados para* $Spec(M)$*, y recibe el nombre de Topología de Zariski sobre* $Spec(M)$*, siendo* M *un módulo multiplicación.*

3. CONCLUSIONES.

Así como a partir de los ideales primos de un anillo se construye un espacio topológico, de manera análoga se construye en un A-módulo M a partir de su colección de submódulos primos. En [2] se definen 2 tipos de variedades para un submódulo de M de la siguiente manera:

Sea M un A-módulo. Para cualquier $N \leq M$, se consideran dos tipos de variedades distintas

$$V(N) := \{K \in Spec(M) | N \subseteq K\}$$
$$V^*(N) := \{K \in Spec(M) | (N : M) \subseteq (K : M)\}$$

Si se toma $\zeta(M){:=}\{V(N)|N \leq M\}$, como la colección de conjuntos cerrados, la topología inducida τ es la seudo topología de Zariski para S$pec(M)$. Por su parte, si tomamos como colección de cerrados a $\zeta^*(M){:=}\{V^*(N)|N \leq M\}$, la topología inducida τ^* se denomina topología de Zariski para $Spec(M)$.
Resulta interesante ver que dado M un A-módulo multiplicación y A un anillo conmutativo, si tomamos las variedades $V(N)$ siendo N un submódulo de M, $\zeta(M)$ satisface los axiomas por conjuntos cerrados de un espacio topológico, mientras que en un módulo cualquiera sólo resulta ser seudo topología.

Dentro de los módulos multiplicación se encuentran los módulos cíclicos, como ejemplos particulares están los módulos simples. Bajo este orden de ideas, si se toman los cuerpos K como K-módulos, los ideales de K coinciden con sus submódulos, entonces son módulos simples, y en consecuencia, resultan ser módulos multiplicación.

4. AGRADECIMIENTOS.

Al profesor Héctor Julio Suárez por su colaboración en el presente trabajo y a toda la planta docente perteneciente a la Escuela de Matemáticas y Estadística de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia por sus aportes a mi formación académica.

Referencias

[1] M.F. Atiya e I.G. MacDonald, Introducción al álgebra conmutativa. Editorial Reverté. S.A 1973.

[2] S.P. Barragán, El espectro primo de un módulo sobre un anillo conmutativo, Tesis de Maestría, Departamento de matemáticas. Universidad Nacional de Colombia, 2001.

[3] Yong Hwan Cho, On multiplication modules(II), Comm.Korean Math. Soc. 13, 1998.

[4] R. Engelking, General Topology (PWN Polish Scientific Publishers), 1977.

[5] O. Lezama, Cuaderno de álgebra No. 3, Módulos, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, 2011.

[6] W. Rudin, Principios de Análisis Matemático, Tercera edición, Mcgraw-Hill, México, 1980.

[7] K. Samei, Reduced multiplication modules. Rev.Acad. Indian . Sci. Vol.121, N°. 2 pp. 121-132, May 2011.

[8] G. Simmons.,Introduction to topology and modern analysis, Mcgraw Hill College International edition, 1963.