CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO EN LA DIMENSIÓN EPISTÉMICA, PARA LA ENSEÑANZA DEL OBJETO INECUACIONES: UNA PERSPECTIVA DESDE LAS CONCEPCIONES Y CREENCIAS DEL PROFESOR

Leonardo Marcedonio Piratoba Gil

Código: 202110255

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Facultad de Ciencias de la Educación, Maestría en Educación Matemática

Tunja-Boyacá, Colombia

2022

CONOCIMIENTO DIDÁCTICO MATEMÁTICO EN LA DIMENSIÓN EPISTÉMICA, PARA LA ENSEÑANZA DEL OBJETO INECUACIONES: UNA PERSPECTIVA DESDE LAS CONCEPCIONES Y CREENCIAS DEL PROFESOR

Leonardo Marcedonio Piratoba Gil

Código:202110255

Trabajo de grado, requisito parcial para optar el título de Magister en Educación Matemática, dentro del marco del proyecto de investigación con código SGI número 3334 del Grupo Álgebra y Análisis UPTC.

Directora:

Dr. Omaida Sepúlveda Delgado

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

Facultad de Ciencias de la Educación, Maestría en Educación Matemática

Tunja-Boyacá, Colombia

2022

A mis padres Marcedonio y María
Por haberme apoyado en mis estudios y a nunca desfallecer.

Agradecimiento

Este trabajo ha sido posible gracias a Dios y a la Santísima Virgen por ofrecerme la oportunidad, la capacidad, el tiempo y ayuda de excelentes personas que han dado su apoyo a lo largo de mi vida.

Mis más sinceros agradecimientos a:

A la Dra. Omaida Sepúlveda Delgado por ser la persona que acepto dirigir esta tesis de maestría y me brindó sus ideas para el desarrollo de la misma, gracias por sus grandes concejos, aportes y sugerencias durante el proceso de formación, por su plena disposición y toda su paciencia en la realización de esta investigación.

A todo el grupo de docentes que conforman el programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, por su entrega y compromiso durante el proceso de formación.

A mis compañeros de maestría que sin duda alguna, ofrecieron su amistad y apoyo en todo momento, por sus ánimos, sus concejos y su colaboración ante las inquietudes durante el desarrollo de la investigación.

Agradezco a mi familia, especialmente a mis padres quienes nunca dejaron de creer en mí y quienes siempre me han apoyado de manera absoluta en todas las decisiones de mi vida.

Tabla de contenido

Introducción 18

Capítulo 1. Planteamiento del problema de investigación 20

1. Problema de Investigación.. 20

1.1 Descripción del Problema 20

1.2 Formulación del Problema 24

1.3 Objetivos 24

General 24

Específicos 24

1.4 Justificación.. 25

2 Capítulo 2. Marco teórico 27

2.1 Antecedentes 27

2.1.1 Investigaciones en el conocimiento del profesor 27

2.1.2 Investigaciones sobre concepciones y creencias para el objeto inecuaciones 30

2.1.3 Investigaciones en la enseñanza de las inecuaciones 32

2.2 Fundamentación Teórica 34

2.2.1 Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) 34

2.2.2 Sistemas de Prácticas 35

2.2.3 Significado de los Objetos Matemáticos 37

2.2.4 Objetos Matemáticos Primarios 38

2.2.5 Configuración Epistémica 39

2.2.6 Idoneidad Didáctica 42

2.2.7 Modelo del conocimiento del profesor: Conocimiento didáctico matemático (CDM) 45

2.3 Teoría de los Registro de Representación Semiótica 47

2.3.1 Representaciones Semióticas 47

2.4 Concepciones y Creencias 48

3 Capítulo 3. Marco Metodológico 52

3.1 Nivel de Investigación 52

3.2 Línea de investigación 53

3.3 Diseño y Fases de la Investigación 53

3.4 Población y Muestra 55

3.5 Técnicas e Instrumentos de Recolección y análisis de datos 56

3.6 Técnicas de Procesamiento y Análisis de Datos 57

3.7 Fases de la Investigación 57

3.7.1 Fase 1. Análisis Preliminar 58

3.7.2 Fase II. Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas................. 58

3.7.3 Fase III. Experimentación. 59

3.7.4 Fase IV. Evaluación 60

3.8 Relación entre las Fases de investigación y los Objetivos Planteados................ 61

3.8.1 Fase I: Análisis Preliminar 61

3.8.2 Fase II. Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas................. 62

3.8.3 Fase III. Experimentación. 62

3.8.4 Fase IV. Evaluación 63

3.9 Categorías de análisis para el cuestionario – Concepciones y Creencias de los profesores en la dimensión epistémica para el objeto Inecuaciones.. 63

4 Capítulo 4. Resultados.. 67

4.1 Análisis epistemológico del objeto Inecuaciones.. 67

4.1.1 Significado del objeto Inecuaciones y su relación con el CDM 67

4.2 Significado Global del Objeto Matemático Inecuaciones.................................. 88

4.3 Diseño y análisis del cuestionario sobre las concepciones y creencias de los profesores de Matemáticas frente al objeto Inecuaciones.. 92

4.4 Cuestionario “Concepciones y creencias de los profesores de matemáticas frente al objeto inecuaciones” 92

4.4.1 Categorías de Análisis para el cuestionario Concepciones y Creencias de los profesores en la dimensión epistémica del objeto Inecuaciones (CCPI) 103

4.4.2 Análisis de la Dimensión Epistémica del Conocimiento Didáctico Matemático de los Profesores respecto al objeto Inecuaciones 104

4.4.3 Dimensión epistémica – Parte II: Análisis de los significados de Referencia de los textos de enseñanza 124

4.4.4 Dimensión epistémica – CDM – Parte II: Implicaciones en la enseñanza.. 129

4.4.5 Dimensión epistémica – Parte III: Pensamiento variacional....................... 148

4.4.6 Parte III: Estándares Básicos de Competencias Matemática 149

4.4.7 Categorías de Análisis para el CDM según el Cuestionario (CCPI)........... 151

4.5 Análisis cuantitativo del Cuestionario (CCPI) 152

4.5.1 Análisis del Índice de dificultad.. 154

4.6 Análisis del Conocimiento Común del Contenido.. 156

4.7 Análisis del Conocimiento Ampliado del Contenido...................................... 160

4.8 Análisis del conocimiento Especializado del Contenido 164

5 Capítulo 5. Conclusiones Generales.. 169

5.1 Resultados de la investigación 169

5.2 Primera y Segunda Fase de Investigación... 169

5.3 Tercera Fase de Investigación. 171

5.4 Cuarta Fase de Investigación... 172

5.4.1 Caracterización de la faceta epistémica del CDM 174

5.4.2 Análisis de la dimensión epistémica del CDM de los Docentes de matemáticas 175

5.5 Análisis de las concepciones y creencias. 176

5.6 Principales aportes de la investigación.. 177

5.7 Apreciaciones del autor.. 178

5.8 Limitaciones del estudio.. 179

6 Referencias 180

Índice de Tablas

Tabla 2-1. *Indicadores del CDM para la faceta epistémica* 46

Tabla 2-2 *Definiciones de concepción y creencia, desde varias posturas* 49

Tabla 3-1. *Fases de la Investigación en el objeto Inecuaciones.* 53

Tabla 3-2. *Técnicas e instrumentos para la recolección de datos.* 56

Tabla 3-3. *Conocimiento del Contenido* 64

Tabla 3-4. *Valoración de la Dimensión Epistémica del conocimiento del contenido matemático de los profesores para el objeto Inecuaciones* 64

Tabla 3-5. *Indicadores de Idoneidad Epistémica (matemática) para el conocimiento especializado del contenido matemático.* 65

Tabla 4-1. *Emergencia del Significado Parcial 1.* 70

Tabla 4-2. *Emergencia del significado parcial 2* 79

Tabla 4-3. *Emergencia del significado parcial 3* 82

Tabla 4-4. *Emergencia del significa parcial 4* 84

Tabla 4-5. *Configuraciones Epistémicas* 88

Tabla 4-6. *Categoría y Descripción de cada ítem del Cuestionario* 103

Tabla 4-7. *C.E.1. Problema de los vinos* 105

Tabla 4-8. *Respuesta dadas por los docentes a la Pregunta 1.a)* 106

Tabla 4-9. *Análisis de las respuestas dadas por los Docentes a la pregunta 1.a* 108

Tabla 4-10. *Conclusión pregunta 1.a* 110

Tabla 4-11. *CE1. Problema de los vinos* 110

Tabla 4-12. *Respuesta dadas por los docentes a la Pregunta 1.e)* 110

Tabla 4-13. *CE1. Problema de los vinos* 112

Tabla 4-14. *Respuesta dadas por los docentes a la Pregunta 1.f)* 112

Tabla 4-15. *CE2. Problema de los lados de un polígono* 113

Tabla 4-16. *Respuesta dada por los docentes a la pregunta 2c* 114

Tabla 4-17. *Análisis de las respuestas dadas por los Docentes a la pregunta 2.c* 115

Tabla 4-18. *Conclusión pregunta 2.c* 117

Tabla 4-19. *CE3. Problema de Bombelli* 118

Tabla 4-20. *Análisis de las respuestas dadas por los Docentes a la pregunta 3.e* 118

Tabla 4-21. *Conclusión pregunta 3.e* 120

Tabla 4-22. *CE4. El método de Exhausción* 121

Tabla 4-23. *Análisis de las respuestas dadas por los Docentes a la pregunta 4.f* 122

Tabla 4-24. *Conclusión pregunta 4.g* 123

Tabla 4-25. *Situación-Problema 1: Problema de los vinos* 124

Tabla 4-26. *Respuesta pregunta 1.d* 124

Tabla 4-27. *Situación-Problema 3: Ejemplo numérico de Bombelli* 125

Tabla 4-28. *Respuesta pregunta 3.f* 125

Tabla 4-29. *Situación-Problema 3: Ejemplo numérico de Bombelli* 126

Tabla 4-30. *Pregunta 3.g* 127

Tabla 4-31. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción* 127

Tabla 4-32. *Pregunta 4.c* 128

Tabla 4-33. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción* 128

Tabla 4-34. *Pregunta 4.h* 129

Tabla 4-35. *Situación-Problema 1: Problema de los vinos (P1.b) análisis a priori* 130

Tabla 4-36. *Situación-Problema 1: Problema de los vinos (P1.b) análisis a posteriori* 130

Tabla 4-37. *Situación-Problema 1: Problema de los vinos (P1.d) análisis a priori* 131

Tabla 4-38. *Respuesta pregunta 1.d, análisis a posteriori* 131

Tabla 4-39. *Situación-Problema 1: Problema de los vinos (P1.g) análisis a priori* 132

Tabla 4-40. *Pregunta 1.g, análisis a posteriori* 132

Tabla 4-41. *Situación-Problema 2: Problema de los lados de un polígono (P2.a) análisis a priori* 133

Tabla 4-42. *Situación-Problema 1: Problema del polígono (P2.a) análisis a posteriori* 133

Tabla 4-43. *Situación-Problema 2: Problema de los lados de un polígono (P2.d) análisis a priori* 134

Tabla 4-44. *Pregunta 2.d, análisis a posteriori* 135

Tabla 4-45. *Situación-Problema 2: Problema de los lados de un polígono (P2.e) análisis a priori* 135

Tabla 4-46. *Pregunta 2.e, análisis a posteriori* 136

Tabla 4-47. *Situación-Problema 2: Problema de los lados de un polígono (P2.f) análisis a priori* 137

Tabla 4-48. *Pregunta 2.f, análisis a posteriori* 137

Tabla 4-49. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.b) análisis a priori* 138

Tabla 4-50. *Pregunta 3.b, análisis a posteriori* 138

Tabla 4-51. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.c) análisis a priori* 140

Tabla 4-52. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.c) análisis a posteriori* 140

Tabla 4-53. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P.3f) análisis a priori*....... 141

Tabla 4-54. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.f) análisis a posteriori* 141

Tabla 4-55. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.g) análisis a priori*...... 142

Tabla 4-56. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.g) análisis a posteriori* 142

Tabla 4-57. *Situación-Problema 4: El Método de Exhauscíón (P4.b) análisis a priori* 143

Tabla 4-58. *Situación-Problema 4: El Método de Exhauscíón (P4.b) análisis a posteriori* 143

Tabla 4-59. *Situación-Problema 4: El Método de Exhauscíón (P4.c) análisis a priori*. 144

Tabla 4-60. *Situación-Problema 4: El Método de Exhauscíón (P4.c) análisis a posteriori* 144

Tabla 4-61. *Situación-Problema 4: El Método de Exhauscíón (P4.d) análisis a priori* 145

Tabla 4-62. *Situación-Problema 4: El Método de Exhauscíón (P4.d) análisis a posteriori* 145

Tabla 4-63. *Situación-Problema 4: El Método de Exhauscíón (P4.g) análisis a priori* 146

Tabla 4-64. *Situación-Problema 4: El Método de Exhauscíón (P4.g) análisis a posteriori* 146

Tabla 4-65. *Pregunta 7* 147

Tabla 4-66. *Pregunta 7 análisis a posteriori* 147

Tabla 4-67. *Situación-Problema 2: Problema de los lados de un polígono (P2.f) análisis a priori* 148

Tabla 4-68. *Pregunta 2.f análisis a posteriori* 149

Tabla 4-69. *Estándares Básicos de competencias* 150

Tabla 4-70. *Pregunta 5, análisis a posteriori* 150

Tabla 4-71. *Categorías del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM)*..................... 151

Tabla 4-72. *Resultados del Cuestionario (CCPI)* 153

Tabla 4-73. *Índice de dificultad del Cuestionario (CCPI)* 154

Tabla 4-74. *Tipos de Respuestas frente al ítem 1* 157

Tabla 4-75. *Respuesta por parte de los docentes al subítem 2.c)* 159

Tabla 4-76. *Respuestas dadas por los docentes frente al subítem 3.f*............................. 162

Tabla 4-77. *Respuesta dada por los docentes frente al subítem 3.g* 163

Tabla 4-78. *Respuestas dadas por los docentes frente al subítem 3.e* 166

Tabla 4-79. *Respuesta dada por los docentes frente a la respuesta 4.g* 167

Índice de Figuras

Nota 1. *Reproducida de Sistema de prácticas, de Godino et. al., 2007* 37

Nota 2. *Reproducida de Configuración Epistémica, de Font y Godino (2006)* 40

Nota 3. *Reproducida de Configuración de objetos y procesos matemáticos, de Godino, Batanero y Font (2007)*.. 42

Nota 4. *Reproducida de Idoneidad didáctica, de Godino (2013a), p. 116*....................... 43

Nota 5. *Indicadores del CDM para la faceta epistémica* 91

Nota 6. *Dificultad de las situaciones problemas del cuestionario. Elaboración Propia* 156

Resumen

El presente estudio tiene como objetivo caracterizar el conocimiento didáctico matemático en la dimensión epistémica, para el objeto inecuaciones, según las concepciones y creencias del profesor respecto al significado global del objeto matemático. Dada la importancia que tienen las inecuaciones en el currículo colombiano es importante analizar el conocimiento del contenido matemático de los profesores, entendido como el conocimiento que tienen de la dimensión epistémica de los objetos matemáticos, en cuanto al conocimiento adquirido en el proceso de formación como docentes y fruto de su experiencia. El marco teórico y metodológico en el cual se apoya la investigación corresponde al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos – EOS. Se establece el estudio como una investigación descriptiva, de tipo cualitativo que corresponde a un estudio de caso, donde se toman como fases los análisis preliminares; concepción y análisis a priori de situaciones didácticas; experimentación y finalmente Evaluación. En el estudio se indaga sobre la experiencia de 5 profesores Licenciados en matemáticas de diferentes sectores educativos de secundaria (públicos y privados). El estudio tiene el fin de analizar el conocimiento didáctico matemático en la dimensión epistémica según el desarrollo de situaciones problemas de Inecuaciones, planteadas a los profesores que participan del estudio.

Palabras Clave: CDM, EOS, Concepción, Creencia, Inecuación.

Abstract

The objective of this study is to characterize the mathematical didactic knowledge in the epistemic and cognitive dimension, for the inaccuracies of the object, according to the conceptions and beliefs of the teacher regarding the global meaning of the mathematical object. Given the importance they have in the Colombian curriculum, it is important to analyze the mathematical content knowledge of teachers, understood as the knowledge they have of the epistemic dimension of mathematical objects, as well as the knowledge acquired in the training process as teachers and fruit of your experience. The theoretical and methodological framework on which the research is based corresponds to the Ontosemiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction – EOS. The study is established as a descriptive, qualitative research that corresponds to a case study, from which the preliminary analyzes are taken as phases; conception and a priori analysis of didactic situations; experimentation and finally evaluation. The study investigates the experience of 5 mathematics graduate teachers from different sectors of secondary education (public and private). The purpose of the study is to analyze the mathematical didactic knowledge in the epistemic and cognitive dimension according to the development of situations and problems of Inequalities, posed to the teachers who participate in the study.

Keywords: CDM, EOS, Conception, Belief, Inequality.

Introducción

Desde la antigüedad, el ser humano ha intentado dar respuesta a diferentes situaciones problemas presentes en diferentes contextos, llegando a desarrollar numerosas técnicas para trabajar con los objetos matemáticos, entre ellos el objeto de las Inecuaciones. Bajo esta perspectiva se realizó un estudio con el fin de dar respuesta a la pregunta de investigación: ¿Qué concepciones y creencias tienen los profesores de matemáticas frente al objeto inecuaciones, respecto a los significados pretendidos en los procesos de enseñanza? En esta dirección la investigación toma como marco teórico y metodológico al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemáticos – EOS, y se sustenta en un paradigma interpretativo conduciendo el estudio a un enfoque de investigación cualitativo de tipo descriptivo – exploratorio y fenomenológico (Rico, 2004).

El trabajo se estructura en 5 capítulos: en el primero, se presenta la fundamentación del problema de investigación, posteriormente, la descripción y la formulación del problema; para llegar a establecer la pregunta de investigación. Y, se continúa con los objetivos y la justificación del estudio.

En el segundo capítulo, se presentan las herramientas y nociones teóricas en la cuales se basó la investigación: el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), descrito por Godino y colaboradores (Godino, 2014; Godino, Batanero, Rivas, y Arteaga, 2013; Godino, Batanero y Font, 2020; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero, y Font, 2008; Sepúlveda, 2016; entre otros). Este marco teórico plantea una serie de categorías de análisis para el conocimiento matemático y didáctico, las cuales hacen parte de las dimensiones del conocimiento didáctico matemático (CDM) del profesor, relacionándolas con las concepciones y creencias de los profesores para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, respecto al objeto inecuaciones (Thompson 1992; Ponte 1994; Pajares 1992; Llinares 1989, Azcarate y Moreno, 2003).

En el tercer capítulo, se presenta la metodología con la cual se desarrolla la investigación; el estudio se ajusta a un paradigma interpretativo y un enfoque de investigación cualitativa el cual es adecuado para el desarrollo del estudio. Se describe el diseño y las fases de la investigación con las cuales se da cumplimiento a los objetivos específicos y por tanto al objetivo general. En este sentido, se describen las unidades de análisis que permitieron caracterizar la dimensión epistémica del conocimiento del profesor en cuanto al objeto Inecuaciones en relación con los significados de referencia que usa el profesor para establecer un significado pretendido y llegar a una correcta implementación en el aula de clase. Finalmente, en este apartado se dan a conocer las técnicas e instrumentos de recolección de información y las técnicas para el análisis de los datos y las categorías de análisis.

En el cuarto capítulo se presenta los resultados obtenidos en la investigación teniendo presente las categorías de análisis y el cuestionario realizado a los docentes para caracterizar el conocimiento didáctico matemático del profesor de matemáticas respecto a sus concepciones y creencias para el objeto Inecuaciones.

Finalmente, en el quinto capítulo se presentan las conclusiones generales del estudio resaltando los resultados más importantes del trabajo, las limitaciones del estudio, y las aportaciones del autor.

Capítulo 1. Planteamiento del problema de investigación

En este capítulo, se presenta el problema de investigación: se parte del análisis a investigaciones en el campo de la Didáctica de la Matemática y en el tema del Conocimiento Didáctico Matemático del Profesor, ubicando el estudio en la línea del Conocimiento del Profesor para el objeto matemático Inecuaciones: estos estudios se toman como preámbulo para argumentar la pertinencia y existencia de la problemática de estudio centrada en el Conocimiento del Profesor para la enseñanza de los objetos matemáticos. Luego se presenta la pregunta y objetivos planteados en la investigación lo cual buscan dar respuesta a la problemática del estudio.

1. Problema de Investigación

1.1 Descripción del Problema

Estudios desarrollados en el marco de la Educación Matemática evidencian la importancia que tienen las inecuaciones en el ámbito escolar y en la transición del álgebra al cálculo (Arévalo y Rojas, 2015; Alvarenga, 2006; Vargas, 2013; Hoyos y Mancilla, 2019; entre otros), evidenciando que su comprensión puede llegar a contribuir con el desarrollo de habilidades y competencias propias de la matemática, como la capacidad de representar simbólicamente una situación determinada y llegar a establecer el uso adecuado de representaciones algebraicas. En este sentido se afirma que:

> “Las desigualdades matemáticas constituyen uno de los temas que forman parte de esta transición, dado que intervienen en algunas definiciones, como por ejemplo la de límite de una función, en los procedimientos de acotación, en la comparación de expresiones

algebraicas y en otras nociones relacionadas al cálculo y al álgebra.” (Bernardis, S., Nitti, L y Scaglia, S., 2017, p. 162).

Otras investigaciones (Neira, 2012; Garrote, Hidalgo y Blanco 2004; Aguirre y Palacios, 2014) establecen posibles errores y dificultades del estudiante durante la transición del álgebra al cálculo con inecuaciones, describiendo como el alumno en el momento de abordar su estudio, trae una visión sobre los conocimientos y nociones que se usan en álgebra, lo que implica que entiende las inecuaciones como una generalización del álgebra (Bernardis, et. Al, 2017).

Es así como las inecuaciones originan un cambio en el pensamiento del estudiante en relación al lenguaje, los razonamientos, la lógica y situaciones concretas en la solución de problemas. Por tal razón, se establece que el estudiante adquiere habilidades y destrezas en sus conocimientos matemáticos que le servirán para fundamentar cursos posteriores como trigonometría, y en general tópicos de cálculo diferencial (Aguirre y Palacios, 2014).

A nivel internacional se resaltan investigaciones como las de Forero (2020); Viloria, (2016); Tegua y Cortes (2016), donde se resalta el análisis del nivel educativo a partir de los resultados de la prueba PISA donde se presenta para Colombia una deficiencia con respecto al promedio establecido en la OCDE: según esto, Viloria (2016) menciona que de las pruebas PISA (año) se concluye que el 76,29%, de los estudiantes presenta falencias en deducir elementos matemáticos en la solución de problemas, lo que lleva a tener debilidades en álgebra y su implicación en el cálculo; el 54,7% presenta dificultad al momento de analizar e interpretar problemas matemáticos que ~~con~~lleven al uso de desigualdades o expresiones que utilizan desigualdades y un 51,83% presenta falencias al momento de realizar argumentaciones. A partir de los argumentos presentados, se infiere que en matemáticas es evidente que los estudiantes presentan falencias en la transición del álgebra al cálculo ocasionando dificultades en la comprensión e interpretación de ejercicios propuestos de esta prueba (Viloria, 2016).

De igual forma existe la problemática relacionada con la importancia para los docentes de realizar un análisis detallado de sus textos guías, donde aparte de mejorar sus procesos de enseñanza logren identificar una idoneidad epistémica que les permita tener herramientas que ayuden a superar dificultades y obstáculos en sus estudiantes (González y Sierra, 2004). Se puede argumentar, que las Instituciones Educativas hoy brindan al docente la oportunidad de planificar los contenidos a enseñar; de utilizar diferentes metodologías y herramientas, con el fin de crear un ambiente de aprendizaje favorable para el estudiante, teniendo presente las exigencias del Ministerio de Educación Nacional, en el cumplimiento de los lineamientos curriculares, los Estándares básicos de aprendizaje y los Derechos Básicos de Aprendizaje (Ministerio de Educación Nacional [DBA], 2016) esto en el contexto colombiano.

Con base en el análisis de los textos guía, es importante que el docente conozca el significado global de los objetos matemáticos, como menciona Nieves (2016) “conocer la importancia del significado global de los objetos matemáticos conlleva a conocer el doble valor que tienen las matemáticas como ciencia y herramienta, lo que permite generar un proceso de instrucción adecuado para la enseñanza de los objetos matemáticos. (p.1)” , es por ello que un aspecto necesario para la construcción del significado global de los objetos matemáticos como las Inecuaciones, es la realización de un análisis fenomenológico del objeto, cuyas bases teóricas generan elementos que llevan a un afianzamiento del significado global del objeto matemático y a la identificación de los fenómenos que este objeto organiza: por tanto, es necesario vincular el análisis fenomenológico y el significado del objeto matemático con los conocimientos del profesor atendiendo a sus concepciones y creencias, para que el docente, pueda transmitir al estudiante unos significados claros y concretos del objeto de estudio (Godino, 2009) que le den sentido y un horizonte para garantizar la comprensión del mismo. De este modo, los significados parciales y los fenómenos, organizan la enseñanza, y por tanto son necesarios para diseñar e implementar tareas de aprendizaje; de igual forma como menciona Rico (1997), se deben usar diferentes elementos que lleven a generar procesos de aprendizaje tal como los organizadores del currículo, los cuales comprenden factores que subordinan la enseñanza y el aprendizaje.

En esta dirección, los estudios definen una problemática relacionada con el conocimiento del profesor para el objeto inecuaciones, y esto se puede observar en los datos presentado por Viloria (2016) donde se enfatiza en la dificultad que presentan los estudiantes en la transición del álgebra al cálculo y esto lleva a retomar y analizar el conocimiento didáctico matemático del profesor para este objeto matemático, por lo tanto la presente investigación representa un avance en cuanto a la caracterización de los conocimientos que los profesores de Instituciones Educativas deberían tener para enseñar idóneamente del objeto Inecuaciones. En el presente estudio se confronta lo que deben conocer los profesores con los conocimientos para el objeto de investigación. Así, surge también la necesidad de establecer criterios que ayuden a responder a la pregunta de investigación planteada, con el fin de indagar y diseñar acciones formativas o metodologías didácticas para una mejorar la enseñanza de este objeto, mediante el fortalecimiento del CDM requerido para la enseñanza del objeto Inecuaciones (Pino-Fan, 2013).

1.2 Formulación del Problema

Según lo mencionado en la descripción del problema y bajo los argumentos expuestos, se plantea la pregunta que conducirá al logro del objetivo general de la presente investigación:

¿Qué conocimiento tienen los profesores de matemáticas del objeto inecuaciones, respecto a los significados pretendidos en los procesos de enseñanza, según sus concepciones y creencias?

1.3 Objetivos

General

Evaluar el conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores de matemáticas en su dimensión epistémica, respecto a los significados pretendidos en los procesos de enseñanza, según sus concepciones y creencias.

Específicos

OB1. Reconstruir el significado global del objeto inecuaciones para identificar los significados de referencia.

OB2. Diseñar e implementar un cuestionario respecto a los significados implementados en los procesos de enseñanza del objeto inecuaciones de acuerdo con las creencias y concepciones de los profesores.

OB3. Caracterizar el conocimiento didáctico matemático que poseen los profesores del objeto inecuaciones a partir de sus creencias y concepciones en la enseñanza de las inecuaciones.

OB4. Analizar las implicaciones didácticas que traen las concepciones y creencias de los profesores en la implementación de los significados pretendidos en la enseñanza del objeto inecuaciones.

1.4 Justificación

La Didáctica de las Matemáticas tiene entre sus objetos de investigación, el estudio de los factores que condicionan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y el desarrollo de programas que lleven a una mejora en dichos procesos (Godino, Batanero y Font, 2007). En este aspecto, diversas investigaciones realizadas en el campo del aprendizaje de las matemáticas han proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas formas de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación (Kilpatrick, 1992 citado por Ávalos, 2003).

En este sentido, la presente investigación pretende aportar elementos teóricos de diferente índole: matemáticos, epistémicos, didácticos para comprender el objeto matemático inecuaciones, así como para establecer criterios de idoneidad para la enseñanza de este objeto en el aula de clase. Específicamente, se analizan los componentes de la idoneidad epistémica en sus objetos matemáticos primarios: situaciones – problemas, lenguajes, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos: estos componentes se relacionan entre sí formando configuraciones epistémicas, cuyo análisis permite caracterizar el proceso de instrucción del objeto de estudio (Font y Godino, 2006).

Por tanto, la investigación aparte de contribuir a la solución de una problemática actual también pretende aportar al campo de la formación de los docentes, ya que si bien es cierto que hay estudios sobre las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas son pocos los encontrados para el objeto inecuaciones, y el abordaje al estudio de la dimensión epistémica del conocimiento del contenido matemático, lo cual tiene importancia como lo mencionan Gil y Rojas (2014):

“Conocer la creencias y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza permitirá tener alguna visión sobre como los profesores entienden y llevan a cabo su trabajo en el aula. Es importante también considerar en tareas de diseño curricular, en periodos de reformas curriculares y cuando se diseñan modelos de enseñanza que favorezcan una formación inicial o permanente del profesorado”.

Según lo expuesto en el presente estudio se da respuesta a algunos interrogantes planteados y se pretende avanzar en la determinación de los componentes del Conocimiento del Profesor para la enseñanza idónea del objeto Inecuaciones, considerado como un objeto complicado en la enseñanza escolar universitaria, ya que al momento de abordarlas se presenta una gran variedad de dificultades en cuanto al contenido matemático y el desarrollo de actitudes matemáticas (Garrote, Hidalgo y Blanco, 2004).

Con base en lo anterior, se puede decir que el estudio del CDM de los profesores es una línea de investigación en Didáctica de la Matemática que ha venido avanzando con relación a las diferentes investigaciones realizadas en esta dirección.

2 Capítulo 2. Marco teórico

Con el propósito de establecer la base teórica para el desarrollo de la investigación, se presenta una reseña de las investigaciones realizadas a nivel mundial, y se continua con la descripción de la posición respecto a la conceptualización de las concepciones y creencias, para finalizar con la descripción de los fundamentos centrales del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS); el conocimiento didáctico matemático y algunos de los elementos importantes de la dimensión epistémica del CDM presente en este enfoque desde el punto de vista de la educación matemática.

2.1 Antecedentes

Para este estudio es importante indagar sobre la manera como se ha abordado el estudio del objeto matemático, el Conocimiento del profesor, y las concepciones y creencias de los docentes frente al objeto inecuaciones. Para este fin se retoman trabajos realizados en el ámbito nacional e internacional, generándose como resultado el siguiente panorama de aportes de la comunidad de en Educación Matemática.

2.1.1 Investigaciones en el conocimiento del profesor

Se inicia este trayecto a través de investigaciones enfocadas en el Conocimiento del Profesor donde en primer lugar se encuentra el estudio realizado por Goycochea (2012) en su tesis doctoral: "Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos". En ella se realizan tres aportes teóricos y uno práctico. El primero de ellos, al determinar las ambigüedades que presentan los constructos teóricos del informe PISA 2003, donde se muestra el tipo de evaluación de competencias que propone dicho informe. El segundo, está enmarcado en la perspectiva del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS), puesto que afronta la problemática del encaje de los “procesos” dentro del marco teórico del EOS y el tercer aporte amplía el marco del EOS con una metodología para la evaluación analítica de competencias matemáticas, basada en un modelo de análisis de prácticas, objetos y procesos matemáticos (APOPM).

Como resultado importante se tiene que la competencia profesional del profesor en el APOPM, donde se activan objetos y procesos matemáticos en dichas prácticas, es un “saber de fondo” que permite la evaluación y desarrollo de la competencia matemática de sus alumnos y se establece como un modelo de análisis no exento de ambigüedades, tal como se ve en la experimentación.

Con base en los anteriores argumentos, se encuentran trabajos que se enfocan en el conocimiento del profesor en relación al objeto inecuaciones, como el realizado por Médico (2018), en su tesis de maestría titulada: “Estimulación de la capacidad de crear problemas sobre sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas”. La investigación corresponde a un estudio de caso de un grupo de docentes de matemática de los primeros ciclos de educación superior”. Se presenta un estudio de caso que tiene como objetivo general, analizar como la estrategia Episodio, Problema pre, Problema pos (EPP) los cuales estimulan la capacidad de crear problemas por variación sobre sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas en un grupo de docentes de matemática de los primeros ciclos de educación superior. Para conocer las dificultades que tuvieron los sujetos de estudio al construir problemas, se realizó una entrevista sobre la creación de problemas desde la perspectiva del modelamiento de Hansen y Hana (2015). Según los resultados, se concluye que la aplicación de la estrategia EPP ha logrado estimular la capacidad de crear problemas por variación sobre sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas en los sujetos de estudio de la investigación.

Otro trabajo es el de Garay (2019) en su tesis de maestría titulada: “Conocimientos especializados del profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales en un curso de álgebra lineal para estudiantes de ingeniería” el cual tiene como propósito identificar los conocimientos especializados que tienen dos profesores sobre los sistemas de ecuaciones lineales (SEL) en un curso de Álgebra Lineal para estudiantes de ingeniería. La investigación se realizó aplicando el Modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) que se desarrolla dentro del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemáticos (EOS), cuyas herramientas permitieron identificar los conocimientos especializados que tiene un profesor universitario que enseña contenidos matemáticos. Esta investigación es de tipo cualitativo y el método empleado es el estudio de caso. Con base en las investigaciones realizadas se construye un instrumento, que contiene dos cuestionarios (Actividad 1 y Actividad 2) relacionados con el objeto matemático de estudio que son los SEL, el cual fue aplicado a dos profesores con posgrado en enseñanza de las matemáticas y que dictaban el curso de Álgebra Lineal en una universidad privada de Lima para obtener información sobre los conocimientos común, ampliado y especializado. A partir del análisis de los datos obtenidos, se pudo inferir que los dos profesores del estudio tenían el conocimiento común del contenido necesario para resolver las diferentes actividades que tenían propuestas al nivel donde orientan clase; sin embargo, en relación con los conocimientos ampliado del contenido y especializados (en la faceta epistémica) hay algunos aspectos que son limitados o desconocidos por ellos.

A continuación, se presentan investigaciones más cercanas a las concepciones y creencias del objeto inecuaciones.

2.1.2 Investigaciones sobre concepciones y creencias para el objeto inecuaciones

El estudio realizado por Alvarenga (2006) en su tesis doctoral: “Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes universitarios” destaca la importancia que presentan las concepciones y creencias del docente en relación a su método de enseñanza para este objeto matemático: el objetivo del trabajo era el de presentar una agrupación de construcciones mentales o esquemas del estudiante, con el fin de mejorar la comprensión de las inecuaciones, además de ejemplificar y aclarar la importancia de las creencias y concepciones de los docentes. Para esto, se presentó una propuesta metodológica de enseñanza para mejorar la enseñanza-aprendizaje de este objeto. Se utilizó el paradigma de investigación interpretativo y el desarrollo pedagógico creado por el grupo RUMEC, compuesto por un ciclo con tres etapas para investigación en educación matemática (Ciclo ACE).

Otra investigación en esta dirección, fue la realizada por Hoyos y Mancilla (2019) en su tesis de pregrado: “Construcción de significado de las inecuaciones lineales en estudiantes de noveno grado a partir de un análisis discursivo”. En el estudio se presentó la relación de las concepciones y creencias de los docentes con los experimentos de Enseñanza con base en diferentes metodologías de investigación, en las que, a partir del diseño de una actividad, que correspondería a una forma de introducción a las inecuaciones lineales busca establecer la relación entre las concepciones que presenta el profesor y la enseñanza de este objeto matemático.

El objetivo del trabajo era analizar las secuencias de actos de habla y la articulación con los resultados del desarrollo del diseño por parte de los estudiantes de grado noveno para el reconocimiento de la construcción de significado de las inecuaciones lineales: para esto la metodología del trabajo se estructuró a partir de la formulación de una conjetura, que correspondería a uno de los ejes que direccionaban el desarrollo del trabajo, respondiendo a un qué enseñar, cómo enseñar y para qué enseñar.

Como resultados del estudio se construyeron dos premisas; una relacionada con el desarrollo del pensamiento algebraico si se considera al álgebra como una actividad, como algo que se hace; la otra se relacionaba con promover el uso del discurso de los estudiantes a partir de actividades que le significaran algo, con la intención de poder expresar sus ideas, explicaciones, estrategias y formas de entender la actividad y todo con base en las creencias y concepciones que genera el docente frente al objeto matemático de estudio.

En el ámbito nacional, Velasco (2011) en su tesis de Maestría: “Aprendizaje de las inecuaciones lineales con valor absoluto desde una perspectiva plurirregistro” presenta la importancia de las concepciones y creencias de los docentes en relación a la representación de las inecuaciones lineales basado en los contenidos que se han presentado en los textos académicos. El objetivo de la investigación era el de identificar y describir algunas de las unidades significantes, relativas a los registros de representación gráfica y de escritura algebraica, que eran pertinentes cognitivamente en el aprendizaje de las inecuaciones con valor absoluto en una variable, desde una perspectiva plurirregistro, en base a esto se logró, la identificación de las unidades significantes asociadas a la coordinación de dos registros de representación, lo cual consiste en la determinación y puesta en correspondencia de las variables del registro de partida con el de llegada, en este caso, la conversión que va en la perspectiva que presenta el estudiante frente a los diferentes procesos de razonamiento presentes al estudiar las inecuaciones.

Como resultados del estudio en relación a las nociones de desigualdades, valor absoluto e inecuaciones lineales con valor absoluto, se concluye que emergen diferentes registros de representación semióticos con la finalidad de comprender desde los registros algebraicos, hasta el lenguaje natural (especializado) y gráfico (en la recta real) estos objetos matemáticos; además se determinó que las diferentes concepciones y creencias de los docentes frente a las inecuaciones ayudan a comprender estos objetos adecuadamente logrando un énfasis en la operatividad de procedimientos, es decir, en el proceso cognitivo.

