Visualización y Exploración, acciones que se fortalecen en el ambiente de aprendizaje apoyado con Geogebra en la asignatura de Geometría Euclídea en estudiantes Universitarios

Diana Milena Reyes Acosta

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA
ESCUELA DE POSGRADOS SECCIONAL DUITAMA
MAESTRÍA EN TIC APLICADAS A LAS CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DUITAMA, COLOMBIA

2017

Visualización y Exploración, acciones que se fortalecen en el ambiente de aprendizaje apoyado con Geogebra en la asignatura de Geometría Euclídea en estudiantes Universitarios

Diana Milena Reyes Acosta

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:
Magister en Tic aplicadas a las ciencias de la educación

Directora:
Mg. Clara Emilse Rojas Morales

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Escuela de posgrados seccional Duitama
Maestría En Tic Aplicadas A Las Ciencias De La Educación
Duitama
2017

Dedicatoria

A Dios por brindarme en su infinita bondad el regalo de la vida, por estar presente en cada paso a seguir, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente, por darme salud para continuar alcanzando este logro profesional y por haber puesto en mi camino a aquellas personas, amigos y compañeros que han sido soporte y compañía durante estos años de estudio.

A mi Madre Rosita Acosta, por darme la vida, quererme mucho, apoyarme siempre y quien con esfuerzo, nobleza y amor me ha permitido seguir escalando en este ámbito profesional, a mis hermanos con todo mi cariño William, Nelson y Oscar quienes me han brindado todo su apoyo y colaboración, a mis hermanas Sonia y Alexandra quienes me alientan y se esfuerzan por ayudarme incondicionalmente, quienes pacientemente estuvieron en la superación de muchos momentos difíciles, a todos y cada uno de sus grupos familiares que estuvieron presentes en la consecución de mis metas, un sentido agradecimiento a mi querida hermana Glorita quien siempre estuvo conmigo siendo parte de los frutos que iba cosechando y que ahora siempre estará en nuestros corazones dejándonos una gran enseñanza de vida. A Juan Gabriel quien a pesar de las dificultades me ha brindado su incondicional apoyo y su valiosa colaboración sin dejarme recaer en momentos difíciles.

Agradecimientos

Manifiesto mi amplio agradecimiento a la directora y asesora de esta investigación, Magister en Docencia de las Matemáticas Clara Emilse Rojas Morales, por darme la oportuna atención cuando lo necesité, por su paciencia, motivación, criterio y valiosa dirección, siendo un privilegio contar con su guía y colaboración durante estos años.

Mi agradecimiento a la comunidad de aprendizaje de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia por brindarme la oportunidad de profesionalizarme y afianzar los conocimientos adquiridos y al grupo de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística quienes fueron objeto de investigación.

Resumen

Esta investigación presenta una propuesta del ambiente de aprendizaje soportado por el uso sistemas de Geometría Dinámica para favorecer las acciones de visualización y exploración de los estudiantes que cursan la asignatura de Geometría Euclídea, en segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC Seccional Duitama. Se realizó una revisión de la teoría, estudios e investigaciones relacionadas con la Geometría Dinámica en el aula desde la perspectiva del estudiante y la del docente, con el objetivo de relacionarlas entre sí.

Se incluye en la propuesta ambientes de aprendizaje apoyados por la incorporación del Software Geogebra, donde se involucra al estudiante en un proceso de comprensión y aprendizaje, iniciando con situaciones que contemplan los conocimientos y habilidades planteadas en el currículo escolar del Ministerio de Educación Nacional (MEN), nociones básicas de geometría plana que debe alcanzar un estudiante al culminar el nivel de bachillerato, siguiendo con elementos de reflexión sobre la importancia de recuperar en la formación de profesores de matemáticas, escenarios de actividad geométrica generando espacios de interacción con la Geometría Dinámica, donde se potencia la visualización y la exploración, procesos que van a propiciar vías hacia la justificación y por qué no demostración de hechos geométricos.

Se destaca la importancia de utilizar entornos virtuales permitiendo que el docente no se quede atrás en la utilización de recursos tecnológicos para la enseñanza, los cuáles favorezcan su desempeño profesional, convirtiéndose en un reto al implementar estrategias que despierten el interés del estudiante por aprender.

Se observa que el ambiente obtuvo resultados favorables, esto generado por la mediación TIC, principalmente por la inclusión del Software Geogebra, registrado tanto en los avances significativos de las producciones de los estudiantes como en los resultados de la triangulación de las estrategias de aprendizaje y de los diferentes métodos de recolección de información. Sin embargo, se presentan algunas recomendaciones a lo largo del documento acerca del uso de un SGD (Software de Geometría Dinámica) en una clase de geometría, así como el rol del docente y las implicaciones de diseñar actividades mediadas por este.

Palabras clave: Visualización; Exploración; Geometría Euclídea; Geometría dinámica; Formación de Profesores.

Abstract

This research presents a proposal of the learning environment supported by the use of Dynamic Geometry systems to help the students′ visualization and exploration actions who study Euclidean Geometry, second semester of the Degree in Mathematics and Statistics of the UPTC Duitama. A review of the theory, studies and research related to Dynamic Geometry in the classroom was made from the perspective of the student and the teacher, which objective is relating them to each other.

In the proposal is included learning environments supported by the incorporation of Geogebra Software, where the student is involved in a process of understanding and learning, starting with situations that contemplate the knowledge and skills raised in the school curriculum of the Ministry of National Education (MEN), basic notions of flat geometry that a student must reach at the end of the high school, following with elements of reflection on the importance of recovering in the training of mathematics teachers, scenarios of geometric activity generating interaction spaces with Dynamic Geometry, where visualization and exploration are enhanced, processes that will lead to ways towards justification and why not demonstration of geometric facts.

The importance of using virtual environments is highlighted, allowing the teacher not to be left behind in the use of technological resources for teaching, which help his professional performance, becoming a challenge when implementing strategies that awaken the interest of the student to learn.

We see that the environment got good results, this generated by ICT mediation, mainly by the inclusion of Geogebra Software, registered both in the significant advances in the productions students′ and in the results of the triangulation of learning and learning strategies and the different methods of collecting information. However, some recommendations are presented throughout the document about the use of an SGD (Dynamic Geometry Software) in a geometry class, as well as the teacher′s role and the implications of designing activities mediated by it.

Keywords: Visualization; Exploration; Euclidean geometry; Dynamic geometry; Teacher Training.

Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Cuadros

1. INTRODUCCIÓN

Este documento es resultado de la investigación realizada con estudiantes de segundo semestre que cursan la asignatura de Geometría Euclídea de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC Seccional Duitama, con el objetivo de incorporar el Software de Geometría Dinámica Geogebra en el ambiente de clase, analizando el impacto en la formación inicial del docente frente a procesos de razonamiento ligados al campo geométrico, como son las acciones de visualización y exploración que llevan a la justificación de hechos geométricos.

Este estudio contribuye no solamente a la formación del profesor sino también a reflexionar sobre cómo las TIC se convierten en un componente en la generación de ambientes favorables para el aprendizaje. El documento se ha estructurado de la siguiente manera: El primer capítulo, da lugar la descripción y formulación del problema puntualizando en algunas investigaciones en que se fundamenta este proyecto, se expone la justificación del problema planteado, así como los propósitos y objetivos propuestos.

El segundo capítulo, presenta los fundamentos teóricos de la investigación, una revisión del lugar de las matemáticas y la geometría en las políticas curriculares, algunas consideraciones sobre el uso de la tecnología en el currículo escolar y el ambiente dinámico y el GeoGebra en el aula de clase, aspectos sobre la Visualización y Exploración, acciones que propician vías a la justificación, se evidencia la Tradición Investigativa en aspectos como la Geometría dinámica y la actividad demostrativa en la formación de profesores y la Visualización en la enseñanza de la Geometría.

El tercer capítulo, está dedicado a la descripción del fundamento metodológico, enfoque, tipo y construcción del sistema de categorías emergentes y deductivas, selección de las comunidades o sujetos de investigación y procesos de recolección de la Información.

El cuarto capítulo aborda las etapas del estudio, se muestra la organización de los pasos realizados como son las fases diagnóstica, instructiva y de aprendizaje con Geogebra y su correspondiente caracterización, se describen los sistemas de recolección de la información, análisis y aplicación, así como también la validación de los datos cualitativos: sistemas de triangulación de la información, credibilidad, transferibilidad y dependencia.

En el quinto capítulo, se presenta un análisis cualitativo de la información recolectada en implementación de las fases propuestas para la investigación: Diagnóstica, Instructiva con Geogebra "Taller Explorando con Geogebra" y Sesiones de aprendizaje que incluyen el compendio para obtener los resultados de la valoración final en todas las acciones de desempeño. Se resalta la Geometría dinámica como herramienta que le permite al profesor identificar las conjeturas y justificaciones que dan sus estudiantes a partir de la visualización y exploración de los objetos geométricos, con el fin de indicar su validez, convirtiéndose en un elemento que apoya el aprendizaje como la enseñanza, validado por autores como José Ortiz Buitrago (2006), Perry, Camargo, y Molina (2012), entre otros.

Se presentan los resultados del nivel inicial y final de los estudiantes en la asignatura de Geometría Euclídea durante primer semestre del año 2017, las secuencias y los ambientes de aprendizaje de las fases apoyadas por el uso de SGD Geogebra y los rasgos generales de la implementación. Se analizan las producciones y respuestas de los estudiantes a la luz de las categorías expuestas en el marco teórico, valorando los avances obtenidos y retroalimentando en las dificultades encontradas.

Se muestran los resultados de la apropiación de las acciones de visualización y exploración vía a la justificación a partir del uso del software Geogebra, la comparación en la diferencia de proporciones en los niveles de desempeño en la fase diagnóstica y la valoración final. Se cierra el capítulo con las consideraciones finales de los estudiantes al culminar el curso donde se muestra a manera de sugerencia algunas recomendaciones para afianzar las acciones de visualización y exploración.

En el capítulo seis, se presenta el impacto social alcanzado en la investigación, así como en el capítulo siete, las conclusiones, recomendaciones y limitaciones sobre el ambiente de aprendizaje, las situaciones problema y la geometría dinámica. Finalmente, se presentan los anexos conformados por los ejemplos de los instrumentos utilizados en la recolección de información, las sesiones de las tres fases implementadas en la investigación, los resultados del desempeño en los procesos analizados y la encuesta final donde se obtuvieron las consideraciones al finalizar el curso de Geometría Euclídea.

2. FUNDAMENTOS DEL PROYECTO

2.1. Descripción del problema

Dentro del currículo del Programa de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística (LME) de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC) se imparte la asignatura de Geometría Euclídea ubicada en segundo semestre. De acuerdo con el enfoque del programa permite indagar los conceptos geométricos de los estudiantes durante su formación en básica y media de escolaridad, y a partir de ellos favorecer la axiomatización en los procesos lógicos de la inducción y la deducción y como lo afirma Vasco (2006) la geometría permite al estudiante realizar un avance significativo en el desarrollo lógico del pensamiento matemático.

De otro lado, según conversaciones con profesores que han impartido la asignatura ésta se incorpora en un nivel básico en el uso de la tecnología, partiendo del principio que es mejor iniciar con trabajo de regla y compás, sin embargo se desaprovechan las habilidades y destrezas ue se adquieren al hacer uso de diversas herramientas tecnológicas. Esta postura reafirma las concepciones del autor Alberto Cañas (2013), experto participante del encuentro internacional de educación, encuentro que pretendía responder a la pregunta ¿Cómo debería ser la educación del siglo XXI?.

> El tiempo que dedica el currículo universitario a las TIC en la formación del profesorado no es suficiente, teniendo en cuenta la demanda que la sociedad tiene sobre la formación tecnológica del docente. Ésta no debe centrarse en el uso de herramientas tecnológicas sino en su aplicación pedagógica. (Telefónica, 2013, p. 28)

Por otro lado, a partir de diversas investigaciones sobre el estudio de la geometría en el aula y en especial con el uso de herramientas TIC, se han demostrado óptimos resultados en donde se potencian las habilidades del estudiante, siendo éste partícipe de su propio aprendizaje; sin embargo, durante la educación básica y media, se le sigue dando poca importancia al estudio de la geometría en el currículo escolar que afecta el desempeño del estudiante en la universidad, como indican varias investigaciones (Espinal, 2010; González, 2014; Scaglia & Götte, 2008) desarrollando el contenido condicionado al tiempo que determine el profesor a la asignatura de geometría en el aula de clase.

Lo anterior repercute en que cuando los estudiantes inician su formación como docentes de matemáticas, no presentan habilidades para trabajar con problemas en la que hay que utilizar el razonamiento geométrico, entendiéndose éste como el desarrollo de cadenas argumentativas, apoyándose en la exploración visual, en los procesos de comprobación e interpretación, descubrimiento y verificación de conjeturas; son pocos los estudiantes que logran resolver acertadamente dichas problemáticas y tener éxito ante éstas situaciones. La Licenciatura en Matemáticas y Estadística no es ajena a ésta situación ya que los aspirantes a profesor no poseen un dominio de los conocimientos geométricos y/o uso de herramientas TIC, como lo evidencia una prueba diagnóstica aplicada al inicio de esta investigación y sobre lo que más adelante se aborda.

Se esperaría que los estudiantes que ingresan a la Universidad al programa de Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC, dominaran las TIC, puesto que sus edades oscilan entre los 15 y 25 años, considerados nativos digitales, pero esto se corrobora de manera no satisfactoria con el diagnóstico aplicado a los estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura que cursan la asignatura de Geometría Euclídea, quienes son la población objetivo de la presente investigación. Se destaca que los estudiantes a pesar de haber recibido un curso de Geometría Analítica en el primer semestre de la Licenciatura, sus conocimientos en el dominio geométrico son escasos así como el conocimiento y uso de herramientas TIC, particularmente con software especializado de matemáticas.

El diagnóstico aplicado en febrero de 2017 a los estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC, se realizó con el fin de identificar el nivel de desempeño, y contrastar así el paso de la educación secundaria a la universitaria indagando los conceptos previos en geometría y el manejo de TIC.

Los resultados de los estudiantes en el diagnóstico muestran la falta de conocimientos en geometría y el fracaso en el desarrollo de situaciones problema y construcciones geométricas elementales, se identifica que no todos los estudiantes poseen habilidades con el manejo de instrumentos como regla y compás, sumada a éstas los estudiantes presentan un nivel mínimo de visualización es decir el estudiante no reconoce propiedades ni relaciones en una representación gráfica dada o construida ya sea en geometría dinámica (entiéndase ésta como ambientes tecnológicos para trabajar con objetos geométricos) o en lápiz y papel, y es allí que al relacionar todos estos elementos geométricos y definiciones donde se verifican características dadas se identifica la no apropiación de conceptos y saberes geométricos.

Dentro de la geometría se potencializa la visualización y se destaca el propósito de ésta desde su fundamento teórico "percibir, detectar y evocar propiedades geométricas de un objeto o de las relaciones entre objetos" (Samper, Corredor, & Echeverry, 2014, p. 69), al contrastarlo con las actividades diagnósticas realizadas por los estudiantes, donde se pueden aprovechar las habilidades de visualización, se identifica que los estudiantes no tienen claros los conceptos geométricos fundamentales, no utilizan un lenguaje geométrico correcto y no logran identificar relaciones ni propiedades geométricas.

Al mismo tiempo del análisis de los resultados se evidencia la escaza orientación que tuvieron los estudiantes frente al área de geometría así como la utilización de herramientas TIC en el aula, donde tan solo 3 estudiantes tuvieron un mínimo acercamiento con algún SGD o herramientas TIC enfocadas al estudio matemático. Destacando como afirman las autoras, Sara Scaglia y Marcela Götte (2008) "En particular, es sabido que la utilización en clase de un sistema de geometría dinámica es una práctica que no está instalada en nuestras aulas" (p. 35).