2.1.3 Investigaciones en la enseñanza de las inecuaciones

El estudio realizado por Beltrão (2010) denominado: "Dificultades de los alumnos para resolver problemas con inecuaciones manifiesta que la matemática posee un lenguaje específico y uno de los objetivos de quién enseña es hacer que los estudiantes se apropien de ese lenguaje. En el estudio se indica que dicho lenguaje matemático posee tres características: la precisión, la brevedad y la universalidad, además precisa que los alumnos tienen deficiencias con las inecuaciones al pasar del lenguaje natural al lenguaje algebraico y viceversa al relacionar la matemática escolar con lo cotidiano; al relacionar la desigualdad con la idea de diferente; al resolver una desigualdad algebraica por usar técnicas propias de una igualdad algebraica. Como resultado se concluye que es importante iniciar estudios sobre inecuaciones partiendo de una analogía entre equilibrar el esfuerzo de los estudiantes para que entiendan el objeto de igualdad, así como el hecho de identificar las desigualdades. Por tal razón se establece que es de vital importancia brindar diferentes alternativas pedagógicas con el fin de dar el sentido que constituiría la base principal para el aprendizaje de las matemáticas. También se llega a la conclusión que es necesario utilizar diferentes tipos de representaciones como: lenguaje natural, geométrico, algebraico, para dar solución a una desigualdad.

En cuanto al contexto local, García y Chavarro (2013) en su tesis de especialización: "Una propuesta de Enseñanza para la solución de Inecuaciones por el Método Gráfico, a través del Software GeoGebra" presentan una propuesta de enseñanza que se enfoca en observar e identificar en un grupo de estudiantes de grado once la capacidad de argumentación en las diferentes formas de representar la solución de inecuaciones tomando como base un ambiente de carácter social y cultural enfocado en la participación de los estudiantes en su experiencia matemática por medio de actividades diseñadas por el profesor y en la interacción social que brindan un paso al análisis y comprensión de las inecuaciones. Bajo estos argumentos, se diseñó una propuesta que involucraba el concepto de solución de inecuaciones desde diferentes representaciones como: la tabular y gráfica, por medio de la utilización de papel y lápiz y el uso del software GeoGebra llevando a los estudiantes a la argumentación de acuerdo a su nivel.

Como resultados se presenta como se debate las soluciones de las desigualdades, ya que no sólo requieren recursos como papel y lápices, sino de la interacción social como ocurre con la participación de los estudiantes en la solución de las desigualdades a través de medios digitales y de manera trascendente, ya que el docente, puede diseñar diferentes actividades que promuevan este proceso, lo cual llevó a destacar la importación de herramientas tecnológicas en actividades matemáticas para desarrollar en los estudiantes el proceso de razonamiento a través del análisis, la interpretación, y la comunicación, además al usar GeoGebra como intermediario en actividades permitió a los estudiantes lograr una mejor visualización e interpretación de las soluciones a los sistemas de inecuaciones.

2.2 Fundamentación Teórica

En esta sección, se establece la fundamentación teórica del Enfoque Ontosemiótico (EOS) construido por Godino y colaboradores; se destacan los elementos importantes como la Dimensión Epistémica del conocimiento CDM, así como los modelos del conocimiento del profesor. Posteriormente, se precisa el significado de los aspectos epistemológicos y teóricos que sirvieron de base para el desarrollo del estudio.

2.2.1 Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)

Para el desarrollo de la investigación, se tomó como base el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) desarrollado por Godino y colaboradores (Godino, 2014; Godino, Batanero, Rivas, y Arteaga, 2013; Godino, Batanero y Font, 2020; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero, y Font, 2008; Sepúlveda, 2016; entre otros). Este enfoque articula diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática, a partir de presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas y su enseñanza. Este enfoque utiliza diversas herramientas teóricas y metodológicas que buscan articular aspectos institucionales y personales del conocimiento matemático con el fin de mejorar en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El enfoque metodológico del EOS es un modelo que se basa principalmente en cinco fases de análisis, lo cual permite describir, explicar y valorar los procesos de instrucción matemática. Como menciona Ramírez (2022) estos niveles se entienden como herramientas metodológicas que permite analizar las prácticas docentes o de los alumnos referente algún tipo de clase, tareas o libros de texto de la matemática.

De acuerdo con Font, Planas y Godino (2010) los niveles son:

Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas, elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos, análisis de las trayectorias e interacciones didácticas, identificación del sistema de normas y meta normas y valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

El conjunto de nociones teóricas que componen el EOS, y que hacen parte importante de la investigación, se pueden clasificar en grupos cada uno los cuales ofrece una perspectiva para el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino et al., 2007): sistema de prácticas, Objetos Matemáticos, configuración epistémica e idoneidad didáctica.

2.2.2 Sistemas de Prácticas

Se puede establecer que las matemáticas tienen una estrecha relación con la actividad humana lo cual permite dar base a las características primordiales de un tipo de problemas matemáticos, que constituyen una parte importarte para la emergencia del significado de los objetos matemáticos. Por lo tanto, las nociones de práctica matemática y sistema de prácticas constituyen la primera parte de lo que se considera para el análisis de la actividad matemática (Font, Godino y Gallardo, 2013).

Se entiende como práctica matemática a “la expresión (verbal, gráfica, etc.) dada por una persona para resolver problemas matemáticos, brindar orientación a los demás sobre la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas” (Godino y Batanero, 1994, p.

334). Una manera de identificar las prácticas matemáticas es concebirlas como “la combinación de una práctica operativa, a través de la cual se leen y producen textos matemáticos, y una práctica discursiva, que permite la reflexión sobre la práctica operativa” (Font et al., 2013, p. 104).

Ahora se considera un sistema de prácticas matemáticas (institucionales y personales) como:

> El sistema de prácticas institucionales, asociadas a un campo de problemas, está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas y compartidas en el seno de la institución. (Godino y Batanero, 1994, p. 337)

> Los sistemas de prácticas personales, asociadas a un campo de problemas, están constituidos por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento por resolver un campo de problemas. (Godino y Batanero, 1994, p. 339)

En Godino y Batanero (1994) se introducen las nociones primitivas de problema, práctica, objeto y significado. Se establece que un objeto matemático, se puede entender como un “emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas” (p. 335), al igual que el “sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado” (p. 338). “Esta noción de significado permite introducir en la problemática epistemológica y didáctica el estudio de la estructura de los sistemas de prácticas sociales de los que emergen los objetos matemáticos, así como de su evolución temporal y dependencia institucional” (p. 338).

Los sistemas de prácticas permiten describir los procesos de aprendizaje desde los significados personales, lo cual implica que el estudiante o profesor sea participe de prácticas que se basan en los significados institucionales.

Figura 1.

Tipos de Significados Institucionales y Personales que emergen de los Sistema de Prácticas

Nota 1. *Reproducida de Sistema de prácticas, de Godino et. al., 2007*

2.2.3 Significado de los Objetos Matemáticos

Según Pino-Fan (2013) el significado de un objeto matemático se define como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona (o una institución) realiza para resolver una cierta clase de situaciones-problemas en las que dicho objeto interviene.

En este sentido, el significado del objeto matemático según Godino et al (1994) es visto como:

"El sistema de prácticas institucionales asociados al campo de problemas de las que emerge el objeto institucional en un momento dado" (p. 340).

En relación con el significado institucional, Godino et al (1994) introducen la noción de significado de objeto personal de la siguiente manera: "El significado de un objeto personal, es el sistema de prácticas personales que una persona usa para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto personal en un momento dado" (p. 341)

2.2.4 Objetos Matemáticos Primarios

Godino et al. (2007, p. 130) describe los siguientes tipos de objetos matemáticos:

− Lenguajes (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en diferentes registros de expresión (escrito, oral, gestual) y representaciones mediante el lenguaje (ordinario específico matemático) que se relacionan con los objetos no lingüísticos.

− Situaciones problemas: aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, ejercicios...; son aquellas tareas que llevan a la actividad matemática.

− Concepto-definición: Comprendidos como caracteres que se definen, como número, línea, segmento, mediana, relación, etc.

− Proposiciones o propiedades: enunciados sobre conceptos.

− Procedimientos: sucesión de actividades que realiza el sujeto ante las tareas matemáticas; ya sean algoritmos, operaciones, cálculos, entre otros.

− Argumentos: enunciados que buscan validar o explicar las proposiciones y procedimientos.

La emergencia de los objetos primarios (problemas, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar en las diferentes bases de los procesos matemáticos como la comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación (Giacomone, Godino, Wilhelmi y Blanco, 2018).

2.2.5 Configuración Epistémica

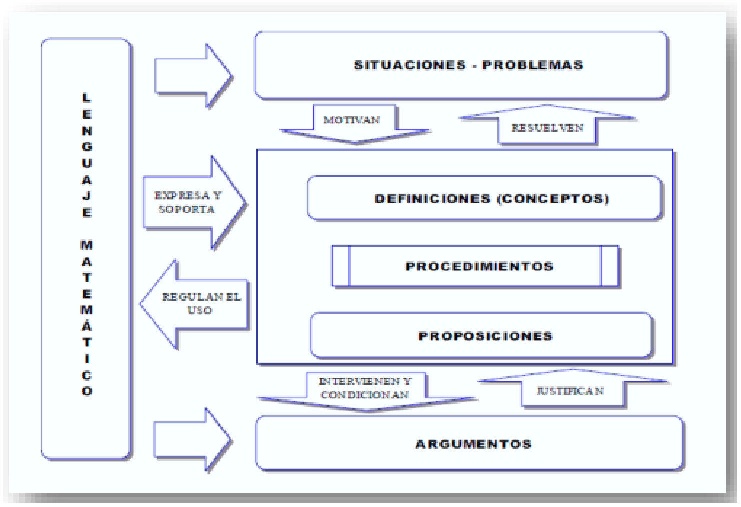
Godino, Contreras y Font (2006) señalan que la configuración epistémica es el sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos referentes a la solución de una situación-problema. Por ello las configuraciones epistémicas se formar de los diferentes objetos que intervienen y surgen en los sistemas de prácticas matemáticas en diferentes situaciones.

Cuando los seis objetos primarios se enlazan, forman configuraciones epistémicas cuyo análisis y características según Font y Godino (2006) formara estructura de un texto matemático. Debido a esto desde el EOS, se propone una ontología constituida por los objetos primarios y dichos elementos permita analizar un texto de matemática del estudiante o del profesor (Godino, 2002).

La articulación de los objetos primarios que forman configuraciones, se esquematiza en la Figura 2.

Figura 2

Configuración Epistémica



Nota 2. *Reproducida de Configuración Epistémica, de Font y Godino (2006)*

Para Font y Godino (2006) cada situación-problema lleva a una configuración epistémica diferente, por otro lado, para Godino, Batanero y Font (2007) los seis tipos de entidades primarias que forman configuraciones epistémicas, se complementan y enriquecen con la distinción de dimensiones duales. Según la posición que se adopte en el EOS, un sujeto comprende y entiende el significado de un objeto si logra reconocer sus propiedades y representaciones características, lo cual puede relacionarlo con los otros objetos matemáticos y así usar el objeto en toda la variedad de situaciones problemáticas prototípicas dentro de la institución correspondiente (Giacomone, 2018).

Como se mencionó los objetos pueden ser considerados desde las siguientes facetas duales (Godino, 2002; Contreras, Font, Luque y Ordoñez, 2005):

- Personal – Institucional: Entendido cuando los sistemas de prácticas se perfilan a la persona, se conocen como prácticas personales, mientras que, si se perfilan a una institución, como prácticas institucionales.

- Ostensivo – No ostensivo: un objeto puede ser ostensivo si es público, observable y se puede manipular. Los conceptos matemáticos se pueden catalogar como no ostensivos, pero se pueden hacer visibles a través de sus representaciones lingüísticas.

- Expresión – Contenido: Se relacionan con los elementos a través de una función semiótica que puede ser comprendida como la correspondencia o relación de dependencia entre una entidad (expresión, significante) y otra consecuente (contenido, significado) establecida por un ser (persona o institución) según una correspondencia, establecida como un medio de interacción comunicativa.

- Extensivo – Intensivo (Ejemplar – Tipo; Particular – General): Según su característica un objeto matemático se puede catalogar como un caso particular o bien como una clase de objetos del mismo tipo.

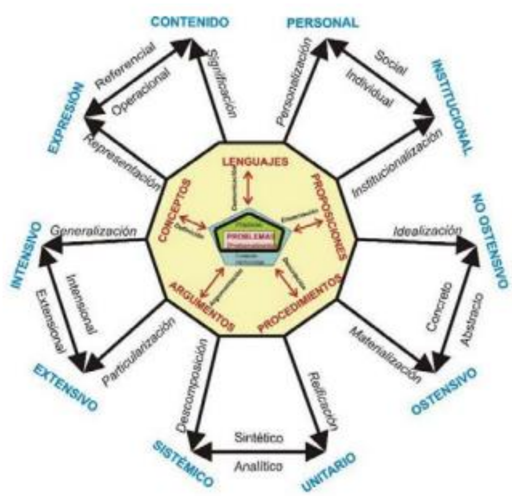
- Unitario – Sistémico: Los diferentes objetos matemáticos pueden ser catalogados como unitarios o de acuerdo a su complejidad sistémica para poder realizar su estudio.

Según Giacomone, et.al (2018) la emergencia de prácticas en las entidades primarias puede ser tenida en cuenta mediante procesos matemáticos (secuencia de prácticas) como la comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos y argumentación. Por otra parte, la faceta dual de las entidades lleva a considerar los siguientes procesos: Institucionalización–Personalización, Generalización – Particularización, Descomposición/Análisis – Composición/Reificación, Materialización – Idealización, Representación – Significación.

En la Figura 3 se muestra la separación y las interacciones de los objetos matemáticos primarios, las facetas duales desde las que estos pueden ser vistos y los procesos que llevan asociados (Godino, Batanero y Font, 2007; Font y Rubio, 2017).

Figura 3

Separación e Interacciones de Objetos Matemático



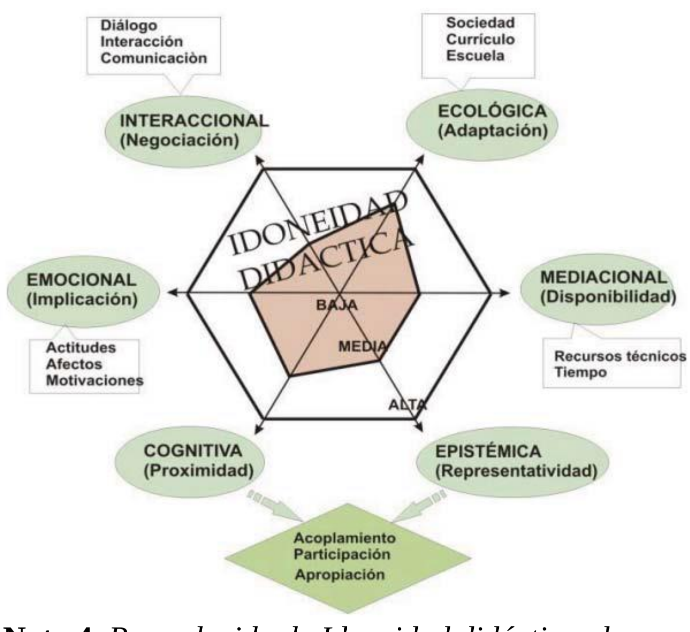
Nota 3. *Reproducida de Configuración de objetos y procesos matemáticos, de Godino, Batanero y Font (2007)*

2.2.6 Idoneidad Didáctica

La idea de idoneidad didáctica que se presenta en el EOS (Godino, 2013a; Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013) hace referencia a la perspectiva global de pertinencia de un proceso de instrucción cuya finalidad principal e indicador empírico puede ser el grado de acomodación entre los significados personales logrados (por los estudiantes) y los significados institucionales pretendidos, y que puede cambiar dependiendo de las condiciones locales, de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de instrucción matemática. De esta forma la idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de seis componentes (Idoneidad Ecológica, Epistémica, Cognitiva, Afectiva, Interaccional y Mediacional) (Giacomone, et. al 2018) (Figura 4):

Figura 4

Idoneidad Didáctica



Nota 4. *Reproducida de Idoneidad didáctica, de Godino (2013a), p. 116*

Godino (2013a) identifica en cada uno de estos indicadores un sistema de elementos e indicadores empíricos generales que permiten una orientación frente al análisis de una consideración sistemática; así este sistema lleva a generar un proceso de enseñanza donde se puede determinar si un proceso de enseñanza y aprendizaje presenta una idoneidad didáctica alta, media o baja, logrando identificar la mejora progresiva de dicho proceso. En razón a esto, las características encontradas se utilizan a priori ya que permiten enfocarse en cómo realizar las cosas y también de manera posteriori ya que permiten calificar el proceso de enseñanza y aprendizaje utilizado (Breda, Font y Pino Fan, 2018, p. 264). A partir de estas premisas, se puede determinar la importancia que presentan los criterios de idoneidad didáctica en relación a la capacidad de razonamiento que utilizan los profesores sobre un proceso de instrucción, lo anterior se puede observar en la investigación realizada por Ramos y Font (2006), donde se concluye que:

> Los criterios de idoneidad son herramientas que pueden ser muy útiles no sólo para organizar y analizar las prácticas discursivas del profesorado sobre cómo debería ser el proceso de instrucción, sino también para valorar las prácticas que intervienen en la determinación del significado pretendido, el implementado y el evaluado. (Ramos y Font, 2008, p. 262).

En esta investigación se toman principalmente los indicadores de Idoneidad Epistémica que según Godino (2013a) corresponden a:

- Idoneidad epistémica: se refiere al grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia.

En la siguiente sección se profundizan estos indicadores, analizando sus criterios con relación al conocimiento didáctico matemático (CDM) propuesto por Godino y colaboradores (Godino, 2014;

Godino, Batanero, Rivas, y Arteaga, 2013; Godino, Batanero y Font, 2020; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero, y Font, 2008; Sepúlveda, 2016; entre otros).

2.2.7 Modelo del conocimiento del profesor: Conocimiento didáctico matemático (CDM)

El modelo del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) a partir del enfoque EOS se puede definir como la unión de los modelos MKT y PCK, de lo cual se deriva que:

> El CDM, viene a ser la trama de relaciones que se establecen entre los distintos objetos matemáticos primarios y los procesos de significación, que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas del profesor, realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones problemáticas para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes. (Pino-Fan, Godino y Font, 2010, p. 209).

El CDM surge de diversos estudios relacionados con la línea de investigación del Conocimiento del Profesor, dentro de los cuales se encuentra el Conocimiento Base para la Enseñanza (CBE) de Shulman (1986; 1987), del cual se reconoce la importancia de entender el conocimiento del profesor en múltiples dimensiones; el Conocimiento matemático para la enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching o MKT) desarrollado por Ball (2000), donde aparte de dimensiones también se identifican tipologías: conocimiento del contenido (común, especializado y horizonte) y conocimiento pedagógico (estudiantes, enseñanza y currículo).

En específico, el CDM toma los elementos mencionados y los estructura a través de las seis facetas que se consideran en el EOS para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática:

epistémica, cognitiva, mediacional, interaccional, ecológica y afectiva (Pino-Fan et al., 2010), concretamente en este estudio se analizará la faceta epistémica.

En la faceta epistémica se determina si existe relación entre los significados de referencia encontradas en estudios de la comunidad matemática para el objeto que se pretende enseñar y los significados que se pretenden desarrollar en el aula (Godino, 2021), es decir, el conocimiento del profesor respecto a los significados pretendidos. Dicha relación se puede determinar a través de los indicadores de la Tabla 2-1.

Tabla 2-1. *Indicadores del CDM para la faceta epistémica*

Conocimiento del Contenido	
Faceta Epistémica	**Indicadores**
Conocimiento común	Resuelve la tarea.
Conocimiento especializado	Puesta en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas.
Tipos de problemas	Identifica las variables de la tarea; generaliza (particulariza) el enunciado
Lenguajes	Resuelve las tareas usando diferentes representaciones.
Procedimientos	Resuelve las tareas usando diferentes procedimientos (intuitivos; formales).
Conceptos/propiedades	Identifica los conceptos y propiedades puestas en juego en las soluciones.
Argumentos	Explica y justifica las soluciones.
Conocimiento ampliado: Conexiones	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Nota. Godino (2009)

2.3 Teoría de los Registro de Representación Semiótica

Según Duval (1999) en esta teoría existen ciertas características y actividades cognitivas que tienen estrecha relación con el aprendizaje, tales como el razonamiento, la conceptualización, resolución de problemas y la modelación matemática, entre otros.

2.3.1 Representaciones Semióticas

Según Duval (1999) en el análisis de los objetos matemáticos al ser considerados objetos que no se pueden ver ni percibir por los sentidos, es necesario representarlos mediante lo que él denomina representaciones semióticas. Estas representaciones pueden ser gráficas, numéricas, figuras, dibujos, tablas, etc. Según Duval (1999):

Las representaciones semióticas, es decir, aquellas producciones constituidas por el empleo de signos (enunciado en lenguaje natural, fórmula algebraica, gráfico, figura geométrica…) no parecen ser más que el medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales; es decir, para hacerlas visibles o accesibles a otros (Duval, 1999, p. 14).

Según los argumentos presentados, es importante realizar en el estudio de las matemáticas las diferentes representaciones de un determinado objeto. Por tal razón Duval (1999) hace claridad en que es fundamental no confundir los objetos matemáticos (números, funciones, límites, derivadas, etc.) con sus respectivas representaciones, es decir, la forma en la que se pueden escribir ya sea en forma de fracción, gráfica, símbolos, etc., ya que un mismo objeto matemático puede ser representado de diversas maneras.

En el estudio de las inecuaciones se emplean registros de representación semiótica, entre los que se destacan registros como: el gráfico, algebraico y el lenguaje Natural.

Registro en lenguaje gráfico: en este registro se utilizan diferentes figuras geométricas, gráficos y principalmente el plano cartesiano como método para visualizar los elementos matemáticos. Se define como una expansión lexical que "se basa en el principio de una recuperación plurívoca de lo que aparece como una misma unidad lexical, sea bajo un modo fonético-acústico o uno gráfico-visual" (Duval, 1999, p. 111)

Registro en Lenguaje Natural: en este registro se utiliza la expresión verbal haciendo uso de la gramática para expresar parte del objeto matemático. También se puede entender como una "expansión natural, se caracteriza por el empleo común de la lengua. Moviliza simultáneamente la red semántica de una lengua natural y los conocimientos pragmáticos propios al medio sociocultural de los locutores" (Duval, 1999, p. 113)

Registro en lenguaje algebraico: En este registro se utiliza la escritura como forma primordial para representar los elementos, principalmente la escritura formal y algebraica donde se usa en expresiones algebraicas, reducción de términos semejantes, productos notables, operaciones básicas con expresiones algebraicas (suma, resta, multiplicación, radicación, potenciación). En este registro "la expansión formal se caracteriza por la aplicación de reglas de sustitución que se basan exclusivamente en símbolos que representan variables o proposiciones, independientemente de su significación" (Duval, 1999, p. 112)

2.4 Concepciones y Creencias

Al momento de hablar de concepciones y creencias hay que tener presente las ideas personales del docente. Específicamente, cuando el profesor toma una decisión en el proceso enseñanza–aprendizaje, lo cual depende más de sus propias ideas afectivas y experiencia que de un conocimiento fundado y de una formación profesional específica, tanto en didáctica como en la propia matemática (Azcarate, 2003). Por lo tanto, es importante identificar los diferentes factores que intervienen en los conocimientos tanto matemáticos como didácticos, así la tabla 2-2 es adaptada de la investigación de Piratoba (2016) y en ella se muestra la postura de diferentes autores en relación a la noción de concepción y creencia.

Tabla 2-2 *Definiciones de concepción y creencia, desde varias posturas*

Autores	Definición de Concepción y Creencia
Marcelo (1987) toma la postura de Fishbein y Ajzen (1989)	Las creencias son información que tiene una persona enlazando un objeto con algún atributo esperado; las creencias están normalmente en interrelación con una dimensión de probabilidad subjetiva y conocimiento.
Pajares (1992)	Destaca tres componentes de la creencia: un componente cognitivo, que representa conocimiento; un componente afectivo, capaz de provocar emoción; y un componente conductual, activado cuando lo requiere la acción.
Thompson (1992)	Las concepciones son una estructura mental general, que abarca las creencias, los significados, conceptos, las proposiciones, reglas, las imágenes mentales, preferencias y gustos.
Vicente (1995)	Considera creencia como el asentamiento o aceptación de una comunicación de otras personas.
Pehkonen y Törner (1996) citado por De Faria (1998)	Las creencias pueden tener un poderoso impacto en la forma en que los alumnos aprenden y utilizan las matemáticas y por lo tanto, pueden ser un obstáculo al aprendizaje de las matemáticas. Los alumnos que tienen unas creencias rígidas y negativas de las matemáticas y su aprendizaje, fácilmente se convertirán en aprendices pasivos, que cuando aprenden, enfatizan la memoria sobre la comprensión. Las creencias influyen sobre la práctica como:

	1. Un sistema regulador. 2. Un indicador. 3. Una fuerza inerte. 4. Una consecuencia de los aspectos anteriores que denominan “carácter pronóstico”.
Flores (1998)	Las creencias son aspectos emotivos, implícitos, de las representaciones y las concepciones son aspectos cognitivos, conceptuales, que organizan el pensamiento.
Ponte (1999)	Considera que las creencias se relacionan con la práctica y que forman parte del conocimiento.
Ernest (1989) citado por De Faria (2008).	Las creencias tienen un impacto bastante significativo en la enseñanza de las matemáticas y argumenta que los conocimientos matemáticos son importantes en la enseñanza.
Remesal (2006) citado por Moreano y Asmad (2008)	La concepción de un individuo acerca de una porción de la realidad, tanto física como social, es el sistema organizado de creencias acerca de esa misma porción de la realidad, entendida como las aseveraciones y relaciones que el individuo toma como ciertas en cada momento determinado de su vida, que se originan y desarrollan a través de las experiencias e interacciones.
Azcarate y Moreno (2003)	Las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza especialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan. El carácter subjetivo es menor en cuanto se apoyan sobre un sustrato filosófico que describe la naturaleza de los objetos matemáticos y las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicar y justificar muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas.

Nota. Adaptado de Piratoba (2016)

Por tanto, en esta investigación se tomó la postura de Azcárate y Moreno (2003) al definir la concepción en relación al proceso de enseñanza por parte de la experiencia del docente donde:

> Las concepciones son organizadores implícitos de los conceptos, de naturaleza especialmente cognitiva y que incluyen creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias, que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan, y las creencias son conocimientos subjetivos, poco elaborados, generados a nivel particular por cada individuo para explicarse y justificarse muchas de las decisiones y actuaciones personales y profesionales vividas (p. 267).

3 Capítulo 3. Marco Metodológico

Con el fin de presentar la orientación y confiabilidad de los resultados del estudio, en este capítulo se reúnen los aspectos metodológicos que se siguieron a través de todo el proceso desarrollado, tales como, el nivel de Investigación, tipo y línea de investigación, Diseño y Fases de la investigación, donde se presenta la relación de cada fase con los objetivos propuestos, la técnicas e Instrumentos de Recolección y análisis de datos, las técnicas de procesamiento y el análisis de datos según las categorías de análisis definidas en el marco teórico del estudio.

3.1 Nivel de Investigación

El objetivo de la investigación realizada, conduce a caracterizar el significado del objeto Inecuaciones según el análisis de las concepciones y creencias de un grupo de profesores de matemáticas respecto a la identificación de los significados de referencia y los pretendidos para diseñar, implementar y evaluar diferentes procesos de enseñanza relacionados con las inecuaciones. El marco teórico y metodológico en el que se apoya la investigación corresponde al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos – EOS (Godino et al., 1994; Godino et al., 2007) el cual proporciona las categorías de análisis necesarias para el análisis de los resultados del estudio. Por tal razón, la investigación se enmarca dentro de una investigación cualitativa de tipo descriptiva, ya que conduce a la caracterización de un hecho o fenómeno con el fin de establecer su estructura o comportamiento (Arias, 1999).

De acuerdo al tipo de investigación el enfoque es cualitativo, siguiendo un estudio de caso. Según los planteamientos de Simons (2011):

> El estudio de caso es una investigación exhaustiva y desde múltiples perspectivas de la complejidad y unicidad de un determinado proyecto, política, institución, programa o sistema en un contexto “real”. Se basa en la investigación, integra diferentes métodos y se guía por las pruebas. La finalidad primordial es generar una comprensión exhaustiva de un tema determinado (por ejemplo, en una tesis), un programa, una política, una institución o un sistema, para generar conocimientos y/o informar el desarrollo de políticas, la práctica profesional y la acción civil o de la comunidad (p. 42)

Según lo mencionado el estudio de caso, permite analizar al grupo de docentes frente a sus concepciones y creencias respecto a los significados del objeto inecuaciones.

3.2 Línea de investigación

El presente estudio, se enmarca en la línea de investigación en Didáctica de la Matemática de Formación de Profesores, para lo cual el EOS (Godino, 2014), es considerado como un marco teórico y metodológico óptimo para el diseño de la investigación.

3.3 Diseño y Fases de la Investigación

Del enfoque EOS, se utilizan las herramientas e instrumentos, que permiten el análisis de la dimensión epistémica del conocimiento del profesor para el objeto Inecuaciones.

Las fases de la investigación se describen en la tabla 3-1.

Tabla 3-1. *Fases de la Investigación en el objeto Inecuaciones.*

Fases de la Investigación	Relación de la fase con los objetivos de la investigación
Fase 1. Análisis preliminares	Esta fase se concreta el primer objetivo específico el cual es:

Esta fase corresponde al diseño de los análisis epistémico, conceptual, cognitivo, de instrucción y evaluación. El análisis epistémico, corresponde a la indagación de problemas sobre el objeto matemático dentro de un estudio documental de libros de texto de historia de las matemáticas para el objeto de inecuaciones. En el análisis epistémico se identifican o se clasifican las diversas categorías de los problemas las cuales dan origen a cada uno de los significados del objeto inecuaciones. Este trabajo constituye un aporte del investigador en la reconstrucción del significado global del objeto matemático.	Objetivo específico 1. Reconstruir el significado global del objeto inecuaciones para identificar significados de referencia del objeto matemático.
Fase 2. Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas Se seleccionan problemas para el diseño de un cuestionario inicial retomando el significado global del objeto inecuaciones. Se valida el cuestionario por un grupo de expertos para su implementación. Se caracterizan los significados del objeto inecuaciones según las creencias y concepciones de los docentes. Esta fase corresponde a la creación, reconstrucción y solución de los problemas que se utilizan para la implementación del cuestionario inicial a los docentes	Esta fase se relaciona con el segundo objetivo específico: Objetivo específico 2. Diseñar e implementar el cuestionario inicial respecto al objeto inecuaciones según sus significados retomando las concepciones y creencias de los profesores.
Fase 3. Experimentación Se valida e implementa el cuestionario con los profesores del estudio de caso. Se caracteriza la dimensión epistémica del CDM de los participantes en el estudio de caso.	Esta fase se relaciona con el tercer objetivo específico: Objetivo específico 3. Caracterizar el significado global de cada profesor para el objeto inecuaciones, según sus creencias y concepciones en la enseñanza del objeto matemático.
Fase 4. Evaluación: Aportes Teóricos En esta fase se contrasta en el modelo del Conocimiento didáctico matemático en la dimensión epistémica el conocimiento del profesor para la enseñanza del objeto matemático para realizar aportes que lleven	Esta fase se relaciona con el cuarto objetivo específico el cual corresponde a: Objetivo específico 4. Analizar las implicaciones didácticas que traen las concepciones y creencias de los

una mejora en las prácticas docentes (Conocimiento Común del Contenido, Conocimiento especializado y Conocimiento en el horizonte).	profesores en cuanto a los significados pretendidos en la enseñanza del objeto inecuaciones.

Nota. Elaboración Propia

3.4 Población y Muestra

Para el desarrollo de esta investigación se indagará sobre la experiencia de 5 profesores Licenciados en matemáticas, de diferentes sectores educativos en secundaria (públicos y privados), el primer docente al que llamaremos Profesor 1 (P1), tiene una formación académica como Licenciado en Matemáticas y cuenta con una especialización en informática para la docencia y una maestría en didáctica de las matemáticas. Su experiencia laboral es de 2 años en instituciones privadas y 3 años en instituciones de educación superior en cursos de cálculo diferencial, actualmente es docente de en una institución educativa del municipio de Soata – Boyacá. El segundo docente, al que llamaremos Profesor 2 (P2) tiene una formación académica como Ingeniero Electromecánico, su experiencia docente es de 12 años en instituciones públicas y 2 años en Instituciones de educación superior, actualmente es docente de planta en Bogotá – Cundinamarca. El tercer docente al que llamaremos Profesor 3 (P3), tiene una formación académica como Licenciado en Matemáticas y Estadística, cuenta con una maestría en educación matemática y su experiencia docente es de 25 instituciones educativas públicas, actualmente es docente de una institución pública del municipio de Sogamoso - Boyacá. El cuarto docente al que llamaremos Profesor 4 (P4) tiene formación académica como Ingeniero de Sistemas, su experiencia docente es de 3 años en instituciones privadas y 1 año en instituciones de educación superior en cursos de cálculo diferencial, actualmente se encuentra laborando en una institución privada de la ciudad de Duitama – Boyacá, y el quinto docente al que llamaremos profesor 5 (P5) tiene formación académica como Licenciado en Matemáticas y Estadística, cuenta con una especialización en gerencia educativa y una maestría en Ciencias Matemáticas, su experiencia docente es de 5 años en instituciones privadas, actualmente se encuentra laborando en una institución privada de la ciudad de Tunja. con el fin de entender la naturaleza del fenómeno de análisis, es decir, el estudio referente a los conocimientos, concepciones y creencias sobre el objeto Inecuaciones en relación con el significado Global del objeto matemático

3.5 Técnicas e Instrumentos de Recolección y análisis de datos

Para la investigación se diseñó un cuestionario con el fin de caracterizarlos significados emergentes del objeto inecuaciones según las creencias y concepciones de los docentes de matemáticas en el proceso de enseñanza del objeto matemático, con el fin de dar respuesta a los objetivos y la pregunta de investigación (Ver Tabla 3-2).

Tabla 3-2. *Técnicas e instrumentos para la recolección de datos.*

Fases de la Investigación	Técnica	Recolección de Datos	Instrumentos para el análisis de la información
Fase I. Análisis Preliminar	Análisis Documental	Revisión sistemática de libros de historia de las matemáticas, y de diferentes investigaciones en torno a las inecuaciones.	Análisis de diferentes sistemas de prácticas matemáticas relacionados con las inecuaciones según categorías del EOS.
Fase 2. Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas	Análisis Semiótico	Construcción de configuraciones epistémicas del objeto inecuaciones. .	Reconstrucción del significado global de referencia del objeto inecuaciones según situaciones problemas y significados parciales emergentes de las

			configuraciones epistémicas.
Fase 3. Experimentación		Cuestionario con situaciones problemas analizados en el estudio histórico y conceptual de las inecuaciones. Evaluación y análisis del conocimiento didáctico matemático de los profesores de grado once del estudio de casos.	Configuraciones realizadas en el análisis de las inecuaciones. Configuraciones epistémicas.
Fase 4. Evaluación	Análisis semiótico.		Dimensión epistémica del profesor en relación al conocimiento del contenido del objeto Inecuaciones.

Nota. Elaboración propia

3.6 Técnicas de Procesamiento y Análisis de Datos

En la fase 4 de la experimentación, se realiza un análisis cualitativo del cuestionario inicial aplicado a los profesores, según los indicadores de idoneidad para la dimensión epistémica propuestos por Godino (2009).

3.7 Fases de la Investigación

En el estudio se estructura en cuatro fases: 1) Análisis Preliminar, en relación al análisis documental del objeto inecuaciones; 2) Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas a través del análisis semiótico y análisis conceptual; 3) Experimentación para la construcción del cuestionario con situaciones problemas encontradas en el estudio histórico del objeto inecuaciones;

4) Evaluación, por medio del análisis semiótico del conocimiento didáctico matemático de los profesores de grado once a través de la dimensión epistémica.

3.7.1 Fase 1. Análisis Preliminar

Corresponde a la realización del *estudio histórico-epistemológico del objeto Inecuaciones*, el cual se realizó mediante un análisis documental, a partir de la revisión de libros de historia de las matemáticas, trabajos de investigación como tesis doctorales, tesis de maestrías, artículos científicos; donde se evidencio los orígenes, evolución y la naturaleza del objeto Inecuaciones en las diferentes culturas de la humanidad, clasificando el estudio según los 3 periodos de la historia *(época antigua,, edad moderna y edad contemporánea)*. En esta fase, el estudio es de tipo descriptivo, ya que pretende identificar las diferentes propiedades y características importantes de los sistemas de prácticas de la solución de problemas con inecuaciones, describiendo las tendencias de diversas culturas de la humanidad (Hernández, Fernández y Baptista 2014). En esta fase se da cumplimiento al objetivo específico:

OB1. Reconstruir el significado global del objeto inecuaciones para identificar los significados de referencia del objeto matemático.

3.7.2 Fase II. Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas

Esta fase corresponde a dos momentos: 1) Estudio del a situaciones problemas relacionadas con las inecuaciones, mediante la técnica del análisis semiótico de textos matemáticos (Godino, 2002), donde se establecen 4 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico (fase I); a cada situación problema se le analizan los objetos primarios que se encuentran inmersos en la solución del problema, generando una configuración epistémica y a esa configuración se le asigna un significado parcial del objeto inecuaciones. Del estudio emergen 4 significados parciales para el objeto inecuaciones lo cual permite reconstruir el significado global del objeto matemático. Esta fase es de tipo descriptivo-exploratorio, ya que permite especificar las propiedades y características de los objetos. (Hernández, Fernández y Baptista 2014).

En esta fase se da cumplimiento al objetivo específico:

OB1. Reconstruir el significado global del objeto inecuaciones para identificar los significados de referencia.

3.7.3 Fase III. Experimentación.

En esta fase se realiza el diseño, e implementación de problemas históricos; para esto se seleccionan 4 problemas encontrados en el estudio histórico-epistemológico (fase I). La primer situación-problema llamada Problema de los Vinos del periodo 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C), la segunda situación-problema se llama: Problema Numérico de Bombelli, la tercera situación problema se llama: Problema de las figuras curvilíneas corresponden al periodo 3: Edad Moderna (1453 d.C – 1789 d.C: siglo XV – XVIII), la cuarta situación se llama: el problema del polígono, que corresponde al periodo 4: Edad Contemporánea (1789 d.C – actualidad: siglo XVIII - Actualidad). El propósito de implementar estas situaciones-problemas es el de obtener un sistema de prácticas matemáticas institucionales para su implementación con un grupo de docentes, y así, llegar a reflexionar sobre el conocimiento de los docentes sobre el contenido matemático implícito en estos problemas, es decir se analiza la dimensión epistémica del conocimiento del docente, respecto al significado global del objeto inecuaciones (fase II), y el significado institucional pretendido por los docentes para los diferentes procesos de instrucción en cuanto al objeto iencuaciones. El alcance de esta fase es de tipo exploratorio. En esta fase se da cumplimiento al objetivo:

OB2. Diseñar e implementar un cuestionario respecto a los significados implementados en los procesos de enseñanza del objeto inecuaciones de acuerdo con las creencias y concepciones de los profesores.