2.2. Formulación del problema

¿Cómo la intervención de un Software de Geometría Dinámica como Geogebra favorece los procesos de visualización y exploración vías a la justificación de hechos geométricos?

2.3. Justificación

La formación de los maestros se debe ajustar a las situaciones reales en cuanto a uso y manejo de TIC, no porque sea malo el contenido sino por la forma como se enseña ese contenido, así que como el planteamiento defendido por Rodrigo Ferrer en encuentro internacional de educación titulado 20 Claves Educativas para el 2020:

> El rol del profesor ya no debe discurrir por el aporte de información, sino en orientar a cada alumno en su proceso de búsqueda y tratamiento de la información, para que sea él quien de manera activa y experimental construya su propio conocimiento. (Telefónica, 2013, p. 28)

Es así que esta investigación aborda el aprendizaje de la Geometría, encaminada a fortalecer los procesos de justificación a partir de la visualización y exploración de propiedades y relaciones de objetos geométricos, en un Entorno de Geometría Dinámica en que se incorpora el Software de Geometría Dinámica denominado en adelante SGD, y en particular el Geogebra, el cual es un software de adquisición gratuita, que representa el comportamiento gráfico de los conceptos matemáticos, contribuye a mejorar la actividad matemática y fortalece las competencias en los procesos de visualización y exploración de la Geometría.

Reconociendo el ambiente de aprendizaje que se genera con el Geogebra, destacando las potencialidades de los SGD, el uso reflexivo de este, la motivación que genera en los estudiantes, se aborda la geometría desde una mirada interactiva que ayuda a visualizar contenidos matemáticos difíciles de alcanzar en un dibujo estático, enriqueciendo la formación del estudiante al resolver dificultades y observar propiedades geométricas en unos pocos segundos, factores valiosos que reconoce el futuro educador tanto en el desarrollo geométrico como en el uso de las TIC, con el fin de apropiarse de dichas situaciones y desarrollarlas en su futuro rol como docente, ganando además en competencia profesional generando ambientes de aprendizaje favorables para la actividad geométrica.

Además, el conocimiento geométrico es tan importante que desde las políticas curriculares se fomenta su estudio, como lo muestra la propuesta de los estándares proporcionada por el Ministerio de Educación Nacional frente al estudio de la geometría, se inicia desde la primaria apoyándose en los contextos y materiales físicos que permiten a los estudiantes percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar dichas conjeturas. En educación Básica y Media el razonamiento geométrico se independiza de modelos y materiales, y se empieza a trabajar con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones (MEN, 1998).

Desde la importancia del desarrollo de la geometría en el aula y el uso de las herramientas tecnológicas, este trabajo investigativo busca aprovechar el SGD Geogebra, como recurso TIC para potenciar la visualización que lleve a desarrollar procesos de justificación, se rescatan diversos estudios presentados por Souto (2009), sobre Visualización en matemáticas, destaca que desde hace años investigaciones apuntan a la existencia de dificultades de aprendizaje relacionadas con los procesos de visualización y su análisis, planteándose interrogantes sobre el porqué los estudiantes no aprovechan los recursos de la geometría, buscando además situaciones en que sea beneficioso el uso de las imágenes.

Además, Miguel de Guzmán (2000) señala que los seres humanos apoyan cerca del 90 % de sus actividades en percepciones visuales; es así que, frente a la importancia que la geometría imprime en el desarrollo del estudiante, se hace necesario incluir en la formación inicial de los futuros profesores contenido crítico y profundo de la geometría, centrando su atención en el rol de la visualización.

Es así que en el rol de docente investigadora, inquieta por que los estudiantes lograran avanzar en cada uno de los niveles de visualización y exploración, desarrollando cadenas argumentativas en intentos de validar o invalidar conclusiones logrando procesos de justificación de hechos geométricos, se propició un desarrollo en el aula de clase en donde se generaron experiencias con el uso de las tecnologías, proporcionando como docente investigadora un ambiente de aprendizaje, logrando una utilización reflexiva del entorno, con una visión fundamentada en el aprendizaje de la geometría, construyendo el sentido de las acciones realizadas para que como futuros educadores generen las experiencias vividas.

Además como docente y a la vez investigadora reafirmo pautas, reflexiones y recomendaciones que se pueden integrar al desarrollo del curso de geometría en general mostrando algunos parámetros a seguir en el estudio de la misma, en el programa de Licenciatura en Matemáticas y Estadística.

2.4. Objetivos

2.4.1. Objetivo General

Incorporar el SGD Geogebra en el ambiente de clase de la asignatura de Geometría Euclídea, para favorecer procesos de visualización y exploración en la formación inicial del profesor de matemáticas con estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC.

2.4.2. Objetivos Específicos

1. Evaluar el nivel inicial de los estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC en la asignatura de Geometría Euclídea, frente a procesos de visualización y exploración encaminados a la justificación y el nivel de competencia en el manejo de las TIC.

2. Diseñar ambientes de aprendizaje apoyados en el uso de Software de Geometría Dinámica, a partir de situaciones problema donde se articule el conocimiento geométrico elemental del estudiante, el dominio de Geogebra y el uso de la plataforma virtual moodle, buscando fortalecer los procesos de visualización y exploración encaminados a la justificación.

3. Determinar el avance de los estudiantes en la apropiación de los procesos de visualización y exploración vía a la justificación a partir del uso del software Geogebra en la asignatura de Geometría Euclídea de los estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC durante el primer semestre del año 2017.

3. MARCO DE REFERENCIA

3.1. Marco conceptual

3.1.1. El lugar de las matemáticas y la geometría en las políticas curriculares

La contribución del Ministerio de Educación Nacional (MEN), se ha centrado en aportar políticas curriculares para fortalecer el desarrollo de las capacidades de razonamiento, el ejercicio de la abstracción, el rigor y la precisión en los estudiantes con el fin de aportar al avance de la ciencia y la tecnología en Colombia. Es por eso, que los currículos se han centrado en llenar una lista de contenidos más o menos extensos con definiciones, propiedades de objetos matemáticos, axiomas, teoremas y procedimientos algorítmicos para formar a todos los estudiantes en el razonamiento lógico y en los conocimientos matemáticos (MEN, 2006).

Los argumentos del MEN anteriormente mencionados, fueron cuestionados, concluyendo que la ciencia y la tecnología no son tareas exclusivas de las matemáticas sino de todas las áreas, además se reconocieron tres factores adicionales como prioritarios: la necesidad de una educación básica de calidad para todos los ciudadanos, el valor social ampliado de la formación matemática y el papel de las matemáticas en la consolidación de los valores democráticos. "Así pues, los fines de tipo personal, cultural, social y político de la educación matemática, aunque plantean nuevos y difíciles problemas, abren nuevos horizontes y refuerzan las razones para justificar la contribución de la formación matemática a los fines de la educación" (MEN, 2006, p. 48).

Por otra parte, la preocupación del MEN por formar estudiantes matemáticamente competentes, requiere que los docentes se apoyen en las nuevas tendencias en enseñanza de las matemáticas, reflexionen, exploren y se apropien de supuestos sobre las matemáticas tales como: "Las matemáticas son también el resultado acumulado y sucesivamente reorganizado de la actividad de comunidades profesionales, resultado que se configura como un cuerpo de conocimientos (definiciones, axiomas, teoremas) que están lógicamente estructurados y justificados" (MEN, 2006, p. 50).

Ser matemáticamente competente, para el Ministerio de Educación se basa en los discursos sobre las competencias "la teoría del aprendizaje significativo" de Ausubel, Novak y Gowin, y la de la enseñanza para la comprensión de Perkins, Gardner, Wiske y entre otros; la primera extiende el aprendizaje a su inserción en prácticas sociales con sentido, utilidad y eficacia. En la segunda, la comprensión relaciona los desempeños de comprensión, que son actuaciones, actividades, tareas y proyectos en los cuales los estudiantes muestran la comprensión adquirida se consolida y profundiza. También ser matemáticamente competente, requiere que el estudiante use la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, para avanzar en el camino hacia la demostración (MEN, 2006).

En los Lineamientos Curriculares de Matemáticas se contemplaron cinco procesos generales que son: (1) formular y resolver problemas; (2) modelar procesos y fenómenos de la realidad; (3) comunicar; (4) razonar, y (5) formular comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos. Frente a dichas consideraciones la presente investigación se desarrolla en el marco del proceso de razonamiento, el cual inicia desde la primaria apoyándose en los contextos y materiales físicos que permiten a los estudiantes percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar o refutar dichas conjeturas. En básica y media el razonamiento se independiza de modelos y materiales, y se empieza a trabajar con proposiciones y teorías, cadenas argumentativas e intentos de validar o invalidar conclusiones, como complemento los docentes suelen apoyarse también en algunos casos en pruebas e interpretaciones con modelos, materiales, dibujos y otros artefactos (MEN, 1998).

En otro aspecto, el razonamiento debe proporcionar en los estudiantes situaciones de aprendizaje en temas como los razonamientos espaciales, métricos y geométricos, el razonamiento numérico y, en particular, el razonamiento proporcional apoyado en el uso de gráficas. Así como, aplicar tanto el razonamiento lógico inductivo y abductivo, al formular hipótesis o conjeturas, como el razonamiento deductivo, al intentar comprobar la coherencia de una proposición con otras aceptadas previamente como teoremas, axiomas, postulados o principios, o al intentar refutarla por su contradicción con otras o por la construcción de contraejemplos e intentar avanzar hacia a demostración formal. En especial, el estudio de la geometría euclidiana es un campo muy fértil para el cultivo de la abstracción, la generalización, la definición, la axiomatización y, ante todo, de la deducción formal a partir de axiomas, por tener una articulación óptima entre lo intuitivo y lo formal, lo concreto y lo abstracto y lo cotidiano y lo académico (MEN, 2006).

En cuanto a, la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación, el MEN en los Estándares Básicos de Competencias refiriéndose al pensamiento espacial y los sistemas geométricos plantea que se deben proponer actividades individuales o grupales encaminadas a definir estrategias para que los estudiantes puedan interpretar, analizar, modelar y reformular la situaciones problemas; así como formular preguntas y nuevos problemas, conjeturas o hipótesis; que le permitan explicar, justificar (y aun demostrar) o refutar sus propias conjeturas e hipótesis;

mediante materiales manipulativos, o producir, interpretar y transformar representaciones (verbales, gráficas, geométricas); usando lápiz, papel o regla y compas u otros programas de computador; comparar y discutir los resultados obtenidos con o sin computador. En este sentido, las actividades estimuladas por situaciones permiten avanzar y profundizar en la comprensión, en las habilidades y en las actitudes de los estudiantes, es decir, ser matemáticamente competente (MEN, 2006).

Por otra parte, la UNESCO en el estudio TERCE (Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo) de los años 2010 a 2014, realizó un análisis fundamentado en la perspectiva curricular los países participantes de América Latina y el Caribe, entre ellos incluido Colombia. Dicho análisis lo llevó a cabo el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES), derivado de la actualización del análisis curricular elaborado para SERCE (Segundo Estudio Regional Comparativo y Explicativo). El análisis fue realizado a partir de los criterios compartidos en los documentos curriculares, los textos escolares y los enfoques sobre la evaluación de los 15 países participantes. Muchos de ellos mencionan explícitamente los objetivos de formar ciudadanos autónomos, personas capaces de razonar creativa y críticamente, participantes activos de la sociedad, que comprenden tanto la realidad como su propia capacidad para modificarla. Este estudio también revela en cuanto a la dimensión pedagógica, un enfoque al desarrollo cognitivo/sociocultural y constructivista de los estudiantes, dándole protagonismo en el proceso de aprendizaje, tomando en cuenta su conocimiento previo y su contexto sociocultural (Flotts, Manzi, Saldaña, Mejías, & Abarzúa, 2016).

Los aprendizajes que se consideran dentro del dominio geométrico en el TERCE son: el significado de los atributos y propiedades de figuras, nociones de horizontalidad, verticalidad, paralelismo y perpendicular. También nociones de congruencia y semejanza entre figuras (casos de ampliación y reducción) y, lectura, interpretación y representación de éstas en el plano, así como sus propiedades (Flotts et al., 2016).

Es de gran importancia resaltar los resultados en la prueba TERCE, donde Colombia ocupa el noveno puesto; destacando que de los estudiantes de grado 6° que participaron en la aplicación de la prueba, el 42 % respondieron correctamente, se puede mencionar que dichos resultados muestran la falta de conocimientos que tienen los estudiantes en el área de geometría y la dificultad que presentan en el dominio de saberes geométricos. (Flotts et al., 2016).

3.1.2. Uso de la tecnología en el currículo escolar: Ambiente dinámico en el aula de clase

El Ministerio de Educación Nacional, propone reflexiones que dan lugar a que la comunidad de educadores matemáticos tengan una nueva visión de las matemáticas escolares entre ellas está el reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones.

Por tal razón, desde los Lineamientos Curriculares del área de matemáticas elaborados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998) se enfatiza el uso de las TIC en los procesos de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas. Se destaca que "antes de pensar en la introducción de las calculadoras y de los computadores en el aula, es indispensable pensar primero en el conocimiento matemático tanto desde la disciplina misma como desde las transposiciones que éste experimente para devenir en conocimiento enseñable" (p.17).

Por otra parte, entre los referentes curriculares de la asignatura Matemática, sobre la nueva visión del conocimiento matemático en la escuela plantean: (MEN, 1998, p. 18)

> Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar.
>
> El uso de los computadores en la educación matemática ha hecho más accesible e importante para los estudiantes temas de la geometría, la probabilidad, la estadística y el álgebra.
>
> Las nuevas tecnologías amplían el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas que se tienen, enriquecen el currículo con las nuevas pragmáticas asociadas y lo llevan a evolucionar.
>
> El uso efectivo de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación es un campo que requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes.

Se destaca que el uso de las TIC está planteado en los lineamientos curriculares, con el fin de incorporarlas y hacer uso efectivo de ellas, de ahí la motivación de desarrollar un estudio en el que se dé la importancia en la formación del docente, este campo es un amplio referente de investigación en la actualidad, permitiendo que los estudiantes en su formación docente logren involucrar el uso de herramientas TIC en su quehacer profesional.

Por ende la formación del profesor es uno de los pilares de importancia en la orientación y desempeño del estudiante es así que para orientar cualquier tópico de matemáticas, el futuro docente debería saber mucho más y con mayor profundidad que lo que enseña, aunque no se puede dominar todo el conocimiento antes de iniciar a enseñar; tan solo el hecho de enseñar ayuda al docente a adquirir tanto profundidad como extensión. De lo anterior, en Villani (2001) expresa su preocupación en cuanto a la formación en los cursos de geometría de preparatorias y universidades el modo de enseñar geometría es como ellos aprendieron de sus profesores mas no como les dijeron que se debería enseñar. Por otra parte, la geometría visual y elemental aun es fuente de interés e investigación, es el caso de D. Henderson en el Congreso de Catania el cual afirma:

> Dar vida al razonamiento geométrico es poner atención a los significados detrás de las fórmulas y de las palabras - significados basados en la intuición, imaginación y experiencias del mundo que nos rodea. Dar vida al razonamiento geométrico es saber que en geometría las definiciones, suposiciones, etc., varían con el contexto y con el punto de vista.
>
> Dar vida al razonamiento geométrico es hacer conjeturas, buscar contraejemplos y desarrollar conexiones.
>
> Dar vida al conocimiento geométrico es preguntar siempre: ¿por qué?. (Villani, 2001, p. 7)

Según Ball y Wilson (1990), para convertirse en un buen maestro de matemáticas se requiere de motivar a sus estudiantes para entender, preocuparse y ser capaces de usar la matemática; también examinar y cuestionar sus propias concepciones sobre el rol como maestro, por otra parte, es necesario ver y experimentar con prácticas diseñadas para ayudar a los estudiantes a aprender.

Es así que para generar un impacto en la formación inicial del profesorado se debe dirigir la atención hacia los contenidos y la pedagogía de la formación docente. Esto incluye considerar la convicción y creencias que los futuros maestros traen consigo, así como los modelos que los nuevos profesores tienen para reflexionar y aprender.

El MEN destaca la importancia sobre la nueva visión del conocimiento matemático: incorporar y hacer uso efectivo de las nuevas tecnologías es tema de investigación y de dar la importancia en la formación del docente, se debe generar el uso de la tecnología como herramienta mediadora del conocimiento.

En lo que se refiere a la disciplina de Geometría, se presenta el estudio realizado por el MEN *Incorporación de las Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia:*

> Para poder diseñar ambientes de aprendizaje ricos en actividades geométricas en las distintas dimensiones, los maestros de matemáticas debemos experimentar con

> diversas facetas del panorama geométrico. Entre más dimensiones y conexiones de la geometría conozcamos, podremos guiar con mayor éxito a nuestros alumnos en la experiencia de aprender a aprender geometría y les ayudaremos a sentar bases sólidas para ampliar el panorama en los siguientes años escolares y en la vida. (Paiba, Llanos, Uribe, & Gempeler, 2004. p.3)

En la actualidad los programas de geometría dinámica han dado una nueva visión a la manera de hacer y enseñar matemáticas, "proporcionando contextos de aprendizaje con nuevas y potentes posibilidades de representación. Usando software de geometría dinámica ahora es posible que los estudiantes exploren la geometría euclidiana y tengan la posibilidad de estudiar objetos y propiedades geométricas para re descubrir teoremas por ellos mismos" (Paiba, et al., 2004, p.3).

Es así que se puede disponer del aprovechamiento de las tecnologías de la información y la comunicación para la construcción de contenidos, ambientes de aprendizaje y en general para el proceso de enseñanza aprendizaje de manera que promuevan el desarrollo de la imaginación, actividad mental, sentimientos y actitudes con la finalidad de lograr los objetivos generales de la geometría, particularmente la inclusión de la utilización de software de geometría dinámica en la formación de profesores.

3.1.3. Visualización y Exploración, acciones que propician vías a la justificación

Lograr argumentación y un razonamiento asociado a la justificación, después de haber realizado procesos de visualización y exploración formulando y verificando conjeturas, es encaminar al estudiante hacia la actividad demostrativa que debe lograr un lugar significativo en la enseñanza de la educación básica secundaria y media. Es allí donde, la escuela debe acercar a los estudiantes a las actividades propias de la comunidad matemática donde la demostración debe ocupar un lugar prominente en el currículo de matemáticas (Camargo, Samper, & Perry, 2006).

Por ende en la formación profesional de los futuros docentes se debe procurar que sus experiencias de aprendizaje al demostrar les sirvan como referentes y ejemplos para el ejercicio de su profesión (Samper & Molina, 2013).

Motivados por que los procesos que llevan a la actividad demostrativa sean considerados como herramienta efectiva en el desarrollo de habilidades del razonamiento matemático se involucran, la *conjeturación* y *justificación*. Samper y Molina (2013) afirma:

> El proceso de conjeturación tiene por meta la formulación de conjeturas, es decir,

> enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de verdad no lo tiene definido el sujeto pero este tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad, razón por la cual son candidatas a entrar en un proceso de justificación que las valide dentro de un sistema teórico determinado (...) y el proceso de justificación tiene por meta la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, es decir, la sustente como verdadera dentro de algún sistema de conocimiento. (p. 17)

Es así que no sólo se hace la formulación de la conjetura, ésta se valida y se corrobora. Para el desarrollo de la presente investigación se realizará el estudio de dos acciones requeridas por dichos procesos: la visualización y la exploración encaminadas a la producción y validación de conjeturas. Acciones que propician vías a la justificación y por qué no de demostración de hechos geométricos.

3.1.3.1. Visualización

Visualización significa ver una figura geométrica como configuración de unidades figurales o unidades elementales que la constituyen (Duval, 1998). Y descrita por Samper, Corredor y Echeverry (2014) como "el proceso cuyo propósito es percibir, detectar y evocar propiedades geométricas de un objeto o de las relaciones entre objetos" (p. 69). Está en estrecha relación con las características y acciones fundamentales para la actividad geométrica la cuál debe ir evolucionando en el estudiante, desde procesos simples de visualización hasta alcanzar su máximo potencial.

"La visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones (Clements y Battista, 1992)". Citado en Paiba, et al., (2004, p.10) permitiendo así la exploración, verificación e ilustración de propiedades; desarrollar la capacidad de desconfigurar y reconfigurar figuras a partir de la información suministrada ya sea en geometría dinámica o en lápiz y papel.

Duval (2005) y Gal y Linchevski (2010) citado en Avenia & Restrepo (2012) afirman que "han encontrado que los estudiantes privilegian una visualización de naturaleza estática o icónica, centrada en lo que "a primera a vista se ve" en la figura geométrica en estudio" (p. 10). Ésta mirada no privilegia el potencial de la visualización y por ende como actividad cognitiva no favorece sino más bien dificulta encontrar las propiedades y sus relaciones geométricas.

> Es así que la visualización puede ser encajada en un proceso discursivo natural (...) lo que algunas veces es designado como razonamiento figural.[es] más bien

> una clase de descripción espontánea de un proceso puramente configural. Por el contrario, un proceso puramente configural no puede ser encajado en un discurso teórico aun cuando algunas veces proporciona las ideas claves para una demostración. (Duval, 1998, p.47)

Por ende se puede observar que la visualización está muy cercana a la verbalización espontánea, ya que se realiza por asociación sin llegar aún a lograr un proceso de discurso teórico. Para lograr un discurso teórico no es sólo usar teoremas, definiciones o argumentos, éstos deben ser primero verificados y solo en tanto cuanto el teorema incluye condiciones (Duval 1998).

En correspondencia a los niveles propuestos por Duval (1988) citados en Paiba, Paiba, et al., (2004) se hace un acercamiento a éstos, ya que con la visualización se pretende identificar características geométricas de igual o menor valor que el de la figura inicial.

1. **Nivel global de percepción visual**

   Se centra en la percepción global de las imágenes indicando la actividad geométrica que asocia figuras a objetos físicos, destacando la forma final de la imagen. "En un contexto matemático, la percepción global actúa para reconocer formas prototípicas que se asocian con nombres de figuras geométricas" (Paiba, et al., 2004, p.10).

   Duval destaca que en dicha percepción se identifican aspectos no matemáticos como la posición (boca arriba, boca abajo) o el tipo de trazo (grueso, delgado). Indicando la urgencia de dar paso al siguiente nivel en la enseñanza de la geometría, llevando a que la mirada matemática de las figuras active la mente hacia la búsqueda de objetos geométricos y sus relaciones.

2. **Nivel de percepción de elementos**

   En este nivel se percibe la imagen como constituida por elementos de una misma dimensión o de dimensiones inferiores. "Así, una imagen tridimensional se verá como formada por figuras tridimensionales o bidimensionales, una imagen bidimensional se verá como formada por figuras bidimensionales, unidimensionales (segmentos) o de dimensión cero (puntos)" (Paiba, et al., 2004, p.10-11).

   Al construir conceptos y relaciones geométricas, desde el punto de vista matemático, se identifican los elementos que constituyen la figura y sus relaciones. Identificando así un enunciado que describa esas relaciones, por ende las imágenes prototípicas no son las protagonistas, pero sí lo son las relaciones entre los elementos constitutivos.

> Es importante considerar que el enunciado, a pesar de no ser un recurso de representación visual, influencia la visualización. Esencialmente ayuda a re-enfocar la atención de manera que puedan percibirse aspectos que pueden pasar desapercibidos sin el enunciado. (...) Cuando un dibujo como va acompañado de un enunciado "este es un cuadrado" se aseguran las relaciones de congruencia y perpendicularidad entre los lados. De lo contrario, la sólo percepción de dichas relaciones no las garantiza." (Paiba, et al., 2004, p.11).

Es así que se enuncia la diferencia entre un dibujo y una figura geométrica permitiendo conocer qué información se puede obtener de la figura y cuál no.

Duval enuncia que en la identificación de las relaciones geométricas, la orientación es influyente, donde las relaciones espaciales como: "arriba y abajo, adelante y atrás, izquierda y derecha, y por extensión a las imágenes bidimensionales (representaciones en papel), lo horizontal y lo vertical, (...), las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, por ejemplo, son más fácilmente reconocibles cuando tienen orientación vertical u horizontal" (Paiba, et al., 2004, p.11). Recomendando como estrategia para disminuir las restricciones, que al identificar dichas relaciones en las figuras éstas no estén ubicadas en posiciones estándares.

Seguidamente se perciben más fácilmente las figuras cerradas y cóncavas y no las figuras abiertas o convexas.

También expone que hay imágenes complejas que se pueden descomponer donde la percepción no entra en juego, y son la complementariedad y el solapamiento.

En este nivel como lo propone el MEN se perciben mucho más los cuerpos en movimiento, por ende plantean recursos que involucren los movimientos en el plano.

3. **Nivel operativo de percepción visual:**

   En el tercer nivel se da una reconfiguración mental para obtener nuevas disposiciones útiles. "A partir de una configuración se reorganizan los elementos constitutivos de una figura, que se mueven como piezas de un rompecabezas, para lograr otra configuración relevante para la solución de un problema" Paiba, et al., (2004, p. 13). Implicando así un esfuerzo de reorganización y transformación utilizándolas significativamente para así lograr la visualización y su solución

Otros conceptos de visualización

Miguel de Guzmán destaca la visualización fundamental para la actividad matemática, considerando que "La visualización aparece así como algo profundamente natural tanto en el nacimiento del pensamiento matemático como en el descubrimiento de nuevas relaciones entre los objetos matemáticos, y también, naturalmente, en la transmisión y comunicación propias del quehacer matemático" (Guzmán, 1996, p.3). Es así que la visualización es empleada con gran eficacia al enfrentarse a situaciones problemas y por ende afirma que:

> Los matemáticos muy a menudo se valen de procesos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de procesos imaginativos que les acompañan en su trabajo haciéndoles adquirir lo que se podría llamar una intuición de lo abstracto, un conjunto de reflejos, una especie de familiaridad con el objeto que les facilita extraordinariamente algo así como una visión unitaria y descansada de las relaciones entre objetos, un apercibimiento directo de la situación relativa de las partes de su objeto de estudio. (Guzmán, 1996, p.3)

Además destaca que las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas "presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo" (Guzmán, 1996, p.1).

Donde de situaciones concretas y visuales nacen las ideas básicas atendiendo a la utilidad de éstas para manejar con destreza los objetos abstractos correspondientes, Guzmán afirma que "Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denomina visualización en matemáticas" (Guzmán, 1996, p.2).

Otra amplia referencia de la visualización es la que Norma Presmeg presenta, "la visualización es considerada como procesos de construcción y transformación de imágenes y todas las inscripciones de naturaleza espacial que puedan estar implicadas en el quehacer matemático" (Presmeg, 2006). Conclusión a la que llega guiada por Piaget e Inhelder, considerando que cuando un persona crea un arreglo espacial (incluyendo una inscripción matemática) una imagen visual en la mente de la persona, está guiando esta creación.

Bishop, citado por Gutiérrez (1991) define las imágenes visuales (físicas o mentales) como "los objetos que se manipulan en la actividad de visualización" y éste se realiza según dos tipos de procesos: Procesamiento Visual (VP) e Interpretación de información figurativa (IFI). y como forma de caracterizar la visualización Bishop muestra la importancia tanto como un «sustantivo» - el producto, la imagen visual - y como Un ”verbo el proceso, la actividad (Bishop, 1989, p.7) citado por Arcavi (2003, p.216) y siguiendo a (McCormick et al., 1987, p.3) enuncia que la “VisualIzación ofrece un método para ver lo que no se ve”

Arcavi siguiendo a Zimmermann y Cunningham (1991, p.3) y Hershkowitz et al. (1989, p. 75) propone que:

> La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre imágenes, imágenes, diagramas, en nuestra mente, sobre papel o con herramientas tecnológicas, con el fin de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión. (Arcavi, 2003, p.217)

Del análisis de fundamentos y conceptos indagados sobre la visualización, se destacan la determinación de niveles, categorías y la noción de visualización uno de los aspectos pertinentes propuestos para esta investigación.

Considerando la visualización como una habilidad del individuo donde a través de la exploración, verificación e ilustración de propiedades desarrolla la capacidad de desconfigurar y reconfigurar figuras desde la información suministrada ya sea en geometría dinámica o en lápiz y papel, logrando detectar, percibir o evocar propiedades geométricas en una representación gráfica; además es capaz de manejarlas en un contexto matemático donde se requiera una interpretación visual evaluando así dicha comprensión en el estudiante.

3.1.3.2. Exploración

La visualización y la exploración están en estrecha relación, la exploración definida como la acción de búsqueda de propiedades o relaciones entre las partes constitutivas de la figura, hacer una investigación empírica sobre la figura a través de acciones como medir, calcular y hacer construcciones (Camargo, et al., 2006). Centrarse en la exploración hace alusión a descubrir propiedades, relaciones entre sus componentes, mediciones, cálculos, de manera libre e informal hasta obtener características específicas, interpretar y plantear soluciones.

Es así que la exploración surge al intentar dar solución a un problema, descubrir hechos, contrastar situaciones, que conducen a la construcción donde se evidencian propiedades geométricas y sus relaciones conduciendo a la producción y validación de conjeturas, donde “a partir de hacer, examinar, predecir, evaluar y generalizar, los estudiantes pasan de formularse preguntas como ¿por qué…? a preguntas como ¿qué pasa si…?, dando pasos hacia el pensamiento deductivo” (Paiba, et al., 2004, p.3).

En concordancia con la exploración entre muchas otras características, un medio dinámico como los (SGD) Software de Geometría dinámica, permite una exploración geométrica mucho más a fondo que la que se realiza con regla y el compás, permitiendo deformaciones convenientes, usando el movimiento en el plano geométrico, observando propiedades invariantes difíciles de apreciar con otros medios (Paiba et al., 2004).

Es así que un SGD permite estudiar objetos y propiedades geométricas explorando así la geometría euclidiana y descubrir teoremas por ellos mismos por medio de la herramienta de exploración el arrastre. Se modifican las imágenes en la pantalla para transformarlas en otras (asociadas a la misma figura geométrica), haciendo que la imagen se convierta en una sucesión casi continua de representaciones, permitiendo estudiar las propiedades que permanecen invariantes y las que se modifican (Camargo et al., 2006). Por ende la capacidad de arrastre de los objetos de una construcción favorece la búsqueda de propiedades de la figura que así se lleve a una deformación se conservan las propiedades geométricas originales que definen al objeto.

Frente a investigaciones y fundamentos sobre la exploración en el SGD el proyecto presentado por el MEN Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Básica Secundaria y Media de Colombia (2004) desataca que la geometría dinámica cambia la forma de la enseñanza de la geometría. Tanto la práctica educativa como la investigación, reconociendo diferencias no de apariencia sino de fondo entre en la nueva forma de exploración geométrica y la que se lleva a cabo mediante los instrumentos clásicos, regla y compás y el razonamiento “basado en figuras mal dibujadas” (Paiba et al., 2004), reslata la ganancia didáctica inmediata que se evidencia al explorar en un ambiente dinámico, ya que se tiene a mano un instrumento para reconocer patrones de comportamiento invariantes, llegando a consolidar un conocimiento matemático en construcción.