3.7.4 Fase IV. Evaluación

En esta última fase se reflexiona sobre las implicaciones que tiene el implementar diferentes significados del objeto en el aula de clase: esto según las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas de grado Once. Al igual se analiza el conocimiento didáctico matemático del profesor en su dimensión epistémica. Se buscó entender como estas concepciones y creencias pueden impactar directamente en la comprensión de los alumnos respecto al objeto Inecuaciones. Esta fase corresponde a un estudio de tipo descriptivo ya que permitió una exploración y descripción de las características de los significados personales e institucionales del profesor de matemáticas de grado Once. En esta fase se da cumplimiento a los objetivos específicos:

OB3. Caracterizar el conocimiento didáctico matemático que poseen los profesores del objeto inecuaciones a partir de las creencias y concepciones para su enseñanza.

OB4. Analizar las implicaciones didácticas que traen las concepciones y creencias de los profesores en cuanto a la implementación de los significados pretendidos en la enseñanza del objeto inecuaciones.

3.8 Relación entre las Fases de investigación y los Objetivos Planteados

Esta investigación se centró en la pregunta ¿Qué conocimiento tienen los profesores de matemáticas frente al objeto inecuaciones, respecto a los significados pretendidos en los procesos de enseñanza, según sus concepciones y creencias? Este interrogante se concreta con el logro de los objetivos específicos propuestos. Por lo tanto, se menciona la relación entre las fases de la investigación y las actividades que se realizaron para el logro de los objetivos planteados.

3.8.1 Fase I: Análisis Preliminar

. **OB1**. Reconstruir el significado global del objeto inecuaciones para identificar los significados de referencia.

Actividades realizadas para el logro del objetivo específico OB1

Realización de un análisis documental a libros de historia de las matemáticas, tesis doctorales, tesis de maestrías, artículos de investigación científica con relación al objeto Inecuaciones; analizando el origen, evolución y la naturaleza del objeto Inecuaciones.

- Clasificación del estudio histórico-epistemológico en los 3 periodos de la humanidad (época antigua, edad moderna y edad contemporánea), para identificar los sistemas de prácticas matemáticas realizadas por las diferentes culturas de la humanidad para el objeto inecuaciones.
- Identificación de 4 situaciones-problemas emergentes de las prácticas matemáticas encontradas en el estudio histórico-epistemológico en las diferentes culturas de la humanidad.

3.8.2 Fase II. Concepción y análisis a priori de situaciones didácticas

OB1. Reconstruir el significado global del objeto inecuaciones para identificar los significados de referencia.

Actividades realizadas para el logro del objetivo específico OB1

- Realización del análisis semiótico a 4 situaciones-problemas relacionadas con las Inecuaciones, encontrados en los 3 periodos de la humanidad.
- Reconstrucción de 4 configuraciones epistémicas teniendo en cuenta la tipología de los objetos primarios, en la solución de las 4 situaciones-problemas.
- Interpretación de diferentes métodos de solución para problemas de Inecuaciones, de las 4 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto matemático.
- Reconstrucción del significado global referencial del objeto Inecuaciones, con base en los diferentes significados de referencia encontrados en las situaciones problemas.

3.8.3 Fase III. Experimentación.

OB2. Diseñar e implementar un cuestionario respecto a los significados implementados en los procesos de enseñanza del objeto inecuaciones de acuerdo con las creencias y concepciones de los profesores.

Actividades realizadas para el logro del objetivo específico OE2

- Diseñar un cuestionario teniendo en cuenta las 4 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico relacionados con el objeto Inecuaciones.

3.8.4 Fase IV. Evaluación

OB3. Caracterizar el conocimiento didáctico matemático que poseen los profesores del objeto inecuaciones a partir de las creencias y concepciones para su enseñanza.

OB4. Analizar las implicaciones didácticas que traen las concepciones y creencias de los profesores en cuanto a la implementación de los significados pretendidos en la enseñanza del objeto inecuaciones.

Actividades realizadas para el logro de los objetivos específicos OB3 y OB4

- Análisis de la dimensión epistémica en cuanto al sistema de prácticas matemáticas realizadas por los profesores durante el desarrollaron del cuestionario.
- Caracterización del conocimiento didáctico matemático del profesor en cuanto a su subcomponente del conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado y el conocimiento en el horizonte.

Para el análisis del cuestionario se toman como categorías de análisis los indicadores de idoneidad de la dimensión epistémica presentes en la tabla 5 del Marco Teórico.

3.9 Categorías de análisis para el cuestionario – Concepciones y Creencias de los profesores en la dimensión epistémica para el objeto Inecuaciones

Las categorías de análisis establecidas en el EOS para el estudio de la dimensión epistémica del CDM del profesor inicia con el análisis de las Configuración epistémicas (ver Tabla 3-3, Tabla 3-4, Tabla 3-5), para lo cual las siguientes categorías según para el estudio Histórico-epistemológico del objeto Inecuaciones, en relación a la identificación de los significados y configuraciones emergentes del objeto matemático (Ver capítulo 4, sección 4.4. Cuestionario de concepciones y creencias de los profesores para el objeto inecuaciones según significados pretendidos en los procesos de enseñanza (CCPI))

Tabla 3-3. *Conocimiento del Contenido*

Categoría	Unidades de análisis
Dimensión epistémica del CDM	CE1. Problema de los vinos CE2. Problema del Polígono CE3. Problema de Bombelli CE4. El método de Exhausción.
Subcategoría: Análisis semiótico: Identifica los objetos matemáticos primarios: Proposiciones, argumentos, conceptos, procedimientos y lenguaje.	
Subcategoría: Significado global del objeto inecuaciones: Asigna un significado parcial a la situación 1, 2, 3 y 4.	SPC1 SPC2 SPC3 SPC4

Nota. Elaboración Propia

Tabla 3-4. *Valoración de la Dimensión Epistémica del conocimiento del contenido matemático de los profesores para el objeto Inecuaciones*

Categoría: Conocimiento Común del objeto inecuaciones	Da solución a la Tarea Nivel Bajo: No da solución Nivel Básico: Presenta una solución en forma incorrecta Nivel Alto: Presenta la solución en forma adecuada según el análisis a priori realizado Nivel Superior: Presenta una solución a la situación planteada de forma similar a la presentada en el análisis a priori y plantea otra situación semejante a la establecida
Categoría: Conocimiento Especializado del objeto inecuaciones	Realiza el análisis semiótico de las situaciones 1, 2, 3 y 4 Elabora la configuración de objetos primarios para el objeto inecuaciones de la situación 1, 2, 3 y 4:

	➢ Lenguaje: Usa diferentes representaciones en la solución de la situación. Procedimientos: Resuelve la situación usando diferentes procedimientos. Conceptos - Propiedades: Identifica los conceptos y propiedades en las soluciones. Argumentos: Explica y Justifica las soluciones
Categoría: Conocimiento Ampliado	Identifica posibles generalizaciones de la tarea y conexiones con otros temas más avanzados.

Nota. Elaboración Propia.

Tabla 3-5. *Indicadores de Idoneidad Epistémica (matemática) para el conocimiento especializado del contenido matemático.*

Categoría: Configuración epistémica **Subcategoría**: Situación Problema	▪ Propone situaciones de generación de problemas (Problematización)
Subcategoría: Lenguajes	▪ Usa diferentes representaciones en la solución de la situación planteada (Verbal, Gráfica, Simbólica, ...) traducciones y conversiones entre las mismas.
Subcategoría: Conceptos, proposiciones y procedimientos	➢ Las definiciones y procedimientos son claros y correctos y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen. ➢ Se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado. Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos
Subcategoría: Argumentos	• Las explicaciones y comprobaciones son adecuadas para el nivel educativo al que se dirigen. • Se promueven situaciones para que el alumno tenga que argumentar
Categoría: Idoneidad Epistémica del conocimiento ampliado **Subcategoría:** Relaciones	✓ Los objetos matemáticos (Problemas, definiciones, proposiciones, argumentos,

Baja, media y alta	procedimientos) se relacionan y conectan entre si ✓ Se identifican y articulan diversos significados del objeto inecuaciones

Nota. Elaboración Propia.

4 Capítulo 4. Resultados

4.1 Análisis epistemológico del objeto Inecuaciones

En el presente capítulo se describe el significado global del objeto matemático según los sistemas de prácticas desarrolladas a lo largo de la historia y su relación con el conocimiento didáctico matemático del profesor (Godino, 2009); el significado global del análisis al estudio histórico-epistemológico de las situaciones de la realidad donde se utilizaba el objeto en su recorrido a lo largo de la historia.

4.1.1 Significado del objeto Inecuaciones y su relación con el CDM

El estudio epistemológico para el objeto Inecuaciones lleva a establecer la caracterización de la dimensión epistémica del CDM del profesor, a partir del análisis en primer lugar del Conocimiento común del contenido (CCC), seguido del Conocimiento ampliado del contenido matemático para terminar con el Conocimiento en el horizonte matemático. Por tanto, para esta caracterización se inicia con la identificación de los significados parciales que utilizará el profesor para solucionar problemas relacionados con el objeto inecuaciones con el fin de determinar si el grado de idoneidad de su práctica didáctica. En el enfoque EOS se afirma, que el profesor de matemáticas deberá tener un buen conocimiento del objeto Inecuaciones en la categoría del CCC, el cual se relaciona con la solución a las tareas concretas que puede realizar el profesor en el desarrollo del tema inecuaciones para grado Once o para cursos de Cálculo Diferencial (Godino, 2009). Bajo esta mirada el docente de matemáticas debe ser capaz de resolver tareas o situaciones relacionadas con este objeto y tener un conocimiento más amplio que le permita generar una trazabilidad entre los significados parciales del objeto Inecuaciones, con el fin de proponer y crear estrategias didácticas que buscan la construcción de los objetos matemáticos por parte de sus estudiantes (Godino y Batanero, 1994, p. 341).

En la categoría del conocimiento ampliado del contenido (CAC), se presentan conexiones que puede realizar el profesor las cuales le permitirán construir y determinar las diferentes tareas y generalizaciones con temáticas de la propia matemática y con otros campos del saber para sus estudiantes. En el modelo del CDM, se define la categoría dentro de la dimensión epistémica denominada el Conocimiento especializado del contenido, la cual se relaciona con el desarrollo del proceso de enseñanza por parte del profesor, ya que este conocimiento comprende el conocimiento y las habilidades para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008), este conocimiento incluye: la representación de ideas matemáticas, generar explicaciones matemáticas con procedimientos y analizar los métodos en la solución de problemas (Hill, Ball y Schilling, 2008). Por tal razón, para el estudio de los objetos matemáticos es importante primero que todo conocer qué es el objeto Inecuaciones (Godino, 1994), para que a partir del sistema de prácticas el profesor pueda llegare a identificar los significados parciales asociados al objeto matemático; en este proceso se potencia o desarrollar el conocimiento común del contenido matemático del docente, el conocimiento ampliado y por tanto el especializado.

4.1.1.1 Estudio epistemológico e histórico del objeto Inecuaciones

A lo largo de la historia la humanidad se ha venido enfrentado a diversos problemas y situaciones que buscan mejorar las condiciones de vida del ser humano, alguna de estas situaciones requiere de un conocimiento técnico que permita el uso de diferentes herramientas para su solución. Según Godino y Batanero (1994), identifican un problema como:

> "Una situación en la que se le pide a un individuo realizar una tarea para la que no tiene un algoritmo fácilmente accesible que determine completamente el método de solución". En el mismo sentido, Simón (1978) describe que "un ser humano se enfrenta con un problema cuando intenta una tarea, pero no puede llevarla a cabo. Tiene algún criterio para determinar cuando la tarea ha sido completada satisfactoriamente" (p. 333).

Por tal razón surgen preguntas como ¿Qué problemas se resolvieron en la antigüedad relacionado con las inecuaciones?, ¿En qué situaciones se aplica el problema?, ¿Qué métodos utilizaron en la solución de estos problemas?, Estas preguntas dan inicio al estudio epistemológico y se concretan en un "Estudio histórico-epistemológico del objeto inecuaciones." el cual se estructura según la división realizada en 4 periodos de la humanidad:

- Periodo 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C)
- Periodo 2: Edad Moderna (1453 d. C – 1789 d. C: siglo XV - XVIII)
- Periodo 3: Edad Contemporánea (1789 d.C – actualidad: siglo XVIII - Actualidad)

Cabe resaltar que en la Edad media no se usaron desigualdades, sin embargo, algunos problemas presentados en la época se beneficiaron del desarrollo de ecuaciones y símbolos para su solución llevando a utilizar las desigualdades en los demás periodos (Halmaghi, 2011). En cada uno de los periodos mencionados se identificaron algunos de los sistemas de prácticas relacionados con problemas de Inecuaciones; se resalta que estos problemas se analizan según la tipología de los objetos primarios la cual llevan a establecer una configuración epistémica para cada problema, donde cada una determina una categoría para un significado parcial del objeto matemático (Godino, 1994).

4.1.1.1.1 Periodo 1: Época antigua (3000 a.C – 476 d.C)

En la época antigua la mayoría de problemas se relacionan con áreas, proporciones, cantidades de diferentes elementos como, terrenos, alimentos, objetos entre otros. Como menciona Boyer (1987), Rey y Babini (1985), Ribnikov (1987) en sus investigaciones el álgebra tuvo su origen en diversos pueblos de la antigüedad como Egipto, Grecia, Babilonia, con la finalidad de resolver ecuaciones de primer y segundo grado a través de inecuaciones.

Configuración Epistémica 1 (CE.1): Problema de los vinos

Tabla 4-1. *Emergencia del Significado Parcial 1.*

Situación Problema 1	**Periodo Grecorromano (Diofanto)**
C.E.1	El problema de los vinos
Significado parcial 1	Inecuaciones con problemas de Proporcionalidad

Nota. (Elaboración propia)

Situación – Problema: Periodo Grecorromano (Diofanto)

La primera situación problema fue tomada de la época antigua (3000 a. C – c. 476 d.C), en el período grecorromano, escrito por Diofanto y se denomina el "problema de los vinos" descrita en Rey y Babini (1985) de la siguiente manera:

Problema 1: Problema de los vinos

Determinar las cantidades de dos clases de vino, cuyos precios son proporcionales a 8 y 5, de manera que el costo sea un cuadrado, que sumado al número 60, reproduzca el cuadrado de la suma de las dos cantidades.

Solución: Rey y Babini (1985) expone la solución del problema de la siguiente manera:

Dadas las cantidades x e y, el problema se reduce a resolver el sistema;

$8x + 5y = z^2$; $z^2 + 60 = (x + y)^2$ y al tomar la expresión:

$$u^2 - 60 = 3x + 5u = 8u - 3y$$

se tienen las desigualdades:

$$8u > u^2 - 60 > 5u$$

$$u^2 - 60 = (u - v)^2$$

Por lo tanto,

$$22v < 60 + v^2 < 24v$$

Si se toma $v = 20$ entonces,

$u = \frac{23}{2}, x = \frac{59}{12}, y = \frac{79}{12}$ y $z = \frac{17}{2}$

Interpretación dada por el autor de la tesis

Si se toman las variables x e y, que representen las cantidades de vino respectivamente se establece el siguiente sistema expresado en forma algebraica de la siguiente manera:

$$8x + 5y = z^2 \ (1) \qquad\qquad z^2 + 60 = (x + y)^2 \ (2)$$

Si tomamos una nueva incógnita que represente la suma entre x y y se tiene que $u = x + y$ (3), y al reemplazar en (2) se obtiene $z^2 = u^2 - 60 \ (4)$ y al despejar (3) en términos de

x y y se obtiene respectivamente que $x = u - y$ (5), $y = u - x$ (6); y al reemplazar (5) y (6) en 1 se obtiene:

$$z^2 = 8u - 8y + 5y$$

$$z^2 - 8u - 3y \ (7)$$

entonces,

$$z^2 = 8x + 5(u - x)$$

$$z^2 = 8x + 5u - 5x$$

$$z^2 = 3x + 5u \ (8)$$

por lo tanto, al igualar (4) con (7) y (8) se obtiene la siguiente expresión:

$$u^2 - 60 = 3x + 5u = 8u - 3y \ (9)$$

Lo cual lleva a deducir la desigualdad:

$$8u > u^2 - 60 > 5u \ (10)$$

Al resolver la desigualdad anterior se tiene:

$$8u > u^2 - 60(10.1) \qquad y \qquad u^2 - 60 > 5u(10.2)$$

Al resolver 10.1 se obtiene:

$$8u + 60 - u^2 > 0 \ (10.1.1)$$

Completando cuadrado de $8u + 60 - u^2$ se obtiene $-(u - 4)^2 + 76$

Reescribiendo nuevamente 10.1.1 se obtiene:

$$-(u-4)^2+76>0$$

Al restar 76 a ambos lados de la expresión anterior se obtiene:

$$-(u-4)^2+76-76>0-76$$

Al simplificar se obtiene:

$$-(u-4)^2>-76$$

Al multiplicar por -1 a ambos lados de la expresión anterior obtenemos:

$$(u-4)^2<76$$

Al simplificar la expresión anterior se obtiene:

$$-\sqrt{76}<u-4<\sqrt{76}$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$-\sqrt{76}<u-4; \qquad ó \qquad u-4<\sqrt{76}$$

Al resolver las desigualdades se obtiene:

$$u>-12{,}11 \quad y \quad u<12{,}11$$

Al combinar los intervalos se obtiene:

$$-12{,}11<u<12{,}11$$

Entonces se toma como solución la parte positiva que representa:

$$u < 12{,}11$$

Que aproximado al valor entero más cercano es:

$$u < 12$$

Ahora al resolver 10.2 se obtiene:

$$u^2 - 60 - 5u > 0 \ (10.2.1)$$

Completando cuadrado de $u^2 - 60 - 5u$ se obtiene $(u - \frac{5}{2})^2 - \frac{265}{4}$

Reescribiendo nuevamente 10.121 se obtiene:

$$(u - \frac{5}{2})^2 - \frac{265}{4} > 0$$

Al sumar $\frac{265}{4}$ a ambos lados de la expresión anterior se obtiene:

$$(u - \frac{5}{2})^2 - \frac{265}{4} + \frac{265}{4} > 0 + \frac{265}{4}$$

Al simplificar se obtiene:

$$(u - \frac{5}{2})^2 > \frac{265}{4}$$

Al simplificar la expresión anterior se obtiene:

$$u - \frac{5}{2} < -\sqrt{\frac{265}{4}} \quad \text{ó} \quad u - \frac{5}{2} > \sqrt{\frac{265}{4}}$$

Al resolver las desigualdades se obtiene:

$$u < -5.6 \quad y \quad u > 10.6$$

Entonces se toma como solución la parte positiva y se aproxima al entero más cercano lo que representa:

$$u > 11$$

Considerando las soluciones de las ecuaciones cuadráticas, se encuentra que u está entre 11 y 12. Como $u^2 - 60$ debe ser un cuadrado, entonces se introduce una nueva incógnita v tal que:

$$u^2 - 60 = (u - v)^2 \ (11)$$

Y utilizando los valores extremos de u, se llega a un nuevo par de inecuaciones:

$$22v < 60 + v^2 < 24v \ (12)$$

Al resolver la desigualdad anterior se tiene:

$$22v < 60 + v^2 (12.1) \quad y \quad 60 + v^2 < 24v (12.2)$$

Al resolver 12.1 se obtiene:

$$22v - 60 - v^2 < 0 \ (12.1.1)$$

Completando cuadrado de $22v - 60 - v^2$ se obtiene $-(v-11)^2 + 61$

Reescribiendo nuevamente 12.1.1 se obtiene:

$$-(v-11)^2 + 61 < 0$$

Al restar 61 a ambos lados de la expresión anterior se obtiene:

$$-(v-11)^2 + 61 - 61 < 0 - 61$$

Al simplificar se obtiene:

$$-(v-11)^2 < -61$$

Al multiplicar por -1 a ambos lados de la expresión anterior obtenemos:

$$(v-11)^2 > 61$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$v - 11 < -\sqrt{61}; \qquad ó \qquad v - 11 > \sqrt{61}$$

Al resolver las desigualdades se obtiene:

$$v < 3.18 \quad ó \quad v > 18.8$$

Entonces se toma como solución:

$$v > 18.8$$

Que aproximado al valor entero más cercano es:

$$v > 19$$

Ahora al resolver 12.2 se obtiene:

$$v^2 - 24v + 60 < 0 \text{ (12.2.1)}$$

Completando cuadrado de $v^2 - 24v + 60$ se obtiene $(v - 12)^2 - 84$

Reescribiendo nuevamente 12.2.1 se obtiene:

$$(v - 12)^2 - 84 < 0$$

Al sumar 84 a ambos lados de la expresión anterior se obtiene:

$$(v - 12)^2 - 84 + 84 < 0 + 84$$

Al simplificar se obtiene:

$$(v - 12)^2 < 84$$

Al simplificar la expresión anterior se obtiene:

$$-\sqrt{84} < v - 12 < \sqrt{84}$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$-\sqrt{84} < v - 12; \qquad \text{ó} \qquad v - 12 < \sqrt{84}$$

Al resolver las desigualdades se obtiene:

$$v > 2.83 \quad y \quad v < 21.16$$

Al combinar los intervalos se obtiene:

$$2.83 < v < 21.16$$

Entonces se toma como solución:

$$v < 21.16$$

Que aproximado al valor entero más cercano es:

$$v < 21$$

Por tanto, se llega a la desigualdad:

$$19 < v < 21$$

Se toma el número entero que satisface la desigualdad anterior que en este caso es $v = 20$, y reemplazando se obtiene que $u = \frac{23}{2}, x = \frac{59}{12}, y = \frac{79}{12}$ y $z = \frac{17}{2}$

Análisis semiótico a la configuración (C.E.1):

En el desarrollo de la situación-problema, se utilizan los ***conceptos*** de cantidad y proporcionalidad en relación a la cantidad de vino; estas cantidades fueron utilizadas para identificar la cuantía de un determinado elemento. La ***notación*** utilizada, corresponde a escribir las cantidades de los vinos utilizando variables, aplicando la noción de proporcionalidad lo cual identifica los ***elementos lingüísticos*** que pudieron ser usados en esa época. En la solución presentada se resalta el objeto matemático primario de los ***procedimientos,*** ya que para la solución se presenta el método donde se hace uso *incógnitas auxiliares,* para esto se toman variables y se reduce a ecuaciones lineales (sistemas) y a desigualdades, lo cual es un método para solucionar situaciones que requieren de inecuaciones**.**

4.1.1.1.2 Periodo 2: Edad Moderna (1453 d.C – 1789 d.C: siglo XV – XVIII)

Del análisis a las soluciones y los diferentes métodos de solución de los diferentes problemas que involucran el uso de las desigualdades, se evidenció una parte importante relacionada con el álgebra (Ruiz, 2003).

Configuración Epistémica 2 (C.E.2): Problema de Bombelli

Tabla 4-2. *Emergencia del significado parcial 2*

Situación Problema 2	**Problema de la Raíz**
C.E.2	Problema de Bombelli
Significado parcial 2	Método de aproximación de la raíz cúbica

Nota. Elaboración propia

La siguiente situación, fue descrita por Rafael Bombelli descrito en los "Cartelli" y los "Contracartelli" presentado en Rey y Babini (1985) volumen 2.

Situación – Problema 2: El problema de la raíz

Obtener la raíz cúbica de $52 + 47i$

Solución:

La solución al problema presentada en Rey y Babini (1985, p.347) se describe a continuación:

"Al utilizar el método de aproximación de la raíz cúbica que consiste en determinar una cantidad que es equivalente a la original como $a + bi$ y dicha cantidad $u + vi$. Si dicha cantidad se eleva al cubo se obtiene $(u + vi)^3$ y realizando los debidos despejes se tiene las desigualdades $u^2 < (a^2 + b^2)^{1/3}$ y $u^3 > a$, de las cuales se obtienen los valores respectivos, entonces aplicando el procedimiento anterior se obtiene que la raíz es $4 + i$".

Interpretación dada por el autor de la tesis

Solución

Este problema se expresa de la siguiente manera:

$$x = \sqrt[3]{52 + 47i}$$

Se toman las variables $a = 52$ y $b = 47$

Se pasa a plantear la siguiente igualdad:

$$\sqrt[3]{a + bi} = u + vi$$

Se procede a sumar los cuadrados de ambos números, es decir $52^2 + 47^2$, lo que da 4913 y se busca un número cuyo cubo sea el número que se obtuvo anteriormente (4913) el cual es 17, para escribir la siguiente expresión:

$$a^2 + b^2 = (u^2 + v^2)^3$$

Como $u^2 + v^2 = 4913$ entonces $(u^2 + v^2)^3 = 17$ y despejando $u^2 + v^2$ de la expresión anterior se obtiene:

$$u^2 + v^2 = \sqrt[3]{a^2 + b^2}$$

Ahora búsquese un número cuyo cuadrado sea menor que 17 y cuyo cubo sea mayor que 52, en este caso se determina en el valor para u ya que es la parte entera, que expresado en forma de desigualdades es:

$$u^2 < \sqrt[3]{a^2 + b^2}$$

$$u^3 > a$$

Por lo tanto, $u = 4$. Y la raíz será $4 + i$.

Análisis semiótico a la Configuración (C.E.2)

En la solución al problema, la ***situación problema*** se relaciona con encontrar la raíz cúbica de un número complejo, lo cual permite visualizar el procedimiento usado por Bombelli conocido como el método de aproximación a la raíz cúbica (Rey y Babini, 1985), se usan los ***concepto**s* de suma, multiplicación, potenciación, desigualdades en números complejos ($\mathbb{C}$); *sumas de los cuadrados de dos números y cubo de un número*. Rey y Babini permite un acercamiento a la solución del problema trabajando con valores complejos y que permiten interpretar los elementos, lo que hace referencia a los ***elementos lingüísticos***. En cuanto al ***procedimiento*** usado, es tipo operacional, es decir, se limita a realizar operaciones con las ecuaciones que se obtienen. La solución del problema carece de ***proposiciones*** y ***argumentos***.

Configuración epistémica 3 (C.E.3): Los números y su relación con el infinito

Tabla 4-3. *Emergencia del significado parcial 3*

Situación Problema 3	**Los números y sus relaciones con el infinito**
C.E.3	Problema de las figuras Curvilíneas
Significado parcial 3	Método de Exhausción

Nota. *Elaboración Propia*

La siguiente situación problema es descrita por el matemático Gregoire de St. Vincent (1589 - 1667). En este escenario fueron usados dos principios generales sobre los números y sus relaciones con el infinito (Ruiz, 2003).

Situación – problema 3: Problema de las figuras curvilíneas

Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.

Solución dada por Arquímedes en el año 225 a.C:

Dadas dos magnitudes diferentes α, β con $\alpha < \beta$, existe un número n tal que

$(1 - p)^n * \alpha < \beta$, donde $p \geq \frac{1}{2}$.

Sea $\alpha = 2000,\ \ \beta = 2$ y $p = \frac{3}{4}$

Se quiere encontrar un n tal que:

$$(1 - p)^n * \alpha \leq \beta$$

Escrito de otra forma:

$$(1-\frac{3}{4})^{n} * 2000 \leq 2$$

Es decir:

$$(\frac{1}{4})^{n} * 2000 \leq 2$$

Con $n = 5$ se obtiene que:

$$(\frac{1}{4})^{5} * 2000 \leq 2$$

$$0{,}000976563 * 2000 \leq 2$$

Por tanto,

$$1{,}953125 \leq 2$$

Análisis Semiótico a la Configuración (C.E.3)

En la solución presentada por el matemático Arquímedes se utilizan los *términos* o *expresiones* como numerador, denominador, producto, incógnita, potencia, desigualdades que corresponden a los ***elementos lingüísticos*** utilizados en el problema. Utiliza la ***definición*** de los ***concepto***s de diferencia, producto, y variables logrando identificar algún tipo de lenguaje. Y evidencia del método se fundamenta en los ***procedimientos*** que es el objeto matemático sobresaliente lo cual debe plantear inecuaciones como se observa en la parte inicial del problema.

4.1.1.1.3 Periodo 3: Edad Contemporánea (1789 d.C – Actualidad)

Como menciona Boyer (1986):

> La geometría trajo consigo una nueva forma de entender las aplicaciones de la matemática, al utilizar axiomas, definiciones y algunos teoremas. De esto, algunos trabajos de Paolo Ruffini aportaron a la comprensión de la geometría y de diversas herramientas usadas en la solución de problemas relacionados con esta área. (p.45)

Configuración Epistémica 4 (C.E.4): El problema del polígono

Tabla 4-4. *Emergencia del significa parcial 4*

Situación Problema 4	Lados de un polígono
C.E.4	El problema del polígono
Significado parcial 4	Despeje de inecuaciones lineales aproximado a enteros

Nota. (Elaboración propia)

La siguiente situación problema, fue tomada del volumen 3 de la publicación del año 1807, titulada Corso di Matematiche de Paolo Ruffini (1765-1822), (Huacso, 2018).

Situación problema 4: Lados de un polígono

> *Dos polígonos tienen en total 100 lados, si tomamos de ocho en ocho los lados de un polígono, sobran 7, y el mismo excedente de 7 se muestra cuando tomamos los lados del otro polígono de diez en diez. ¿Cuántos lados hay en cada uno de los polígonos?*

Solución dada por Ruffini (1807):

Rey y Babini (1995) describen la solución de la siguiente manera:

El proceso que se sigue no es claro y supuestamente usa el método de despeje para inecuaciones lineales. Se inicia comienza identificando la cantidad de veces que cabe una cantidad en otra y se reemplazan los valores dados a través de incógnitas. Se tiene la expresión $8x + 10y = 86$. A partir de la ecuación se obtiene una ecuación que presenta la relación entre los lados del polígono, lo cual se representa por la expresión $5t - 3 > 0$ y $11 - 4t > 0$, el cual al resolver las inecuaciones lineales se tiene los lados por un lado son 2 y 7 y por otra parte corresponden a 7 y 3 (p. 78).

Interpretación dada por el autor de la tesis

Para abordar la solución del problema se puede utilizar los métodos de despeje para inecuaciones lineales de la siguiente forma:

Se toma la variable x como el número de veces que entra el 8 en la suma de los lados de un polígono, y con la letra y el número de veces que entra el 10 en la suma de los lados del otro polígono. Por lo cual se obtiene la expresión:

$$8x + 10y = 86 \ (1)$$

Al despejar la letra y, sacando factor común 2 de los números 86 y 8 y simplificando, se obtiene la expresión:

$$y = \frac{43 - 4x}{5} = 8 + \frac{3 - 4x}{5} \ (2)$$

En la ecuación anterior se emplea la letra auxiliar m para representar la parte derecha de la expresión $m = \frac{3-4x}{5}$ (3) que al despejar la variable x y simplificar se tiene $x = \frac{3-5m}{4} = -m + \frac{3-m}{4}$ (4), y se pasa a usar la letra auxiliar n para representar la parte derecha de la expresión (4) se obtiene que $n = \frac{3-m}{4}$ (5), de donde se obtiene $m = 3 - 4n$ (6). Al sustituir (6) en (4) se obtiene:

$$x = \frac{3 - 5(3 - 4n)}{4} = 5n - 3 \text{ (7)}$$

Y al sustituir (7) en (2) se llega a:

$$y = \frac{43 - 4x}{5} = \frac{43 - 4(5n - 3)}{5} = 11 - 4n \text{ (8)}$$

Como x e y son enteros positivos, se establecen las siguientes condiciones de desigualdad mediante inecuaciones lineales:

$$5n - 3 > 0 \text{ (9)}$$

$$11 - 4n > 0 \text{ (10)}$$

Al solucionar (9) y (10) se tiene que:

$$n > \frac{3}{5} \quad y \quad \frac{11}{4} > n$$

Como n debe ser entero entonces de la solución anterior se obtiene que 1 y 2 son los valores para n, luego si $n = 1$ al reemplazar los valores en (9) y (10) se obtiene que el valor para x es 2 y para y es 7; y si $n = 2$ y reemplazando los valores se obtiene que para x el valor es 7 y para y el valor es 3, y así determinamos la cantidad de lados de los polígonos.

Ya que para el caso 1 se tiene que:

$$8(2) + 10(7) = 16 + 70 = 86$$

Y para el caso 2 se tiene que:

$$8(7) + 10(3) = 56 + 30 = 86$$

Lo que da solución al problema

Análisis Semiótico a la C.E.4

Dada la solución al problema, se identifica que utilizan los ***términos:*** suma, diferencia, producto, división, factor, incógnita, lados de un polígono, inecuaciones lineales, excedente, que corresponden a los ***elementos lingüísticos,*** donde se usan en los ***algoritmos*** o ***procedimientos*** para mostrar cómo se determina una cantidad en la que se toma una en otra. Según Huacso (2018) en esta época ya existía una generalización del álgebra simbólica que permitía representar una situación de forma simbólica, lo cual permite generar un mayor panorama de la situación y así llegar a la solución; la forma de resolver este tipo de problemas corresponde al ***procedimiento*** o método de despeje para inecuaciones. Entre los ***conceptos*** utilizados en la solución del problema se encuentran: suma, resta, multiplicación, división. No se evidencia el uso de ***proposiciones*** en el desarrollo dado, pues las proposiciones corresponden a los enunciados sobre los conceptos.

A través de la historia las inecuaciones tomaron un papel importante en la solución de diferentes problemas que sirvieron para dar solución a situaciones de su época, donde se utilizaron diferentes formas de solución (métodos). En la Tabla 4-5 resume las diferentes configuraciones epistémicas, resultado del estudio histórico epistemológico sobre el objeto sistemas de ecuaciones lineales:

Tabla 4-5. *Configuraciones Epistémicas*

Períodos de la historia	**Situación – Problema**	**Configuración Epistémica**	**Significados Parciales del Objeto Inecuaciones**
Época Antigua	Situación Problema 1 Periodo Grecorromano (Diofanto)	C.E.1 Problema de los vinos	Inecuaciones con problemas de Proporcionalidad
Edad Moderna	Situación Problema 2 Problema de la Raíz	C.E.2 Problema de Bombelli	Método de aproximación de la raíz cúbica
	Situación Problema 3 Los números y sus relaciones con el infinito	C.E.3 Problema de las figuras Curvilíneas	Método de Exhausción
Edad Contemporánea	Situación Problema 4 Lados de un polígono	C.E.4 Problema del Polígono	Despeje de inecuaciones lineales aproximado a enteros

Nota. Elaboración Propia

4.2 Significado Global del Objeto Matemático Inecuaciones

A partir del enfoque EOS al utilizar la configuración epistémica es posible caracterizar de forma sistemática los significados parciales de los objetos matemáticos, de manera que:

> “En la reconstrucción del significado global del objeto interesa, por tanto, identificar los cambios que se van añadiendo en cada categoría de objetos emergentes y que permitirán caracterizar los obstáculos, rupturas y progresos en la evolución de las configuraciones epistémicas. Los cambios se caracterizan por la solución que se presenta para la problemática existente en una configuración epistémica en un determinado momento.

> Pueden implicar tanto la ruptura de la estructura de la configuración, como su evolución para otra configuración epistémica inclusiva y (o) complementaria.” (Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino 2005, p.131)
>
> Al realizar una parte estudio histórico epistemológico para el objeto Inecuaciones, se identificaron cuatro sistemas de prácticas asociadas al objeto matemático, los cuales presentan una configuración epistémica, y a partir de estas se constituyen un significado parcial para este objeto matemático. Estas configuraciones se han denominado: 1) Problema de los vinos (C.E.1); 2) Problema de Bombelli (C.E.2); 3) Problema de las figuras Curvilíneas (C.E.3); 4) Problema del Polígono (C.E.4)

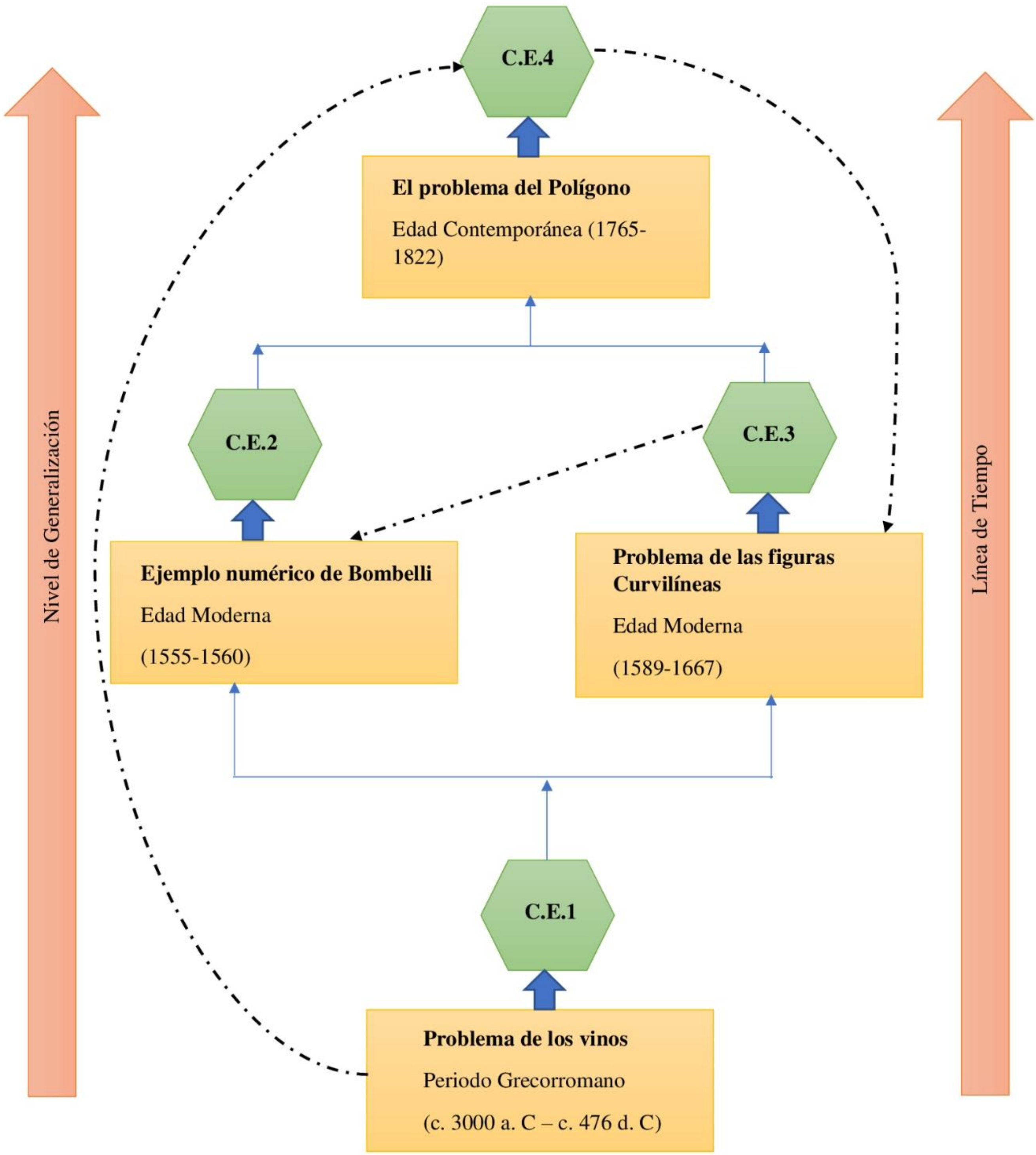
El esquema de la Figura 5 se pueden observar los significados parciales junto a su respectiva configuración epistémica. En este gráfico se presenta la relación entre las configuraciones epistémicas de acuerdo a un nivel de generalización, así como a su ubicación en una línea de tiempo de acuerdo con su desarrollo histórico, además en la figura 2, se presentan algunas conexiones entre configuraciones que se representan por medio de una línea discontinua lo cual indican que con los elementos de dicha configuración es posible resolver algunas situaciones – problemas de otra configuración. Particularmente, la cuarta configuración epistémica (CE4), es intensiva por sus conexiones sin tener presente el tiempo histórico donde se desarrolló, dado que con los elementos de (CE4), pueden resolver algún tipo de problemas de los sistemas de prácticas que llevan asociadas las configuraciones CE1, CE2 y CE3, respectivamente. Por otra parte, se brinda un panorama de la evolución con relación a las características y elementos de las respectivas configuraciones epistémicas y por consiguiente de los diferentes significados del objeto Inecuaciones a través del tiempo.