Se señala la importancia que identifica el MEN respecto al empleo del software “permite realizar un diseño de actividades orientadas hacia la exploración, predicción, establecimiento de invariantes y verificación de propiedades y relaciones entre los elementos de los objetos geométricos, destacando los aspectos que son relevantes de los que no lo son” (Paiba, et al., 2004, p. 73). Por ende el proceso de exploración con el software avanza hasta encontrar regularidades que con lápiz y papel no se hubieran encontrado.

Frente al uso de la geometría dinámica la exploración y la demostración se destaca la investigación presentada por Camargo, et al. (2006) quienes afirman:

> Los programas de geometría dinámica permiten vincular la exploración con la demostración, en el ámbito de la geometría euclidiana. Aportan elementos importantes para ligar el mundo empírico —que se vivencia con las acciones realizadas sobre y con los objetos geométricos que el software permite construir— con el mundo teórico de la geometría euclidiana —que surge cuando los hechos descubiertos de manera empírica se transforman en enunciados que hacen parte de un

> sistema axiomático. Esto ocurre porque la geometría dinámica provee un modelo de la geometría euclidiana —con algunas diferencias— en el que se mantienen las relaciones geométricas usadas para construir una figura; en consecuencia, la figura construida es realmente representante de una determinada clase y esto permite que las propiedades implicadas por las condiciones esenciales de la figura se evidencien y se favorezca entonces la formulación de conjeturas. (p. 372)

Bajo esta perspectiva se destaca la riqueza didáctica generada por la interacción con el SGD ya que no solo es la exploración y validación de propiedades, "interactuar con el programa da ideas al aprendiz de las relaciones implícitas en las condiciones del problema, de la lógica particular de construcción y de los argumentos que se deben usar para una demostración formal dentro de una teoría geométrica" (Paiba et al., 2004, p. 41). Por ende provee un contexto que apoya la visualización y la exploración proporcionando herramientas encaminadas a la práctica de la producción y validación de conjeturas.

Es así que la exploración en busca de propiedades y la visualización de relaciones geométricas lleva a la formulación de una conjetura, se lleva a cabo la verificación de propiedades geométricas con el propósito de poner a prueba un resultado sobre el que aún no se tiene la certeza absoluta, la cual sólo se consigue mediante la demostración (Camargo, et al., 2006).

Además de los niveles y conceptos nombrados tanto de visualización como de exploración se encadenan algunos de los niveles de desempeño, que llevan a la construcción y verificación de conjeturas, señalados en la caracterización de la actividad demostrativa, realizada por las autoras Perry, Camargo, Samper, y Rojas (2006).

3.2. Tradición Investigativa

Para realizar la búsqueda de la información se acudió a algunas bases de datos como Scielo, Redalyc, Scopus, Repositorios de Universidades, Revistas Científicas, Actas de Conferencias, Memorias y publicaciones en la disciplina de geometría en la formación de profesores, entre otras; observando que responden a los parámetros y características de las producciones académicas y científicas pertinentes para el estudio; se identifican aportes, investigaciones, autores y ámbitos, que incentivan y enriquecen la propuesta.

Se presentan algunos antecedentes en torno a los siguientes aspectos: Geometría dinámica y procesos en la actividad demostrativa en la formación de Profesores así como la Visualización y Exploración encaminadas a la producción y validación de conjeturas.

3.2.1. Geometría dinámica en la formación de profesores

Diversas investigaciones ilustran variada información sobre la formación de futuros profesores y la implementación de la tecnología en el aula, una de las referencias que se destacan es la investigación presentada por Lagrange, Artigue, Laborde, & Trouche, (2001) quienes presentan un análisis cuantitativo de un corpus de 662 trabajos y dos análisis cualitativos de un sub-corpus, el cual llevó a abordar la compleja integración de las tecnologías en la enseñanza y el aprendizaje, un enfoque relevante que indaga cómo los estudiantes hacen uso de las tecnologías, cómo evoluciona la forma en que la utilizan, el tiempo bajo la influencia de la evolución de sus conocimientos tanto en matemáticas como en tecnología.

La enseñanza tiene en cuenta la construcción del instrumento y sus relaciones con el aprendizaje de las matemáticas, afirmando en sus numerosas investigaciones que el profesor desempeña un papel esencial en el éxito de la integración de la tecnología y finalmente expone que su investigación "es una herramienta para comprender la complejidad de la introducción de la tecnología o, más precisamente, al abordar la integración de las Tecnologías, siendo ésta una problemática multidimensional" (Lagrange, et al., 2001, p.12).

Maria Alessandra Mariotti, plantea un experimento con estudiantes de edades entre 15-16 años, desde una perspectiva vygotskiana, con particular atención a la construcción social del conocimiento y la mediación semiótica realizada a través de la hechos. Resalta la importancia de la manipulación usando Cabri puesto que conserva la estructura del sistema lógico de la Geometría Euclidiana. El software de geometría dinámica Cabri, realiza una función de "arrastre", la cual conserva su lógica intrínseca, es decir, la lógica de su construcción. En otras palabras, es posible establecer una correspondencia entre el mundo Cabri y el mundo teórico de la Geometría euclidiana.

El aporte de Mariotti, evidencia una evolución del contexto de los estudiantes que a su vez está enraizado en las actividades de construcción, donde se da sentido y valor a diferentes procesos como conjeturar, argumentar, probar, sistematizar las pruebas como deducción formal. Por otra parte, muestra la contradicción planteada por Duval entre la argumentación cotidiana y el razonamiento deductivo, entre el conocimiento empírico y el geométrico, manejada en términos dialécticos dentro del desarrollo de la clase (Mariotti, 2001).

En el artículo *Diferentes percepciones de invariantes y generalidad de la prueba en geometría dinámica* por los autores Anna Baccaglini-Frank, María Alessandra Mariotti y Samuele Antonini, publicado en el 2009. Resalta que gracias a la aparición de los Entornos de Geometría Dinámica (EGD), los educadores deben replantear la enseñanza de la geometría buscando mejorar el razonamiento geométrico, la resolución de problemas, promover la exploración visual y el descubrimiento. En cuanto a los estudios previos, encontraron que el uso del papel y lápiz tradicional, a los estudiantes se les dificultó captar lo genérico en una prueba. Es decir, una vez que se produce la prueba, se debe elaborar una nueva relación entre la figura y el concepto. En términos de conceptos figurativos hay una ruptura entre el aspecto figural y el conceptual que necesita ser reconstruido. Por último, las actividades propuestas con el software de geometría dinámica pueden introducir un nuevo nivel de complejidad debido a posibles variaciones de los elementos proporcionados en la solución de un problema. El estudiante al explorar la opción de arrastre lo puede conducir a encontrar un invariante (el autor llama *invariante a la construcción* una propiedad geométrica de la figura que es verdadera para cualquier elección de los puntos de base; para el caso del uso del software de geometría dinámica un *invariante de la construcción* es una propiedad que se mantiene por arrastrar cualquier punto base (que es también libre) de la figura). En otras palabras, la interpretación geométrica de un invariante puede estar fuertemente ligada al proceso de arrastre que conduce a su descubrimiento. Por lo tanto será concebido como un punto-invariante. Por otro lado, la construcción de la prueba puede tener diferentes efectos con respecto a la generalidad de las propiedades geometría relacionada con el invariante observado. (Baccaglini Frank, Mariotti, & Antonini, 2009)

En el trabajo propuesto por José Ortiz Buitrago (2006), incorpora el uso de la calculadora gráfica en el aula de matemática. Inicia con la implementación del uso de calculadora gráfica potencializa en los estudiantes no solo comprobar resultados si no contribuye a fortalecer un proceso natural de comprensión del conocimiento matemático. Seguido de, plantear el problema de la formación inicial del profesorado, involucrando un dominio disciplinar y un conocimiento didáctico para que los profesores en formación logren las competencias necesarias para desempeñarse adecuadamente en su futuro trabajo profesional citando autores como Ensor, (2001); Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna, (2005), y por último resalta la importancia de involucrar un dominio disciplinar y un conocimiento didáctico en los futuros profesores.

En la Propuesta presentada por Prieto González (2010), *Integración de instrumentos técnicos y conceptuales en la enseñanza de la geometría. Una propuesta para la formación inicial de maestros*, señala que su objetivo fundamental es diseñar una secuencia formativa para el aprendizaje de conocimiento específico para enseñar geometría, dirigida a los estudiantes para maestro de primaria, mediante el uso del software (Cabri-Géomètre) y aplicando la metodología de resolución de problemas geométricos empleando procesos de visualización y razonamiento de Duval. El estudio resalta la importancia de conocer cómo influye el diseño de actividades, así como su evolución del conocimiento para enseñar matemática en los estudiantes para formación del profesorado, desde sus concepciones y creencias hasta niveles más profesionales.

La investigación presentada por Jorge González (2014) propone una concepción didáctica para la utilización de software de geometría dinámica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría sintética en la formación inicial del profesor de Matemática, caracterizada por utilizar el mínimo posible de herramientas del software y realizar actividades de exploración guiada para el redescubrimiento de las propiedades objeto de estudio.

A partir de la intervención de los software Geómetra y Geogebra haciendo uso de sus características comunes, presenta actividades docentes desarrolladas en pequeños grupos partiendo de los pocos computadores que hay en los diferentes niveles y así optimizar el uso de la tecnología, realizando tareas preconcebidas con las que se lograba, a través de la manipulación y del cumplimiento de ciertas órdenes, obtener conjeturas sobre propiedades geométricas, y así, redescubrir el conocimiento para ser usado y a veces demostrado; así en un corto tiempo se podía repasarüna amplia gama de contenidos con el software utilizando un mínimo de herramientas, no a partir de exploración libre, sino guiada, basada en tareas docentes.

Una de las conclusiones presentadas por Jorge González, es que el trabajo con la tecnología en estos tiempos debe promover la unidad y la cooperación, por eso independientemente de que existan muchas computadoras, se debe potenciar el trabajo en pequeños grupos y el tiempo de trabajo en la máquina para aprender Geometría se debe combinar con el trabajo con lápiz y papel y la utilización de métodos tradicionales, que han demostrado ser efectivos a través de todos los tiempos. Finalmente enuncia:

> Se construyó y fundamentó teórica y prácticamente una concepción didáctica para el uso de los SGD en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría sintética plana, que se caracteriza por considerar la tarea docente con enfoque profesional, encaminada a la introducción de los productos de los SGD como medios de enseñanza y que conduce a la definición de la tarea docente sustentada en SGD como concepto esencial de la concepción, conjuntamente con la caracterización de las herramientas mínimas, la exploración guiada y los puntos libres. (González, 2014, p.118)

Los estudios mencionados reflejan el potencial que tiene el uso de la geometría dinámica en el ámbito escolar y la influencia que tiene el profesor para incluir dicho potencial en el aula de clase, replanteando así la enseñanza y buscando la mejora en la comprensión tanto de conceptos como en el de argumentaciones a partir del uso efectivo de herramientas tecnológicas.

3.2.2. Actividad demostrativa en la formación de profesores y geometría dinámica

A continuación se presentan algunos contextos en los que se desarrolla la geometría dinámica como herramienta que apoya las acciones encaminadas hacia la demostración y su enseñanza en la formación de profesores.

En el estudio de *Dificultades de los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas, para comprender el lenguaje matemático utilizado en demostraciones geométricas euclidianas*, se encuentran algunas dificultades en los estudiantes, éstas radicaron en la forma en que se abordó la justificación de las proposiciones, pues los estudiantes daban como válidos elementos geométricos que se presentaban en la proposición o que lograban identificar a partir de la representación gráfica. Es decir, carecen de una adecuada representación simbólica y por tanto, no logran alcanzar al nivel de rigor que requiere la demostración de la proposición. (Córdoba, P. y Quintana, Y., 2013)

Caicedo, Perry, Camargo, & Molina (2012) *Un ejemplo de articulación de la lógica y la geometría dinámica en un curso de geometría plana*. Presentan investigaciones de Cheng et al., 1986, y Mueller, 1975, citados en Epp, (2003) manifiesta el efecto positivo que tiene la enseñanza de la lógica en los procesos de razonamiento de los estudiantes y propone que ésta se desarrolle como unidad temática en los cursos como la geometría, de donde se extraen ejemplos concretos, para explicar principios lógicos. Así mismo como el uso de la geometría dinámica como mediador instrumental para el aprendizaje de la demostración coinciden Bartolini y Mariotti, (2008) y Olivero (2002). Presenta una secuencia de tres problemas y el conjunto de sucesos del cursillo realizado en el XX Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, cuyos resultados mostraron cómo el uso de la geometría dinámica es muy útil para indicar errores o incomprensiones el cual sirve para que el profesor preste atención a las conjeturas y justificaciones que dan sus estudiantes para identificar e indicar por qué no son válidos, razón por la cual se convierte en un elemento que apoya el aprendizaje de los estudiantes.

El estudio presentado por Flórez (2016) relaciona las investigaciones entre los ambientes de geometría dinámica, la resolución de problemas y los software de asistencia o tutores de demostración, mediante una interfaz gráfica que involucra ambientes de geometría dinámica en estudiantes de primer año de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, que cursan espacios académicos donde tiene lugar una aproximación metodológica para la enseñanza de la demostración. Los resultados de la investigación aportan elementos que permiten futuras discusiones en torno a la enseñanza de la demostración en geometría, así como los ambientes de geometría dinámica favorecen en la resolución de problemas y a su vez, estos ambientes promueven tanto procesos cognitivos como metacognitivos. Mayer (1998) asegura que mediante el desarrollo de problemas no rutinarios involucra que los estudiantes posean habilidades, meta-habilidades (metacognición) y motivación (Flórez, 2016).

A su vez, los profesores del Departamento de Matemática de la Universidad de Puerto Rico, en su investigación, Geometría Dinámica: Una opción novel para la capacitación de maestros, Hernández R. y López R. (2011), manifiestan su preocupación en cuanto al estudio de la geometría ya que se ha visto relegada paulatina y progresivamente a un segundo plano, en los estudiantes de secundaria. Partiendo de esta necesidad y citando a Hrabowski, Lee y Martello (1999), manifiesta que el menester que toda institución de educación superior dirija sus esfuerzos a desarrollar maestros capacitados que sean capaces de transmitir el conocimiento matemático de manera efectiva. De lo anteriormente expuesto, presentan un curso de Geometría Dinámica opción para capacitación al profesorado en geometría por su naturaleza, que permite la discusión de temas que fluctúan entre lo formal y la práctica. A su vez se basa en la metodología de la dialéctica como estrategia de enseñanza en la tradición de los diálogos de Sócrates y Menón, con el fin de guiar al estudiante en la justificación y demostración de los enunciados geométricos descubiertos. Para determinar los avances de los profesores como sus avances y logros, así como los cambios en la capacidad de generar conjeturas y demostrarlas, emplearon la rúbrica creada por Galindo (1998) que evalúa la justificación intuitiva, la justificación deductiva así como la interacción entre estos dos tipos de evaluación. Los resultados obtenidos en los aprendizajes de los profesores se aprecian varias observaciones relevantes como:

1. La visión en la educación debe ser inclusiva en donde todos seamos agentes del cambio, con el firme convencimiento de que puede lograrse una revolución en la enseñanza de la geometría (. . .).

2. (. . . .). Esta intuición y falta de base investigativa es la que muchas veces lleva a tomar decisiones que aun cuando sean bien intencionadas, en muchas ocasiones, son contrarias a los mejores intereses de la educación.

3. Son necesarios tres elementos básicos para construir buenas actividades geométricas utilizando programados de Geometría Dinámica: conocimiento del programado, dominio del contenido que se desea transmitir y conocimiento de la estrategia didáctica que se está utilizando (. . .)

4. En ocasiones, se requiere del maestro más de lo que es posible hacer, pues el problema de la falta de tiempo es real (. . . .). Se refiere a un equipo de maestros (o expertos en currículo) dedicados a la creación de las actividades, otro a la validación y todos a la implantación (. . .).

5. El diálogo y la reflexión en todo proceso tiene consecuencias positivas y sorpresivas. El compartir con nuestros compañeros la forma en que resolvemos un problema y el recibir retroalimentación apropiada crea un ambiente de aprendizaje sumamente rico (. . .). Lo importante es tener una mente amplia para poner a prueba las ideas propias y someterlas al juicio de los colegas.

6. La matemática es una construcción social. (Hernández y López, 2011, p.9)

Lo anterior concluye que los aportes de los ambientes de geometría dinámica en la resolución de problemas aplicados a la enseñanza de la demostración proporcionan, median y favorecen a las estrategias particulares no presentes en el uso de ambientes de lápiz y papel.

La importancia de la geometría euclidiana como actividad didáctica en la demostración en secundaria y en la formación inicial docente, este último, para Araujo, Rodríguez y Sala (2006) es una oportunidad que les permiten a los estudiantes discutan sobre las demostraciones, y fomenten conjeturas, pruebas y refutaciones. Aunque para ellos, los estudiantes poseen un concepto débil del significado de demostración y cuyo objetivo del docente debe ser convencerlos de que puede desarrollarse en todos los niveles de la educación secundaria. Desde esta perspectiva se considera la actividad demostrativa como un experimento del pensamiento (Lakatos, 1976), que agrupa diversos aspectos como: verificación o justificación, iluminación o insight acerca de proposiciones, y organización de resultados en un sistema deductivo (Coe y Ruthven, 1994).

Además, Araujo, Rodríguez y Sala (2006) centran su estudio en la educación emocional y lo definen a partir de Gómez-Chacón (2001) como un proceso educativo de formación y actuación sobre las emociones, que involucra algunos aspectos como permanencia, continuidad y prevención. Por otra parte, concluyen que si los estudiantes fracasan a menudo, su autoestima queda comprometida y en consecuencia su reacción ante el enfrentamiento a las demostraciones es menos exitosa. Por el contrario, si el estudiante logra superar obstáculos cognitivos y lingüísticos, su autoestima sube y por tanto su capacidad de enfrentamiento a las demostraciones le resulta más exitosa. Por último, el estudio evidencio que la actitud del docente tiene un papel importante en el proceso de desarrollo de la demostración pues provoca una reflexión por parte del estudiante y su vez, genera cambios que fomentan emociones iniciales, las cuales se reflejan en la forma como ellos concibe la demostración.

Se presenta la investigación realizada por Perry, Camargo, Samper, & Rojas (2006) Como referente en articulación de la formación matemática a la par con la formación pedagógica, evidenciando la organización de los espacios académicos del currículo de la formación de licenciados en matemáticas.

El objetivo fue la construcción de ambientes de aprendizaje favorables a la actividad demostrativa en geometría, a partir de la identificación y caracterización de experiencias significativas y conocimientos que los futuros educadores deben vivir en su preparación para lograr una visión multifacética y bien fundamentada de la actividad demostrativa , ganando en competencia profesional para gestionar a su vez, en un futuro, ambientes de aprendizaje en la educación básica y media favorables a dicha actividad.

La comunidad de investigadores reconoció en los programas informáticos computacionales un entorno que por sus grandes potencialidades favorecen el aprendizaje significativo ya que se logra establecer conexiones entre distintos fragmentos de conocimiento para producir versiones más organizadas, es así que consideran la geometría dinámica favorable en el aprendizaje de la demostración. Identificaron los aportes de la incorporación de la geometría dinámica en la constitución del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, para enriquecer los cursos del programa de formación en donde se trabaja geometría y/o didáctica de la geometría. Finalmente la comunidad de investigadores indagan si tiene sentido o no implementar cambios en la formación de docentes de matemáticas y así lograr un papel decisivo en la transformación de las estructuras curriculares de los programas de matemáticas de las instituciones educativas.

Desde el punto de vista de la educación matemática, las investigaciones presentadas anteriormente muestran los esfuerzos realizados por diferentes autores, algunos sin tener éxito en sus resultados, evidenciado en la enseñanza de la geometría en la educación básica y media, pero buscando así la importancia de favorecer la forma de la enseñanza de la geometría para lograr ambientes de aprendizaje que intervengan en la actividad demostrativa en la formación del profesor, además presenta la Geometría dinámica como herramienta que a través de los resultados de la visualización y exploración, le permite al profesor identificar las conjeturas y justificaciones que dan sus estudiantes con el fin de indicar si son válidas o no, convirtiéndose en un elemento que apoya tanto en el aprendizaje como la enseñanza.

3.2.3. Visualización en la enseñanza de la Geometría

De la búsqueda realizada, se destacan investigaciones que orientan a evaluar la incidencia del uso de programas de geometría en el desarrollo de la visualización, como se enuncian a continuación.

Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y curriculum. Espinosa (1998). La enseñanza en la educación media por lo general se ha enfatizado en lo algorítmico-algebraico y dejando de un lado la importancia a los procesos visuales, es por eso que las evaluaciones de los profesores miden principalmente procesos algebraicos. Algunos trabajos como los de Vinner (1989), Eisenberg y Dreyfus (1990), concluyen que existe de parte de los estudiantes de media y a nivel universitario una resistencia al uso de construcciones visuales. Ellos señalan a su vez existe un predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, dos posibles causas pueden dar origen a este problema. La primera es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente; y la segunda, se refiere a la misma formación del profesor de matemáticas el cual promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual.

Por otra parte, Espinosa sigue la línea de investigación sobre el papel de las representaciones en el aprendizaje de las matemáticas, resalta, entre otros, los trabajos de Janvier, 1987; Kaput, 1987 & 1991; Taghard, 1991; Duval, 1993 & 1995. Este último, afirma que para diferenciar un objeto matemático de su representación es necesario que el estudiante represente un objeto matemático, al menos en dos diferentes representaciones. También, las consideraciones visuales son bajo estos supuestos, importantes en la resolución de problemas. Duval (1993) caracteriza un sistema semiótico como un sistema de representación de la siguiente manera:

> Un sistema semiótico puede ser un registro de representación, si permite tres actividades cognitivas relacionadas con la semiósis:
>
> 1. La presencia de una representación identificable....
> 2. El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde ha sido formada...
> 3. La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial... (p.40)

Con relación al análisis de los trabajo de los autores mencionados anteriormente relacionados con los sistemas semióticos de representación, Espinosa (1998) determina que un aspecto que no es claro, es el lugar del error; es decir, la presencia de un obstáculo epistemológico en este contexto. Algunos de estos autores mencionan que las construcciones inadecuadas de un concepto se deben a la carencia de articular los diferentes sistemas semióticos y su representación, otros, también afirman que los errores se manifiestan durante la manipulación de una representación dentro de un sistema, además el problema crece cuando hay una inadecuada elección de un sistema semiótico al resolver un problema matemático.

Finalmente, Espinosa (1998) considera importante promover el uso de varios sistemas de representación, y el uso reflexivo de las nuevas tecnologías que permitan dar un significado concreto a las nociones matemáticas. Con ello, la construcción de un concepto se dará a través de la coordinación, libre de contradicciones, de diferentes sistemas semióticos de representación relacionados con el concepto en cuestión.

En cuanto a, el estudio realizado por Jiménez, Rojas y Mora Mendieta (2011), basado en determinar las relaciones existen entre las características del talento matemático y el proceso de visualizar en contextos algebraicos, a partir de la interpretación de soluciones a problemas en estudiantes que fueron nominados como talentosos en matemáticas y participaron en un proyecto de intervención de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia durante el año 2009. De lo anterior, se encontraron tres relaciones entre la visualización y el talento matemático, el primero es la Generalización y Discriminación Visual, esta relación se refiere a que los estudiantes hacen discriminación visual en una comparación de varios objetos identificando sus semejanzas y diferencias visuales, a su vez, está relacionado con la generalización, es decir, este proceso contiene cuatro fases: ver, describir, escribir y verificar (Mason, Graham, Pimm y Gowar (1993 citados en García, Sánchez y Mora, 2009)). La segunda relación es referente a organizar la información y procesamiento visual es cuando un estudiante procesa visualmente, transforma información abstracta a una imagen o una imagen a otra imagen, lo que le permite solucionar problemas de manera efectiva, y por último la flexibilidad e identificación visual es uno de los indicadores que permite afirmar que un estudiante tiene la característica flexibilidad, es la desarticulación de esquemas rígidos, que consiste en descomponer el todo en sus partes.

Blanca Souto Rubio (2009) reporta un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, resaltando a algunos autores (Arcavi, 2003; Guzmán, 2002; Presmeg, 2006; Zimmermann, y Cunningham, 1991) cuya investigación es la visualización en Matemáticas, tema en creciente desarrollo.

El estudio destaca la Enseñanza de la Matemática a nivel universitario y el tema específico de visualización, puntualizando en los siguientes objetivos:

1. Analizar las representaciones visuales de los conceptos fundamentales del Análisis empleadas por los estudiantes y su papel en la comprensión de los mismos

2. Estudiar los tipos, usos, errores y dificultades que presentan alumnos de primer curso de Análisis en los procesos de visualización en la resolución de problemas de análisis (...).

3. Identificar niveles de pensamiento en Análisis a través de la resolución de problemas no rutinarios y teniendo en cuenta los usos de la visualización.

4. Estudiar la preferencia por lo visual y analizar sus posibles causas.

5. Estudiar el efecto sobre el aprendizaje de los estudiantes que ha tenido el estudio de visualización dentro de la asignatura de Laboratorio. (p. 90)

El estudio que llevó a cabo Souto (2009), confirma resultados previos obtenidos por investigaciones internacionales similares (Mundy, 1987; Artigue, 1995; González-Martín y Camacho, 2004; Eisenberg y Dreyfus, 1991; Presmeg y Bergsten, 1995). Además aporta algunas causas de las principales dificultades de los estudiantes respecto a la resolución de problemas no rutinarios de Análisis, relacionados con el uso de la visualización:

> Dificultades debidas al uso incorrecto o poco flexible de las diversas representaciones de los conceptos fundamentales en los registros analítico y visual; dificultades derivadas de las deficiencias en torno al uso de los procesos y los productos de

> la visualización, prestando especial atención a las imágenes empleadas por los estudiantes, identificando los tipos, sus usos y los principales errores cometidos. (Souto, 2009, p.17)

El estudio de Souto caracteriza a los estudiantes en cuanto al nivel de pensamiento matemático y comprensión de los conceptos fundamentales del análisis, teniendo en cuenta la preferencia por el uso de procesos visuales para hacer matemáticas. Concluyendo que la enseñanza de las matemáticas desde el punto de vista de la visualización es una cuestión compleja pero necesaria para el desarrollo del pensamiento hacia niveles más avanzados, planteando y permitiendo tener en cuenta los resultados del estudio, en investigaciones futuras.

El análisis de las investigaciones y estudios presentados, son punto de partida valiosos ya que permiten utilizar sus hallazgos y resultados en nuevas y actuales investigaciones, principalmente en la formación de profesores.

4. FUNDAMENTO DEL ENFOQUE METODOLÓGICO

4.1. Enfoque de la investigación

El enfoque de investigación que se ha seguido en este estudio ha sido la cualitativa. En esta perspectiva se pretende determinar que procesos de visualización y exploración se pueden fortalecer en los estudiantes mediante la intervención del software SGD GeoGebra. En la investigación cualitativa el interés se centra en comprender los significados que los individuos construyen, es decir, cómo toman sentido de los conceptos y de las experiencias que tienen al interactuar en los procesos de construcción de los mismos. Por otra parte, esta investigación es principalmente inductiva, por lo que el producto de estudio es muy descriptivo. En la investigación cualitativa el investigador como observador tiene un papel de participación activa en la obtención y análisis de datos (Hernández Sampieri, 2010).

Los diferentes métodos de recolección de información sobre la conducta humana fueron: grabaciones de vídeo de las interacciones entre compañeros y docente, interacción con el software, entrevistas realizadas a los estudiantes y protocolos producto de actividades de clase. Dichas actividades permitieron reconocer aspectos cognitivos y procedimentales que exigían conjeturar, detectar propiedades invariantes, generalizar y abstraer, obteniendo así el protocolo de construcción, el auto-protocolo escrito del proceso de la resolución del problema, la caracterización de las técnicas utilizadas, los tipos de arrastre, los obstáculos encontrados y el nivel de propiedad del lenguaje geométrico utilizado por el estudiante.

Este enfoque retoma y recolecta información de los sujetos en el caso particular los estudiantes del curso de Geometría Euclídea de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC, con el fin de triangularla y de manera objetiva comprender dicha información en el espacio y contexto estudiado. Dicha triangulación tomada desde la perspectiva de Pourtois (1992) citada en Suárez (2001 p.184) como "el uso de diferentes métodos de recolección de información sobre la conducta humana para delimitar y conocer el objeto de estudio desde diferentes perspectivas, de modo que los resultados no dependan del método o del investigador".

4.2. Tipo de investigación

En el contexto de esta investigación cualitativa se establece seguir el tipo de la investigación-acción como herramienta de aprendizaje para estudiantes y educadores, para Sandín (2003) señala que este tipo investigación procura en esencia propiciar un cambio social y transformar la realidad educativa, por lo tanto, es importante que las participantes en el estudio tomen conciencia de su papel en ese proceso de transformación.

Stringer (1999), plantea tres fases esenciales de los diseños de investigación-acción, la primera es *observar*, el cual consiste en construir un bosquejo del problema y recolectar datos, mediante la aplicación de una prueba diagnóstica, seguido de, *pensar* consiste en que el investigador analiza e interpreta sus hallazgos, se plantean categorías y niveles de los procesos de la actividad demostrativa; por último *actuar*, busca resolver problemáticas e implementar mejoras. Lo anterior se da de manera cíclica, hasta que se logre un cambio o que una mejora se introduzca satisfactoriamente.

4.3. Construcción del sistema de Categorías: emergentes y/o deductivas

La elaboración de categorías fue producto de la recopilación de conceptos, definiciones y caracterización de niveles a partir del marco teórico y conceptual presentado previamente, así como categorías elaboradas en estudios anteriores, tanto de aprendizaje geométrico como de apropiación de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC).

Para esta investigación se incorporaron y complementaron los niveles de desempeño propuestos en los procesos de visualización, exploración y los que llevan a la construcción y verificación de conjeturas, señalados en la caracterización de la actividad demostrativa; por las autoras Perry, Camargo, Samper, y Rojas (2006).