En el presente estudio, las configuraciones C.E.2 y C.E.3 toman algunos elementos de la configuración C.E.1, y la configuración C.E.4 retoma elementos establecidos en las configuraciones C.E.2 y C.E.3, con el fin de generar nuevos elementos en dichas configuraciones, sin importar el hecho que las configuraciones no representen problemas en el mismo periodo histórico.

El análisis sistemático de las 4 configuraciones epistémicas obtenidas a través de un estudio histórico – epistemológico para el objeto inecuaciones conforma la reconstrucción de un ***significado global*** para este objeto. En este estudio se analizaron tres épocas debido a que en la edad media según el estudio realizado por Halmaghi (2011) no se usaron desigualdades, sin embargo, las desigualdades se beneficiaron del desarrollo de ecuaciones y símbolos.

Figura 5

Significado global del objeto Inecuaciones



Nota 5. *Indicadores del CDM para la faceta epistémica*

4.3 Diseño y análisis del cuestionario sobre las concepciones y creencias de los profesores de Matemáticas frente al objeto Inecuaciones

Esta sección se divide en tres apartados: se presenta en la parte I el cuestionario la cual tiene el propósito de proporcionar los insumos para analizar las concepciones y creencias de los profesores de grado once respecto a los significados implementados en los procesos de enseñanza del objeto inecuaciones; el uso de los significados parciales y las implicaciones didácticas en cuanto a los significados pretendidos por el profesor. La parte II del cuestionario indaga por el conocimiento del profesor sobre Inecuaciones; el pensamiento variacional y las implicaciones en la enseñanza: para esto se hace uso de 4 situaciones problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto inecuaciones.

En la parte III del cuestionario, tiene como objetivo investigar sobre la pertinencia de cada situación problema según los Derechos Básicos de Aprendizaje y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas identificados para estas, ya que ellos operativizan los lineamientos curriculares y establecen evidencias en cuanto al desarrollo del pensamiento variacional en relación con los sistemas algebraicos y analíticos.

4.4 Cuestionario "Concepciones y creencias de los profesores de matemáticas frente al objeto inecuaciones"

Para la construcción del cuestionario se toman 4 situaciones-problemas encontradas y analizadas en el estudio histórico-epistemológico del objeto Inecuaciones enfocadas al análisis de las concepciones y creencias del profesor de matemáticas de grado once respecto a los significados implementados en los procesos de enseñanza de este objeto matemático, a partir de los significados reconstruidos en el estudio histórico-epistemológico de este objeto. La primera situación se denomina Problema de los vinos que corresponde a la C.E.1, esta situación se ubica en el periodo 1: Época Antigua (3000 a. C – c. 476 d. C); la segunda situación-problema se denomina Problema de Bombelli que corresponde a la C.E.2, la tercer situación-problema se denomina problema de las figuras Curvilíneas que corresponde a la C.E.3; estas situaciones se ubican en el periodo 2: Edad Moderna (1453 d.C – 1789 d.C: siglo XV-XVIII); y la cuarta situación-problema que se denomina el problema del polígono que corresponde a la C.E.4 ubicada en el periodo 3: Edad Contemporánea (1789 d.C – actualidad: siglo XVIII - Actualidad).

La parte I de cuestionario tiene como finalidad implementar situaciones-problemas que lleven a generar un sistema de prácticas matemáticas institucionales que permitan analizar las concepciones y creencias de 5 profesores de diferentes sectores educativos (público-privado), para establecer la información emergente sobre los significados de referencia del objeto inecuaciones, según la reflexión de los profesores en relación a los significados que se deben utilizar para la enseñanza del objeto inecuaciones en grado once. Otro aporte que se busca con la implementación del cuestionario en su parte II es la caracterización o análisis del Conocimiento didáctico Matemático (CDM) del Profesor en su dimensión epistémica, según sus concepciones y creencias, ya que esta dimensión es importante en la enseñanza de los objetos matemáticos como lo establece Shulman (1986,1987) y Godino (2009) en el modelo CDM. En este modelo se estructura el Conocimiento del profesor para la enseñanza de los objetos matemáticos en 6 dimensiones: Epistémica, motivo de reflexión del presente estudio, Cognitiva, mediacional, interaccional, afectiva y ecológica. La dimensión epistémica se analiza, respecto al significado global del objeto Inecuaciones; el significado global referencial y el significado institucional pretendido por los docentes en los diferentes procesos de instrucción del objeto inecuaciones.

Respecto al diseño del cuestionario, se tuvo en cuenta la importancia y necesidad de conocer los conocimientos y creencias de los profesores que enseñan en grado once en algunos casos de forma evasiva, con el fin de evitar respuestas idealizadas de una situación bajo la necesidad de «quedar bien». Asimismo, se cuidaron otros detalles como, por ejemplo: que los profesores no se sintieran ni cuestionados ni evaluados respecto a sus conocimientos sobre las inecuaciones; y que el tiempo dedicado al cuestionario no fuera extenso, para evitar un desinterés por el tema.

Estos conocimientos de los profesores respecto al objeto inecuaciones, estructuran el modelo del Conocimiento del profesor en el modelo del Conocimiento matemático para la enseñanza – MKT, propuesto por Ball y colaboradores (2008) el cual es retomado en el modelo CDM propuesto por Godino (2009). En otras palabras, se diseña el cuestionario con el objetivo de analizar la dimensión epistémica del CDM, para el objeto Inecuaciones, en cuanto al conocimiento sobre el contenido matemático y específicamente para la caracterización del Conocimiento Especializado del contenido matemático sobre las inecuaciones, al establecer los significados reales de referencia de los docentes, de igual forma se indaga por las concepciones y creencias que tiene el profesor, en cuanto al significado de referencia del objeto matemático, según cada situación-problema relacionada con el objeto inecuaciones.

Finalmente, en la parte III del cuestionario, se pregunta por la pertinencia de la situación problema según el análisis a los Derechos Básicos de Aprendizaje y los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas ya que ellos operativizan los lineamientos curriculares y establecen evidencias en cuanto al desarrollo del pensamiento variacional en relación con los sistemas algebraicos y analíticos (Ver tabla 4.67). A continuación, se presenta el cuestionario.

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR PARA LA ENSEÑANZA DE LAS INECUACIONES

Nombre del docente: ____
Años de experiencia docente: ____
Años de experiencia docente en cursos de grado Once: ______________________
Años de experiencia o semestres en cursos de Cálculo Diferencial: ___________________

Cordial saludo.

Solicitamos su valiosa colaboración para dar respuesta a las preguntas planteadas, relacionadas con el Conocimiento del Contenido Matemático y Didáctico de los Profesores en ejercicio para la enseñanza de las Inecuaciones. Pedimos el favor de colocar las sugerencias en cuanto al diseño y claridad del cuestionario al final del documento. La información dada se toma para el análisis del Conocimiento del profesor en la tesis de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Para su tratamiento a cada profesor se le asignara un código como P1 (profesor uno).

Agradecemos su ayuda y sus aportes en cuanto a los conocimientos que tiene el docente y pueden ponerse en práctica para el análisis de los contenidos matemáticos para la enseñanza en Educación Básica. La primera parte del cuestionario corresponde a una síntesis de situaciones problemas importantes para el trabajo con las inecuaciones buscando la comprensión por parte de nuestros estudiantes.

En primer lugar, se retoman los Estándares Básicos de Competencias al igual que los Derechos Básicos de Aprendizaje, ya que ellos operativizan los lineamientos curriculares y establecen evidencias en cuanto al desarrollo del pensamiento numérico en relación con los sistemas numéricos y algebraicos. En este sentido se seleccionaron los Estándares Básicos de Competencias y Derechos Básicos de Aprendizaje (pensamiento numérico) respectivamente:

EST1. Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.

DBA1. Utiliza las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y sus relaciones y operaciones para construir y comparar los distintos sistemas numéricos.

DBA2. Justifica la validez de las propiedades de orden de los números reales y las utiliza para resolver problemas analíticos que se modelen con desigualdades.

(Parte I)

1. Las situaciones problema se retoman y reformulan de problemas encontrados en el estudio histórico y epistemológico del objeto matemático inecuaciones. El primer problema se ha tomado de la época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C), en el periodo grecorromano, y fue escrito

por Diofanto y se denomina el “Problema de los vinos” planteado en Rey y Babini (1985, p. 224) Volumen 1.

Situación - Problema 1: Problema de los vinos

Determinar las cantidades de dos clases de vino, cuyos precios son proporcionales a 8 y 5, de manera que el costo sea un cuadrado, que sumado al número 60, reproduzca el cuadrado de la suma de las dos cantidades.

1. a) De una posible solución al problema planteado (puede consultar el texto citado).

1. b) El problema se puede considerar como:

a) **Conocimiento Común del profesor** (Según Godino (2009) el conocimiento común es aquel conocimiento puesto en juego para resolver problemas matemáticos, para lo cual un matemático, o una persona con suficiente conocimiento en la temática, está capacitado para resolverlos) ________

b) **Conocimiento Ampliado** (Según Godino (2009) el conocimiento ampliado es aquel que refiere a realizar un ordenamiento de las secuencias con que podrían desarrollarse los diferentes aspectos de un contenido específico, está relacionado con los conceptos y términos relacionados con la enseñanza. Para esta última acción, es posible que una persona adulta, o inclusive un matemático, no tenga necesariamente la competencia ni la posibilidad de llevarla a cabo) _________

c) **Conocimiento Especializado** (Según Godino (2009) este conocimiento refiere a diferentes aspectos que aporta perspectiva a los profesores para su trabajo, es decir tiene relación con otras áreas del conocimiento) ________

Justifique su respuesta.

1. c) En una escala de 1 a 100 marque el grado de dificultad que considera para el problema, según los siguientes intervalos: (0-30]: Difícil; (30 – 50]: Dificultad Alta; (50 - 70]: Dificultad Media; (70 - 90]: Dificultad Baja y (90-100]: Fácil. Justifique su respuesta.

Nivel de Dificultad	Escala
Difícil	
Dificultad Alta	
Dificultad Media	
Dificultad Baja	
Fácil	

(Parte II)

1. d) ¿Cree que el problema se encuentra o puede estar en los textos de matemáticas de Grado Once? Justifique.

1. e) ¿El lenguaje natural utilizado es claro para el estudiante? Justifique

1. f) ¿En la solución planteada por usted el lenguaje algebraico sería adecuado para el estudiante? Justifique.

1. g) ¿La situación problema es adecuada y motiva la comprensión del objeto Inecuaciones? Justifique.

2. La siguiente situación, fue tomada del volumen 3 de la publicación del año 1807, titulada corso di Matematiche de Paolo Ruffini (1765-1822). (Huacso, 2018).

Problema 2: Lados de un polígono

Dos polígonos tienen en total 100 lados, si tomamos de ocho en ocho los lados de un polígono, sobran 7, y el mismo excedente de 7 se muestra cuando tomamos los lados del otro polígono de diez en diez. ¿Cuántos lados hay en cada uno de los polígonos?

2.a) El problema se puede considerar como**:**

a) Conocimiento Común del profesor ________

b) Conocimiento Ampliado _________

c) Conocimiento Especializado ________

Justifique su Respuesta.

2. b) En una escala de 1 a 100 marque el grado de dificultad que considera para el problema, según los siguientes intervalos: (0-30]: Difícil; (30 – 50]: Dificultad Alta; (50 - 70]: Dificultad Media; (70 - 90]: Dificultad Baja y (90-100]: Fácil). Justifique su respuesta.

Nivel de Dificultad	Escala
Difícil	
Dificultad Alta	
Dificultad Media	
Dificultad Baja	
Fácil	

(Parte II)

2.c) Plantee una solución al problema. Puede consultar el texto citado.
2.d) ¿Cómo docente de grado Once que aportes a la comprensión de las Inecuaciones da el problema a los estudiantes? Justifique.
2. e) ¿El problema anterior puede llevar al desarrollo del pensamiento numérico y/o variacional? Justifique.
2.f) ¿Cuáles ventajas o desventajas considera que puede traer para la enseñanza el retomar los problemas en la historia de las matemáticas que dieron origen a los objetos matemáticos? Justifique su respuesta.

3. La siguiente situación, fue descrita por Rafael Bombelli descrito en los "Cartelli" y los "Contracartelli" presentado en Rey y Babini (1985, p.26) volumen 2.

Situación problema 3. Ejemplo numérico de Bombelli

Obtener la raíz cúbica de $52 + 47i$

Solución:

Este problema tiene una representación algebraica en la forma:

$\sqrt[3]{52 + 47i} = ¿?$

Sea $a = 52$ y $b = 47$

Entonces se plantea la siguiente igualdad

$$\sqrt[3]{a + bi} = u + vi$$

Súmese los cuadrados de ambos números, lo que da 4913 que es el cubo de 17,

$$a^2 + b^2 = (u^2 + v^2)^3$$

Búsquese ahora un número cuyo cuadrado sea menor que 17 y cuyo cubo sea mayor que 52

$$u^2 < \sqrt[3]{a^2 + b^2}$$

$$u^3 > a$$

Ese número no puede ser sino 4. Si es así la raíz será $4 + i$, cuya suma de los cuadrados es 17 y el cubo del primer número menos el triple del primero por el cuadrado del segundo, que es 12, es 52

$$u^3 - 3uv^2 = a$$

3.a) Plantee su solución al problema.

3.b) ¿Qué dificultades encuentra en la solución presentada? Escriba algunas ventajas que encierra el problema para los estudiantes o si piensa en dificultades por favor descríbalas.

3.c) El problema se puede considerar como:

a) Conocimiento Común del profesor ________

b) Conocimiento Ampliado _________

c) Conocimiento en el Especializado Matemático ________

Justifique su respuesta.

3.d) En una escala de 1 a 100 marque el grado de dificultad que considera para el problema, según los siguientes intervalos: (0-30]: Difícil; (30 – 50]: Dificultad Alta; (50 - 70]: Dificultad Media; (70 - 90]: Dificultad Baja y (90-100]: Fácil). Justifique su respuesta.

Nivel de Dificultad	Escala
Difícil	
Dificultad Alta	
Dificultad Media	
Dificultad Baja	
Fácil	

(Parte II)

3.e) De acuerdo con la solución dada por Bombelli, completa la tabla 3.

Configuración epistémica 3. Ejemplo numérico de Bombelli

¿Qué tipo de lenguaje se utiliza?	
¿Qué nombre se le puede dar a la situación problema? **¿Qué conceptos se utilizan en la solución del problema?** **¿Qué procedimientos se utilizan en la solución del problema?** **¿Qué argumentos se dan?** **¿Qué nombre se le asigna al significado parcial emergente? (El significado del objeto matemático viene relacionado con su utilidad por ejemplo para el problema 1 problema de proporciones)**	

3.f) Se pueden utilizar intervalos de prueba para poder encontrar la solución del problema anterior. Justifique su respuesta.

3.g) ¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique su respuesta

4. La siguiente situación problema fue descrita por el matemático Gregoire de St. Vincent (1589 - 1667). En este escenario fueron usados dos principios generales sobre los números y sus relaciones con el infinito, que aparecieron de diferente forma, y fueron relevantes (Zúñiga, 2003, p.96)

Problema 4. El método de Exhausción

Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, Entonces, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.

Solución:

El problema anterior los podemos escribir de la siguiente forma

Dadas dos magnitudes diferentes α, β (con $\alpha < \beta$, existe un número n tal que

$(1-p)^n * \alpha < \beta$, donde $p \geq \frac{1}{2}$)

Sea $\alpha = 2000, \ \beta = 2$ y $p = \frac{3}{4}$

Queremos encontrar un n tal que

$$(1-p)^n * \alpha \leq \beta$$

Escrito de otra forma

$$(1-\frac{3}{4})^n * 2000 \leq 2$$

Es decir

$$(\frac{1}{4})^n * 2000 \leq 2$$

Con $n = 5$ obtenemos

$$(\frac{1}{4})^5 * 2000 \leq 2$$

$$0{,}000976563 * 2000 \leq 2$$

Por lo tanto:

$$1{,}953125 \leq 2$$

4.a) Plantee y describa su solución.

(Parte II)

4.b) ¿Qué ventajas y/o desventajas puede traer la enseñanza del problema en el tema de inecuaciones para los estudiantes de grado 11? Justifique

4.c) ¿Puede plantear otro problema(s) siguiendo los planteamientos dados en el problema? ¿Cómo cuáles? Justifique

4.d) El problema se puede considerar como:

a) Conocimiento Común del profesor ________

b) Conocimiento Ampliado _________

c) Conocimiento en el Especializado ________

Justifique su respuesta

4.e) En una escala de 1 a 100 marque el grado de dificultad que considera para el problema, según los siguientes intervalos: (0-30]: Difícil; (30 – 50]: Dificultad Alta; (50 - 70]: Dificultad Media; (70 - 90]: Dificultad Baja y (90-100]: Fácil). Justifique su respuesta.

Nivel de Dificultad	**Escala**
Difícil	
Dificultad Alta	
Dificultad Media	
Dificultad Baja	
Fácil	

4.f) De acuerdo con la solución dada por Gregoire, completa la tabla 4

Configuración epistémica 4. El método de Exhausción

¿Qué tipo de lenguaje se utiliza?	
¿Qué nombre se le puede dar a la situación problema?	
¿Qué conceptos se utilizan en la solución del problema?	
¿Qué procedimientos se utilizan en la solución del problema?	
¿Qué argumentos se dan?	
¿Qué nombre se le asigna al significado parcial emergente?	

4.g) ¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique su respuesta

(Parte III)

Por favor contestar las siguientes preguntas relacionadas con los siguientes estándares y Derechos Básicos de Aprendizaje establecidos por el ministerio de educación nacional.

Estándar:
Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos.

Derechos Básicos de Aprendizaje	**Descripción**
DBA 1	Utiliza las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y sus relaciones y operaciones para construir y comparar los distintos sistemas numéricos.
DBA 2	Justifica la validez de las propiedades de orden de los números reales y las utiliza para resolver problemas analíticos que se modelen con desigualdades.

5. ¿Considera que el estándar y los DBA seleccionados corresponden a las situaciones problema planteadas? Justifique la respuesta

6.a) ¿Utiliza algunas situaciones problema que puedan considerarse como indispensables para la enseñanza de las inecuaciones? Por favor descríbalas.

6.b) ¿Puede resumir su secuencia de enseñanza en cuanto a las situaciones problema que incluye para la enseñanza del objeto inecuaciones? Justifique.

7) ¿Qué situación problema de las cinco presentadas no debería enseñarse a los estudiantes y por qué? Justifique.

8) Por favor colocar las observaciones que considere pertinentes en cuanto a la claridad de los problemas presentados, su lenguaje y en general el diseño de las preguntas.

4.4.1 Categorías de Análisis para el cuestionario Concepciones y Creencias de los profesores en la dimensión epistémica del objeto Inecuaciones (CCPI)

A continuación, se presenta la Tabla 4-6 que muestra la categoría y descripción de cada ítem presente en el cuestionario.

Tabla 4-6. *Categoría y Descripción de cada ítem del Cuestionario*

Pregunta	Categoría	Descripción
1a)	**Configuración epistémica y significado parcial 1**	**CCC. Lenguaje, Conceptos, Procedimientos, Argumentos. Inecuaciones con problemas de Proporcionalidad**
1b)	**CDM**	**CCC (Conocimiento Común del Contenido)**
1c)	Grado de dificultad de la pregunta.	Se analiza en forma cuantitativa al revisar la solución a la situación problema
1d)	CDM y significados de referencia	CAC (Conocimiento Ampliado del Contenido) CAC. Lenguaje
1e)	Configuración epistémica	CAC. Lenguaje algebraico
1f)	Configuración epistémica	CAC (Conocimiento Ampliado)
1g)	CDM	
2a)	**CDM**	**CCC (Conocimiento Común del Contenido)**
2b)	Grado de dificultad de la pregunta.	Se analiza en forma cuantitativa al revisar la solución a la situación problema
2c)	**Configuración epistémica y significado parcial 2**	**CCC. Lenguaje, Conceptos, Procedimientos, Argumentos. Despeje de inecuaciones lineales aproximado a enteros**
2d)	CDM	CAC (Conocimiento Ampliado)
2e)	CDM y Pensamiento Variacional	CAC (Conocimiento Ampliado)
2f)	CDM	CAC (Conocimiento Ampliado)
3a)	**Configuración epistémica y Significado parcial 3**	**CCC Lenguaje, Conceptos, Procedimientos, Argumentos. Método de aproximación de la raíz cúbica**
3b)	CDM	CAC (Conocimiento Ampliado)
3c)	**CDM**	**CCC (Conocimiento Común del Contenido)**
3d)	Grado de dificultad de la pregunta.	Se analiza en forma cuantitativa al revisar la solución a la situación problema

3e)	Configuración epistémica	CAC. Lenguaje, Conceptos, Procedimientos, Argumentos
3.f)	CDM y significados de referencia	CAC (Conocimiento Ampliado del Contenido)
3.g)	CDM y significados de referencia	CAC (Conocimiento Ampliado del Contenido)
4a)	**Configuración epistémica y Significado Parcial 4**	**CCC Lenguaje, Conceptos, Procedimientos, Argumentos. Método de Exhausción**
4b)	CDM	CAC (Conocimiento Ampliado)
4c)	**CDM y significados de referencia**	**CCC (Conocimiento especializado del Contenido)**
4d)	**CDM**	**CCC (Conocimiento Común del Contenido)**
4e)	Grado de dificultad de la pregunta.	Se analiza en forma cuantitativa al revisar la solución a la situación problema
4f)	Configuración epistémica	CAC (Conocimiento Ampliado del Contenido)
4g)	**CDM y significados de referencia**	**CCC. Lenguaje, Conceptos, Procedimientos, Argumentos.**
5)	Análisis de estándares	Implicaciones Didácticas
7)	CDM	CAC (Conocimiento Ampliado)

Nota. Elaboración Propia.

4.4.2 Análisis de la Dimensión Epistémica del Conocimiento Didáctico Matemático de los Profesores respecto al objeto Inecuaciones

En esta sección se presenta el análisis a la dimensión epistémica del CDM de los 5 profesores que participaron des estudio. La dimensión epistémica del CDM se relaciona con el conocimiento que debe tener el profesor del contenido matemático. Se estructura en el conocimiento común, el especializado y el conocimiento en el horizonte matemático. Dentro del conocimiento especializado que corresponde al conocimiento de un profesional para la enseñanza se encuentra el conocimiento de los objetos primarios que definen la configuración epistémica que determina cada situación problema, la cual da origen a la emergencia de un significado parcial del objeto inecuaciones. Para el análisis de las configuraciones epistémicas a las 4 situaciones-problemas tomadas del estudio histórico-epistemológico, se realizan 6 tablas una por cada configuración, donde se presenta el análisis semiótico a la situación-problema según la tipología de los objetos primarios (Godino, 2009).

En este apartado se presenta el análisis a priori dado por el docente investigador como resultado de consultas en libros de texto de historia de la matemática y libros de texto de grado Once y se contrasta con el análisis a posteriori que corresponde al realizado por los docentes que participaron del estudio de caso: para esto según la tabla 4.5, se realiza el análisis a las preguntas: 1a), 1e), 1f), 2c), 3e) y 4g) del cuestionario.

Análisis a Priori de la Configuración epistémica 1. Pregunta (P1.a)

Tabla 4-7. *C.E.1. Problema de los vinos*

Situación-Problema 1: Problema de los vinos *Determinar las cantidades de dos clases de vino, cuyos precios son proporcionales a 8 y 5, de manera que el costo sea un cuadrado, que sumado al número 60, reproduzca el cuadrado de la suma de las dos cantidades.*	
Pregunta 1.a) De una posible solución. Puede consultar el texto citado	
Dimensión Epistémica	Objetos Primarios

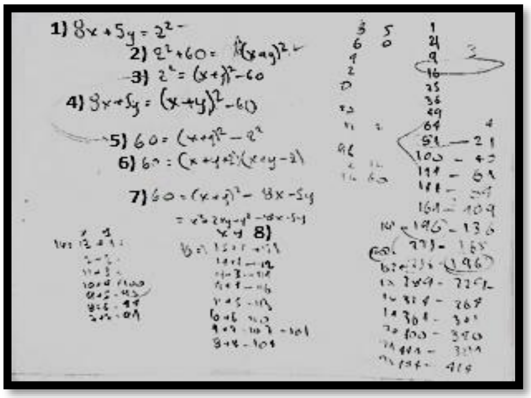
Conocimiento Especializado	**Elementos Lingüísticos** **EL.1** Identifica los términos como: suma, resta, producto, división, factor, incógnita, desigualdad, proporcionalidad, ser cuadrado de. **EL.2** Identifica y reconoce los enunciados del problema matemático. **Conceptos** **C.1** Suma, resta, multiplicación, división, desigualdades, expresiones algebraicas. **Proposiciones** Prop.1 No se evidencia el uso de proposiciones. **Procedimientos** **Proc.1** Mostrar como determinar una cantidad desconocida a partir de la relación entre variables usando desigualdades. **Proc.2** Soluciones de ecuaciones cuadráticas a través de desigualdades. **Argumentos** **Arg.1** Plantear las siguientes ecuaciones $8x + 5y = z^2$; $z^2 + 60 = (x + y)^2$ y tomar una incógnita auxiliar que reemplace la suma entre x y y. **Arg.2** Se debe llegar a una expresión de la forma $\boldsymbol{8u > u^2 - 60 > 5u}$ **Arg3.** Luego de resolver la desigualdad anterior se llega a una expresión de la forma $\boldsymbol{19 < v < 21}$ **Arg4.** Lo cual se obtiene los valores toma $\boldsymbol{v = 20}$**,** lo que lleva a que**:** $\boldsymbol{u = \frac{23}{2}, x = \frac{59}{12}, y = \frac{79}{12}}$ **y** $\boldsymbol{z = \frac{17}{2}}$

Nota. Elaboración Propia

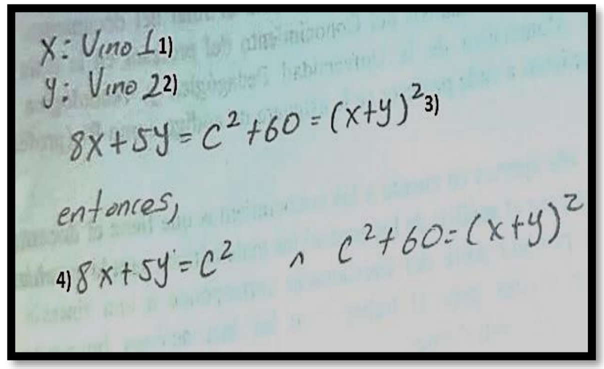
Análisis A Posteriori de la Configuración epistémica 1. Pregunta (P1.a)

Tabla 4-8. *Respuesta dadas por los docentes a la Pregunta 1.a)*

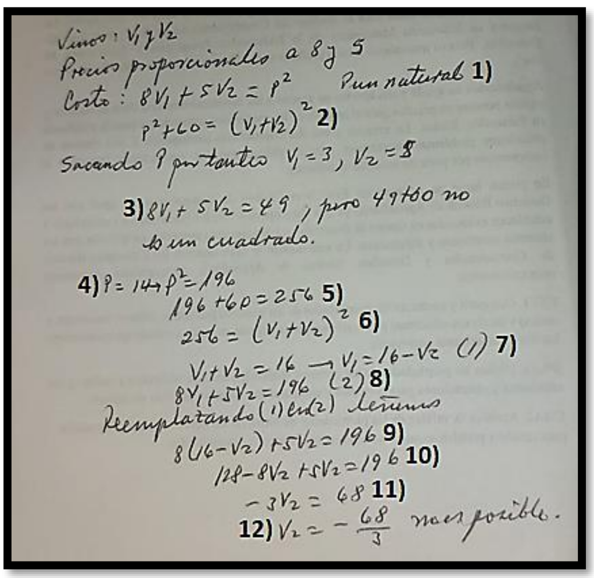
P1


1) $8x+5y=z^2$
2) $z^2+60=(x+y)^2$
3) $z^2=(x+y)^2-60$
4) $8x+5y=(x+y)^2-60$
5) $60=(x+y)^2-z^2$
6) $60=(x+y+z)(x+y-z)$
7) $60=(x+y)^2-8x-5y$
8)

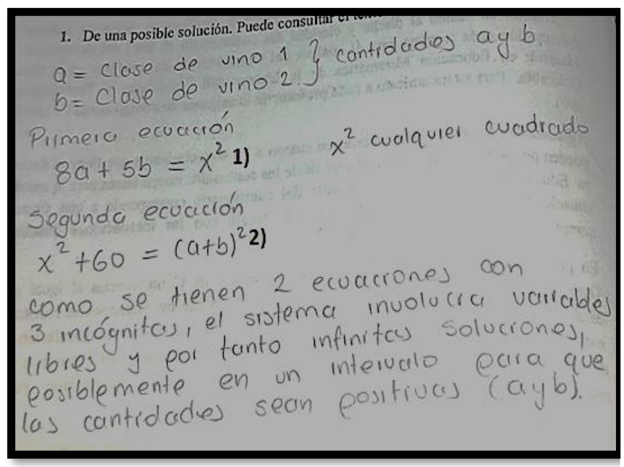
P2


X: Vino 1 1)
y: Vino 2 2)
$8x+5y=c^2+60=(x+y)^2$ 3)
entonces,
4) $8x+5y=c^2 \wedge c^2+60=(x+y)^2$

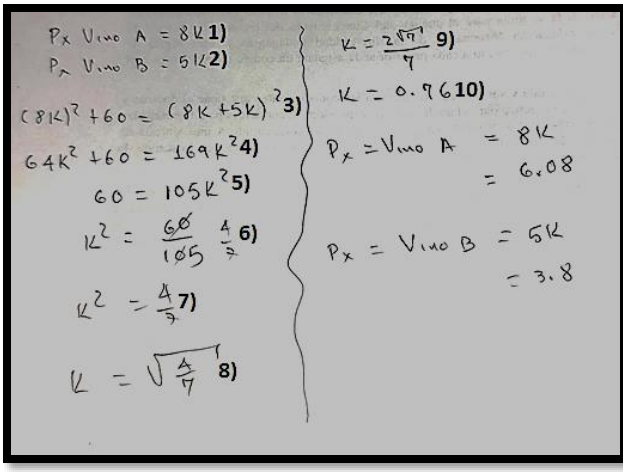
P3


Vinos: V_1 y V_2
Precios proporcionales a 8 y 5
Costo: $8V_1+5V_2=P^2$ P un natural 1)
$P^2+60=(V_1+V_2)^2$ 2)
Sacando P por tanteo $V_1=3$, $V_2=8$
3) $8V_1+5V_2=49$, pero 49+60 no es un cuadrado.
4) $P=14 \rightarrow P^2=196$
$196+60=256$ 5)
$256=(V_1+V_2)^2$ 6)
$V_1+V_2=16 \rightarrow V_1=16-V_2$ (1) 7)
$8V_1+5V_2=196$ (2) 8)
Reemplazando (1) en (2) tenemos
$8(16-V_2)+5V_2=196$ 9)
$128-8V_2+5V_2=196$ 10)
$-3V_2=68$ 11)
12) $V_2=-\frac{68}{3}$ no es posible.

P4


1. De una posible solución. Puede consultar
a = Clase de vino 1
b = Clase de vino 2
cantidades a y b
Primera ecuación
$8a+5b=x^2$ 1)
x^2 cualquier cuadrado
Segunda ecuación
$x^2+60=(a+b)^2$ 2)
como se tienen 2 ecuaciones con 3 incógnitas, el sistema involucra variables libres y por tanto infinitas soluciones, posiblemente en un intervalo para que las cantidades sean positivas (a y b).

P5



Nota. Elaboración Propia

Tabla 4-9. *Análisis de las respuestas dadas por los Docentes a la pregunta 1.a*

Elementos	P1	P2	P3	P4	P5
Lenguajes	Simbólico, Algebraico, Aritmético	Simbólico, Algebraico	Verbal, simbólico y Algebraico	Verbal, simbólico y Algebraico	Simbólico, Algebraico
Conceptos	Suma, resta, incógnita, ser cuadrado de, equivalencias	Variable, incógnita, ser cuadrado de, ecuaciones.	Proporcionalidad, Suma, Incógnita, variable, Ser cuadrado de	Cantidades, Suma, incógnita, ecuación, ser cuadrado de	Variable, Incógnita, ecuaciones, división, sustitución
Proposiciones	El discurso en algunos pasos es lógico, pero en su mayoría es descriptivo	No se evidencia el uso de proposiciones	Se utiliza los precios proporcionales a 8 y 5	No se evidencia el uso de proposiciones	No se evidencia el uso de proposiciones
Procedimientos	Procedimientos algebraicos y aritméticos	Se plantea variables que represente cada una de las cantidades y se escriben en una ecuación que representa una igualdad en términos del problema	Procedimientos algebraicos y aritméticos	Procedimientos algebraicos	Procedimientos algebraicos y aritméticos
Argumentos	No presenta en el texto ninguna argumentación, todo es tipo es descriptivo	No presenta en el texto ninguna argumentación, todo es tipo es descriptivo	El texto presenta argumentación a los diferentes pasos que uso para llegar a la respuesta	Como se tienen 2 ecuaciones con 3 incógnitas, el sistema involucra variables libres y por tanto infinitas soluciones.	No presenta en el texto ninguna argumentación, todo es tipo es descriptivo

Nota. Elaboración propia

La configuración epistémica realizada por el P1 evidencia en que no reconocer **los lenguajes**, pues no logra identificar los términos, expresiones o notaciones que intervienen en la solución del problema, del mismo modo sucede con los **procedimientos**: reconoce que son "procedimientos aritméticos" pero no menciona cuales intervienen en el desarrollo de la solución del problema. Además, no identifica **los argumentos** pues replica que la forma en que se presenta el desarrollo del problema es un texto descriptivo más no argumentativo.

El profesor 2 describe que **los lenguajes** son de tipo "verbal y simbólico" pero no logra identificarlos y nombrarlos. A diferencia del profesor 3 que describe 5 frases y además explica el por qué forman parte de los elementos lingüísticos.

El profesor 3 presenta una ***proposición*** la cual hace referencia a la descripción de la solución de la situación-problema, que viene siendo básicamente parte de los procedimientos.

El profesor 4 genera un ***argumento*** con relación a la cantidad de ecuaciones que presenta la solución que el utilizó, pero no conlleva a encontrar una solución al problema.

El profesor 5 no identifica ***los lenguajes***, ya que no reconoce los ***términos***, expresiones o notaciones que intervienen en la solución del problema, igualmente ocurre con los ***procedimientos*** ya que reconoce que son "procedimientos aritméticos y algebraicos" pero no menciona cuales intervienen en el desarrollo de la solución del problema y no argumenta ninguno de ellos.

La tabla 4-10 muestra la conclusión de la pregunta 1.a

Tabla 4-10. *Conclusión pregunta 1.a*

Pregunta 1.a De una posible solución. Puede consultar el texto citado							
Elementos Primarios							
Profesores	**Lenguajes**	**Nombre de la situación problema**	**Conceptos**	**Proposiciones**	**Procedimientos**	**Argumentos**	**Nombre del significado parcial**
P1	NO	SI	SI	NO	SI	NO	SI
P2	SI	NO	SI	NO	SI	SI	NO
P3	SI	NO	SI	SI	NO	SI	NO
P4	SI	SI	SI	NO	SI	SI	SI
P5	NO	NO	SI	NO	SI	NO	NO
Conclusión Se puede determinar que la mayoría de los profesores presentan un dominio adecuado en la identificación de conceptos en la solución del problema, pero la mayoría no concuerdan con el nombre acorde a la situación problema y por ende no logran asignar el significado parcial 1 de la situación problema. Más de la mitad de los profesores, logran identificar lo correspondiente a los procedimientos y los argumentos. Con relación a los lenguajes la mayoría logran reconocer los elementos lingüísticos de los cuales está dotado la solución de la situación problema. Por tanto, se puede establecer que los profesores logran reconstruir la configuración epistémica correspondiente a la situación problema 1 presentada, esto indica un buen nivel en el CEC respecto a la situación problema presentada.							