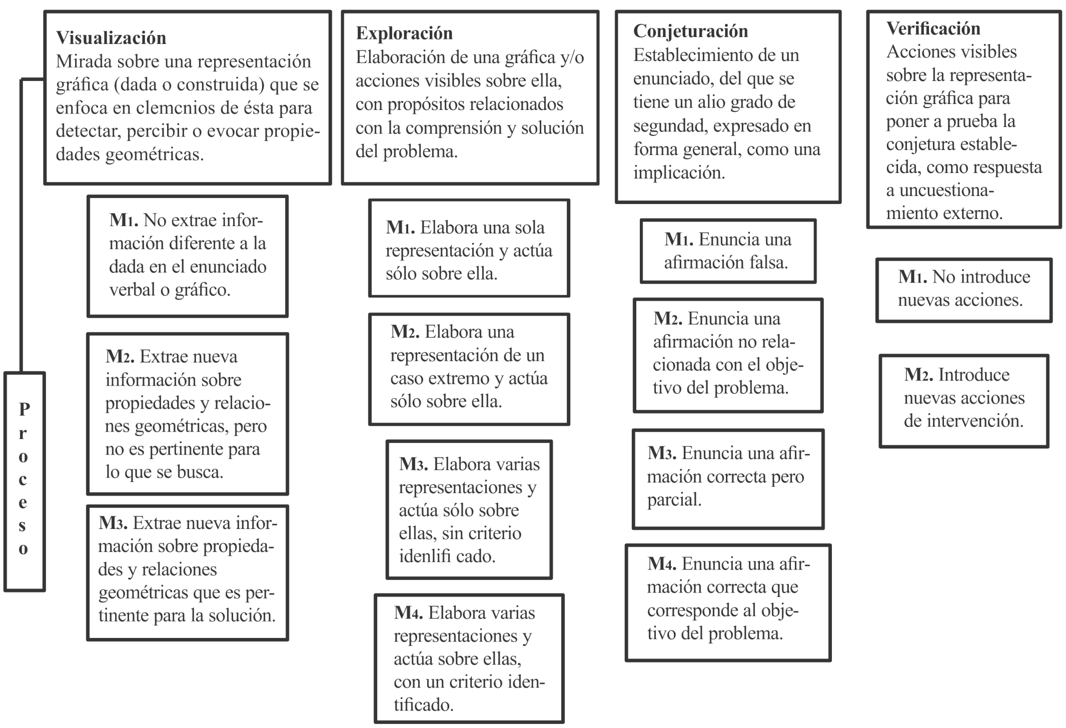
La visualización es definida como: "mirada sobre una representación gráfica, dada o construida, que enfoca elementos de ésta para detectar, percibir o evocar propiedades geométricas... identificar relaciones subyacentes, generando la semilla de la inferencia al posibilitar la identificación de relaciones causa-efecto entre unas propiedades y otras" (Perry, et al., 2006, p. 57).

Y la exploración "Investigación empírica hecha sobre una representación gráfica, a través de acciones tales como medir, calcular, construir, contrastar" con el objetivo de "descubrir propiedades o relaciones entre propiedades, además de generar comprensión de la situación con respecto al propósito específico del problema" (Perry, et al., 2006, p. 57).

Éstas acciones llevan al establecimiento de enunciados y formulación de conjeturas "Hace referencia al acto de postular una afirmación, fruto del convencimiento personal logrado a través de las acciones de visualización y exploración", nombrando a autores como e.g., de Villers, (1993) y Hanna, (2001) quienes consideran que "el convencimiento personal, que lleva a postular una conjetura, es condición necesaria para comprometerse con una justificación" (Perry, et al., 2006, p. 60).

Es así que al encaminar al proceso de demostración se apunta al aprovechamiento de la justificación como recurso para la comprensión de ideas geométricas, justificación que puede no tener la forma que caracteriza una prueba, pero se constituyen en la fuente desde la cual se origina la validación de una afirmación.

Se caracteriza a cada estudiante según el nivel alcanzado en cada uno de los procesos presentes en las actividades realizadas según las categorías mostradas a continuación:



Fuente: *Caracterización de la actividad demostrativa; por las autoras Perry, Camargo, Samper, y Rojas (2006).*

Para la elaboración de categorías y niveles frente a la apropiación de TIC y clasificación de los estudiantes según sus niveles de competencia digital, se inició con una ambientación del SGD Geogebra de manera guiada, la evaluación se hacía permanente frente a la observación del desempeño del estudiante y a medida del avance y de la complejidad del curso se aplicaron situaciones problema donde no era guiado el desempeño en el software permitiendo le al estudiante explorar por él mismo y llegar a obtener la capacidad de apropiarse del uso y manejo del software.

La competencia TIC del estudiante se va develando en las actividades de construcción no guiadas, a medida que se realiza la construcción de la situación planteada, ésta debe ir cumpliendo con las condiciones dadas, así que cuando se realice la prueba del arrastre o se dinamice la construcción no se pierdan las propiedades con que fue realizada, nombrando dos autores, uno de ellos Forsythe (2007), quien avala que en la geometría mediada por herramientas TIC, "las figuras quedan determinadas mediante su proceso de construcción y su comportamiento cuando se someten a arrastres" (citado en Ruiz, 2012, p.135) y el autor Olive (2000), quien se refiere al objeto construido en el software de geometría dinámica, "no está fijado estáticamente en el espacio y su comportamiento depende del método usado en su construcción" (citado en Ruiz, 2012, p.135)

4.4. Selección de las comunidades o sujetos de investigación

A partir de diversas investigaciones sobre el estudio de la geometría en el aula y en especial con el uso de herramientas TIC (Castellanos, 2010; González, 2014; Scaglia & Götte, 2008) compartidas con la afirmación de Samper, Camargo, & Leguizamón, (2003) "Disgregar la geometría para estudiarla de forma discontinua, a través de tres o cuatro años lectivos, llegando al extremo de convertirse en el último tema que se trabaja en el año escolar, si queda tiempo" (p. 7). Dicha afirmación se convierte en uno de los hechos relevantes para que desde el punto de vista de la educación matemática, los estudiantes que se forman para futuros profesores, sean la comunidad seleccionada para indagar y buscar mecanismos de superación en su formación.

Los sujetos de investigación fueron los estudiantes de segundo semestre de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC, quienes cursaban la asignatura de Geometría Euclídea durante primer semestre del año 2017, desarrollado por la investigadora que al mismo tiempo era la docente que orientaba el curso, la población total fueron los 21 estudiantes matriculados al curso, a quienes se les aplicó la fase diagnóstica. La muestra fueron quince estudiantes quienes culminaron las fases propuestas en la investigación.

La muestra fueron quince estudiantes quienes culminaron las fases propuestas en la investigación: La caracterización de los estudiantes es la siguiente: El 66 % del total de la muestra seleccionada es de género femenino y el 34 % masculino, sus edades oscilan entre los 18 y 25 años, el 60 % de los estudiantes tiene su lugar de residencia en Duitama los demás en sectores aledaños como Tibasosa, Santa Rosa, Sogamoso, Nobsa y uno de los más lejanos

Socha, el 75 % del total de los estudiantes habitan en vivienda urbana. Los demás datos como uso y recursos tecnológicos con los que cuentan el estudiante, se pueden evidenciar en los resultados de la encuesta realizada, presentada en el capítulo 5.

4.5. Procesos de recolección de la Información

Para el desarrollo del análisis, las técnicas, etapas e instrumentos para la recolección de información fueron:

Observación participante: "Hace énfasis sobre el terreno y el carácter inductivo de la investigación… la observación participante apela a otros procedimientos y no sólo a la observación. El investigador entrevista personas, analiza documentos, reconstituye la historia del fenómeno estudiado" (Deslauriers, 2004, p. 46). Para la investigación presentada se realiza la observación participante con el objetivo de lograr una visión general de las características del desempeño de los estudiantes en las sesiones exploración y aprendizaje con SGD, realizando una descripción y análisis tanto de lo observado como del desarrollo general de la clase. Siendo investigador y docente se pretende no perturbar el ambiente, sino ser parte del medio observado.

Entrevista grupal: "El grupo permite a las personas reflexionar, acordarse de las cosas olvidadas que de otra manera no serán traídas a la memoria; el grupo actúa como auto-corrector permitiendo a la persona modificar su juicio y darle una opinión más matizada" (Deslauriers, 2004, p. 46). La entrevista grupal es realizada a los estudiantes al final de las sesiones mediadas con Geogebra con el fin de obtener la opinión de los estudiantes frente a los procesos desarrollados respecto a la geometría, a su aprendizaje y al impacto que ha generado el uso de herramientas TIC en el aula de clase, como el SGD Geogebra y el uso de la plataforma Moodle en sesiones extra clase. Como investigadora y a la vez docente orientadora del curso era primordial identificar valores, comportamientos y formas de expresarse de los participantes.

Actividad Pedagógica: En esta etapa la recolección se generó mediante las situaciones de aprendizaje y de exploración realizadas con Geogebra, encaminada a generar en el estudiante una actividad cognitiva, con el objetivo de analizar el impacto de la experiencia de intervención con la utilización de SGD en el proceso de enseñanza aprendizaje de la geometría.

Criterio de expertos: Para realizar la valoración de las concepciones geométricas se analizaron criterios que conciernen a los procesos de visualización y exploración encaminados a la producción y validación de conjeturas.

Encuesta: Realizada a los estudiantes del curso de geometría con el fin de caracterizar aspectos generales de la población y conocer la opinión sobre la actividad pedagógica realizada, como el papel del SGD Geogebra en la clase de geometría y en la formación como estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Estadística, la estrategia metodológica utilizada (Entornos de Geometría Dinámica) y el uso del software en comparación con el uso regla y compás.

Rejilla de niveles: Organización y sistematización de los datos de medición de las actividades pedagógicas realizadas a los estudiantes.

5. ETAPAS DEL ESTUDIO

5.1. Organización de los pasos del estudio

El estudio se realizó en tres fases: Diagnóstica, Instructiva con Geogebra “Taller Explorando con Geogebra” y Sesiones de aprendizaje que incluyen el compendio para obtener los resultados de la valoración final en todas las acciones de desempeño.

Antes de entrar a detallar cada una de las fases, es relevante señalar varios aspectos tenidos en cuenta en la planeación:

Metodología utilizada en las fases de la investigación donde se incorporó Geogebra

Las fases instructiva y de aprendizaje con Geogebra, llevadas a cabo en el proceso formativo fueron desarrolladas en tres etapas:

Etapa 1. Desarrollo de la guía o sesión de aprendizaje

Los estudiantes individualmente desarrollan las situaciones proporcionadas por el docente bajo su orientación y asesoría cuando sea requerido.

Etapa 2. Plenaria de Discusión

En grupos de trabajo y a partir de la socialización de los procesos y resultados obtenidos en la etapa anterior, el estudiante argumenta, escucha, sustenta y contra argumenta, identificando debilidades y fortalezas que permitan la retroalimentación de sus producciones, es así que por medio del aprendizaje colaborativo logran llegar a un consenso grupal.

Etapa 3. Formalización

En esta etapa se validan y formalizan las conjeturas, hipótesis, generalizaciones, afirmaciones o conclusiones enunciadas por los estudiantes en la plenaria de discusión, ya sean individuales o grupales.

El lugar donde se llevaron a cabo las sesiones de aprendizaje presenciales fue en el Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas “ABACO” de la UPTC, sede Duitama, es un lugar para experimentar con las matemáticas a través de recursos didácticos, el laboratorio cuenta con 18 computadores portátiles que se colocaron a disposición de los estudiantes del curso de Geometría Euclídea para el desarrollo de las actividades, trabajaron en forma individual en dichos computadores y cuando surgieron inconvenientes con los dispositivos se tuvo que recurrir a trabajar en los celulares, tabletas o portátiles de los estudiantes para superar las dificultades.

Además de las sesiones presenciales se llevaron a cabo sesiones impartidas por medio de la plataforma e-learning Moodle de la UPTC, permitiendo el envío y recepción de documentos y/o actividades acordadas para el desarrollo de las clases; por medio de la plataforma se complementó el trabajo desarrollado en las sesiones presenciales dejando a disposición del estudiante documentos, link, videos y demás archivos multimedia que contribuyeron al óptimo desarrollo del curso de geometría y la comunicación entre profesor y estudiantes.

Estrategias pedagógicas para favorecer el ambiente de aprendizaje

Tutorías: se acordaba con los estudiantes sesiones de tutoría individual o en grupos pequeños, dependiendo de los requerimientos de ellos.

Estudio personal: se brinda al estudiante orientación para él adquiera autonomía en su aprendizaje, a partir de fuentes bibliográficas a las que puede acceder.

Uso de la plataforma de e-learning Moodle, el estudiante puede acceder desde cualquier lugar y momento a todos los documentos, trabajos, tareas y actividades desarrollados en la asignatura (en la Figura 5.1 puede verse la captura de pantalla de la asignatura de Geometría Euclidiana). Se dispuso de un foro en la plataforma Moodle, donde los estudiantes iniciaron su familiarización con la plataforma, además se iban anunciando las distintas actividades, cuándo se llevarían a cabo, los plazos para entrega de tareas.

Figura 5.1. Captura de pantalla de la asignatura de Geometría Euclidiana.

Actividades complementarias: se realizaron tareas extra-clase donde aplicaran los conceptos y construcciones vistas en las sesiones así como para seguir explorando los recursos apropiados para la enseñanza de la geometría.

Se llevó a cabo una evaluación continua de las situaciones planteadas, resolución de problemas, trabajos, talleres, parciales, evaluados a través de la tabla de categorías propuestas para esta investigación, además de la valoración de las actividades complementarias, prácticas pedidas como tarea y actividades realizadas en Moodle. A continuación se describen las fases.

5.1.1. Fase Diagnóstica

Para evaluar el nivel inicial de los estudiantes se aplicó la fase diagnóstica a 21 estudiantes de segundo semestre de Licenciatura en Matemáticas y Estadística de la UPTC sede Duitama del departamento de Boyacá. Se recolectó información de conceptos previos geométricos mediante la visualización y construcción geométrica, identificando el nivel de conocimiento y apropiación de conceptos al igual que las habilidades que poseen con el manejo de instrumentos como regla y compás; todo esto con el objetivo de analizar las dificultades y obstáculos encontrados y así generar estrategias que superen el paradigma de la memorización para lograr un aprendizaje eficaz desde una mejor comprensión.

Se llevaron a cabo 4 situaciones que se desarrollaron en tres sesiones de clase, cada una con una duración de dos horas. En las situaciones se presentaron tres figuras geométricas con el fin de identificar los conceptos geométricos fundamentales visualizados por los estudiantes, se caracterizan porque evidencian el acercamiento del estudiante hacia la comprensión visual, evaluando así esta habilidad, apropiación de conceptos y lenguaje geométrico, seguidamente se propone realizar tres construcciones haciendo uso solamente de la regla (sin medición) y el compás.

Finalmente se solicitó a los estudiantes que registraran si recordaban o no haber recibido orientación sobre geometría en el colegio, universidad o en otro ámbito académico y si en alguno de esos casos la orientación fue impartida por medio de software especializado o algún medio tecnológico.

5.1.2. Fase instructiva con Geogebra

En esta fase se aplicó el taller **"Explorando con Geogebra"** el taller reúne actividades pertinentes para identificar y utilizar las opciones del menú de herramientas y demás componentes del software, permitiendo familiarizarse con conceptos, características y propiedades que les permitieron desarrollar competencias de visualización, exploración y crear sus propias conjeturas; además actividades que involucran construcciones geométricas con un nivel básico de complejidad.

El taller integrado por tres guías desarrolladas en tres sesiones de clase, cada una con una duración de dos horas, introduciendo la plenaria de discusión y la formalización en la siguiente sesión de clase si fuese necesario.

Para el desarrollo de la primera guía, se planteó a los estudiantes realizarla mediante trabajo colaborativo, fue ejecutado por parejas con el objetivo de que hubiese ayuda mutua en la exploración del software donde interviniera principalmente el dominio de las nociones básicas de geometría y las habilidades informáticas. Tenían acceso a usar la geometría dinámica para realizar la exploración de figuras y determinar propiedades.

5.1.3. Fase de aprendizaje con Geogebra

En esta fase se implementaron 15 sesiones de aprendizaje donde se propusieron situaciones problema desarrolladas por los estudiantes en forma individual, cada una con una duración de dos horas, en cada una de las sesiones se trató de lograr poco a poco los objetivos planteados en esta investigación, y así tratar de dar respuesta a los interrogantes propuestos.

Para la selección de las situaciones de aprendizaje, se abordaron temas siguiendo la estructura del plan curricular, iniciando del concepto que se va aprendiendo y a medida que se avanza en las sesiones se va requiriendo el concepto anterior de manera encadenada, para llevar una estructura lógica en la construcción de los conceptos, la geometría está estructurada desde conceptos y nociones, seguidamente se construyen premisas para llegar a las hipótesis y tesis.

Al abordar las situaciones se rescatan conceptos y preconceptos acerca del tema, se realizan construcciones las cuales van acompañadas de una descripción que le permite al estudiante ir acercándose a las nociones de recta, segmento, ángulo, semirrecta, bisectriz, paralelismo, clasificación de triángulos, líneas notables del triángulo, Es importante además la descripción paso a paso de cada construcción realizada por el estudiante ya que permite ir avanzando a producir conjeturas y justificaciones.

El rol como docente investigadora consistió en analizar las producciones obtenidas de los estudiantes, analizando los objetivos propuestos en cada situación, interpretando a través de la observación la acción del estudiante: el cómo explicaba, cómo se desenvolvía en el manejo del software, que lenguaje utilizaba, cuáles eran sus conjeturas, el avance o no en la apropiación geométrica y del lenguaje, la actitud del estudiante; y a partir de éstos apoyar al estudiante con el fin de hacerlo reflexionar, inicialmente se les explicaba paso a paso el funcionamiento del software para realizar las construcciones geométricas logrando un razonamiento apropiado para el logro del objetivo propuesto, y visualizar de la mejor manera la construcción pedida en la situación problema.

Proceso formativo específico de las sesiones de aprendizaje con GeoGebra

El periodo de tiempo en el que se realizaron las fases fue de marzo a junio de 2017 en 2 sesiones semanales de 2 horas (lunes y miércoles de 16:00 a 18:00).

En cada sesión se proponía a los estudiantes el desarrollo de la sesión de aprendizaje o la discusión en la plenaria, según requiriera el avance de los estudiantes. Las situaciones problema estaban planteadas dentro del temario de la asignatura, según el requerimiento de la sesión, cada estudiante guardaba al final de cada sesión, en un dispositivo portátil, los archivos de GeoGebra que se iban generando, así como el desarrollo de sus protocolos presentados la mayoría en archivos de Word o notas escritas manualmente cuando fue necesario. Algunas actividades (sesiones 1, 4 y 5) las tuvieron que enviar como tarea por medio de Moodle, requisitos para la evaluación continua del curso.

En el desarrollo temático para la clase de geometría Euclídea se presentó una variación respecto al contenido del programa propuesto para el primer semestre de 2017; esto con el fin de lograr el uso de herramientas TIC en la formación de la geometría y así amplificar el trabajo docente.

En el esquema general de la clase se presentan las regularidades adoptadas en las sesiones, en lo que se refiere a las guías, talleres y actividades realizadas con el propósito de que los estudiantes sean parte del proceso de comprensión y aprendizaje.

Para el desarrollo de cada temática, a partir de la ejercitación de situaciones problema, se realizó un paso a paso y plenarias de discusión con el fin de descubrir y estudiar la teoría correspondiente, así como la apropiación de las mismas.

Los mecanismos de evaluación fueron explicados a los estudiantes iniciando el curso de Geometría Euclídea, los cuales fueron implementados durante las sesiones de clase con Geogebra; descritos a continuación:

- (4 exámenes parciales) distribuidos durante todo el semestre
- Actividades, tareas y talleres individuales y/o grupales, presentadas a través de la plataforma moodle.
- Trabajo individual y/o grupal en el tablero o por medio de herramientas digitales como pantalla de televisor adaptada al computador para las sesiones con el software Geogebra, videobeam para y durante las sesiones y plenarias de clase.

Para comprender el desarrollo de la clase es importante saber que se tenía como intención, propiciar la participación de los estudiantes en el aprendizaje y ejercitación de las acciones encaminadas a la justificación como la visualización, exploración, conjetura y verificación en el estudio de un sistema axiomático para una parte de la Geometría Euclídea y así tuvieran una experiencia significativa dentro del estudio del sistema axiomático, con el propósito de enriquecer y consolidar las acciones necesarias que llevan a la demostración e ir avanzando en la competencia de la actividad demostrativa en matemáticas.

Del estudio se espera la comprensión de las ideas expuestas en el sistema axiomático a la par de un trabajo con Geometría Dinámica, los estudiantes fueron obteniendo más herramientas clase a clase, participando de forma autónoma y efectiva en el desarrollo de la situación propuesta.

Frente a los planteamientos presentados en la ejercitación del sistema axiomático, los estudiantes asumieron una actitud crítica en la interpretación de enunciados indagando si estos decían lo que se pretendía y si las afirmaciones se respaldaban con la teoría construida al momento, además de solucionar y crear situaciones que muestren que en una justificación se utilizan los hechos geométricos tenidos en cuenta en el desarrollo del sistema axiomático.

Desarrollo temático y plenaria de discusión

Para que los estudiantes participaran de las plenarias de discusión se les dio a conocer la bibliografía presentada en los contenidos programáticos del curso de geometría Euclídea, en la Lic. Matemáticas y Estadística, con el fin de que tuvieran elementos para sostener una conversación y participar en la plenaria de discusión, contribuyendo a aclarar y enriquecer conceptos y relaciones geométricas que constituyeran un mecanismo de formalización de teorías vistas en las situaciones planteadas y ejercitación sobre el sistema axiomático.

Las plenarias y discusiones se desarrollan a través de preguntas y situaciones puntuales propiciadas por la docente, que permiten que el estudiante explique una definición, postulado, teorema, razón de, propiedades o de alguna condición en un enunciado; justificar afirmaciones que no estén sustentadas, reconstruir una demostración presentada en un libro de texto, con preguntas dirigidas a destacar puntos importantes de los que no se han percatado. Se describen algunos ejemplos en el capítulo de resultados y análisis de la información.

Respecto al momento de la *Ejercitación*; Se especifica a los estudiantes los ejercicios relacionados con los temas estudiados, la mayoría de ellos desarrollados con Geogebra para la exploración y ejercitación del SGD, son enviados a la plataforma individual o en grupos de 2, 3 o 4 estudiantes según las normas establecidas en las sesiones de clase; después son calificadas y enviadas de nuevo a los estudiantes con observaciones y comentarios; algunos de ellos son llevados a las plenarias de discusión abordando los puntos relevantes y soluciones pertinentes para aclarar dudas y dificultades, además se dan sugerencias respecto a los ejercicios que no hayan sido resueltos.

Estudiantes voluntarios o seleccionados por la docente, presentan una socialización de la solución de los ejercicios, la actividad tiene como fin abrir un espacio donde los estudiantes expongan las producciones realizadas fuera del contexto de la clase, aclarando dudas y comparando así sus producciones (Ver anexo A). Los estudiantes que no realizaron la situación expuesta, individualmente solucionaron la actividad y poco a poco se involucraron en las discusiones presentadas en la resolución de la situación.

Durante el desarrollo de las temáticas además de apropiación de conceptos y lenguaje geométrico las situaciones propuestas requerían descubrir hechos geométricos y enunciar teoremas, formalizando la respectiva justificación. Se llevaron a cabo situaciones con acompañamiento del docente, y las que no contaron con este apoyo fueron pertinentes para analizar y extraer información para la investigación presentada.

El curso de Geometría Euclídea siempre está habilitado en la plataforma moodle de la Universidad con los ejercicios propuestos, en las sesiones de clase y ejemplos presentados en el

SGD Geogebra, presentados en la figura 5.2, estos ejemplos ofrecen todas las potencialidades que el software puede brindar según las características de la construcción para que el estudiante interactúe con dichos ejemplos y pueda utilizar los procedimientos que considere necesarios en las construcciones y soluciones entregadas.

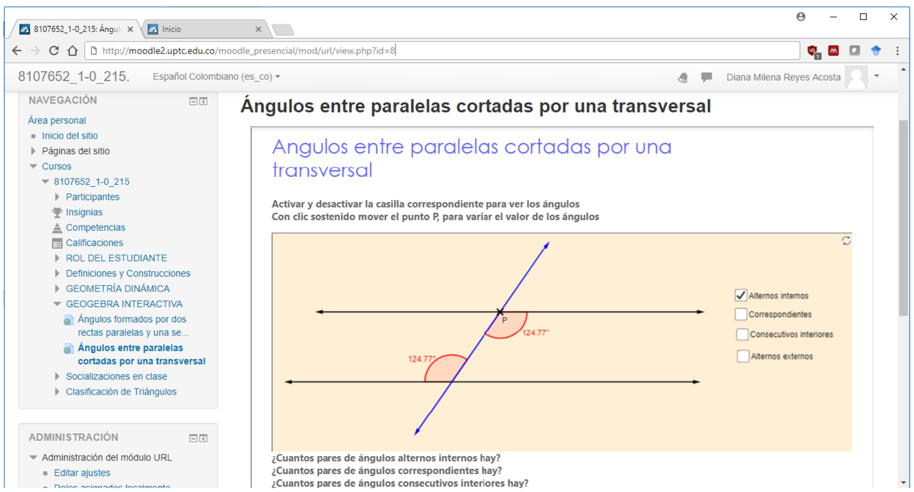


Figura 5.2. Plataforma moodle Uptc con ejercicios propuestos

El SGD Geogebra brinda el apoyo en la formalización de los hechos geométricos involucrados en la situación, ya que amplifican las acciones de visualización y exploración creando el ambiente para que los estudiantes conjeturen, verifiquen y así logren formular justificaciones evidenciado en el capítulo 5.3, desarrollo de sesiones de clase con Geogebra, permitiendo que la Geometría Dinámica sea una herramienta útil y su uso sea significativo.

Evaluación

Después de cada parcial o examen realizado se dedica un tiempo de la sesión para exponer la solución, destacando además tanto respuestas correctas como deficientes, logrando superar dificultades presentadas.

El diseño de la evaluación se realizó con el fin de diferenciar entre aquellos estudiante que tienen mayor dominio del tema, mayor competencia en las acciones de visualización, exploración, conjetura y verificación con los que apenas lograr abordar las situaciones.

Al mismo tiempo el uso de la geometría dinámica logra dar cuenta del estado de cada estudiante, logrando evaluar los objetivos del uso comprensivo de las acciones encaminadas a la justificación, o de las situaciones abordadas en el sistema axiomático.

5.2. Sistemas de recolección de la información

Observación participante: Se utilizan instrumentos como registros de la observación y diario de campo. (Ver Anexo A)

Entrevista grupal: Se utilizan instrumentos como las grabaciones de vídeo en la socialización de las actividades, en las interacciones entre compañeros y docente y las tutorías realizadas en grupos pequeños. (Ver Anexo A)

Se lleva un registro e interpretación de lo que el estudiante dice, y del cómo lo dice, se toma algunas narrativas del proceso realizado por el o los estudiantes, observando la contribución a su aprendizaje, la reflexión generada por el estudiante, actitudes, interacciones, consensos y demás acciones generadas en el ambiente de aprendizaje. (Estas interpretaciones se muestran ampliamente en el análisis de resultados).

Actividad Pedagógica: Se desarrollaron tres guías de exploración con 15 sesiones de aprendizaje con Geogebra, llevadas a cabo en el Laboratorio de Didáctica de las Matemáticas “ABACO” de la UPTC, sede Duitama, realizadas en forma individual, pero con el apoyo entre compañeros como equipo, para discutir respuestas, despejar sus dudas, solucionar inconvenientes con el fin de llegar a un consenso y realizar la construcción haciendo uso de las herramientas pertinentes en Geogebra, las producciones escritas eran realizadas bajo el criterio individual del estudiante. (Ver Anexo D)

Se plantearon situaciones problema, encaminados a desarrollar la visualización, la exploración y el razonamiento en las construcciones geométricas, que llevaran a la producción y validación de conjeturas, encontrando la justificación de los procesos realizados, permitiendo registrar las estrategias, protocolos, desarrollos y dificultades que se presentaban en el desarrollo de las situaciones.

El temario de las sesiones siguió el desarrollo del pensum planteado para el curso de Geometría Euclídea en el programa de la Licenciatura en Matemáticas y Estadística, para la última sesión se plantearon situaciones que recopilaran acciones y procedimientos vistos en las anteriores sesiones de aprendizaje, se esperaba que los estudiantes utilizaran diversas estrategias en la solución de las situaciones, utilizando de forma correcta el software llevando a la construcción de su propio conocimiento.

Los instrumentos utilizados para registrar las producciones de los estudiantes fueron el protocolo extraído del archivo de Geogebra, el protocolo descrito por el estudiante, la interacción con el software extraído de los videos de las capturas de pantalla al momento de desarrollo de actividades.

Criterio de expertos: Se utilizaron los niveles de la caracterización de la actividad demostrativa propuesto por las autoras Perry, Camargo, Samper, y Rojas (2006), vinculando y ampliando los niveles asociados a los procesos de visualización, exploración, producción y verificación de conjeturas, como herramienta de análisis para estudiar tanto las interacciones con el software como las producciones escritas de los estudiantes presentados como solución a las situaciones problema implementadas en las sesiones con Geogebra.

Encuesta: Se realizó una encuesta piloto para la caracterización de los estudiantes durante el desarrollo de las fases, presentado por medio de un foro propuesto a los estudiantes en la plataforma Moodle, en la Figura 5.3 puede verse la captura de pantalla de foro planteado, con el fin de realizar ajustes necesarios para realizar el diseño de la encuesta final. (Ver anexo F)

Se diseñó la encuesta con los ajustes y correcciones necesarias a partir de la encuesta piloto, se aplicó finalizando las fases propuestas para la investigación, estuvo dispuesta para su diligenciamiento a través del correo electrónico de la UPTC, los estudiantes en forma asincrónica fueron respondiendo el cuestionario planteado, se destaca que hubo participación de 12 de los 15 estudiantes que culminaron todas las fases propuestas para investigación. La descripción y análisis se muestran en el numeral 5.3.

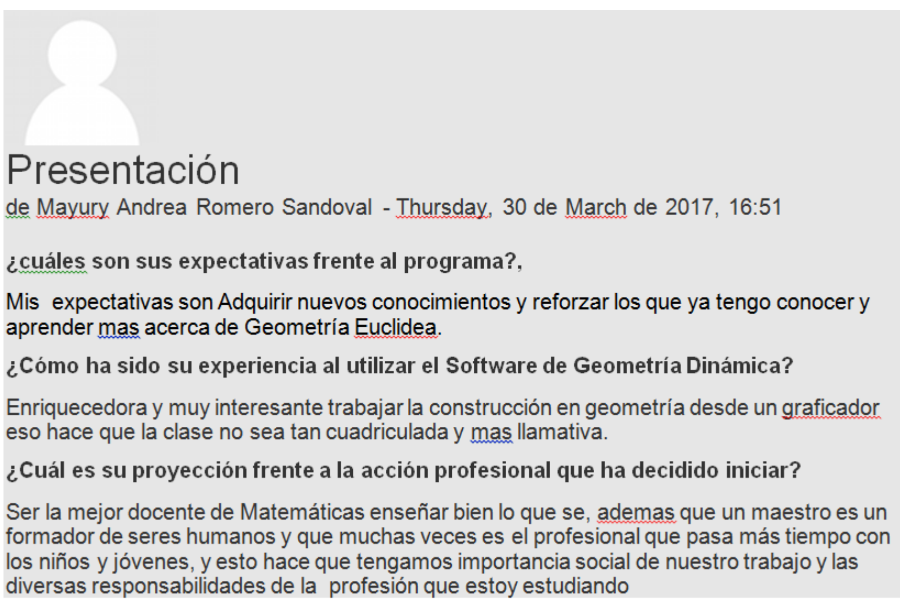


Figura 5.3. Captura de pantalla foro de presentación

Métodos de estadística descriptiva:

Rejilla de niveles: Organización de los datos de medición de las actividades pedagógicas realizadas a los estudiantes. (Ver anexos J, K ,L)

Se registró lo que se observaba en cada sesión de aprendizaje, las acciones y procesos desarrollados respecto a la geometría, categorizando al estudiante a través de los criterios utilizados en la valoración de las concepciones geométricas que se dedujeron para ésta investigación. El nivel adquirido por el estudiante en los procesos que logran mejorarse en las sesiones de aprendizaje se interpreta a través de la observación de la acción del sujeto.