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori de la Configuración epistémica 1. Pregunta (P1.e)

Tabla 4-11. *CE1. Problema de los vinos*

CE1. Problema de los vinos Pregunta 1.e ¿El lenguaje natural utilizado es claro para el estudiante? Justifique				
Profesor 1 (P1) SI/No Justificación Conclusión:	Profesor 2 (P2) Si / No Justificación	Profesor 3 (P3) Si / No Justificación	Profesor 4 (P4) Si / No Justificación	Profesor 5 (P5) Si / No Justificación

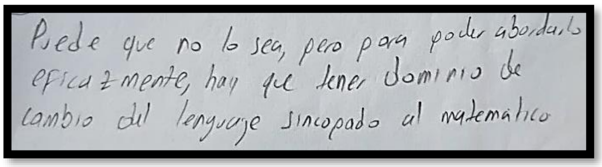
Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Configuración epistémica 1. Pregunta (P1.e)

Tabla 4-12. *Respuesta dadas por los docentes a la Pregunta 1.e)*

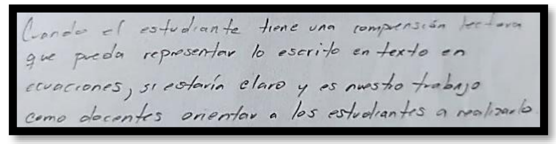
C.E.1: Problemas de los vinos **Situación-Problema 1: Periodo Grecorromano (Diofanto)** **Pregunta 1.e** ¿El lenguaje natural utilizado es claro para el estudiante? Justifique. **Significado Parcial 1: Inecuaciones con problemas de proporcionalidad**

P1


Puede que no lo sea, pero para poder abordarlo eficazmente, hay que tener dominio de cambio del lenguaje sincopado al matemático

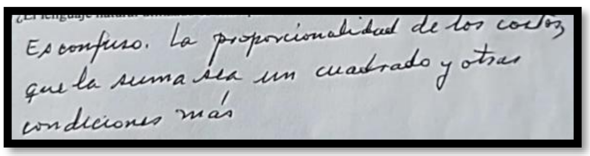
Valoración: No

P2


Cuando el estudiante tiene una comprensión lectora que pueda representar lo escrito en texto en ecuaciones, si estaría claro y es nuestro trabajo como docentes orientar a los estudiantes a realizarlo

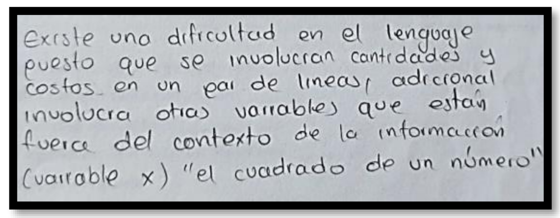
Valoración: Si

P3


Es confuso. La proporcionalidad de los costos que la suma sea un cuadrado y otras condiciones más

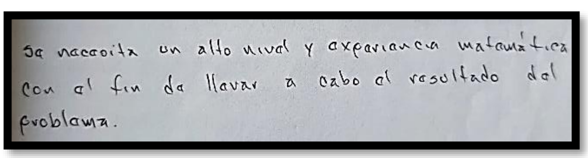
Valoración: No

P4


Existe una dificultad en el lenguaje puesto que se involucran cantidades y costos en un par de lineas, adicional involucra otras variables que están fuera del contexto de la información (variable x) "el cuadrado de un número"

Valoración: No

P5


Se necesita un alto nivel y experiencia matemática con el fin de llevar a cabo el resultado del problema.

Valoración: Si

Conclusión

La mayoría de expresan que el lenguaje no es claro para el estudiante ya que se requiere de un conocimiento un poco avanzado en matemáticas para plantear las inecuaciones y lo cual estudiante requiere de una comprensión del problema y puede incurrir en errores al momento de dar una solución al problema, además los profesores 2 y 5 mencionan que se puede utilizar el lenguaje pero con la salvedad de que el estudiante tenga un manejo adecuado de las desigualdades y asociarlo al concepto de proporcionalidad.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori de la Configuración epistémica 1. Pregunta (P1.f)

Tabla 4-13. *CE1. Problema de los vinos*

CE1. Problema de los vinos
Pregunta 1.f
¿En la solución planteada por usted el lenguaje algebraico sería adecuado para el estudiante? Justifique

Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
SI/No	Si / No	Si / No	Si / No	Si / No
Justificación Conclusión:	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación

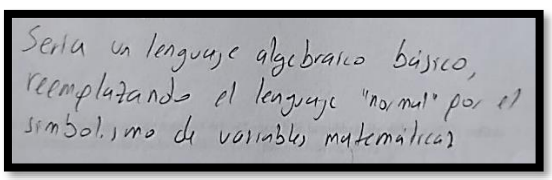
Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Configuración epistémica 1. Pregunta (P1.f)

Tabla 4-14. *Respuesta dadas por los docentes a la Pregunta 1.f)*

C.E.1: Problemas de los vinos
Situación-Problema 1: Periodo Grecorromano (Diofanto)
Pregunta 1.f
¿En la solución planteada por usted el lenguaje algebraico sería adecuado para el estudiante? Justifique.
Significado Parcial 1: Inecuaciones con problemas de proporcionalidad

P1


Sería un lenguaje algebraico básico, reemplazando el lenguaje "normal" por el simbolismo de variables matemáticas

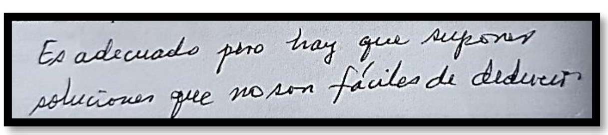
Valoración: Si

P2


Sería adecuado ya que se utiliza un lenguaje básico y de fácil comprensión al estudiante.

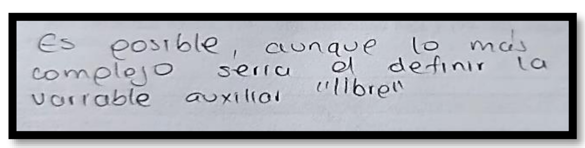
Valoración: Si

P3


Es adecuado pero hay que suponer soluciones que no son fáciles de deducir

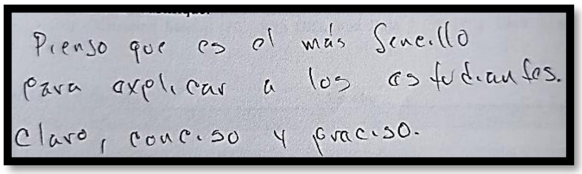
Valoración: Si

P4


Es posible, aunque lo más complejo sería el definir la variable auxiliar "libre"

Valoración: No

P5


Pienso que es el más sencillo para explicar a los estudiantes. claro, conciso y preciso.

Valoración: Si

Conclusión La mayoría de expresan que el lenguaje utilizado es claro para el estudiante ya que trataron de expresar la solución al problema de tal forma que el estudiante logre entender el procedimiento, conceptos y técnicas utilizadas en esta con el fin de que logre comprender y entender el problema y así tenga un manejo adecuado de las desigualdades y asociarlo al concepto de proporcionalidad.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori de la Configuración epistémica 2. Pregunta (P2.c)

Tabla 4-15. *CE2. Problema de los lados de un polígono*

Situación-Problema 2: Problema del polígono *Dos polígonos tienen en total 100 lados, si tomamos de ocho en ocho los lados de un polígono, sobran 7, y el mismo excedente de 7 se muestra cuando tomamos los lados del otro polígono de diez en diez. ¿Cuántos lados hay en cada uno de los polígonos?* **Pregunta 2.c** Plantee una solución al problema. Puede consultar el texto citado	
Dimensión Epistémica	Objetos Primarios
Conocimiento Especializado	**Elementos Lingüísticos** **EL.1** Identifica los términos como: suma, resta, producto, división, factor, incógnita, desigualdad, polígono. **EL.2** Despeje de ecuaciones, sustitución de variables. **Conceptos** **C.1** Suma, resta, multiplicación, división, desigualdades, expresiones algebraicas. **Proposiciones** Prop.1 No se evidencia el uso de proposiciones. **Procedimientos** **Proc.1** Determinar una expresión que se obtiene al identificar la cantidad de veces que ingresa un número en la suma de los lados de un polígono. **Proc.2** Elementos Lingüísticos que identifican los procedimientos. **Proc.2** Soluciones de desigualdades lineales. **Argumentos** **Arg.1** Se define una variable por ejemplo x que represente el número de veces que ingresa 8 en la suma de los lados de un polígono, mientras que se define con otra letra por ejemplo y el número de veces que entra 10 en la suma de los lados del otro polígono. Así $8x + 7y = 10$

Arg.2 De la ecuación anterior se realiza despeje la variable y para obtener una ecuación de la forma

$$y = \frac{43 - 4x}{5} = 8 + \frac{3 - 4x}{5}$$

Arg3 Luego se utiliza otra letra auxiliar para determinar la cantidad de la parte derecha de la igualdad anterior y se realiza sustitución para llegar a la siguiente expresión

$$y = \frac{43 - 4x}{5} = \frac{43 - 4(5n - 3)}{5} = 11 - 4n$$

Arg4 Con lo anterior se concluye que como x e y son enteros positivos, se establecen las condiciones de desigualdad mediante las inecuaciones

$$5n - 3 > 0$$
$$11 - 4n > 0$$

Arg5 Con lo que se llega a la conclusión de que si el valor de x es 2 y el valor de y es 7 cuando $n = 1$ y si $n = 2$ el valor de x es 7 y el valor de y es 3, de ese modo determinamos la cantidad de lados de los polígonos.

Nota. Elaboración Propia

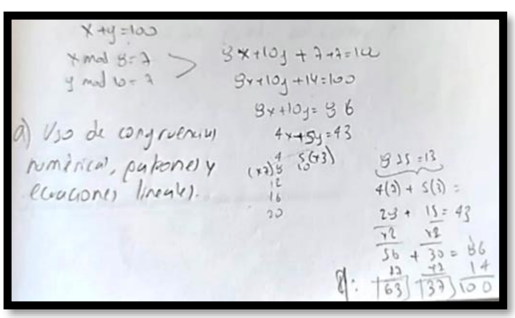
Análisis A Posteriori de la Configuración epistémica 2. Pregunta (P2.c)

Situación-Problema 2: Problema del polígono

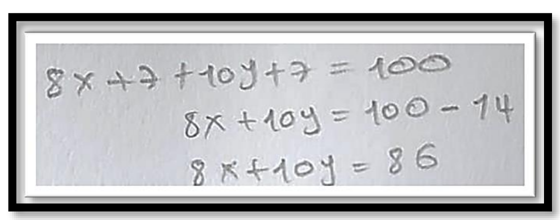
Pregunta 2.c. Plantee una solución al problema. Puede consultar el texto citado.

Tabla 4-16. *Respuesta dada por los docentes a la pregunta 2c*

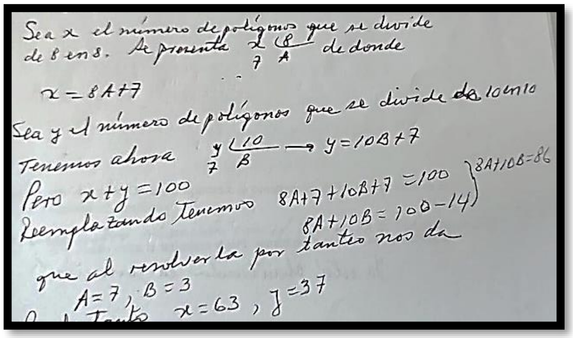
P1



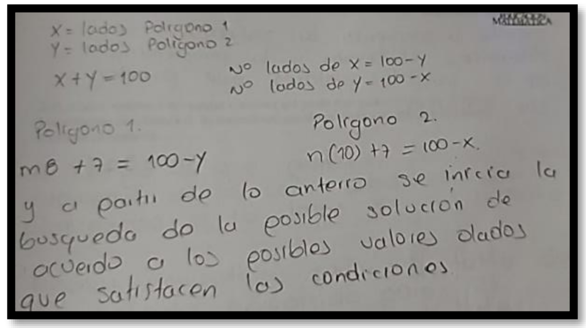
P2



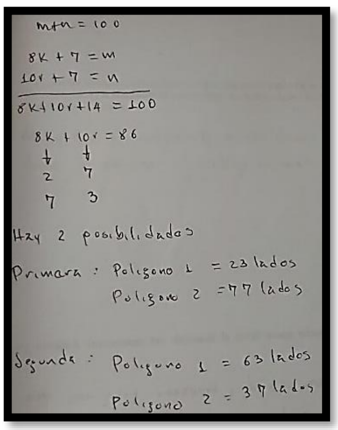
P3



P4



P5



Nota. Elaboración Propia

Tabla 4-17. *Análisis de las respuestas dadas por los Docentes a la pregunta 2.c*

Elementos	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
Lenguajes	Descriptivo utilizando ecuaciones y operaciones entre sus elementos	Simbólico, Algebraico	Verbal, simbólico y Algebraico	Verbal, simbólico, Algebraico y descriptivo	Simbólico, Algebraico
Conceptos	Suma, incógnita, equivalencias	Variable, incógnita, ecuaciones.	Suma, división Incógnita, variable, Cantidades tomadas de una en otra	Cantidades, Suma, resta, incógnita, ecuación,	Variable, Incógnita, Suma, ecuaciones, sustitución
Proposiciones	No se evidencia el uso de proposiciones	No se evidencia el uso de proposiciones	Para determinar el número de lados del polígono se divide 10 en 10	Se inicia la búsqueda de la posible solución utilizando valores dada las condiciones mencionadas	No se evidencia el uso de proposiciones
Procedimientos	Procedimientos algebraicos y aritméticos	Se plantea variables que represente cada	Procedimientos algebraicos y aritméticos	Procedimientos algebraicos	Procedimientos

		una de las cantidades y se escriben en una ecuación que representa una igualdad en términos del problema			algebraicos y aritméticos
Argumentos	Uso de congruencias numéricas, patrones y ecuaciones lineales	No presenta en el texto ninguna argumentación, todo es tipo es descriptivo	Se presenta una igualdad que relaciona los datos del problema y a partir de esta se relacionan operaciones aritméticas argumentando los diferentes pasos para llegar a la respuesta	No se presenta ningún tipo de argumentación	No presenta en el texto ninguna argumentación, todo es tipo descriptivo

Nota. Elaboración propia

La configuración epistémica realizada por el P1 evidencia dificultad en reconocer los términos, expresiones o notaciones que intervienen en la solución del problema, al igual que los procedimientos: reconoce que son "procedimientos aritméticos" pero no menciona cuales intervienen en el desarrollo de la solución del problema. Además, presenta dificultad en generar los argumentos correspondientes en la solución del problema, lo cual presenta un texto descriptivo.

El profesor 2 menciona que los lenguajes son de tipo "verbal y simbólico" pero no logra identificarlos y nombrarlo; no relaciona conceptos y se le dificulta identificar notaciones y expresiones para la solución del problema, además no presenta ningún tipo de argumentación en la solución planteada.

El profesor 3 presenta una *proposición* la cual hace referencia a la descripción de la solución de la situación-problema, que viene siendo básicamente parte de los procedimientos, para su solución presenta argumentos que conllevan a la solución problema, utiliza un lenguaje verbal y lo identifica en el problema.

El profesor 4 genera un argumento con relación a la búsqueda de valores que puedan cumplir con las condiciones del problema, pero no conlleva a encontrar una solución al problema.

El profesor 5 no identificar los lenguajes, pero utiliza diferentes tipos de representación con relación a términos, expresiones o notaciones que intervienen en la solución del problema, no presenta ninguna proposición ni argumentos que contrasten la solución al problema.

La siguiente tabla muestra la conclusión de la pregunta 2.c

Tabla 4-18. *Conclusión pregunta 2.c*

Pregunta 2.c **De una posible solución. Puede consultar el texto citado**							
Elementos Primarios							
Profesores	**Lenguajes**	**Nombre de la situación problema**	**Conceptos**	**Proposiciones**	**Procedimientos**	**Argumentos**	**Nombre del significado parcial**
P1	SI	SI	SI	SI	SI	NO	SI
P2	NO	NO	NO	NO	SI	NO	NO
P3	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
P4	NO	SI	SI	NO	SI	NO	NO
P5	NO	SI	NO	NO	SI	NO	SI
Conclusión La mayoría de docentes logran dar un nombre adecuado a la situación-problema, además identifican los *conceptos* involucrados en la solución, lo cual permite conocer los procedimientos que llevan a la solución del problema. Por lo tanto, la mayoría de ellos logra identificar el significado emergente de la práctica matemática con relación a la solución del problema. La mayoría de los profesores tuvieron dificultad al momento de generar argumentos por lo que se les dificulta reconocer los términos y notaciones que corresponde a los elementos lingüísticos.							

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori de la Configuración epistémica 3. Pregunta (P3.e)

Tabla 4-19. *CE3. Problema de Bombelli*

Situación-Problema 3: Problema de Bombelli *Obtener la raíz cúbica de* $52 + 47i$ **Pregunta 3.e** **De acuerdo con la solución dada por Bombelli, complete la siguiente tabla.**	
Dimensión Epistémica	Objetos Primarios
Conocimiento Especializado	**Elementos Lingüísticos** **EL.1** Identifica los términos y expresiones como: suma, resta, raíz, variable, número complejo, producto, suma de cuadrado, cubo de un número, desigualdad. **EL.2** Identifica y reconoce el enunciado del problema matemático **Conceptos** **C.1** Suma, resta, número complejo, desigualdades, expresiones algebraicas. **Proposiciones** Prop.1 No se evidencia el uso de proposiciones. **Procedimientos** **Proc.1** Plantear una igualdad que relacione la forma de un número complejo. **Proc.2** Identificar los cuadrados de los números e igualarlos a una expresión que determinar de otros números elevados al cubo. **Proc.3** Realizar la solución a una desigualdad para encontrar los valores. **Argumentos** **Arg.1** Se basan en los procedimientos

Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Situación-Problema 3: Problema de Bombelli

Pregunta 3.e. De acuerdo con la solución dada por bombelli, complete la siguiente tabla.

Tabla 4-20. *Análisis de las respuestas dadas por los Docentes a la pregunta 3.e*

Elementos	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
Lenguajes	Matemático, algebraico y simbólico	Algebraico, con varias sustituciones para llegar a una solución	Verbal, simbólico y Algebraico	Algebraico	Simbólico, Algebraico
Conceptos	Inecuaciones, estimaciones, ampliación al campo complejo	Sustitución de variables, propiedades de potenciación y	Suma, Incógnita, número complejo	Cantidades, números complejos y operaciones entre ellos, radicación	Variable, Incógnita, número complejo, ecuaciones

		radicación e inecuaciones		y ecuaciones y sistema de ecuaciones	
Proposiciones	No se evidencia el uso de proposiciones	Al determinar el valor de una inecuación cuya cantidad sea menor que otra	No se evidencia el uso de proposiciones	No se evidencia el uso de proposiciones	Se utiliza la noción de inecuación para determinar el valor de un número cuyo cuadrado sea menor que un número y cuyo cubo sea mayor que otro
Procedimientos	Procedimientos algebraicos, aritméticos, operaciones en reales y complejos, estimaciones por medio de inecuaciones	Se representa algebraicamente las cantidades y luego se reescriben los términos para plantear una igualdad. Luego elevar al cubo la igualdad para cancelar la raíz.	Algebraicos que usan teoría de variable compleja	Operaciones entre complejos, solución de ecuaciones	Procedimientos algebraicos y aritméticos
Argumentos	Acotación de una raíz entre una cúbica y una cuadrada	No presenta en el texto ninguna argumentación, todo es tipo es descriptivo	Se presenta una desigualdad que relaciona una variable real y compleja, además de las operaciones para llegar a la respuesta.	No se presenta ningún tipo de argumentación	No presenta en el texto ninguna argumentación.

Nota. Elaboración propia

La configuración epistémica realizada por el P1 identifica el lenguaje utilizado en la solución del problema lo cual lo conlleva a identificar los términos, expresiones o notaciones que intervienen en la solución del problema, al igual que los procedimientos: reconoce que son "procedimientos aritméticos" pero identifica los que intervienen en la solución del problema. Además, genera un argumento acorde con la solución del problema.

El profesor 2 menciona que los lenguajes son de tipo "algebraico" pero no los identifica y por ende no los nombra; relaciona conceptos que le permiten dar respuesta al problema, además no presenta ningún tipo de argumentación en la solución planteada.

El profesor 3 no presenta ninguna proposición al problema, menciona que el lenguaje es "verbal, simbólico y algebraico" y los relaciona con los conceptos presentes en el problema, además los procedimientos que se utilizan se relacionan con teoría de variable compleja lo que ocasiona identificar un argumento para la solución del problema

El profesor 4 no genera ningún argumento relacionado con el problema al igual que ninguna proposición que lo conlleve a encontrar una solución al problema.

El profesor 5 identifica los lenguajes y utiliza diferentes tipos de representación con relación a términos, expresiones o notaciones que intervienen en la solución del problema, presenta una proposición con relación a utilizar inecuaciones para determinar un valor con relación a ciertas condiciones, pero no presenta argumentos que conlleven a la solución del problema.

La siguiente tabla muestra la conclusión de la pregunta 3.e

Tabla 4-21. *Conclusión pregunta 3.e*

Pregunta 3.e
De acuerdo a la solución planteada por Bombelli, complete la siguiente tabla

Elementos Primarios

Profesores	**Lenguajes**	**Nombre de la situación problema**	**Conceptos**	**Proposiciones**	**Procedimientos**	**Argumentos**	**Nombre del significado parcial**
P1	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI
P2	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI
P3	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
P4	NO	SI	SI	NO	NO	SI	NO
P5	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO

Conclusión
La mayoría de docentes logran dar un nombre adecuado a la situación-problema, además identifican los *conceptos* involucrados en la solución, por lo tanto, identifica los procedimientos involucrados en el problema. Además, la mayoría de ellos logra identificar el significado emergente de la práctica matemática con relación a la solución del problema. Algunos profesores generaron argumentos que los conllevaron a determinar los elementos lingüísticos asociados al problema.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori de la Configuración epistémica 4. Pregunta (P4.f)

Tabla 4-22. *CE4. El método de Exhausción*

Situación-Problema 4: El método de Exhausción

Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este proceso de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.

Pregunta 4.f
De acuerdo a la solución dada por Gregoire, complete la siguiente tabla.

Dimensión Epistémica	Objetos Primarios
Conocimiento Especializado	**Elementos Lingüísticos** **EL.1** Identifica los términos y expresiones como: suma, resta, raíz, variable, magnitudes, desigualdades. **EL.2** Identifica y reconoce el enunciado del problema matemático **Conceptos** **C.1** Suma, resta, magnitudes, desigualdades, expresiones algebraicas. **Proposiciones** Prop.1 No se evidencia el uso de proposiciones. **Procedimientos** **Proc.1** Reemplazar los valores de diferentes variables en una expresión. **Proc.2** Resolver desigualdades. **Proc.3** Realizar operaciones elementales (suma, resta, multiplicación y división de números reales). **Argumentos** **Arg.1** Se basan en los procedimientos

Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Configuración epistémica 4. Pregunta (P4.f)

Situación-Problema 4: El método de Exhausción

Pregunta 4.f. De acuerdo con la solución dada por Gregoire, complete la siguiente tabla.

Tabla 4-23. *Análisis de las respuestas dadas por los Docentes a la pregunta 4.f*

Elementos	**P1**	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
Lenguajes	Simbólico	Algebraico, numérico	Verbal, simbólico y Algebraico	Lenguaje abstracto y algebraico	Simbólico, Algebraico
Conceptos	Inecuaciones, estimaciones, potenciación	Sustracción de racionales, potenciación, producto e inecuaciones	Suma, Incógnita, desigualdades	Potencias, inecuaciones y sucesiones	Variable, Incógnita, desigualdades
Proposiciones	No se evidencia el uso de proposiciones	No se evidencia el uso de proposiciones	Estimación de valores bajo condiciones dadas	Asignación de valores dado una desigualdad	No se utilizan proposiciones
Procedimientos	Procedimientos algebraicos, aritméticos, operaciones en reales por medio de inecuaciones	Planteamiento de la inecuación, se reemplazan las variables por los valores propuestos y se da solución	Algebraicos que valores con ciertas condiciones	Algebraicos con asignación de valores	Procedimientos algebraicos y aritméticos
Argumentos	No se presenta argumentaciones	No se presentan argumentos	Se presenta una desigualdad que relaciona dos valores con una potencia que cumpla una condición	Se entregan algunos hechos conocidos y se dan valores particulares sobre los cuales se da un desarrollo.	No presenta en el texto ninguna argumentación.

Nota: Elaboración propia

La configuración epistémica realizada por el P1 identifica un solo tipo de lenguaje utilizado, pero no logra identificar los demás lenguajes implícitos, lo cual dificulta identificar términos, expresiones o notaciones que intervienen en la solución del problema, con relación a los procedimientos se identifican “procedimientos aritméticos y operaciones entre reales” pero no presenta ningún argumento relacionado con el problema.

El profesor 2 menciona que los lenguajes son de tipo “algebraico” pero no los identifica y por ende no los nombra; relaciona conceptos que le permiten dar respuesta al problema, además no presenta ningún tipo de proposiciones ni argumentos relacionados con el problema.

El profesor 3 presenta una proposición al problema, relacionada con la estimación de valores con ciertas condiciones, el lenguaje es “verbal, simbólico y algebraico” y los relaciona con los conceptos presentes en el problema, además los procedimientos que se utilizan se relacionan con aproximaciones lo que ocasiona identificar un argumento para la solución del problema.

El profesor 4 genera un argumento relacionado con el problema al igual que una proposición que lo conlleve a encontrar una solución al problema.

El profesor 5 identifica los lenguajes y utiliza diferentes tipos de representación con relación a términos, expresiones o notaciones que intervienen en la solución del problema, no presenta proposiciones ni argumentos con relación a utilizar inecuaciones para determinar un valor con relación a ciertas condiciones, lo cual lleva a presentar dificultades al momento de dar solución al problema.

La siguiente tabla muestra la conclusión de la pregunta 4.g

Tabla 4-24. *Conclusión pregunta 4.g*

Pregunta 4.e De acuerdo a la solución planteada en el problema, complete la siguiente tabla							
Elementos Primarios							
Profesores	**Lenguajes**	**Nombre de la situación problema**	**Conceptos**	**Proposiciones**	**Procedimientos**	**Argumentos**	**Nombre del significado parcial**
P1	NO	NO	NO	SI	SI	NO	NO
P2	SI	SI	SI	NO	SI	NO	SI
P3	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI
P4	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI
P5	SI	NO	SI	NO	SI	NO	NO
Conclusión Algunos docentes no logran dar un nombre adecuado a la situación-problema, pero identifican los *conceptos* involucrados en la solución, por lo tanto, relacionan los procedimientos alusivos al problema. Además, la mayoría de ellos logra identificar el significado emergente de la práctica matemática con relación a la solución del problema. Algunos profesores generaron argumentos que los conllevaron a determinar los elementos lingüísticos asociados al problema.							

Fuente: (Elaboración Propia)

4.4.3 Dimensión epistémica – Parte II: Análisis de los significados de Referencia de los textos de enseñanza

Para el análisis de los significados de referencia según los textos de enseñanza, se crean 3 tablas, en donde se consigna lo que el profesor encuestado considera pertinente respecto al significado de referencia dado (concepciones y creencias del objeto Inecuaciones). Este análisis se realiza a las preguntas (P1d, P3.f, P3.g, P4.c, P4.h).

Análisis a Priori Pregunta (P1d)

Tabla 4-25. *Situación-Problema 1: Problema de los vinos*

CE1. Problema de los vinos Pregunta 1d ¿Cree que el problema se encuentra o puede estar en los textos de matemáticas de Grado Once? Justifique				
Profesor 1 (P1) SI/No Justificación Conclusión:	Profesor 2 (P2) Si / No Justificación	Profesor 3 (P3) Si / No Justificación	Profesor 4 (P4) Si / No Justificación	Profesor 5 (P5) Si / No Justificación

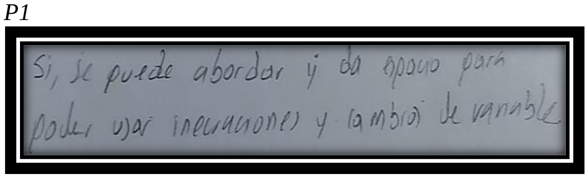
Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 1.d

Tabla 4-26. *Respuesta pregunta 1.d*

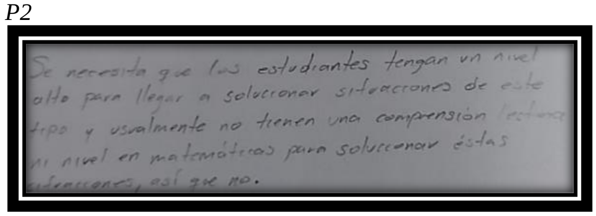
C.E.1: Problemas de los vinos
Situación-Problema 1: Periodo Grecorromano (Diofanto)
Pregunta 1.d
¿Cree usted que el problema se encuentra o puede estar en los textos de matemáticas de Grado Once? Justifique.
Significado Parcial 1: Inecuaciones con problemas de proporcionalidad

P1


Si, se puede abordar y da apoyo para poder usar inecuaciones y cambio de variable

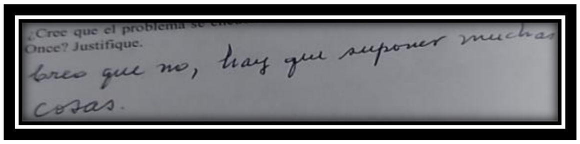
Valoración: Si

P2


Se necesita que los estudiantes tengan un nivel alto para llegar a solucionar situaciones de este tipo y usualmente no tienen una comprensión lectora ni nivel en matemáticas para solucionar éstas situaciones, así que no.

Valoración: No

P3

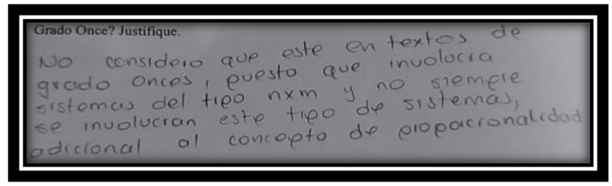


¿Cree que el problema se en... Once? Justifique.

Creo que no, hay que suponer muchas cosas.

Valoración: No

P4

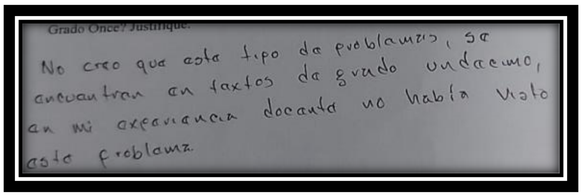


Grado Once? Justifique.

No considero que este en textos de grado onces, puesto que involucra sistemas del tipo nxm y no siempre se involucran este tipo de sistemas, adicional al concepto de propocionalidad

Valoración: No

P5



Grado Once? Justifique.

No creo que este tipo de problemas, se encuentran en textos de grado undecimo, en mi experiencia docente no había visto este problema

Valoración: No

Conclusión

La mayoría de expresan que en los libros de texto no se presentan este tipo de problemas debido a la comprensión que se requiere para su solución, además el método para solucionarlo no es acorde al nivel en que se encuentran los estudiantes de grado once, además los profesores 2 y 4 mencionan que involucran sistemas adicionales al concepto de proporcionalidad

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P3.f)

Tabla 4-27. *Situación-Problema 3: Ejemplo numérico de Bombelli*

CE3. Ejemplo numérico de Bombelli Pregunta 3.f Se pueden utilizar intervalos de prueba para poder encontrar la solución del problema anterior. Justifique su respuesta				
Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
SI/No Justificación	Si / No Justificación	Si / No Justificación	Si / No Justificación	Si / No Justificación
Conclusión:				

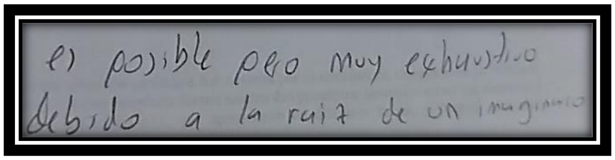
Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 3.f

Tabla 4-28. *Respuesta pregunta 3.f*

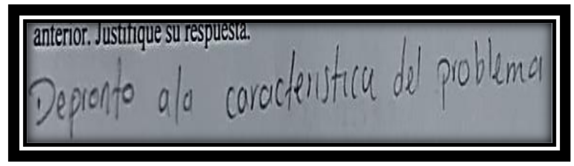
C.E.3: Problema de Bombelli
Situación-Problema 3: Problema de la raíz
Pregunta 3.f
Se puede utilizar intervalos de prueba para poder encontrar la solución del problema anterior/ Justifique su respuesta
Significado Parcial 3: Método de aproximación de la raíz cúbica

P1



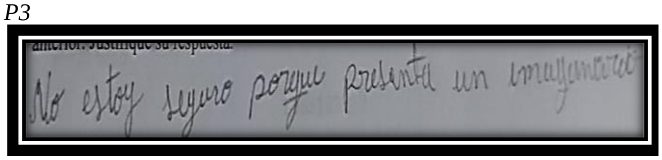
Valoración: Si

P2



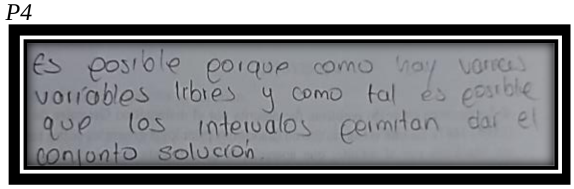
Valoración: Si

P3



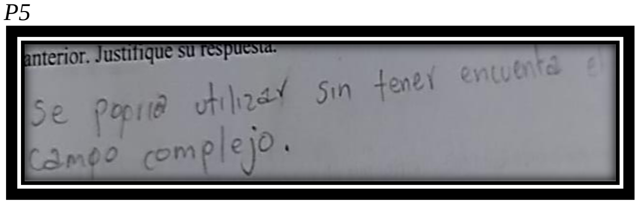
Valoración: No

P4



Valoración: Si

P5



Valoración: Si

Conclusión

La mayoría de expresan que el problema se puede resolver usando intervalos de prueba, pero sería muy dispendioso y complicado el proceso lo que afectaría el proceso de aprendizaje, además los profesores 3 y 5 mencionan que sería más sencillo resolverlo por este método sin tener en cuenta el número imaginario.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P3.g)

Tabla 4-29. *Situación-Problema 3: Ejemplo numérico de Bombelli*

CE3. Ejemplo numérico de Bombelli
Pregunta 3.g
¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique su respuesta

Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
SI/No	Si / No	Si / No	Si / No	Si / No
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

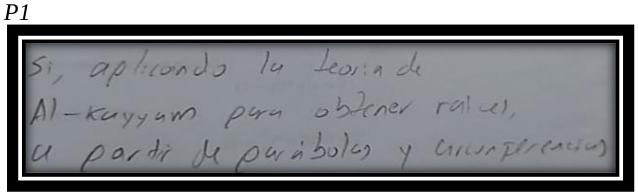
Análisis A Posteriori de la Pregunta 3.g

Tabla 4-30. *Pregunta 3.g*

C.E.3: Problema de Bombelli
Situación-Problema 3: Problema de la raíz

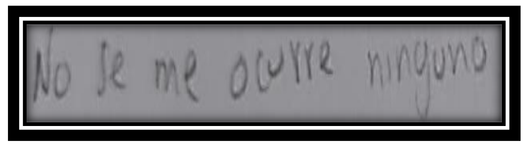
Pregunta 3.g
¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique su respuesta
Significado Parcial 3: Método de aproximación de la raíz cúbica

P1



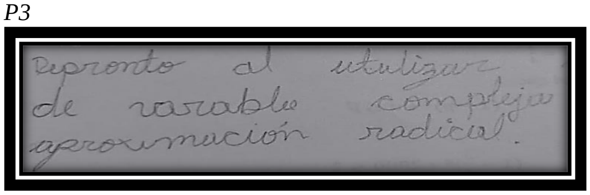
Valoración: Si

P2



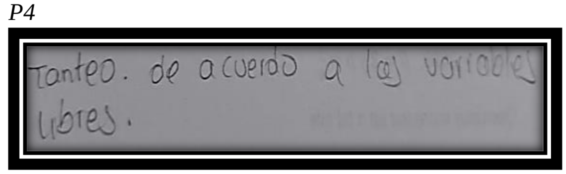
Valoración: No

P3



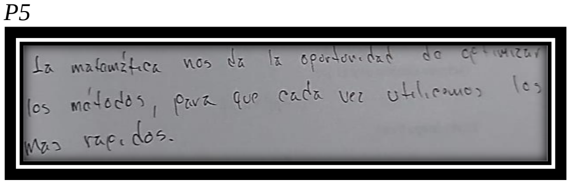
Valoración: Si

P4



Valoración: Si

P5



Valoración: Si

Conclusión
La mayoría de los docentes mencionan que, si se puede usar otro método para resolver el problema, pero estos métodos son complejos para el novel educativo en el que se encuentran los estudiantes si se llega el momento para explicarlo.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P4.c)

Tabla 4-31. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción*

CE3. El Método de Exhausción
Pregunta 4.c
¿Puede plantear otro problema(s) siguiendo los planteamientos dados en el problema? ¿Cómo cuáles? Justifique

Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
SI/No	Si / No	Si / No	Si / No	Si / No
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 4.c

Tabla 4-32. *Pregunta 4.c*

C.E.4: Problema de las Figuras Curvilíneas
Situación-Problema 4: Los números y sus relaciones en el infinito
Pregunta 4.c
¿Puede plantear otro problema(s) siguiendo los planteamientos dados en el problema? ¿Cómo cuáles? Justifique
Significado Parcial 4: Método de Exhausción

P1

Calcular δ y ε para alguna serie o límite determinado.

Valoración: Si

P2

Calcular cantidades de una proporción de un criterio dado.

Valoración: Si

P3

Calcular una variable utilizando una aproximación por medio de una serie.

Valoración: Si

P4

Se podrían plantear algunas situaciones donde se consideren créditos y abonos al capital, indicando la fracción o pagos en cada cuota

Valoración: Si

P5

problema? ¿Como cuales?

En problemas de aproximación enteros.

Valoración: Si

Conclusión
Se puede inferior que todos los docentes plantearon diferentes problemas desde varias perspectivas que se enfocan principalmente en el uso de las inecuaciones y tienen relación con algún tema matemático.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P4.h)

Tabla 4-33. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción*

CE3. El Método de Exhausción
Pregunta 4.h
¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique su respuesta

Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
SI/No	Si / No	Si / No	Si / No	Si / No
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

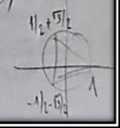
Análisis A Posteriori de la Pregunta 4.h

Tabla 4-34. *Pregunta 4.h*

C.E.4: Problema de las Figuras Curvilíneas
Situación-Problema 4: Los números y sus relaciones en el infinito
Pregunta 4.h
¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique su respuesta
Significado Parcial 4: Método de Exhausción

P1

Circunferencia unitaria, pero el proceso es análogo



Valoración: Si

P2

Por medio de estimaciones para valores entre los reales.

Valoración: Si

P3

Utilizando sucesiones geométricas

Valoración: Si

P4

Imagino que sí

Valoración: Si

P5

No se me ocurre niguno

Valoración: No

Conclusión
Se puede inferior que con respecto a la configuración epistémica de la situación-problema 4 los algunos docentes proponen diferentes métodos de solución que son un poco complejos a la hora de abordarlos, pero ofrecen un abanico de posibilidades a la hora de abordar un problema matemático.

Nota. Elaboración Propia

4.4.4 Dimensión epistémica – CDM – Parte II: Implicaciones en la enseñanza

Para analizar las implicaciones en la enseñanza, respecto a los significados (globales) del objeto matemático, se establecen tablas 15 para las preguntas (P1.b, P1.d, P1.g P2.a, P2.d, P2.e, P2.f, P3.b, P3.c, P3.f, P3.g, P4.b, P4.c, P4.d, P4.g).

Análisis a Priori Pregunta (P1.b)

Tabla 4-35. *Situación-Problema 1: Problema de los vinos (P1.b) análisis a priori*

CE1. Problema de los vinos Pregunta 1b El problema se puede considerar como:				
Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
CCC	CCC	CCC	CCC	CCC
CAC	CAC	CAC	CAC	CAC
CEC	CEC	CEC	CEC	CEC
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta (P1.b)

Tabla 4-36. *Situación-Problema 1: Problema de los vinos (P1.b) análisis a posteriori*

CE1. Problema de los vinos
Pregunta 1b
El problema se puede considerar como:
Significado Parcial 4: Método de Exhausción

P1

Se requiere el conocimiento específico de las ecuaciones diofánticas y de las sustituciones de variables, así como tener en cuenta el uso o no de enteros, racionales o inclusive irracionales para la solución del problema

Valoración: CAC

P2

Correspondería al Conocimiento común del Profesor y en este caso no tendría respuesta.

Valoración: CAC

P3

En cuanto al planteamiento de las ecuaciones fue sencillo, pero al solucionar, lleva algo más del conocimiento común del docente.

Valoración: CCC

P4

Justifique su respuesta.
El problema involucra conceptos básicos del planteamiento de ecuaciones y paso del lenguaje habitual al lenguaje matemático, involucra la solución de sistemas de ecuaciones y por tanto un docente del área debe tener la habilidad para resolverlo

Valoración: CCC

P5

El estudiante debe manejar correctamente la interpretación matemática. manejar el cuadrado de la suma de dos cantidades, Racionalizar y sustitución de valores numéricos. Aunque muchos de los problemas de Diofanto no tiene solución.

Valoración: CEC

Conclusión La mayoría de docentes mencionan que el problema se puede considerar como un CEC ya que al solucionar el problema se requiere de ecuaciones, desigualdades y sustituciones que se relacionan con diferentes campos del conocimiento y estos tienen estrecha relación con la enseñanza, además el docente P2 menciona que se relaciona más con CCC debido a la complejidad del problema.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P1.d)

Tabla 4-37. *Situación-Problema 1: Problema de los vinos (P1.d) análisis a priori*

CE1. Problema de los vinos Pregunta 1d ¿Cree que el problema se encuentra o puede estar en los textos de matemáticas de Grado Once? Justifique				
Profesor 1 (P1) SI/No	Profesor 2 (P2) Si / No	Profesor 3 (P3) Si / No	Profesor 4 (P4) Si / No	Profesor 5 (P5) Si / No
Justificación Conclusión:	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación

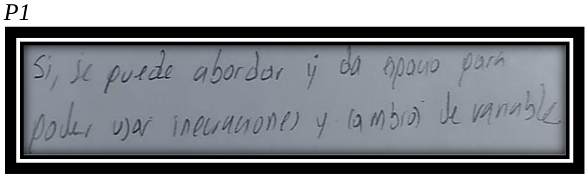
Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 1.d

Tabla 4-38. *Respuesta pregunta 1.d, análisis a posteriori*

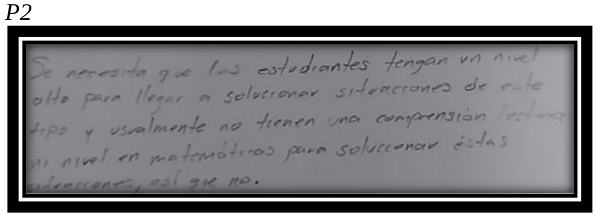
C.E.1: Problemas de los vinos
Situación-Problema 1: Periodo Grecorromano (Diofanto)
Pregunta 1.d
¿Cree usted que el problema se encuentra o puede estar en los textos de matemáticas de Grado Once? Justifique.
Significado Parcial 1: Inecuaciones con problemas de proporcionalidad

P1


Si, se puede abordar y da apoyo para poder usar inecuaciones y cambio de variable

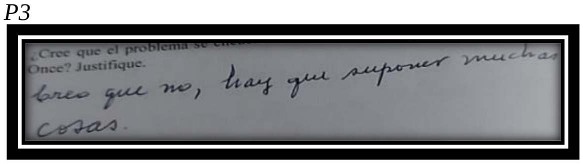
Valoración: Si

P2


Se necesita que los estudiantes tengan un nivel alto para llegar a solucionar situaciones de este tipo y usualmente no tienen una comprensión lectora ni nivel en matemáticas para solucionar éstas situaciones, así que no.

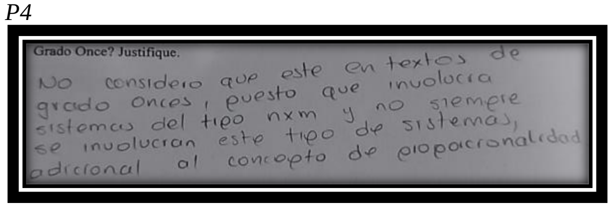
Valoración: No

P3


Cree que el problema se encu...
Once? Justifique.
Creo que no, hay que suponer muchas cosas.

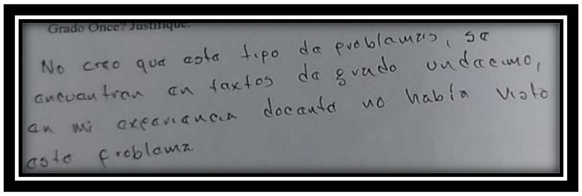
Valoración: No

P4


Grado Once? Justifique.
No considero que este en textos de grado onces, puesto que involucra sistemas del tipo nxm y no siempre se involucran este tipo de sistemas, adicional al concepto de proporcionalidad

Valoración: No

P5



Valoración: No

Conclusión

La mayoría de expresan que en los libros de texto no se presentan este tipo de problemas debido a la comprensión que se requiere para su solución, además el método para solucionarlo no es acorde al nivel en que se encuentran los estudiantes de grado once, además los profesores 2 y 4 mencionan que involucran sistemas adicionales al concepto de proporcionalidad

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P1.g)

Tabla 4-39. *Situación-Problema 1: Problema de los vinos (P1.g) análisis a priori*

CE1. Problema de los vinos Pregunta 1g ¿La situación problema es adecuada y motiva la comprensión del objeto inecuaciones? Justifique				
Profesor 1 (P1) SI/No Justificación	Profesor 2 (P2) Si / No Justificación	Profesor 3 (P3) Si / No Justificación	Profesor 4 (P4) Si / No Justificación	Profesor 5 (P5) Si / No Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

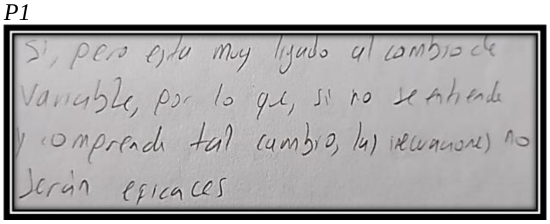
Análisis A Posteriori de la Pregunta 1.g

Tabla 4-40. *Pregunta 1.g, análisis a posteriori*

Significado Parcial 1: Inecuaciones con problemas de proporcionalidad

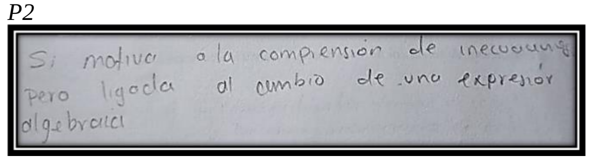
¿La situación problema es adecuada y motiva la comprensión del objeto Inecuaciones? Justifique

P1



Valoración: Si

P2

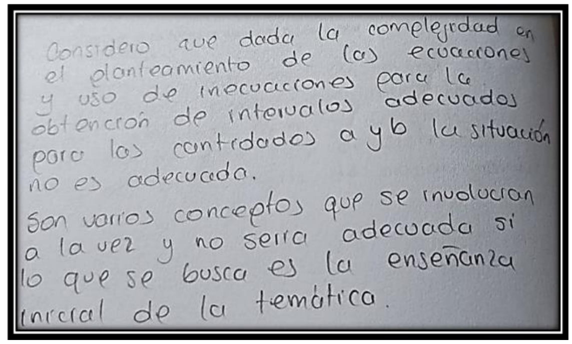


Valoración: Si

P3

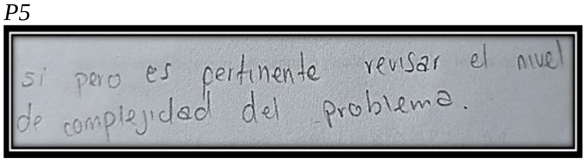
Valoración: No

P4



Valoración: No

P5



Valoración: Si

Conclusión

La mayoría de docentes argumentan que el problema favorece la comprensión de las inecuaciones, pero tiene relación más estrecha con las ecuaciones algebraicas, lo cual es pertinente analizar el nivel de complejidad, además el profesor 3 menciona que el problema no presenta relación con las inecuaciones por lo tanto no favorece la comprensión de este objeto.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (*P2.a)*

Tabla 4-41. *Situación-Problema 2: Problema de los lados de un polígono (P2.a) análisis a priori*

CE2. Problema de los lados de un polígono
Pregunta 2.a
El problema se puede considerar como:

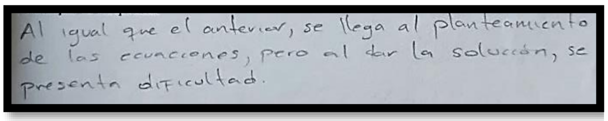
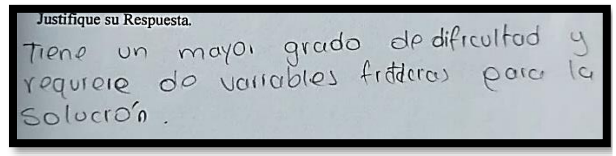
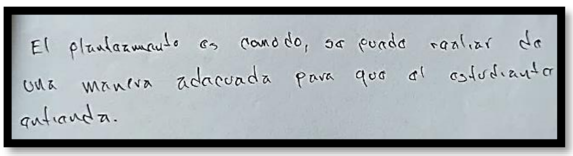
Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
CCC	CCC	CCC	CCC	CCC
CAC	CAC	CAC	CAC	CAC
CEC	CEC	CEC	CEC	CEC
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 2.a

Tabla 4-42. *Situación-Problema 1: Problema del polígono (P2.a) análisis a posteriori*

C.E.2: Problemas de los lados de un polígono
Pregunta 2a
El problema se puede considerar como:
Significado Parcial 2: Despeje de Inecuaciones lineales aproximado a enteros

P1	*P2*
Valoración: CCC	**Valoración: CEC**
P3	*P4*
 Al igual que el anterior, se llega al planteamiento de las ecuaciones, pero al dar la solución, se presenta dificultad.	 Justifique su Respuesta. Tiene un mayor grado de dificultad y requiere do variables [illegible] para la solución.
Valoración: CCC	**Valoración: CCC**
P5	
 El planteamiento es comodo, se puede realizar de una manera adecuada para que el estudiante entienda.	
Valoración: CCC	

Conclusión

La mayoría de docentes mencionan que el problema se puede considerar como un CCC ya que al solucionar el problema se requiere de un conocimiento netamente matemático y geométrico además del uso de diferentes conceptos matemáticos como lo son las inecuaciones y las sustituciones matemáticas.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P2.d)

Tabla 4-43. *Situación-Problema 2: Problema de los lados de un polígono (P2.d) análisis a priori*

CE2. Problema de los lados de un polígono
Pregunta 2.d
¿Cómo docente de grado Once que aportes a la comprensión de las Inecuaciones da el problema a los estudiantes? Justifique.2

Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
SI/No	Si / No	Si / No	Si / No	Si / No
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 2.d

Pregunta (P2.d)

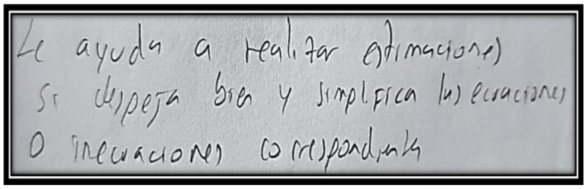
Tabla 4-44. *Pregunta 2.d, análisis a posteriori*

CE2. Problema de los lados de un polígono

Pregunta 2.d

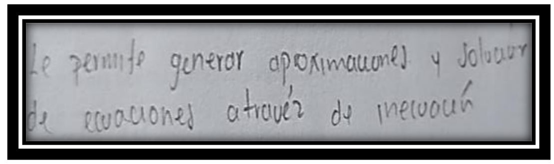
¿Cómo docente de grado Once que aportes a la comprensión de las Inecuaciones da el problema a los estudiantes? Justifique

P1


Le ayuda a realizar estimaciones si despeja bien y simplifica las ecuaciones o inecuaciones correspondientes

Valoración: Si

P2


Le permite generar aproximaciones y solución de ecuaciones através de inecuación

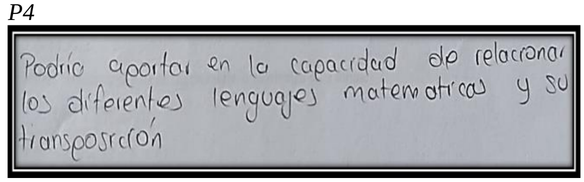
Valoración: Si

P3


No encuentro relación con el tema INECUACIONES

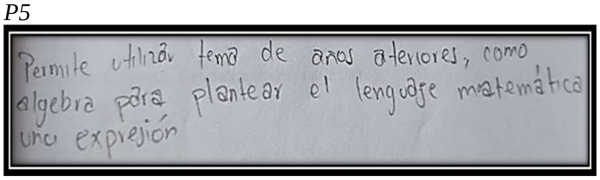
Valoración: No

P4


Podría aportar en la capacidad de relacionar los diferentes lenguajes matemáticos y su transposición

Valoración: No

P5


Permite utilizar tema de años anteriores, como algebra para plantear el lenguaje matemático una expresión

Valoración: Si

Conclusión

La mayoría de docentes argumentan que el problema aporta elementos importantes en el razonamiento matemático, así como la capacidad de generar estimaciones frente a un problema realizando simplificaciones y operaciones matemáticas adecuadamente.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P2.e)

Tabla 4-45. *Situación-Problema 2: Problema de los lados de un polígono (P2.e) análisis a priori*

CE2. Problema de los lados de un polígono

Pregunta 2.e

¿El problema anterior puede llevar al desarrollo numérico y/o variacional? Justifique

Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
SI/No	Si / No	Si / No	Si / No	Si / No
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

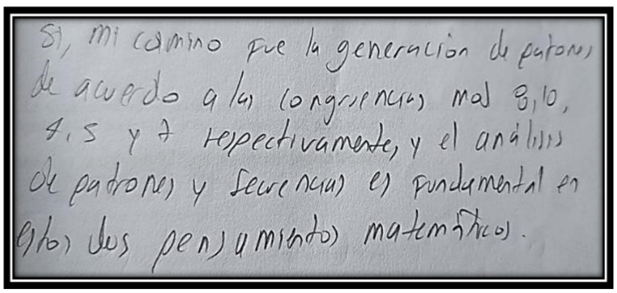
Análisis A Posteriori de la Pregunta 2.e

Pregunta (P.2.e)

Tabla 4-46. *Pregunta 2.e, análisis a posteriori*

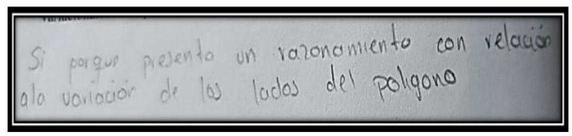
CE2. Problema de los lados de un polígono
Pregunta 2.e
¿El problema anterior puede llevar al desarrollo numérico y/o variacional? Justifique

P1


Si, mi camino fue la generación de patrones de acuerdo a las congruencias mod 8,10, 4,5 y 7 respectivamente, y el análisis de patrones y secuencias es fundamental en estos dos pensamientos matemáticos.

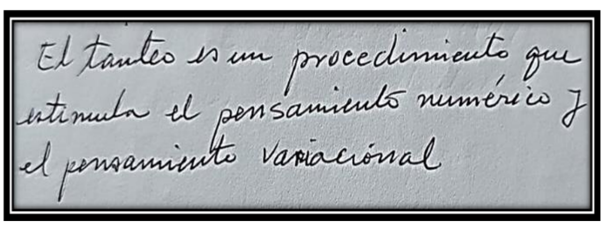
Valoración: Si

P2


Si porque presenta un razonamiento con relación a la variación de los lados del polígono

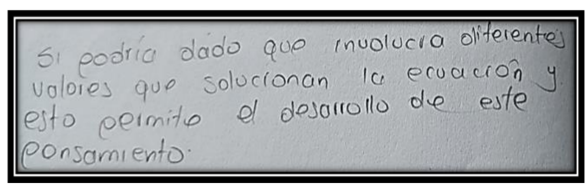
Valoración: Si

P3


El tanteo es un procedimiento que estimula el pensamiento numérico y el pensamiento variacional

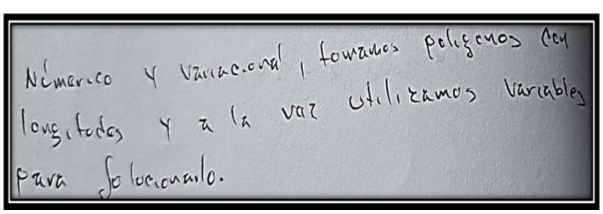
Valoración: Si

P4


Si podría dado que involucra diferentes valores que solucionan la ecuación y esto permite el desarrollo de este pensamiento.

Valoración: Si

P5


Numérico y variacional, formamos polígonos con longitudes y a la vez utilizamos variables para solucionarlo.

Valoración: Si

Conclusión
Los profesores argumentan que el método por despeje de Inecuaciones lineales aproximado a enteros favorece el pensamiento numérico y/o variacional ya que permite realizar la trazabilidad de la matemática con otras áreas del saber utilizando el tanteo como opción viable para la solución de un problema.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P2.f)

Tabla 4-47. *Situación-Problema 2: Problema de los lados de un polígono (P2.f) análisis a priori*

CE2. Problema de los lados de un polígono Pregunta 2.f ¿Cuáles ventajas o desventajas consideran que puede traer para la enseñanza el retomar los problemas en la historia de las matemáticas que dieron origen a los objetos matemáticos? Justifique				
Profesor 1 (P1) SI/No	Profesor 2 (P2) Si / No	Profesor 3 (P3) Si / No	Profesor 4 (P4) Si / No	Profesor 5 (P5) Si / No
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

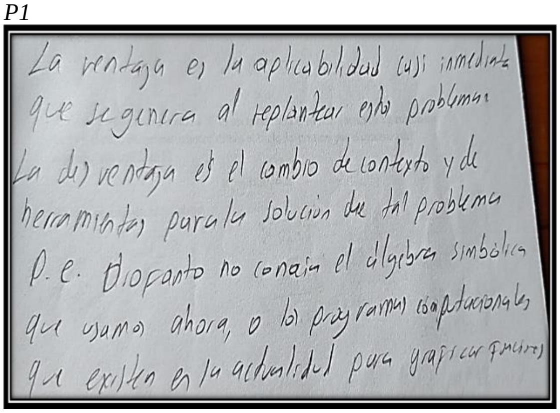
Análisis A Posteriori de la Pregunta 2.f

Pregunta (P.2.f)

Tabla 4-48. *Pregunta 2.f, análisis a posteriori*

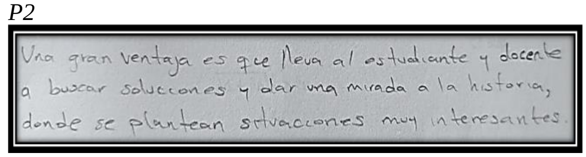
CE2. Problema de los lados de un polígono
Pregunta 2.f
¿Cuáles ventajas o desventajas consideran que puede traer para la enseñanza el retomar los problemas en la historia de las matemáticas que dieron origen a los objetos matemáticos? Justifique

P1


La ventaja es la aplicabilidad casi inmediata
que se genera al replantear estos problemas
La desventaja es el cambio de contexto y de
herramientas para la solución de tal problema
p.e. Diofanto no conocía el álgebra simbólica
que usamos ahora, o los programas computacionales
que existen en la actualidad para graficar funciones

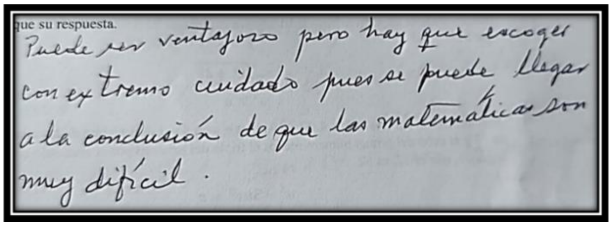
Valoración: Si

P2


Una gran ventaja es que lleva al estudiante y docente
a buscar soluciones y dar una mirada a la historia,
donde se plantean situaciones muy interesantes

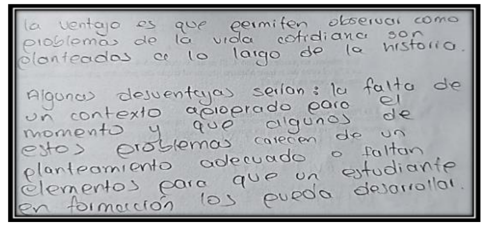
Valoración: Si

P3


que su respuesta.
Puede ser ventajoso pero hay que escoger con extremo cuidado pues se puede llegar a la conclusión de que las matemáticas son muy difícil.

Valoración: Si

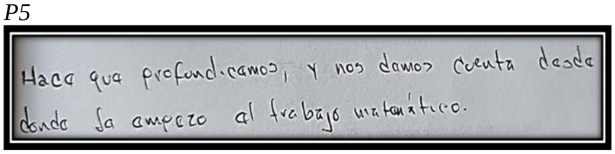
P4


la ventaja es que permiten observar como problemas de la vida cotidiana son planteados a lo largo de la historia.

Algunas desventajas serían: la falta de un contexto apropiado para el momento y que algunos de estos problemas carecen de un planteamiento adecuado o faltan elementos para que un estudiante en formación los pueda desarrollar.

Valoración: Si

P5


Hace que profundicemos, y nos damos cuenta desde donde se empezó al trabajo matemático.

Valoración: Si

Conclusión

Los profesores argumentan que retomar los problemas abordados en la historia ayuda a evidenciar el origen, la evolución y el desarrollo de los objetos matemáticos. Además, retomar estos problemas permiten generar en el estudiante un proceso investigativo, el cual genera ciertos interrogantes relacionados a la creación de las matemáticas lo que conlleva a utilizar diferentes métodos en este caso inecuaciones para su solución.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori *Pregunta (P3.b)*

Tabla 4-49. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.b) análisis a priori*

CE3. Problema de Bombelli
Pregunta 3.b
¿Qué dificultades encuentra en la solución presentada? Escriba algunas ventajas que encierra el problema para los estudiantes o si piensa en dificultades por favor descríbalas.

Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
SI/No	Si / No	Si / No	Si / No	Si / No
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

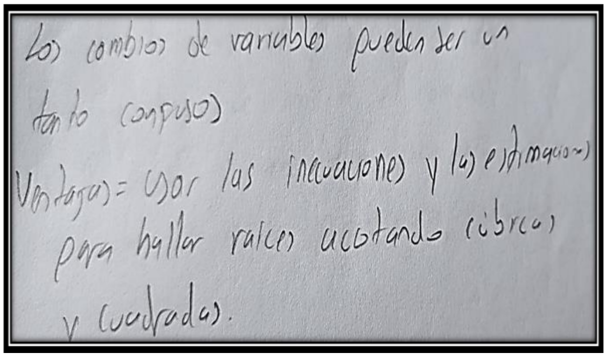
Análisis A Posteriori de la Pregunta 3.b

Pregunta (P3.b)

Tabla 4-50. *Pregunta 3.b, análisis a posteriori*

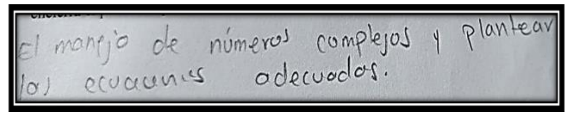
CE3. Problema de Bombelli
Pregunta 3.b
¿Qué dificultades encuentra en la solución presentada? Escriba algunas ventajas que encierra el problema para los estudiantes o si piensa en dificultades por favor descríbalas.

P1


Los cambios de variables pueden ser un tanto confusos
Ventajas = usar las inecuaciones y las estimaciones para hallar raíces acotando cúbicas y cuadradas.

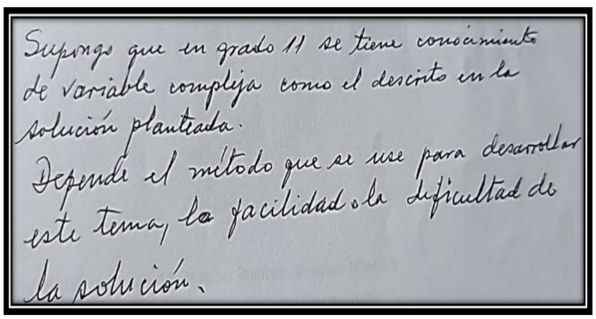
Valoración: Si

P2


El manejo de números complejos y plantear las ecuaciones adecuadas.

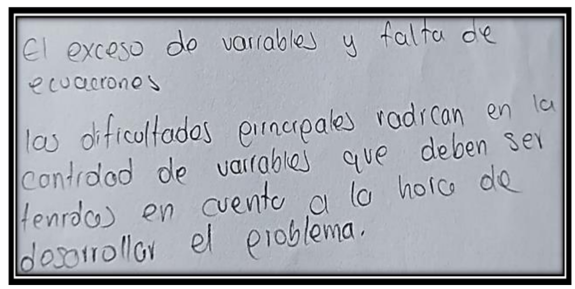
Valoración: Si

P3


Supongo que en grado 11 se tiene conocimiento de variable compleja como el descrito en la solución planteada.
Depende el método que se use para desarrollar este tema, la facilidad o la dificultad de la solución.

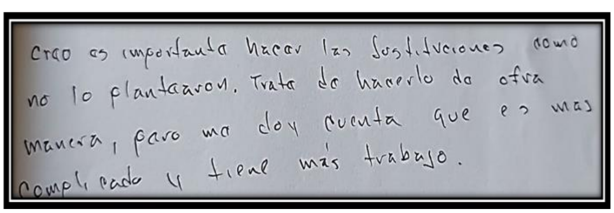
Valoración: Si

P4


El exceso de variables y falta de ecuaciones
las dificultades principales radican en la cantidad de variables que deben ser tenidas en cuenta a la hora de desarrollar el problema.

Valoración: Si

P5


Creo es importante hacer las sustituciones como no lo plantearon. Traté de hacerlo de otra manera, pero me doy cuenta que es más complicado y tiene más trabajo.

Valoración: Si

Conclusión

Los profesores argumentan que este problema podría ser confuso al momento de presentárselo al estudiante ya que al usar número complejos el estudiante no esté en la capacidad de utilizar los conocimientos que se requieren para su solución, además debe hacer uso de cambios de variable lo que sería muy confuso para el alumno.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori *Pregunta (P3.c)*

Tabla 4-51. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.c) análisis a priori*

CE3. Problema de Bombelli Pregunta 3.c El problema se puede considerar como:				
Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
CCC CAC CEC	CCC CAC CEC	CCC CAC CEC	CCC CAC CEC	CCC CAC CEC
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

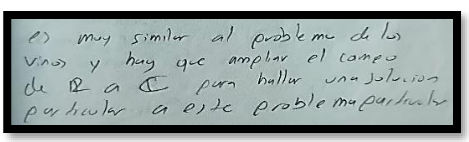
Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 3.c

Pregunta (P3.c)

Tabla 4-52. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.c) análisis a posteriori*

CE3. Problema de Bombelli
Pregunta 3.c
El problema se puede considerar como:
Significado Parcial 3: Método de aproximación de la raíz cúbica

P1	*P2*
 **Valoración: CCC**	**Valoración: CAC**
P3 **Valoración: CCC**	*P4* **Valoración: CEC**
P5 **Valoración: CEC**	

Conclusión
La mayoría de docentes mencionan que el problema se puede considerar como un CCC ya que al solucionar el problema se requiere de un conocimiento netamente matemático ya que involucra el campo complejo para la solución del problema, pero no todos dan la explicación respecto a la pregunta.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori *Pregunta (P3.f)*

Tabla 4-53. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P.3f) análisis a priori*

CE3. Problema de Bombelli Pregunta 3.f ¿Se pueden utilizar intervalos de prueba para poder encontrar la solución del problema anterior? Justifique				
Profesor 1 (P1) SI/No Justificación Conclusión:	Profesor 2 (P2) Si / No Justificación	Profesor 3 (P3) Si / No Justificación	Profesor 4 (P4) Si / No Justificación	Profesor 5 (P5) Si / No Justificación

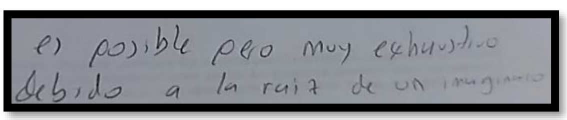
Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 3.f

Tabla 4-54. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.f) análisis a posteriori*

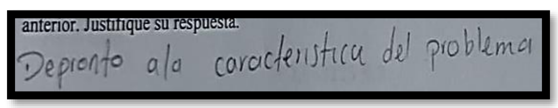
C.E.3: Problema de Bombelli
Situación-Problema 3: Problema de la raíz
Pregunta 3.f
Se puede utilizar intervalos de prueba para poder encontrar la solución del problema anterior/ Justifique su respuesta
Significado Parcial 3: Método de aproximación de la raíz cúbica

P1


es posible pero muy exhaustivo debido a la raiz de un imaginario

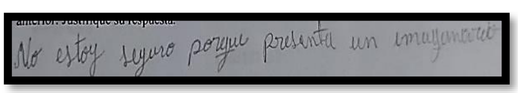
Valoración: Si

P2


anterior. Justifique su respuesta.
Depronto a la caracteristica del problema

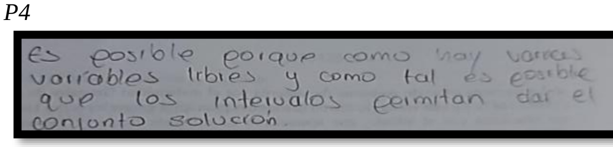
Valoración: Si

P3


anterior. Justifique su respuesta.
No estoy seguro porque presenta un imaginario

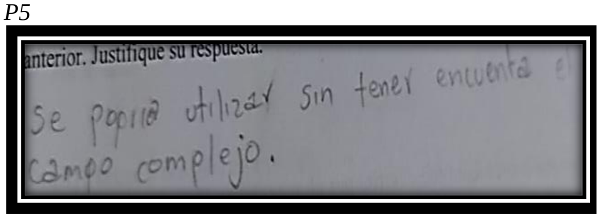
Valoración: No

P4


Es posible porque como hay varias variables libres y como tal es posible que los intervalos permitan dar el conjunto solución.

Valoración: Si

P5


anterior. Justifique su respuesta.
Se podria utilizar sin tener encuenta el campo complejo.

Valoración: Si

Conclusión
La mayoría de expresan que el problema se puede resolver usando intervalos de prueba, pero sería muy dispendioso y complicado el proceso lo que afectaría el proceso de aprendizaje, además los profesores 3 y 5 mencionan que sería más sencillo resolverlo por este método sin tener en cuenta el número imaginario.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori *Pregunta (P3.g)*

Tabla 4-55. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.g) análisis a priori*

CE3. Problema de Bombelli Pregunta 3.g ¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique				
Profesor 1 (P1) SI/No Justificación Conclusión:	Profesor 2 (P2) Si / No Justificación	Profesor 3 (P3) Si / No Justificación	Profesor 4 (P4) Si / No Justificación	Profesor 5 (P5) Si / No Justificación

Nota. Elaboración Propia

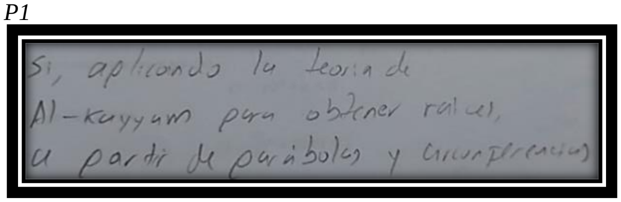
Análisis A Posteriori de la Pregunta 3.g

Tabla 4-56. *Situación-Problema 3: Problema de Bombelli (P3.g) análisis a posteriori*

C.E.3: Problema de Bombelli
Situación-Problema 3: Problema de la raíz

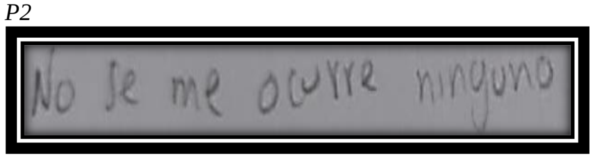
Pregunta 3.g
¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique su respuesta
Significado Parcial 3: Método de aproximación de la raíz cúbica

P1


Si, aplicando la teoría de Al-Kayyam para obtener raíces, a partir de parábolas y circunferencias

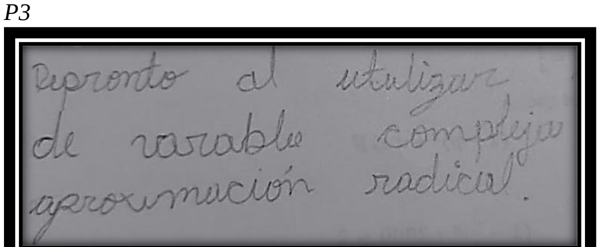
Valoración: Si

P2


No se me ocurre ninguno

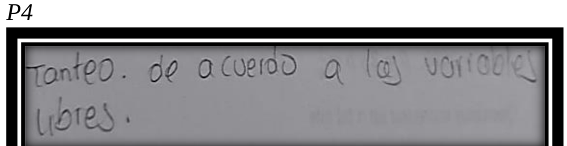
Valoración: No

P3


Depronto al utilizar de variable compleja aproximación radical.

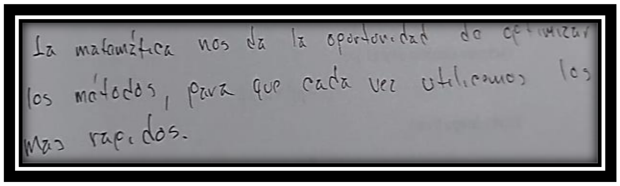
Valoración: Si

P4


Tanteo. de acuerdo a las variables libres.

Valoración: Si

P5



Valoración: Si

Conclusión

La mayoría de los docentes mencionan que, si se puede usar otro método para resolver el problema, pero estos métodos son complejos para el novel educativo en el que se encuentran los estudiantes si se llega el momento para explicarlo.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P4.b)

Tabla 4-57. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción (P4.b) análisis a priori*

CE3. El Método de Exhausción Pregunta 4.b ¿Qué ventajas y/o desventajas puede traer la enseñanza del problema en el tema de inecuaciones para los estudiantes de grado 11? Justifique				
Profesor 1 (P1) SI/No Justificación	Profesor 2 (P2) Si / No Justificación	Profesor 3 (P3) Si / No Justificación	Profesor 4 (P4) Si / No Justificación	Profesor 5 (P5) Si / No Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 4.b

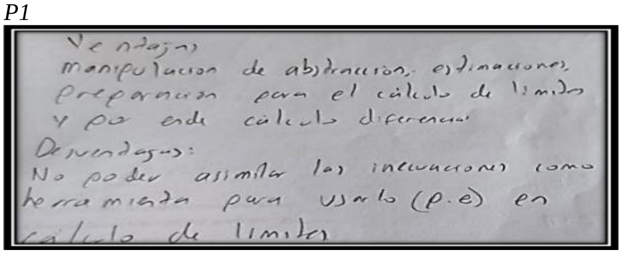
Pregunta (P4.b)

Tabla 4-58. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción (P4.b) análisis a posteriori*

Significado Parcial 4: Método de Exhausción

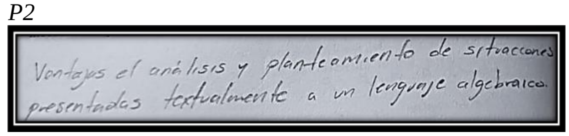
¿Qué ventajas y/o desventajas puede traer la enseñanza del problema en el tema de inecuaciones para los estudiantes de grado 11? Justifique **Valoración**

P1



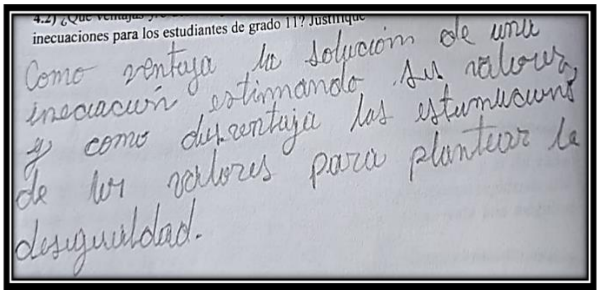
Valoración: Si

P2



Valoración: Si

P3

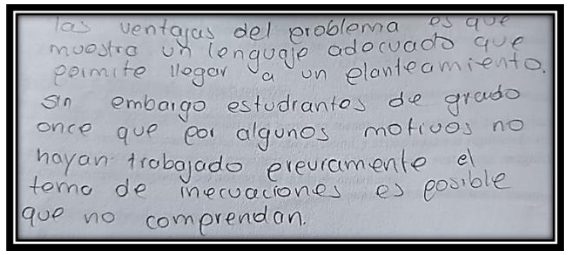


4.2) ¿Qué ventajas y/o ... inecuaciones para los estudiantes de grado 11? Justifique

Como ventaja la solución de una inecuación estimando sus valores y como desventaja las estimaciones de los valores para plantear la desigualdad.

Valoración: Si

P4



las ventajas del problema es que muestra un lenguaje adecuado que permite llegar a un planteamiento. sin embargo estudiantes de grado once que por algunos motivos no hayan trabajado previamente el tema de inecuaciones es posible que no comprendan.

Valoración: Si

P5

Valoración: No

Conclusión

La mayoría de profesores menciona que este problema se podría enseñar en el tema de inecuaciones debido a que se puede abordar de diferentes formas ya que no es netamente matemático sino geométrico lo cual permite generar una representación del problema en un software matemático.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P4.c)

Tabla 4-59. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción (P4.c) análisis a priori*

CE4. El Método de Exhausción Pregunta 4.c ¿Puede plantear otro problema(s) siguiendo los planteamientos dados en el problema? ¿Cómo cuáles? Justifique				
Profesor 1 (P1) SI/No	Profesor 2 (P2) Si / No	Profesor 3 (P3) Si / No	Profesor 4 (P4) Si / No	Profesor 5 (P5) Si / No
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

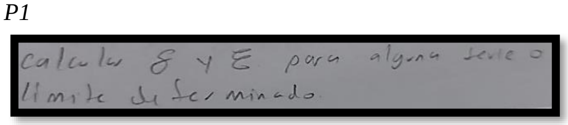
Análisis A Posteriori de la Pregunta 4.c

Tabla 4-60. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción (P4.c) análisis a posteriori*

C.E.4: Problema de las Figuras Curvilíneas
Situación-Problema 4: Los números y sus relaciones en el infinito

Pregunta 4.c
¿Puede plantear otro problema(s) siguiendo los planteamientos dados en el problema? ¿Cómo cuáles? Justifique
Significado Parcial 4: Método de Exhausción

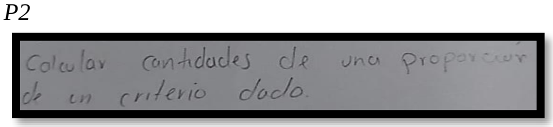
P1



calcula δ y E para alguna serie o limite determinado

Valoración: Si

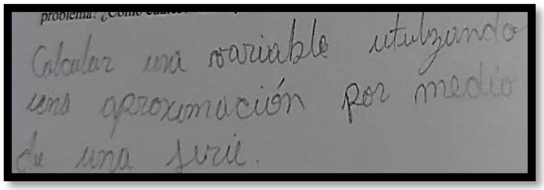
P2



Calcular cantidades de una proporción de un criterio dado.

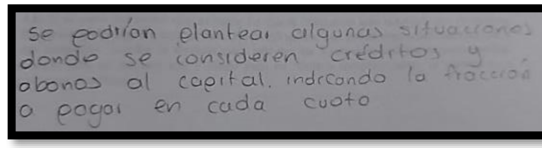
Valoración: Si

P3


problema? ¿Como cuales? ...
Calcular una variable utilizando una aproximación por medio de una serie.

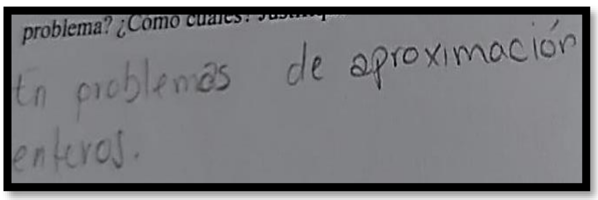
Valoración: Si

P4


Se podrían plantear algunas situaciones donde se consideren créditos y abonos al capital, indicando la fracción o pagos en cada cuota

Valoración: Si

P5


problema? ¿Como cuales? ...
En problemas de aproximación enteros.

Valoración: Si

Conclusión

Se puede inferior que todos los docentes plantearon diferentes problemas desde varias perspectivas que se enfocan principalmente en el uso de las inecuaciones y tienen relación con algún tema matemático.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P4.d)

Tabla 4-61. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción (P4.d) análisis a priori*

CE4. El Método de Exhausción Pregunta 4.d El problema se puede considerar como:				
Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
CCC CAC CEC	CCC CAC CEC	CCC CAC CEC	CCC CAC CEC	CCC CAC CEC
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación
Conclusión:				

Fuente. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 4.d

Tabla 4-62. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción (P4.d) análisis a posteriori*

CE4. Problema de las figuras Curvilíneas Pregunta 4.d El problema se puede considerar como: **Significado Parcial 3: Método de Exhausción**

P1

Este problema es muy similar a la definición de límite por δ y ε

Valoración: CCC

P2

Valoración: CAC

P3

Valoración:

P4

Valoración:

P5

Valoración: CEC

Conclusión

La mayoría de docentes mencionan que el problema se puede considerar como un CCC ya que al solucionar el problema se requiere de un conocimiento netamente matemático, pero algunos de ellos no responden porque no saben que tipo de conocimiento es.

Nota. Elaboración Propia

Análisis a Priori Pregunta (P4.g)

Tabla 4-63. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción (P4.g) análisis a priori*

CE4. El Método de Exhausción
Pregunta 4.g
¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique

Profesor 1 (P1)	Profesor 2 (P2)	Profesor 3 (P3)	Profesor 4 (P4)	Profesor 5 (P5)
SI/No	Si / No	Si / No	Si / No	Si / No
Justificación	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación

Conclusión:

Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 4.g

Tabla 4-64. *Situación-Problema 4: El Método de Exhausción (P4.g) análisis a posteriori*

C.E.4: Problema de las Figuras Curvilíneas
Situación-Problema 4: Los números y sus relaciones en el infinito

Pregunta 4.g
¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique su respuesta

Significado Parcial 4: Método de Exhausción

P1

Circunferencia unitaria, pero el proceso es análogo

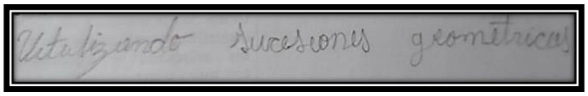
Valoración: Si

P2

Por medio de estimaciones para valores entre los reales.

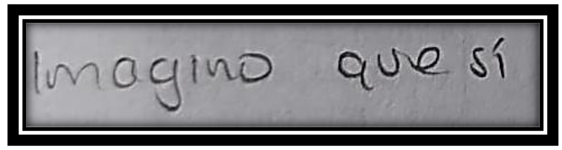
Valoración: Si

P3


Utalizando Sucesiones geométricas

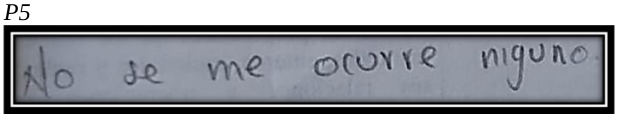
Valoración: Si

P4


Imagino que sí

Valoración: Si

P5


No se me ocurre niguno.

Valoración: No

Conclusión

Se puede inferior que con respecto a la configuración epistémica de la situación-problema 4 los algunos docentes proponen diferentes métodos de solución que son un poco complejos a la hora de abordarlos, pero ofrecen un abanico de posibilidades a la hora de abordar un problema matemático.

Nota. Elaboración propia

Análisis a Priori Pregunta (P7)

Tabla 4-65. *Pregunta 7*

CE1, CE2, CE3, CE4 Pregunta 7 ¿Qué situación problema de las cinco presentadas no debería enseñarse a los estudiantes y por qué? Justifique				
Profesor 1 (P1) SI/No Justificación Conclusión:	Profesor 2 (P2) Si / No Justificación	Profesor 3 (P3) Si / No Justificación	Profesor 4 (P4) Si / No Justificación	Profesor 5 (P5) Si / No Justificación

Nota. Elaboración Propia

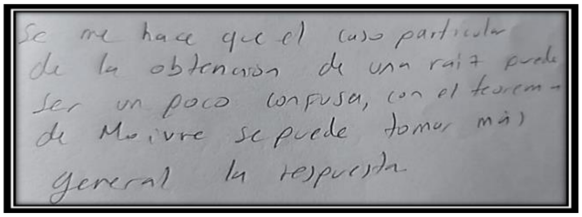
Análisis A Posteriori de la Pregunta 7

Tabla 4-66. *Pregunta 7 análisis a posteriori*

C.E.1, C.E.2, C.E.3, C.E.4

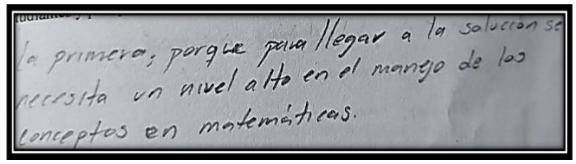
¿Qué situación problema de las cuatro presentadas no debería enseñarse a los estudiantes y por qué? Justifique

P1


Se me hace que el caso particular de la obtención de una raíz puede ser un poco confusa, con el teorema de Moivre se puede tomar más general la respuesta

Valoración: Si

P2

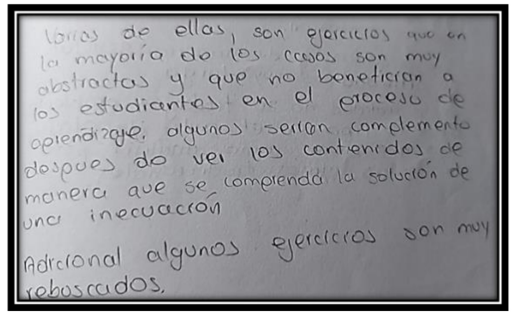

la primera; porque para llegar a la solución se necesita un nivel alto en el manejo de los conceptos en matemáticas.

Valoración: Si

P3

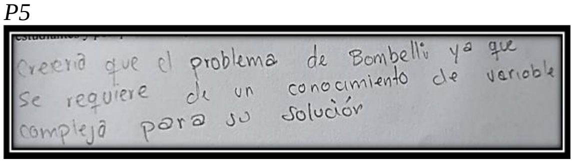
Valoración: No

P4



Valoración: Si

P5



Valoración: Si

Conclusión

La mayoría de profesores coinciden que el problema de Bombelli no se debería enseñar en este grado debido al nivel de dificultad que presenta por ser un problema que involucra números complejos y se requiere de un nivel un poco avanzado para su comprensión.

Nota. Elaboración Propia

4.4.5 Dimensión epistémica – Parte III: Pensamiento variacional

Para el análisis del significado de la situación-problema 2 en cuanto al desarrollo del pensamiento variacional a la pregunta (2.f), se plantea la siguiente tabla:

Análisis a Priori Pregunta (P2.f)

Tabla 4-67. *Situación-Problema 2: Problema de los lados de un polígono (P2.f) análisis a priori*

CE2. Problema de los lados de un polígono Pregunta 2.f ¿El problema anterior puede llevar al desarrollo del pensamiento numérico y/o variacional? Justifique su respuesta				
Profesor 1 (P1) SI/No Justificación	Profesor 2 (P2) Si / No Justificación	Profesor 3 (P3) Si / No Justificación	Profesor 4 (P4) Si / No Justificación	Profesor 5 (P5) Si / No Justificación
Conclusión:				

Nota. Elaboración Propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 2.f

Tabla 4-68. *Pregunta 2.f análisis a posteriori*

CE2. Problema de los lados de un polígono
Pregunta 2.f
¿Cuáles ventajas o desventajas considera que puede traer para la enseñanza el retomar los problemas en la historia de las matemáticas que dieron origen a los objetos matemáticos? Justifique

P1

La ventaja es la aplicabilidad casi inmediata que se genera al replantear estos problemas. La desventaja es el cambio de contexto y de herramientas para la solución de tal problema p.e. Diofanto no conocía el álgebra simbólica que usamos ahora, o los programas computacionales que existen en la actualidad para graficar funciones

Valoración: Si

P2

Una gran ventaja es que lleva al estudiante y docente a buscar soluciones y dar una mirada a la historia, donde se plantean situaciones muy interesantes.

Valoración: Si

P3

que su respuesta.
Puede ser ventajoso pero hay que escoger con extremo cuidado pues se puede llegar a la conclusión de que las matemáticas son muy difícil.

Valoración: Si

P4

la ventaja es que permiten observar como problemas de la vida cotidiana son planteados a lo largo de la historia.
Algunas desventajas serían: la falta de un contexto apropiado para el momento y que algunos de estos problemas carecen de un planteamiento adecuado o faltan elementos para que un estudiante los pueda desarrollar en formación

Valoración: Si

P5

Hace que profundicemos, y nos damos cuenta desde donde se empezó el trabajo matemático.

Valoración: Si

Conclusión

Los profesores argumentan que retomar los problemas abordados en la historia ayuda a evidenciar el origen, la evolución y el desarrollo de los objetos matemáticos. Además, retomar estos problemas permiten generar en el estudiante un proceso investigativo, el cual genera ciertos interrogantes relacionados a la creación de las matemáticas lo que conlleva a utilizar diferentes métodos en este caso inecuaciones para su solución.

Nota. Elaboración Propia

4.4.6 Parte III: Estándares Básicos de Competencias Matemática

Para el análisis de las concepciones y creencias del profesor de matemáticas que enseña en grado Once y/o que orienta cursos de cálculo diferencial, de acuerdo a la relación entre las situaciones problemas y los estándares básicos de competencias se diseña la siguiente tabla para la pregunta (P5):

Tabla 4-69. *Estándares Básicos de competencias*

Pregunta 5 ¿Considera que el estándar y los DBA seleccionados corresponden a las situaciones problema planteadas? Justifique la respuesta				
Estándar: Comparo y contrasto las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y las de sus relaciones y operaciones para construir, manejar y utilizar apropiadamente los distintos sistemas numéricos				
Derechos Básicos de Aprendizaje	**Descripción**			
DBA 1	Utiliza las propiedades de los números (naturales, enteros, racionales y reales) y sus relaciones y operaciones para construir y comparar los distintos sistemas numéricos.			
DBA 2	Justifica la validez de las propiedades de orden de los números reales y las utiliza para resolver problemas analíticos que se modelen con desigualdades.			
Profesor 1 (P1) SI/No	Profesor 2 (P2) Si / No	Profesor 3 (P3) Si / No	Profesor 4 (P4) Si / No	Profesor 5 (P5) Si / No
Justificación Conclusión	Justificación	Justificación	Justificación	Justificación

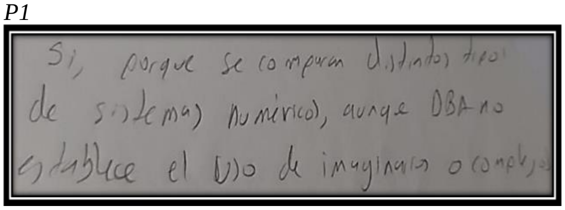
Nota. Elaboración propia

Análisis A Posteriori de la Pregunta 5

Tabla 4-70. *Pregunta 5, análisis a posteriori*

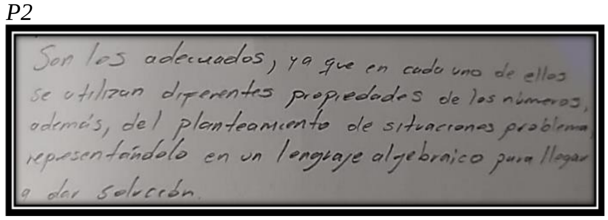
Pregunta 5
¿Considera que el estándar y los DBA seleccionados corresponden a las situaciones problemas planteadas? Justifique su respuesta.

P1


Si, porque se comparan distintos tipos de sistemas numéricos, aunque DBA no establece el uso de imaginarios o complejos

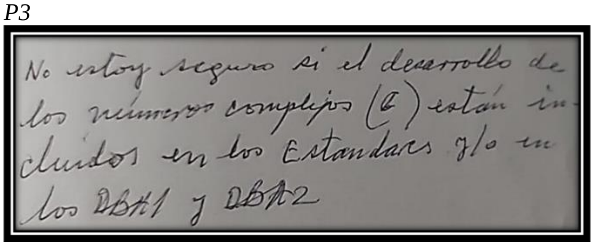
Valoración: Si

P2


Son los adecuados, ya que en cada uno de ellos se utilizan diferentes propiedades de los números, además, del planteamiento de situaciones problema, representándolo en un lenguaje algebraico para llegar a dar solución.

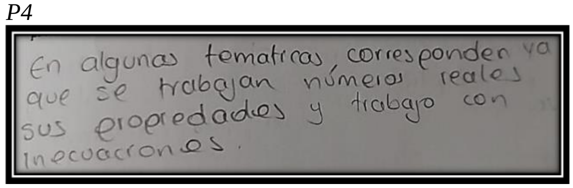
Valoración: Si

P3


No estoy seguro si el desarrollo de los números complejos (ℂ) están incluidos en los Estandares y/o en los DBA1 y DBA2

Valoración: No

P4


En algunas tematicas corresponden ya que se trabajan números reales sus propiedades y trabajo con inecuaciones.

Valoración: Si

P5

Si porque presenta relación con los números reales y verifica sus propiedades de orden, aunque el DBA no incluye los números complejos.

Valoración: Si

Conclusión

Los docentes argumentan que el Estándar y los DBA seleccionados para el objeto Inecuaciones son acordes a las situaciones problemas planteadas, ya que permiten ver la aplicación de las propiedades de los números reales en los diferentes métodos de solución para las inecuaciones sin importar el nivel de complejidad del método y también permite ver los elementos que se relacionan entre sí para el desarrollo de los mismos.

Nota. Elaboración Propia

4.4.7 Categorías de Análisis para el CDM según el Cuestionario (CCPI)

En la tabla 4.71 se presenta los cuatro ítems y subítems clasificados según las categorías del Conocimiento didáctico matemático (CDM) del profesor que se pretenden evaluar con las tareas.

Tabla 4-71. *Categorías del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM)*

Pregunta	*Subítems*	*Categoría del CDM*
Pregunta 1	*1.a)*	*Conocimiento Común* *Conocimiento Especializado*
	1.b)	*Conocimiento Común* *Conocimiento Especializado*
	1.d)	*Conocimiento Ampliado*
	1.e)	*Conocimiento Ampliado*
	1.f)	*Conocimiento Ampliado*
	1.g)	*Conocimiento Ampliado*
Pregunta 2	*2.a)*	*Conocimiento Común* *Conocimiento Especializado*
	2.c)	*Conocimiento Común* *Conocimiento Especializado*
	2.d)	*Conocimiento Ampliado*
	2.e)	*Conocimiento Ampliado*
	2.f)	*Conocimiento Ampliado*
Pregunta 3	*3.a)*	*Conocimiento Común* *Conocimiento Especializado*
	3.b)	*Conocimiento Ampliado*
	3.c)	*Conocimiento Común*

		Conocimiento Especializado
	3.e)	*Conocimiento Ampliado*
	3.f)	*Conocimiento Ampliado*
	3.g)	*Conocimiento Ampliado*
Pregunta 4	*4.a)*	*Conocimiento Común*
		Conocimiento Especializado
	4.b)	*Conocimiento Ampliado*
	4.c)	*Conocimiento Común*
		Conocimiento Especializado
	4.f)	*Conocimiento Ampliado*
	4.g)	*Conocimiento Ampliado*
		Conocimiento Común
		Conocimiento Especializado

Nota. *Elaboración Propia*

4.5 Análisis cuantitativo del Cuestionario (CCPI)

Para el análisis cuantitativo del cuestionario, se consideró la variable "Grado de Dificultad" donde se asignan los valores de 0 si la respuesta es incorrecta; 2.5 si la respuesta es correcta y entre 0 y 2.5 si las respuestas se encuentran parcialmente correctas, en efecto, de acuerdo con las puntuaciones establecidas, el puntaje máximo y mínimo a obtener corresponde a 50 y 0 puntos respectivamente.

Para determinar el índice de dificultad de la situación-problema, se divide el número de personas que contestan correctamente la situación, entre el total de personas. La escala de clasificación para la dificultad se toma del estudio realizado por (Muñiz, 1994). Para esto se recomiendan los siguientes porcentajes según Sepúlveda (2016):

5 por cierto de ítems fáciles

20 por cierto para ítems medianamente fáciles

50 por cierto, para ítems de dificultad media

20 por cierto, para ítems medianamente difíciles

5 por cierto, para ítems difíciles

Según la escala anterior se establecen los siguientes intervalos de clasificación que se utilizan de forma decimal para analizar el índice de dificultad:

Dificultad de 0: ítem de alto grado de dificultad (Valor extremo)

≤ 0,05 ítem difícil

(0,05 – 0,25] ítem medianamente difícil

(0,25 – 0,75] ítem de dificultad media

(0,75 – 0,95] ítem medianamente fácil

> 0,95 ítem fácil

1 ítem de un grado máximo de facilidad

Se presentan los resultados del cuestionario en la tabla 4-72

Tabla 4-72. *Resultados del Cuestionario (CCPI)*

Resultados del Cuestionario (CCPI)					
	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**
Situación – Problema 1	Valoración: 2.5	Valoración: 2.5	Valoración: 0	Valoración: 2.5	Valoración: 2.5
Situación – Problema 2	Valoración: 0	Valoración: 0	Valoración: 2.5	Valoración: 0	Valoración: 0
Situación – Problema 3	Valoración: 2.5	Valoración: 0	Valoración: 2.5	Valoración: 0	Valoración: 0
Situación – Problema 4	Valoración: 2.5	Valoración: 0	Valoración: 2.5	Valoración: 0	Valoración: 0

Nota. Elaboración Propia

Según la tabla se observa que la mayoría de los docentes respondieron de forma adecuada fue la situación uno ya que según tabla 4-9 se observa que los docentes identifican principalmente los elementos necesarios que dan respuesta a la situación problema con base en su configuración epistémica.

4.5.1 Análisis del Índice de dificultad

El índice de dificultad, valora la dificultad que lleva la resolución de la situación problema planteada y se define como la razón entre "el número de aciertos/ número de respuestas" (Muñiz, 1994). Este índice toma valores entre 0 y 1, donde 0 índica que el subítem tiene un alto grado de dificultad, mientras que 1 indica que el subítem tiene un grado de facilidad alto, aclarando que los índices de dificultad media son lo que mejor se distinguen.

Para el cálculo del índice de dificultad se clasificaron las respuestas en correctas, incorrectas y parcialmente correctas, así que fue posible analizar qué situaciones problemas resultaron más "fáciles" o más "difíciles" para los docentes a los cuales se les aplico el cuestionario.

Se presenta en la tabla 4-73 el índice de dificultad de la situación y el índice promedio de dificultad de la situación teniendo en cuenta los ítems 1c), 2b), 3d), 4e) y la respuesta dada por los docentes.

Tabla 4-73. *Índice de dificultad del Cuestionario (CCPI)*

Índice de dificultad del Cuestionario (CCPI)						
	R-Correctas		*R-Incorrectas*		*R-Parcialmente -C*	
	Frecuencia	*%*	*Frecuencia*	*%*	*Frecuencia*	*%*
Situación Problema 1	*4*	*80*	*1*	*20*	*0*	
Situación Problema 2	*1*	*20*	*4*	*80*	*0*	

Situación Problema 3	*2*	*40*	*3*	*60*	*0*
Situación Problema 4	*2*	*40*	*3*	*60*	*0*

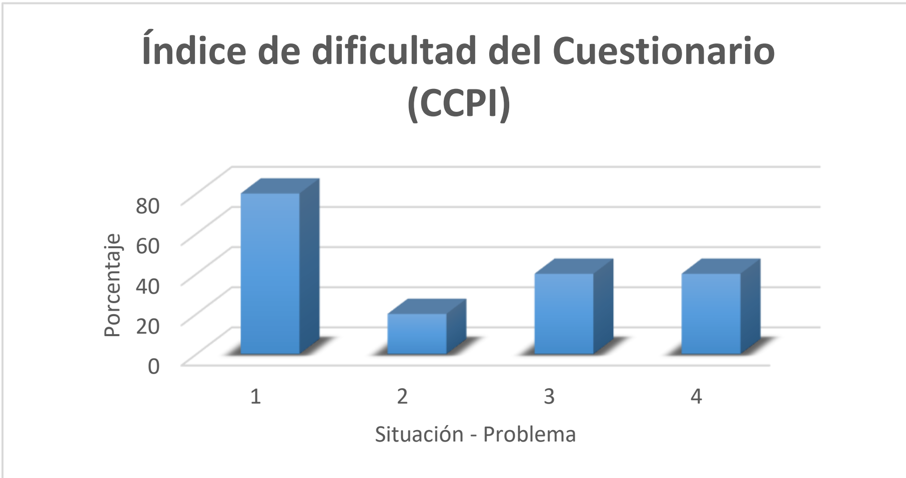
Nota. Elaboración Propia

En la figura 6 se observan los resultados obtenidos al agrupar los ítems del cuestionario según su índice de dificultad y según las ponderaciones obtenidas por los docentes. De las 5 situaciones problemas, el 25% presentan una mediana dificultad con valores en (0,05 y 0,25]; en este punto según (Muñiz, 1994) se espera que el 20 por cierto de las situaciones presenten un índice de dificultad medianamente difícil; mientras que el 50%, resultaron con un índice de dificultad media y según la literatura se espera el 5 por ciento de los ítems. Por otro lado solo hay un ítem medianamente fácil que representa el 25% y se espera el 20 por ciento de los ítems.

En la tabla 4-73 y en la figura 6 se presentan los índices de dificultad para las diferentes situaciones problema. Se observa que de manera general las situaciones del cuestionario presentan una dificultad media que oscila entre el 10 y 59 por ciento; por lo que se concluye que en cierta forma no debería representar mayores dificultades para los docentes, pero lo que realmente se observa es qué este presento una gran dificultad para los docentes.

Figura 6.

Dificultad de las situaciones problemas del cuestionario (CCPI)



Nota 6. *Dificultad de las situaciones problemas del cuestionario. Elaboración Propia*

4.6 Análisis del Conocimiento Común del Contenido

Según Godino (2009), el Conocimiento Común del Contenido se relaciona con aquellos conocimientos matemáticos que no se relacionan propiamente con la enseñanza y que posee cualquier persona para resolver determinadas situaciones-problema de cierto nivel educativo.

Para analizar el contenido común del contenido de los profesores de educación media se diseñaron los subítems (Ver tabla 4-71); **1.a, 1.e), 2.c), 3.a), 3.f), 3.g), 4.a), 4.c), 4.g).**

Según Godino, Batanero y Font (2007), este conocimiento no se puede observar, pero se puede estudiar del conjunto de prácticas realizadas por los docentes, al dar respuesta a las diferentes situaciones que se le plantean y así obtener, algunos indicadores empíricos que permiten evaluar este aprendizaje (Vásquez, 2014).

En esta dirección, se presenta el análisis de algunos de los subítems que permitieron evaluar el Conocimiento Didáctico-Matemático (Godino, 2009) de los docentes, en la categoría del *Conocimiento Común del Contenido – CCC* y en relación con el objeto matemático Inecuaciones, según la aplicación del cuestionario.

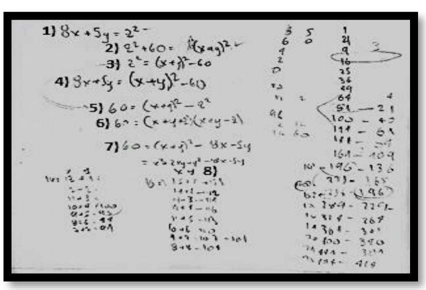
Análisis del Subítem 1

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la solución del problema 1 (Problema de los vinos), para lo cual se le solicito a los docentes brindar una posible solución al problema teniendo en cuenta el conocimiento que tiene respecto al objeto inecuaciones.

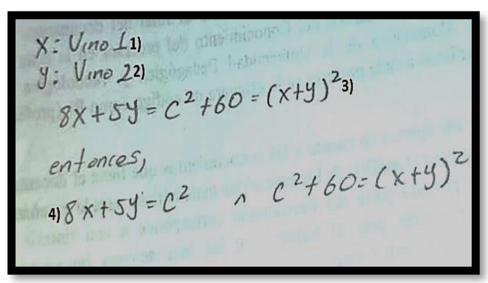
A continuación, se presenta la tabla 4-74 donde se observa las diferentes respuestas de los docentes frente a este subítem

Tabla 4-74. *Tipos de Respuestas frente al ítem 1*

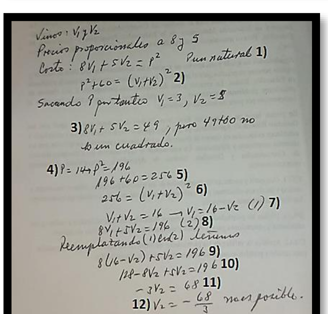
P1



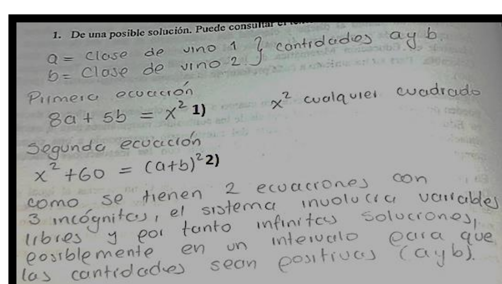
P2



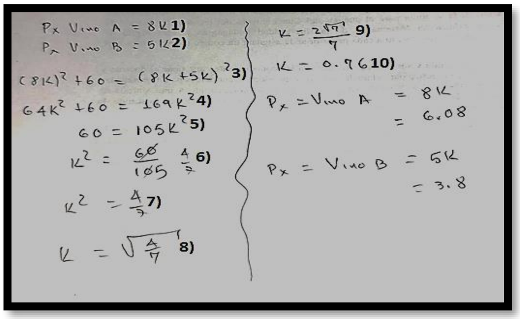
P3



P4



P5



Nota. *Elaboración Propia*

Teniendo en cuenta la tabla 4-74 se puede decir que los 5 profesores dan solución al problema utilizando los conocimientos respectivos al objeto inecuaciones, pero el P1, P3 y P5 presentan una solución que, adecuada con relación al análisis a priori realizado anteriormente al presentar ciertos elementos y características propias de las inecuaciones y el uso de ellas, se observa en general que los docentes tienen una comprensión de las inecuaciones al relacionarlas con la proporcionalidad.

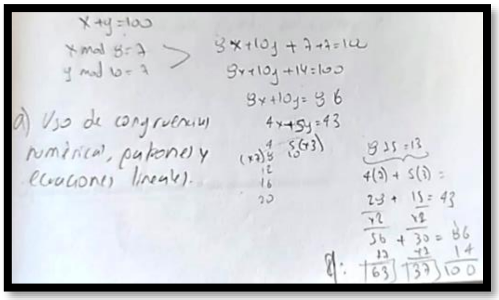
Análisis del subítem 2.c)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento común del contenido en relación con la comprensión de los docentes con respecto al problema 2 (Problema del Polígono) enfatizando en la relación que tiene las inecuaciones con la geometría.

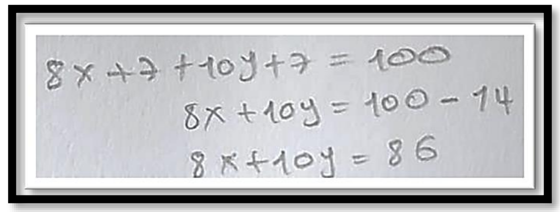
A continuación, se presenta la tabla 4-75 donde se observa las diferentes respuestas de los docentes frente a este subítem

Tabla 4-75. *Respuesta por parte de los docentes al subítem 2.c)*

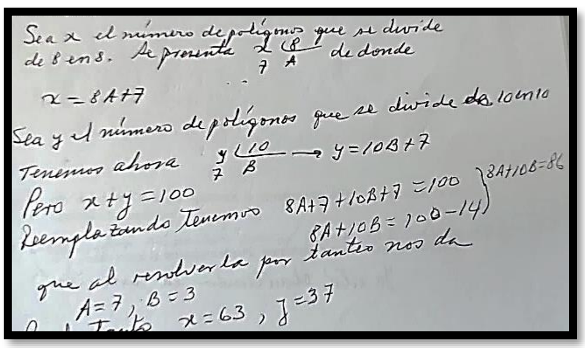
P1



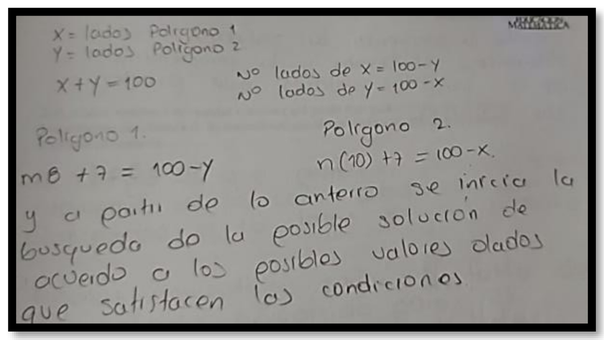
P2



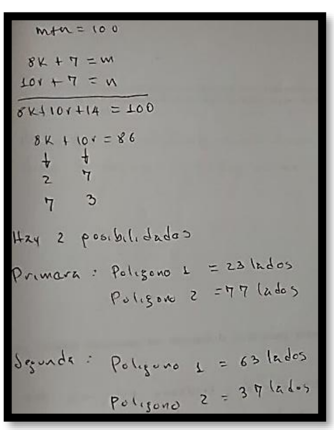
P3



P4



P5



Nota. (Elaboración Propia)

Teniendo en cuenta la tabla 4-75 se puede decir que los 5 profesores dan solución al problema utilizando los conocimientos respectivos al objeto inecuaciones, pero el P1 y P5 presentan una solución que es adecuada con relación al análisis a priori realizado anteriormente y los docentes P2, P3 y P4 no presentan una solución acorde al problema ya que solo argumentan una solución no tiene relación al problema y por ende no utilizan los conceptos propios de las inecuaciones.

Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Común del Contenido

A partir del análisis efectuado en la sección anterior, se considera que en general los docentes, presentan en gran medida debilidades, en relación con el conocimiento común del contenido, ya que presentan, un conocimiento medio, según la escala establecida para los niveles del dominio del conocimiento (Ver tablas 3-3, 3-4, 3-5), cuando se analizan las prácticas algebraicas. Con base en esta escala el CCC de los docentes resultó en algunos casos deficientes para algunos de los subítems que permitieron evaluar este conocimiento sobre el objeto Inecuaciones. En este sentido, se deben diseñar estrategias que permitan favorecer el CCC en los docentes, en especial se deben presentar todos los significados del objeto Inecuaciones, determinados a partir del estudio histórico, epistemológico y fenomenológico para introducir la metodología propuesta por la fenomenología en busca de sentido para el objeto Inecuaciones.

4.7 Análisis del Conocimiento Ampliado del Contenido

Se puede decir que este tipo de conocimiento es similar al conocimiento común del contenido, se relaciona con los conocimientos matemáticos de los docentes que no se direccionan específicamente con la enseñanza. El Conocimiento Ampliado del Contenido-CAC se refiere a los contenidos matemáticos más avanzados en el currículo que el profesor debe poseer con relación a un determinado tema (Godino, 2009), para este caso corresponde a conocimientos sobre el objeto Inecuaciones. Por tanto, se espera que el profesor tenga una comprensión de las propiedades, métodos y tipos de inecuaciones, con la finalidad de orientar a sus estudiantes en la realización de las diferentes situaciones problemáticas que se proponen en los libros de texto.

Para analizar el Conocimiento Ampliado del Contenido que poseen los docentes, se analizaron los subítems que permitieron evaluar algunos de los aspectos de este conocimiento didáctico-matemático, sobre el objeto de investigación. Según la tabla 4-71 y el cuestionario, se tienen los siguientes subítems respecto al conocimiento del objeto Inecuaciones de los docentes: **1.a), 1.c), 1.e), 1.f), 2.d), 2.e), 2.f), 3.b), 3.f), 3.g), 4.b), 4.f).**

Según Godino, Batanero y Font (2007) este conocimiento, al igual que el conocimiento común del contenido, no se puede observar, pero se puede utilizar las prácticas realizadas por los docentes al dar respuesta a las situaciones problemáticas que se les plantea y obtener consignas que permitan evaluar el conocimiento ampliado del contenido (Vásquez, 2014). Por tanto, se presentan algunos análisis a las respuestas que se relacionan con la categoría de conocimiento ampliado del contenido.

Análisis del ítem 3.

Con este ítem se buscaba evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los docentes al momento de identificar otros métodos de solución para el problema 3 (Problema de Bombelli) a parte del que se presenta en la solución del problema.

Análisis del subítem 3.f)

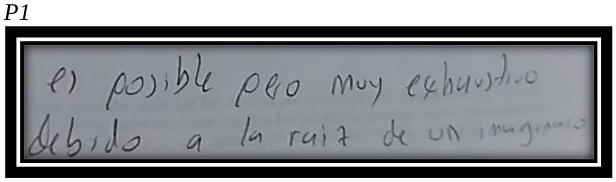
Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la identificación del método Intervalos de prueba para el problema de Bombelli.

A continuación, se presenta la tabla 4-76 donde se observa las diferentes respuestas de los docentes frente a este subítem.

Tabla 4-76. *Respuestas dadas por los docentes frente al subítem 3.f*

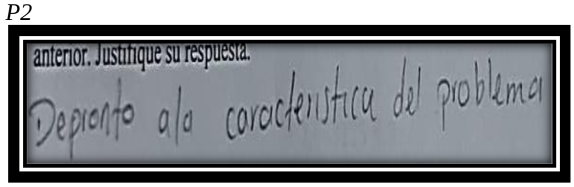
C.E.3: Problema de Bombelli
Situación-Problema 3: Problema de la raíz
Pregunta 3.f
Se puede utilizar intervalos de prueba para poder encontrar la solución del problema anterior/ Justifique su respuesta
Significado Parcial 3: Método de aproximación de la raíz cúbica

P1



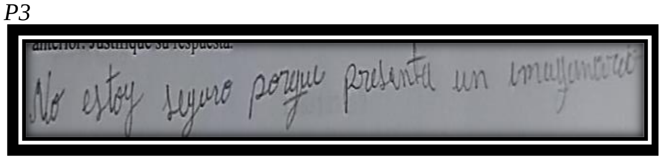
Valoración: Si

P2



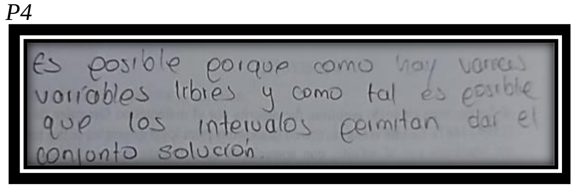
Valoración: Si

P3



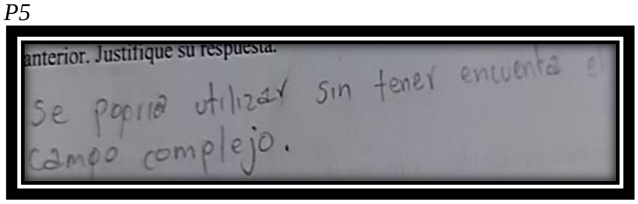
Valoración: No

P4



Valoración: Si

P5



Valoración: Si

Conclusión
La mayoría de expresan que el problema se puede resolver usando intervalos de prueba, pero sería muy dispendioso y complicado el proceso lo que afectaría el proceso de aprendizaje, además los profesores 3 y 5 mencionan que sería más sencillo resolverlo por este método sin tener en cuenta el número imaginario.

Nota. Elaboración Propia

Teniendo en cuenta la tabla 4-76 se puede decir que los 5 profesores dan solución al problema utilizando los conocimientos respectivos al objeto inecuaciones, pero la mayoría de ellos no identifica como tal posibles generalizaciones y conexiones de la tarea con el método Intervalos de prueba ya que mencionan que se podría aplicar, pero sería muy dispendioso y confuso realizarlo. En este sentido se establece que los docentes tienen un bajo nivel de domino respecto a este método, resultando una pregunta difícil para ellos.

Análisis del subítem 3.g)

Con este subítem se busca evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la identificación de diferentes métodos para la solución del problema de Bombelli.

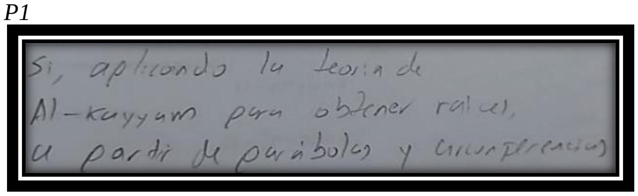
A continuación, se presenta la tabla 4-77 donde se observa las diferentes respuestas de los docentes frente a este subítem.

Tabla 4-77. *Respuesta dada por los docentes frente al subítem 3.g*

C.E.3: Problema de Bombelli
Situación-Problema 3: Problema de la raíz

Pregunta 3.g
¿Se podría utilizar otro método para resolver el problema? Justifique su respuesta
Significado Parcial 3: Método de aproximación de la raíz cúbica

P1


Si, aplicando la teoría de Al-Kayyam para obtener raíces, a partir de parábolas y circunferencias

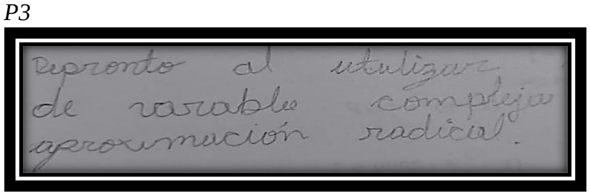
Valoración: Si

P2


No se me ocurre ninguno

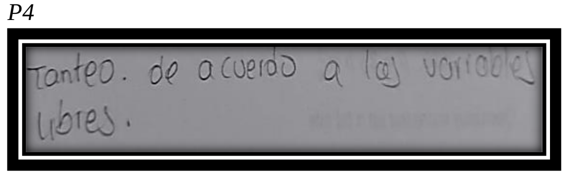
Valoración: No

P3


De pronto al utilizar de variable compleja aproximación radical.

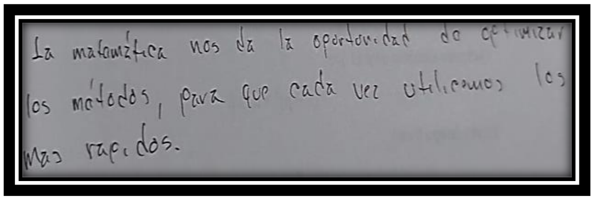
Valoración: Si

P4


Tanteo. de acuerdo a las variables libres.

Valoración: Si

P5


La matemática nos da la oportunidad de optimizar los métodos, para que cada vez utilicemos los mas rapidos.

Valoración: Si

Conclusión

La mayoría de los docentes mencionan que, si se puede usar otro método para resolver el problema, pero estos métodos son complejos para el novel educativo en el que se encuentran los estudiantes si se llega el momento para explicarlo.

Nota. Elaboración Propia

Teniendo en cuenta la tabla 4-77 se puede decir que los 5 profesores dan solución al problema utilizando los conocimientos respectivos al objeto inecuaciones, pero la mayoría de ellos identifica como tal posibles generalizaciones y conexiones de la tarea con otros temas más avanzados lo cual indica que presenta un conocimiento acorde a los diferentes métodos de solución de las inecuaciones. En este sentido se establece que los docentes tienen un nivel alto de domino respecto a diferentes métodos de solución para el objeto inecuaciones.

Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Ampliado del Contenido.

A partir del análisis realizado al CAC, se considera que en general los docentes presentan, debilidades, ya que, presentan falencias en sus conocimientos y en algunos casos dificultad al dar solución a situaciones problemáticas relacionadas con el Conocimiento Ampliado del Contenido, la mayoría de estos subítems fueron difíciles para los docentes ya que no daban una solución acorde a la pregunta cómo se puede observar en la sección anterior.

4.8 Análisis del conocimiento Especializado del Contenido

Este conocimiento según Pino-Fan, Godino y Font (2013a, 2013b), corresponde al conocimiento extra, que distingue al profesor de otros profesionales que no son profesores pero que tienen una preparación afín en matemáticas: se refiere al conocimiento especializado del contenido matemático en cuestión, para el cual es necesario que el profesor tenga en cuenta tanto la diversidad de significados y la diversidad de objetos y procesos que conllevan dichos significados (Vásquez, 2014).

Por tal razón para evaluar este conocimiento, se tiene presente la reflexión epistémica de los docentes sobre los conceptos o propiedades que se ponen en juego en la solución de las situaciones problemáticas planteadas. Parta esto se diseñaron distintas situaciones problemáticas que según Godino (2009), para responder a estas preguntas, los docentes tienen que identificar los distintos conceptos o propiedades involucrados en la solución de la situación problema.

En esta dirección, para analizar el conocimiento especializado del contenido sobre el objeto inecuaciones que posee los docentes de matemáticas, se diseñaron subítems donde se pregunta por los conceptos o propiedades para solucionar una situación problema y corresponde a los subítems: **1.a, 1.d), 1.e), 1.f), 2.c), 2.f), 3.a), 3.e), 4.a), 4.c), 4.g).**

Al igual que con el conocimiento común y el conocimiento ampliado del contenido, este conocimiento no se puede observar, pero se pueden utilizar las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes para dar respuesta a las situaciones problemáticas planteadas (Godino, Batanero y Font (2007); Vásquez (2014)).

Por lo tanto, se presenta el análisis de alguno de los subítems, que se relacionan con la categoría de conocimiento especializado del contenido.

Análisis del Subítem 3.

Con este ítem se buscaba evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los docentes al momento de identificar elementos de la configuración epistémica relacionada con el problema 3 (Problema de Bombelli)

Análisis del subítem 3.e)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento especializado en relación con la comprensión de los docentes al determinar los objetos primarios que se involucran en la solución del problema 3.

A continuación, se presenta la tabla 4-78 respecto a las respuestas dadas por los docentes frente al subítem 3.e)

Tabla 4-78. *Respuestas dadas por los docentes frente al subítem 3.e*

Pregunta 3.e **De acuerdo a la solución planteada por Bombelli, complete la siguiente tabla**							
Elementos Primarios							
Profesores	**Lenguajes**	**Nombre de la situación problema**	**Conceptos**	**Proposiciones**	**Procedimientos**	**Argumentos**	**Nombre del significado parcial**
P1	SI	SI	SI	SI	NO	SI	SI
P2	SI	NO	SI	NO	SI	NO	SI
P3	SI	SI	SI	SI	SI	SI	SI
P4	NO	SI	SI	NO	NO	SI	NO
P5	SI	SI	SI	NO	SI	NO	NO
Conclusión **La mayoría de docentes logran dar un nombre adecuado a la situación-problema, además identifican los *conceptos* involucrados en la solución, por lo tanto, identifica los procedimientos involucrados en el problema. Además, la mayoría de ellos logra identificar el significado emergente de la práctica matemática con relación a la solución del problema. Algunos profesores generaron argumentos que los conllevaron a determinar los elementos lingüísticos asociados al problema.**							

Nota. Elaboración Propia

Teniendo en cuenta la tabla 4-78 se puede decir que los 5 profesores dan solución al problema utilizando los conocimientos respectivos al objeto inecuaciones, además la mayoría de ellos identifican los objetos primarios involucrados en la solución del problema lo cual conllevan a determinar la configuración de objetos primarios identificando adecuadamente el lenguaje, Procedimientos, conceptos-propiedades y argumentos, cabe resaltar que alguno de ellos no logran identificar los objetos adecuados involucrados en la solución del problema. En este sentido se establece que los docentes tienen un nivel alto de domino respecto a la identificación de objetos primarios involucrados en la solución del problema.

Análisis del ítem 4.

Con este ítem se buscaba evaluar el conocimiento ampliado del contenido, en relación con la comprensión de los docentes al momento de identificar elementos de la configuración epistémica relacionada con el problema 4 (EL método de Exhausción)

Análisis del subítem 4.g)

Con este subítem se buscaba evaluar el conocimiento especializado en relación con la comprensión de los docentes al determinar los objetos primarios que se involucran en la solución del problema 4.

A continuación, se presenta la tabla 4-79 respecto a las respuestas dadas por los docentes frente al subítem 4.g)

Tabla 4-79. *Respuesta dada por los docentes frente a la respuesta 4.g*

Pregunta 4.g De acuerdo a la solución planteada en el problema, complete la siguiente tabla							
Elementos Primarios							
Profesores	**Lenguajes**	**Nombre de la situación problema**	**Conceptos**	**Proposiciones**	**Procedimientos**	**Argumentos**	**Nombre del significado parcial**
P1	NO	NO	NO	SI	SI	NO	NO
P2	SI	SI	SI	NO	SI	NO	SI

P3	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI
P4	SI	NO	SI	SI	SI	SI	SI
P5	SI	NO	SI	NO	SI	NO	NO

Conclusión
Algunos docentes no logran dar un nombre adecuado a la situación-problema, pero no identifican los *conceptos* involucrados en la solución, por lo tanto, relacionan los procedimientos alusivos al problema. Además, la mayoría de ellos logra identificar el significado emergente de la práctica matemática con relación a la solución del problema. Algunos profesores generaron argumentos que los conllevaron a determinar los elementos lingüísticos asociados al problema.

Teniendo en cuenta la tabla 4-79 se puede decir que los 5 profesores dan solución al problema utilizando los conocimientos respectivos al objeto inecuaciones, algunos de ellos identifican los objetos primarios involucrados en la solución del problema lo cual conllevan a determinar la configuración de objetos primarios identificando adecuadamente el lenguaje, Procedimientos, conceptos-propiedades y argumentos, cabe resaltar que la mayoria de ellos no logran identificar los objetos adecuados involucrados en la solución del problema. En este sentido se establece que los docentes tienen un nivel medio de domino respecto a la identificación de objetos primarios involucrados en la solución del problema.

Síntesis del análisis de las respuestas a los ítems y subítems sobre el Conocimiento Especializado del Contenido

Se considera que en general, los docentes presentan grandes debilidades en relación con el conocimiento especializado del contenido al igual que con el conocimiento común y ampliado del contenido, ya que, presentan un conocimiento deficiente de la mayoría de los subítems que permitieron evaluar esta categoría del conocimiento didáctico matemático, y esto se evidencia en la dificultad para identificar los objetos primarios presentes en las diferentes configuraciones epistémicas de los problemas propuestos.

5 Capítulo 5. Conclusiones Generales

En este capítulo se presenta un análisis a los resultados obtenidos, así como las conclusiones generales del estudio, además como los principales aportes que conllevaron a dar respuesta a la pregunta de investigación planteada y a los objetivos específicos. Además, se presentan los resultados de las diferentes actividades utilizadas para el logro de cada una de las fases que permitieron llegar al logro del objetivo general del estudio el cual corresponde al conocimiento didáctico matemático del profesor respecto a la enseñanza de las inecuaciones bajo la dimensión epistémica respecto a sus concepciones y creencias de los profesores de matemáticas con base en desarrollo histórico-epistemológico del objeto inecuaciones. Por último, se presenta las apreciaciones hechas por el autor al estudio histórico-epistemológico del objeto inecuaciones.

5.1 Resultados de la investigación

5.2 Primera y Segunda Fase de Investigación

En la primera y segunda fase de la investigación, se realizaron las actividades para llegar al logro del objetivo específico 1 que se relaciona con la reconstrucción del significado global del objeto Inecuaciones, a través del estudio histórico-epistemológico según el origen, evolución y naturaleza del objeto matemático. Esto se realizó a través de un riguroso análisis documental a libros de historia de las matemáticas, tesis doctorales, tesis de maestría, artículos de investigación científica e investigaciones relacionadas con el objeto Inecuaciones, lo cual permitió clasificar el estudio en 3 periodos de la humanidad (época antigua, edad moderna y edad contemporánea). En la época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C) se destacó el trabajo realizado por diofanto, con relación a diversas situaciones problemas relacionadas con: áreas de terrenos, proporciones, cantidades de diferentes elementos como, terrenos, alimentos, objetos entre otros; todos ellos relacionados con las inecuaciones, generando así un sistemas de prácticas matemáticas donde emergen los primeros significados parciales del objeto inecuaciones y se relaciona Inecuaciones con problemas de proporcionalidad.

En el periodo 2. Edad moderna: (1453 d. C – 1789 d. C; siglo XV- siglo XVIII) Rafael Bombelli realizó grandes estudios en el desarrollo del álgebra y a la creación de los números complejos favoreciendo el desarrollo de las matemáticas; además en esta época se encuentra el planteamiento de problemas relacionados con la geometría y el campo complejo, los cuales se traducían en la solución de ecuaciones de grado uno y dos. Sin embargo, hacia el año 1572 surge uno de los aportes europeos más importantes de la época proporcionado por Rafael Bombelli (c.1526 - 1572), el cual corresponde al texto denominado los Cartelli y los Contracartelli, en esta obra se encuentran problemas de algebra y de cálculo. En dicha obra, Bombelli soluciona una situación problema sobre la raíz cúbica de un número complejo utilizando el método de aproximación de la raíz cúbica usando Inecuaciones (significado parcial). Por otra parte, el matemático Gregoire Vicent (1589-1667) desarrollo y estudio diferentes formas de relacionar los números con el infinito aplicando la geometría, el cual soluciona un problema utilizando el método de Exhausción al usar inecuaciones (Significado parcial).

Finalmente, en el periodo 3. Edad Contemporánea (1789 d. C – Actualidad) el análisis a las soluciones de las inecuaciones y de los diferentes métodos de solución, emerge una de las ramas más importante en las matemáticas denominada geometría, donde surgen elementos importantes donde se utilizan las inecuaciones, como es el caso del problema del polígono propuesto por Paolo Ruffini, donde presenta un método de solución donde aplica las inecuaciones lineales y la aproximación de números enteros. Este método consiste en plantear ecuaciones y operaciones elementales con para aplicar inecuaciones y así encontrar la solución; a este sistema de prácticas se le asocia el significado parcial denominado: Despeje de inecuaciones lineales aproximado a enteros.

La segunda fase de investigación denominada concepción y análisis a priori de situaciones didácticas se dividió en dos partes: la primera trata de análisis semiótico a las 4 situaciones-problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto inecuaciones, es decir, se analizó la tipología de los objetos primarios desde la dimensión epistémica (lenguajes, situaciones, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) generando configuraciones las cuales se le otorga un significado parcial emergente al objeto inecuaciones.

Con el desarrollo de la fase I y de la fase II se concluye que el objeto inecuaciones a lo largo de la historia emerge de la solución de diversas situaciones problemas (sistemas de prácticas en diferentes etapas), las cuales están asociadas a 4 configuraciones epistémicas donde cada una de estas se relaciona con un significado parcial del objeto inecuaciones dando paso al significado global del objeto SEL (ver Figura 4.1).

5.3 Tercera Fase de Investigación.

La *tercera fase de investigación* denominada experimentación, permitió el desarrollo de las actividades orientadas al logro del objetivo específico 2 que corresponde al diseño e implementación de un cuestionario respecto a los significados implementados en los procesos de enseñanza del objeto inecuaciones de acuerdo con las creencias y concepciones de los profesores.

El cuestionario se diseñó con las 4 situaciones problemas encontradas en el estudio histórico-epistemológico del objeto inecuaciones. La primer situación-problema llamada *Problema de los vinos,* corresponden al periodo 1: Época antigua (c. 3000 a. C – c. 476 d. C), la segunda situación-problema llamada *Problema de Bombelli, l*a tercer situación problema llamada *Problema de las figuras curvilíneas* corresponden al periodo 3: Edad Moderna (1453 d.C – 1789 d.C: siglo XV-XVIII) y la situación problema 4 llamada *El problema del polígono* corresponde a la Edad contemporánea (1789 d.C -Actualidad). Con la implementación del cuestionario se pretendió identificar las concepciones y creencias del profesor de matemáticas de grado once, respecto a los significados parciales del objeto inecuaciones. Por tal razón se formulan diversas preguntas en donde se cuestiona tanto por la dimensión epistémica del profesor así como sus creencias y concepciones respecto a este objeto matemático con base a las configuraciones epistémicas que realiza el docente, el análisis de los significados de referencia en los textos de matemáticas para la enseñanza del objeto inecuaciones, las implicaciones en la enseñanza de los significados parciales emergentes de las configuraciones epistémicas y finalmente, se preguntó por la pertinencia de las situaciones problemas según el análisis a los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje ya que son parte fundamental del proceso de aprendizaje y establecen algunas de las evidencias en cuanto al desarrollo del pensamiento variacional en relación con los sistemas algebraicos y analíticos.

5.4 Cuarta Fase de Investigación

La cuarta fase de investigación denominada evaluación condujo al desarrollo de las actividades propuestas para dar logro a los objetivos específicos 3 y 4 que corresponden a caracterizar el conocimiento didáctico matemático que poseen los profesores del objeto inecuaciones a partir de las creencias y concepciones para su enseñanza y analizar las implicaciones didácticas que traen las concepciones y creencias de los profesores en cuanto a la implementación de los significados pretendidos en la enseñanza del objeto inecuaciones..

De acuerdo con las categorías de análisis para la dimensión epistémica del CDM del profesor, y en base al desarrollo de las configuraciones epistémicas de cada situación problema se determina que los docentes reconocen la importancia a la tipología de los objetos primarios en el desarrollo de las situaciones problemas, pues mediante ello se puede identificar los elementos que conforman la solución de un problema y se identifican posibles obstáculos epistemológicos que presentan los estudiantes al enfrentarse a la solución de problemas relacionados con SEL.

En cuanto al análisis de los significados de referencia de los textos de enseñanza, los docentes se les dificulta reconocer la importancia de identificar y conocer los diferentes tipos de significados de referencia para el objeto inecuaciones, ya que estos significados constituyen una parte del significado pretendido del profesor y se utiliza para garantizar una buena comprensión del objeto matemático por parte de los estudiantes. Cabe resaltar que es de vital importancia enseñar el origen, la naturaleza y la evolución del objeto matemático inecuaciones, para mejorar los sistemas de prácticas matemáticas en los estudiantes, es decir, se puede mostrar a los estudiantes el objeto matemático inecuaciones como lo concebían a través de la historia y las diferentes culturas de la humanidad y llegar a realizar un contraste de como evoluciono las inecuaciones, los diferentes métodos de solución, el contexto en que se presentaba el objeto matemático y como se relaciona con los métodos conocidos para mejorar así las implicaciones en la enseñanza del objeto en mención, llevando al estudiantes a enriquecer no solo su conocimiento sino también el desarrollo del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos.

Bajo estos argumentos el profesor que enseña matemáticas para el grado once debe conocer la historia y epistemología de los diferentes significados que puede tener el objeto inecuaciones. Por tanto, algunos de los significados institucionales que se deben considerar como significados de referencia en la planificación de los procesos de estudio son: Inecuaciones con problemas de Proporcionalidad, Método de aproximación de la raíz cúbica, Método de Exhausción y Despeje de inecuaciones lineales aproximado a enteros.

5.4.1 Caracterización de la faceta epistémica del CDM

Por otra parte, según Godino (2009), Pino-Fan (2013), Vásquez (2014) **el conocimiento común del contenido** se relaciona con lo conocimientos que no son propiamente matemáticos; que posee cualquier persona para resolver determinada situaciones problemas relacionadas con el nivel educativo en este caso del objeto inecuaciones.

Como conclusión, se establece que el conocimiento común del contenido tiene estrecha relación con los procesos algebraicos de los docentes; este desarrollo del pensamiento matemático es uno de los objetivos principales de la educación de los primeros grados hasta el nivel superior ya que el docente de matemáticas debe generar diversos procesos como abstraer, generalizar, sintetizar, representar, definir, refutar, entre otros.

De igual forma, en la categoría del **conocimiento ampliado del contenido;** que se relaciona con los conocimientos matemáticos que no se requieren necesariamente para la enseñanza y que también tienen estrecha relación con los procesos algebraicos teniendo presente que las practicas realizadas por los docentes son importantes para la enseñanza de las matemáticas.

Finalmente, la categoría del **conocimiento Especializado** que según Pino-Fan, Godino y Font (2013a, 2013b), se relaciona con el conocimiento que distingue al profesor de otros profesionales que no ejercen la docencia pero que tienen una preparación afín en la matemática. Con base en este conocimiento el profesor tiene presente la diversidad de significados, objetos y procesos que conllevan dichos significados (Vásquez, 2014), es decir que el profesor conoce el desarrollo de procesos matemáticos avanzados y logra principalmente la comprensión por parte de los estudiantes.

Con base en las categorías de la faceta epistémica del CDM se determinaron una serie de indicadores para evaluar el CDM a través de prácticas matemáticas relacionadas con la activación de las configuraciones epistémicas de los docentes. Se plantea la hipótesis que los docentes de matemáticas han desarrollado un CCC, CEC y CHC necesario para la enseñanza. En esta dirección es importante contar con instrumentos que permitan evaluar la dimensión epistémica del CDM para determinar el nivel de estos conocimientos necesarios para la enseñanza.

5.4.2 Análisis de la dimensión epistémica del CDM de los Docentes de matemáticas

Según el análisis de las prácticas matemáticas efectuadas por los docentes de matemáticas se considera que en general los docentes tiene grandes dificultades en relación con el **Conocimiento Común del Contenido,** se considera en general que los docentes presentan dificultades en los conocimiento del objeto matemático, estas debilidades o falencias se relacionan con un bajo nivel de dominio ya que en la mayoría de los casos no resolvían adecuadamente las situación problema, además según el índice de dificultad se evidencia estas dificultades.

Bajo la misma dirección, al realizar el respectivo análisis de las prácticas matemáticas de los docentes se considera al igual que con el Conocimiento Común del Contenido, dificultades con relación con el **Conocimiento Ampliado del Contenido** respecto al objeto inecuaciones donde evidencia según el índice de dificultad y las configuraciones epistémicas ningún desarrollo de las prácticas matemáticas.

De igual forma, de las prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes de formación matemática, respecto al objeto inecuaciones se considera que los docentes presentan falencias y dificultades con relación al **Conocimiento Especializado del Contenido**, con base al índice de dificultad donde se presenta un mayor índice de dificultad.

Se establece que los 5 docentes, presentaron dificultades en relación con el CCC, CAC y por tanto del CEC, ya que presentan un conocimiento bajo en la mayoría de los subítems que permitieron evaluar las categorías del conocimiento didáctico-matemático.

5.5 Análisis de las concepciones y creencias.

Por otra parte las concepciones y creencias del profesor de matemáticas respecto al objeto matemático inecuaciones, son en algunos casos delimitados por los libros de texto de matemáticas que ellos toman como referencia para la realización de las clases o para la preparación de secuencias didácticas lo que ocasiona una limitante al momento de la enseñanza-aprendizaje del objeto inecuaciones en los estudiantes; así como el currículo impuesto por las instituciones educativas o simplemente seguir un texto guía, sin buscar otras herramientas u opciones que lleven a cambiar sus creencias en pro de la enseñanza y aprendizaje del objeto inecuaciones a sus estudiantes.

El desarrollo de las actividades para los 4 objetivos específicos lleva al cumplimiento del logro del objetivo general que corresponde a evaluar el conocimiento Didáctico-Matemático de los profesores de matemáticas en su dimensión epistémica, respecto a los significados pretendidos en los procesos de enseñanza, según sus concepciones y creencias, principalmente identificados en el desarrollo histórico-epistemológico del objeto inecuaciones y a los significados pretendidos por ellos para los procesos de enseñanza del objeto matemático.

5.6 Principales aportes de la investigación

Los principales aportes de la investigación son las siguientes:

1) El estudio realizado al objeto matemático inecuaciones, se enfocó en dos aspectos, en primer lugar, el estudio histórico-epistemológico del objeto inecuaciones del cual emergen los significados del objeto en cuestión, permitiendo una comprensión clara del objeto matemático en cuanto a su origen, naturaleza y evolución. En segundo lugar, se observó cómo los libros de texto generan un aporte a los significados de referencia del objeto inecuaciones y a otros elementos relacionados con el objeto matemático. A partir de esto la información se puede utilizar para el desarrollo de nuevas investigaciones relacionadas con el objeto inecuaciones y las concepciones y creencias de los profesores de matemáticas de grado once.

2) Dentro de los principales aportes inmerso en esta investigación, se encuentra la reconstrucción de significado global del objeto inecuaciones (ver Figura 4.1) resultado del estudio histórico-epistemológico del objeto en mención.

3) Finalmente se destaca la construcción, implementación y análisis del cuestionario que permitió evaluar los conocimientos y creencias del profesor de matemáticas de grado once, la dimensión

epistémica en el subcomponente del conocimiento común del contenido, conocimiento ampliado y conocimiento en el horizonte para el objeto inecuaciones, permitiendo contar con resultados originales sobre el conocimiento didáctico matemático del profesor en relación con el objeto inecuaciones.

5.7 Apreciaciones del autor

La labor investigaba de las concepciones y creencias del profesor de matemáticas en la dimensión epistémica del objeto inecuaciones favoreció al autor de esta tesis a reflexionar en lo importante que es para el docente que llegue a conocer y especialmente a reconstruir la naturaleza del objeto matemático inecuaciones, ya que se evidencian elementos lógicos y epistemológicos claves para los procesos de la constitución teórica del objeto inecuaciones en el estudiante y especialmente en el profesor, lo cual posibilitan no solo una mejor comprensión del objeto, sino que revelan aspectos característicos de la actividad matemática de construcción de los objetos matemáticos, los cuales merecen ser tenidos en cuenta por el docente en sus propuestas didácticas. Además, el conocimiento del profesor en el tema del significado global del objeto inecuaciones le permitirá en primer lugar realizar cuestionamientos sobre si los estudiantes que están en formación, asimilan el objeto matemático, al punto que mediante un análisis semiótico puede llegar a identificar la tipología de los objetos primarios que conoce el estudiante, y a la vez identificar algunos obstáculos epistemológicos y semióticos que le permitirán redireccionar el significado institucional de referencia (significado pretendido por el profesor según cada método de solución) enfocado a suplir las falencias encontradas en los estudiantes y de igual forma según este desarrollo, se deben diseñar las estrategias didácticas que lleven a la emergencia de un significado institucional muy cercano al significado global del objeto inecuaciones.

5.8 Limitaciones del estudio

Dentro de las limitaciones de la investigación se identificaron las siguientes:

1) La unidad de análisis a la cual se le aplico el instrumento, corresponde a 5 Licenciados en Matemáticas por lo que cabe aclarar que los resultados no son generalizables, a profesores que enseñan matemáticas en el grado once, de las instituciones públicas y/o privadas a nivel nacional.

2) En la construcción del cuestionario, que permitió analizar el conocimiento didáctico matemático del profesor de matemáticas que enseña en noveno once, solo se consideró el estudio de la dimensión epistémica del conocimiento del docente respecto a los significados de referencia del objeto inecuaciones, dejando de lado las dimensiones (cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica).

\

6 Referencias

Aguirre, M., & Palacios, M. (2014). Las inecuaciones lineales en el escuela: Algunas reflexiones sobre su enseñanza a partir de la identificación de dificultades y errores en su aprendizaje. *(Tesis de Pregrado).* Universidad del valle, Valle del Cauca.

Alvarenga, K. (2006). Inecuaciones: un análisis de las construcciones mentales de estudiantes Universitarios. *(Tesis de Doctorado).* Instituto Politécnico Nacional, México.

Arévalo, B., & Rojas, T. (2015). Un estudio de las Inecuaciones lineales desde el espacio de trabajo Matemático. *Universidad de Valparaíso,* 8.

Arias, F. (1999). *EL proyecto de Investigación.* Caracas: Episteme.

Ávalos, T. (2003). El álgebra como lenguaje alternativo y de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de matemáticas. *Perfiles Educativos, 25,* 50-65.

Azcárate, C., & Moreno, M. (2003). Concepciones y Creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 21*, 265-280.

Ball, D. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching. *Journal of Teacher Education, 51*, 24-241.

Ball, D., Thames, H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Beltrâo, R. (2010). Dificultades dos alunos para resolver problemas com inequaçoes. *Revista Eletronica de Educaçâo Matemática, 5*, 84-95.

Bernardis, S., Nitti, L., & Scaglia, S. (2017). Indagación de la Historia de las desigualdades matemáticas. *Educación Matemática, 29*, 161-187.

Boyer, B. (1987). *Historía de la Matemática.* Alianza.

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la didáctica de las matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), 255-278.

Contreras, A., Font, V., Luque, L., & Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en didactique des Mathemátiques, 25*(2), 151-186.

Crisóstomo, E., Ordóñez, L., Contreras, A., & Godino, J. (2005). Reconstrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la didáctica de la matemática. *Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de Funciones Semióticas* (págs. 125-166). España: Jaen.

De Faria, E. (2008). Creencias y matemáticas. *Cuadernos de Investigación y formación en educación matemática, 3*, 9-27.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Flores, P. (1998). Concepciones y Creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. . *Investigación durante las prácticas de enseñanza*.

Font, V., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçâo Matemática Pesquisa, 8*, 67-98.

Font, V., & Godino, J. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: uso en la formación de profesores. *Educaçâo Matemática Pesquisa, 8*, 67-98.

Font, V., & Rubio, N. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. *Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el 245 Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática* (págs. 1-21). Granada: CIVEOS.

Font, V., Godino, J., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. Educational Studies in Mathematics. *Educ, 82*, 97-124.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática, Infancia y Aprendizaje. *EDUC, 33*(1), 89-105.

Forero, O. (2020). Análisis del nivel de calidad educativo en Colombia, a partir de los resultados de las pruebas PISA en el período 2012-2018. *(Tesis de Especialización).* Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá.

Garay, E. (2018). Conocimientos especializados del profesor sobre los sistemas de ecuaciones lineales en un curso de álgebra lineal para estudiantes de ingeniería. *Tesis de Maestría.* Universidad Católica del Perú, Perú.

García, J., & Chavarro, M. (2013). Una propuesta de Enseñanza para la solución de Inecuaciones por el Método Gráfico, a través del Software GeoGebra. *(Tesis de Posgrado).* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Garrote, M., Hidalgo, M., & Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inecuaciones. *Suma*, 37-44.

Giacomone, B., Godino, J., Wilhelmi, M., & Blanco, T. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 29*(4), 1109-1131.

Gil, R., & Rojas, C. (2014). Cambios en las concepciones iniciales e inducidas sobre la naturaleza de las matemáticas y su didáctica, en estudiantes de un programa de Licenciatura en Matemáticas y Estadística. *Revista de Investigación, desarrollo e innovación, 5*.

Godino, J., Batanero, C., Rivas, H., & Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *REVEMAT, 8*, 46-74.

Godino, J. (2002). Un enfoque Ontológico y semiotico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*, 237-284.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13-31.

Godino, J. (2013a). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 111-132.

Godino, J. (2014). Síntesis del enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática: motivación, supuestos y herramientas teóricas. *Universidad de Granada*.

Godino, J. (2021). De la ingeniería a la idoneidad didáctica en educación matemática. *Revemop,* 1-26.

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado Institucional y personal de los objetos matemáticos. *Researches en Didactique des Mathématiques, 14,* 325-355.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education ZDM. *The international Journal on Mathematics Education*, 127-135.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la isntrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciéncias e Matemática, 10,* 7-37.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque Ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista chilena de Educación Matemática, 12,* 3-15.

Godino, J., Contreras, Á., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 26,* 39-88.

Gonzáles, M., & Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza de la secundaria en España durabte el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*, 389-408.

Goycochea, N. (2012). Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos. *(Tesis de Doctorado).* Universidad de Barcelona, Barcelona.

Halmaghi, E. (2011). Undergraduate Students' Conceptions of Inequalities: Sanding the Lens. *Tesis de Doctorado.* Faculty Of Education Simon Fraser University, Burnaby.

Halmaghi, E. (2012). "Inequalities in the history of mathematics: from peculiarities to a hard discipline". *Annual meeting of the canadian mathematics education study groop* (págs. 171-178). Canada: Université Laval.

Hansen, R., & Hana, G. (2015). Mathematical problem posing from research to effective practice. *Springer*, 35-45.

Hernández, P., & Maquilón, J. (2010). Las concepciones de la Enseñanza. Aportaciones para la formación del profesorado. *REIFOP, 13,* 17-25.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación.* México: McGraw-Hill.

Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 372-400.

Hoyos, N., & Mancilla , D. (2019). Construcción de significados de las inecuaciones lineales en estudiantes de noveno grado a partir de un análisis discursivo. *(Tesis de Licenciatura).* Universidad del valle, Valle de Cauca.

Hoyos, N., & Mancilla, D. (2019). Construcción de Significado de las Inecuaciones Lineales en estudiantes de noveno grado a partir de un análisis discursivo. *(Tesis de Pregrado).* Universidad del valle, Valle del cauca.

Huacso, A. (2018). Análisis De Una Praxeología Matemática De Las Inecuaciones Lineales En Libros Didácticos De Educación Secundaria. *Tesis de Maestría.* Universidad Católica del Perú, Perú.

Liniares, S. (1989). Las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza en estudiantes para profesores de primaria: dos estudios de casos. *Tesis de Doctorado.* Universidad de Sevilla, Sevilla.

Marcelo, C. (1987). El pensamiento del profesor. *Ediciones CEAC*.

Médico, A. (2018). Estimulación de la capacidad de crear problemas sobre sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Un estudio de caso en un grupo de docentes de matemática de los primeros ciclos de educación superior. *(Tesis de maestría).* Universidad católica de Perú, Perú.

Millones, T., & Pino-Fan, L. (2017). EL conocimiento Didáctico-Matemático en las facetas epistémica e interaccional de profesores peruanos sobre la noción de función: Ejemplificando con un estudio de Caso. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1162-1170.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Matemáticas.

Muñiz , J. (1994). *Teoría Clásica de los test.* Madrid: Pirámide.

Muñoz, J., & Charro, E. (2017). Los Items PISA, Una herramienta para la identificación de las competencias científicas en el aula. *Revista Electronica en Educación y Pedagogía, 1*, 106-122.

Narváez, M. (2011). Aprendizaje de las inecuaciones lineales con valor absoluto desde una perspectiva plurregistro. *(Tesis de Maestría).* Universidad del valle, Santiago de Cali.

Neira, G. (2012). Del álgebra al cálculo: ¿Transición o ruptura? Notas para una reflexión epistemológica y didáctica. En O. Lucia, *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (págs. 13-42). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Nieves, M. (2016). Análisis Didáctico a un Proceso de Instrucción del Método de integración por partes. *Bolema, 30*(55), 559-585.

Ortiz, G. (2021). Dificultades de Comprensión y Métodos de Enseñanza de Inecuaciones Lineales en la Universidad. *Revista Científica Hallazgos21, 6*, 124-137.

Pajares, F. (1992). Teachers' belief and educational research: cleaning up a messy contruct. *Review of Educational Research, 62*, 307-332.

Pino-Fan, L. (2013). EValuación de la Faceta epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático de futuros profesores de bachillerato dobre la Derivada. *(Tesis de Doctorado).* Universidad de Granada, España.

Pino-Fan, L., Godino, J., & Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada. *Trabajo presentado en la XIII Escuela del invierno en Matemática Educativa, Instituto tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey*, 206-213.

Pino-Fan, L., Godino, J., & Font, V. (2013a). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico - matemático de futuros profesores sobre la derivada. *REVEMAT*, 1-47.

Pino-Fan, L., Godino, J., & Font, V. (2013b). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (Primera parte). *REVEMAT, 8*(2), 1-49.

Pinzón, J. (2021). Análisis de los resultados de la prueba PISA 2018 en Matemáticas para América. *Revista de Investigaciones Universidad del Quindio, 33*, 104-114.

Piratoba , R. (2016). Relación Entre Las Concepciones En La Enseñanza Y Aprendizaje De La Geometría Con Su Práctica En El Aula. *Tesis de Maestría.* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja.

Ponte, J. (1994). *Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning. En L. Bazzini (ed.), Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the Fifth internacional conference on systematic cooperation between theory and practice in mathemat.* Italia: Grado.

Ramírez, G. (2022). Caracterización de los procesos cognitivo-matemáticos para la validación matemática en el contexto escolar con ambientes de geometría dinámica. *Tesis de Doctorado.* Universidad Autónoma de Querétaro, México.

Rey, J., & Babini, J. (1985). *Historia de las Matemáticas (Vols. 1-2).* Barcelona: Gedisa.

Ribnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas.* Moscú: Mir.

Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 8*(1), 1-15.

Ruiz, A. (2003). *Historia y Filosofía de la Matemática.* San Jose: EUNED.

Sánchez, G. (2020). La evaluación desde las pruebas estandarizadas en la educación en Latinoamérica. *Revista de Investigación en Administración, Contabilidad, Economía y Sociedad.*, *8*, 107-133.

Sepúlveda, D. (2016). Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto grupo. *(Tesis de Doctorado).* Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Tunja.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*, 1-22.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*, 4-14.

Simons, H. (2011). *El estudio de Caso.* Morata.

Soto, F. (2009). Creencias epistemológicas generales, académicas y disciplinares en relación con el contexto. *Universidad de Tarapacá, 9,* 381-389.

Tegua, M., & Cortes, B. (2016). Pertinencia de Medir la educación en matemática en colombia a partir de las pruebas PISA. *(Tesis de Pregrado).* Universidad Francisco José de Caldás, Bogotá.

Thompson, A. (1992). Teachers' belief and conceptions: a synthesis of the research. *Handbook of research on methematics teaching and learning*, 127-146.

Vahos, L. (2015). Diseño de una propuesta para un proceso de enseñanza-aprendizaje de las inecuaciones lineales, con mediación de las TIC, para los estudiantes sordos. *(Tesis de Maestría).* Universidad Nacional de Colombia, Medellín.

Vargas, A. (2013). Propuesta para la enseñanza y aprendizaje de las inecuaciones lineales. *Revista Educación, 37,* 1-16.

Vásquez, C. (2014). Evaluación de los Conocimientos Didáctico-Matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de los profesores de educación primaria en activo. *Tesis de Doctorado.* Universidad de Girona, España.

Velasco, E. (2018). Aprendizaje de las inecuaciones lineales con valor absoluto desde una perspectiva plurirregistro. *Tesis de Maestría.* Universidadd del Valle, Santiago de Cali.

Vicente, L. (1995). *Palabras y Creencias.* España: Universidad de Murcia.

Viloria, A. (2016). Prueba PISA1: Un análisis desde las habilidades Básicas. *(Tesis de Maestría).* Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Anexos