A partir del registro se organizan los datos de los niveles en que se ubicaron los 15 estudiantes que concluyeron todas las actividades y finalizaron el curso de Geometría Euclídea, presentadas en la prueba diagnóstica y en la valoración final adquirida durante el proceso.

Con el registro se muestra el análisis del nivel de desempeño antes y después de realizar las actividades propuestas, mediante el uso del SGD Geogebra, se hace uso del Test de McNemar. Este Test "se utiliza cuando se trata de comparar dos proporciones observadas en el mismo grupo de individuos en dos ocasiones distintas de tiempo (antes y después de algún estímulo). Se pretende comparar si se produce algún cambio significativo entre ambas mediciones" (Díaz, s.f). Al contrastar la diferencia entre proporción antes y después se considera el estadístico de contraste que sigue una distribución Ji- cuadrado con un grado de libertad, y como la frecuencia es pequeña, refiriéndose a los estudiantes que culminaron el curso de Geometría Euclídea, se utiliza una corrección en este caso se utilizó la corrección de Yates. (Estos resultados se muestran ampliamente en el desarrollo del numeral 5.3.)

Con dicha información se muestra un registro donde los elementos obtenidos a partir de la recolección de datos, se han integrado en el análisis de resultados de los estudiantes en las sesiones de trabajo. En el capítulo de análisis de los resultados se muestra dicha integración.

5.3. Validación de los datos cualitativos: sistemas de triangulación de la información, credibilidad, transferibilidad y dependencia

Se ha considerado este estudio de investigación como cualitativo, por tal razón desde la perspectiva metodológica a continuación se describe cómo se ha establecido la validación de los datos de la investigación.

La metodología cualitativa establece que para evaluar la calidad de la investigación se recure a través de tres criterios: credibilidad, transferibilidad y la dependencia (Guba y Lincoln, 1985). El primero de ellos cuyo objetivo se logra cuando el investigador, a través de observaciones y conversaciones continuas con los participantes del estudio, recolecta información que a su vez esta produce hallazgos y luego éstos son reconocidos por los integrantes de la investigación como una aproximación verdadera de lo que ellos sienten y/ o piensan. Para determinar la credibilidad de la investigación se utilizaron los siguientes elementos:

- Apuntes o notas de clase que surgieron de las acciones de los estudiantes y de las interacciones durante el desarrollo de la investigación.
- Observación continua y trabajo tanto en el lugar que se llevó el estudio como en el uso de la plataforma moodle, durante el primer semestre del 2017.(Ver Anexo A)
- Recolección de material referenciado a través de videos que han sido grabados durante las sesiones de clase. (Ver Anexo A)
- Se han documentado entrevistas para respaldar los resultados e interpretado en el presente estudio. (Ver Anexo A)
- El uso de la triangulación en la recolección de datos como estrategia para establecer la congruencia entre los resultados.
- Discusión crítica de los conocimientos e interpretaciones con la directora de la investigación así como de profesores en didáctica.

En segundo lugar se encuentra la transferibilidad, esta hace referencia a la posibilidad de aplicar los resultados del estudio a otras poblaciones, es decir, se debe proporcionar suficiente información sobre el estudio y del contexto del mismo que permita trasladar y comparar los hallazgos en contexto diferente. En la presente investigación se especifica el número estudiantes participantes en el estudio así como su caracterización, el número y la duración de las sesiones de clase en las que se recolectaron los datos. Para esta investigación se tuvieron en cuenta los siguientes criterios:

- Recolección de las actividades y secciones de clase, como las grabaciones que permitieron la revisión constante de la información suministrada por los participantes. También, la observación directa y la participación activa de la investigadora permitió obtener más información. (Ver Anexo A)
- Descripción amplia de cada una de las secciones de clase las cuales permiten establecer relaciones con otros contextos. En el numeral 5.3.2 se realiza la descripción de cada una de las sesiones.

Por último, la consistencia a través de la dependencia, que aporta el estudio proporcionando información que permite comprender el método utilizado he incluye el diseño, secuencia de actividades e implementación, considerando algunos cambios o sugerencias efectuados durante el proceso; a su vez, una descripción detallada de las sesiones de clase así como una evaluación reflexiva del proceso y los resultados alcanzados.

- Descripción de las características de los estudiantes o participantes del estudio, asimismo las técnicas de análisis y obtención de la información.
- Análisis de la trascripción fiel de entrevistas, sesiones o plenarias a los participantes del estudio.

6. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

6.1. Nivel inicial de los estudiantes en la asignatura de Geometría Euclídea durante primer semestre del año 2017

Se aplicó una prueba escrita con la finalidad de encontrar las dificultades y obstáculos presentados en la identificación de conceptos geométricos fundamentales y lenguaje utilizado por el estudiante, además de analizar las habilidades que poseen en el manejo de instrumentos como regla y compás, el proceso de justificación presentado en la construcción y desarrollo de situaciones problema, finalmente se indagó a los estudiantes si tuvieron o no orientación geométrica mediada por algún software especializado.

Fase Diagnóstica

Las situaciones No. 1 y No. 2 de visualización e identificación de figuras geométricas fueron tomados de (Espinal, 2010) con 5 y 3 incisos respectivamente. En la situación No. 3., se registró las respuestas al indagar sobre la orientación recibida en el área de geometría a los estudiantes y en la Situación No. 4., se planteó actividades de construcción geométrica para justificar con el trabajo de lápiz y papel haciendo uso de regla y compás. Las situaciones propuestas contemplan las competencias y conocimientos planteados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN) y nociones básicas de geometría plana que debe tener un estudiante que ha finalizado el bachillerato.

A continuación se describe la estructura de las situaciones presentadas en la Fase diagnóstica, así como los resultados y análisis de las pruebas aplicadas.

Situación No. 1

Objetivo General: identificar conceptos geométricos fundamentales como ángulo, vértice, mediatriz, bisectriz, semirrecta y algunas de sus relaciones, cada una con su correspondiente notación.

Tiempo de ejecución: De 1 sesión (1 hora) **Fecha:** 20 de febrero de 2017

Conceptos: Ángulo, vértice, mediatriz, bisectriz, semirrecta y lenguaje geométrico.

Recursos: Lápiz, hojas de papel y representaciones gráfica plasmada en papel.

Descripción: A partir de la representaciones gráfica dada a cada uno de los estudiantes se anexan las indicaciones que se muestran en la situación presentadas a continuación (Ver cuadro No 6.1: Enunciado para la situación N° 1) con el fin de identificar el estado inicial de los estudiantes frente a los contenidos geométricos extraídos a partir de la visualización propuestos en la situación dada.

Uptc Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA
GEOMETRÍA EUCLIDEA

Situación No. 1

Nombre:____

Código:____________ **Fecha:**________________________

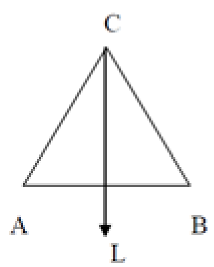


Figura 1

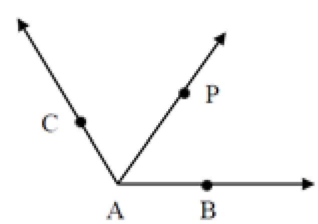


Figura 2

Identifica:

a) ¿Cuántos ángulos están determinados por la figura 1? Nombrarlos ________________

b) ¿Cuántos vértices se forman en la figura 1? Nombrarlos ________________

c) ¿Cuál es la mediatriz en el triángulo? ________________

d) ¿Qué ángulo se forma en la figura 2? ________________

e) ¿Cuál es la bisectriz del ángulo formado en la figura 2? ________________

Cuadro 6.1. Enunciado para la situación N° 1

La tabulación de resultados se presenta a continuación:

Tabla 6.1

Tabla de Resultados situación Nº 1.

Items	Correcta	Incorreta	Incompleta	No Contestó
a.	0	7	14	0
b.	5	11	5	0
c.	15	3	2	1
d.	0	20	1	0
e.	8	13	0	0

De los resultados mostrados en la tabla anterior se puede observar que tan sólo en uno de los 5 ítems, más de la mitad de los estudiantes respondieron correctamente; al analizar los resultados individualmente de cada pregunta se tiene que en el ítem **a)** ninguno de los estudiantes acertó en la respuesta, 7 estudiantes contestaron incorrectamente y el 66 % de los estudiantes equivalente a 14 estudiantes no completaron su respuesta, los estudiantes que tuvieron la respuesta incompleta tan sólo observaron los ángulos que se nombran en los vértices pero ninguno logró visualizar ni identificar los demás ángulos en las figuras propuestas, así estuviesen determinados.

En el ítem **b)** tan sólo 5 estudiantes respondieron correctamente, 5 estudiantes dieron una respuesta incompleta, y más del cincuenta por ciento de los estudiantes contestaron incorrectamente, se evidencia la dificultad al identificar y nombrar los vértices de las figuras propuestas.

Para la tercera pregunta se evidencia que más del 70 % de los estudiantes acertaron en la respuesta, se observa que identifican el término "mediatriz del triángulo", 2 estudiantes no tienen el concepto claro en la notación al dejar la respuesta incompleta y 4 estudiantes no conocen la definición de mediatriz.

En la cuarta pregunta los estudiantes no pueden identificar el ángulo que se forma en la figura, algunas de las respuestas fueron: el ángulo que se forma es agudo, obtuso, mayor de 90°, ángulo de 180°, dejando notar varios errores en la conceptualización al nombrar el ángulo que se forma en la figura presentada, ninguno de los estudiantes logró identificar ni nombrar geométricamente el ángulo que se formó en la figura presentada.

Finalmente en el ítem **e)** tan sólo el 38 % de los estudiantes contestó correctamente, quiere decir que la mayoría de los estudiantes tienen dificultad en identificar el concepto de bisectriz, su notación y definición.

De este análisis de resultados se puede concluir que si los estudiantes no tiene claros los conceptos ni el lenguaje geométrico utilizado se afectará tanto el proceso de aprendizaje como el de la visualización, ésta última entendida como "el proceso cuyo propósito es percibir, detectar y evocar propiedades geométricas de un objeto o de las relaciones entre objetos" (Samper, Corredor, & Echeverry, 2014, pág. 69)

Situación No. 2

Objetivo General: El objetivo del registro de las respuestas al indagar sobre geometría en los estudiantes es conocer el acercamiento que el estudiante tiene con la geometría, sus experiencias, relaciones y si recordaba haber recibido orientación sobre ésta área en el colegio, universidad o en otro ámbito académico y si en alguno de esos casos la orientación fue impartida por medio de software especializado o algún medio tecnológico.

Tiempo de ejecución: De 1 sesión (1 hora) **Fecha:** 20 de febrero de 2017

Recursos: Lápiz y hojas de papel

Descripción: A través de las preguntas presentadas (Ver cuadro No 6.2: Enunciado para la situación Nº 2) identificar en el estudiante el acercamiento y experiencias del estudiante con la Geometría y la Geometría Dinámica.

SITUACIÓN No. 2

Sobre Geometría A continuación indique si recibió orientación del área de geometría en el colegio, universidad o en otro ámbito académico y si en alguno de esos casos la orientación fue impartida por medio de software especializado o algún medio tecnológico.
Mencione y responda:

- ¿Qué es para usted la geometría?
- Experiencias vividas con la geometría o aspectos relevantes de lo que recuerda del área
- ¿Con qué aspectos relaciona la geometría?

Cuadro 6.2. Enunciado para la situación Nº 2

La tabulación de resultados se presenta a continuación:

Tabla 6.2

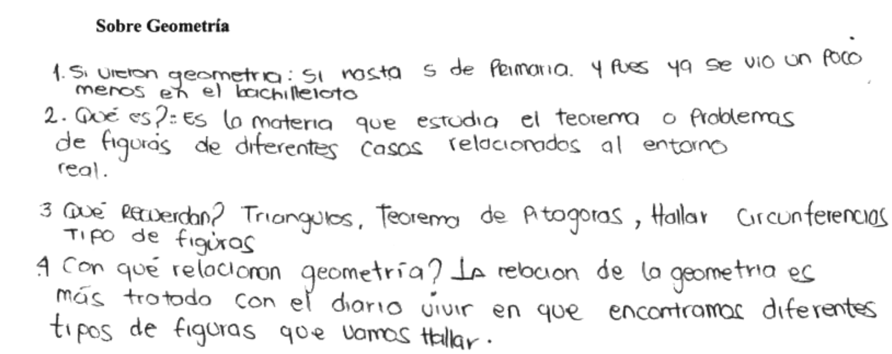
Tabla de Resultados situación Nº 2.

Geometría			**Geometría con Software**	
Colegio		Universidad		
SI	NO	SI	SI	NO
17	3	1	3	18

De los resultados registrados se puede observar que la mayoría de los estudiantes a pesar de haber recibido orientación de geometría, no muestran el dominio mínimo de un estudiante que en el nivel de bachillerato debería tener, además se puede identificar que en segundo semestre cursado de la Licenciatura es bajo el acercamiento que los estudiantes registran de haber tenido acercamiento con tecnologías, tan sólo 3 estudiantes han tenido la oportunidad de estar en un ambiente con geometría dinámica.

A continuación se muestran algunos resultados presentados por los estudiantes

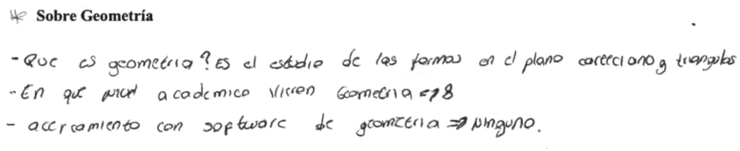
Estudiante 2


Sobre Geometría

1. Si vieron geometría: si hasta 5 de Primaria. y pues ya se vio un poco menos en el bachillerato
2. Qué es?: Es la materia que estudia el teorema o problemas de figuras de diferentes casos relacionados al entorno real.
3 Qué recuerdan? Triangulos, Teorema de Pitagoras, Hallar circunferencias Tipo de figuras
4 Con qué relacionan geometría? La relacion de la geometria es más tratado con el diario vivir en que encontramos diferentes tipos de figuras que vamos hallar.

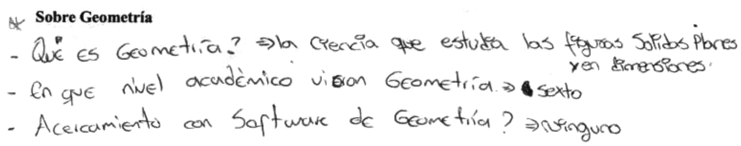
Si hay acercamiento en el área de geometría pero es poco en el bachillerato, también se observa que recuerda que es el estudio de figuras del entorno real y la relaciona con la cotidianidad y no menciona haber tenido un acercamiento con mediación TIC o software especializado para el área.

Estudiante 8


Sobre Geometría

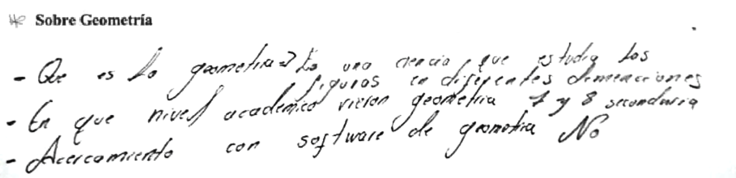
- Que es geometría? es el estudio de las formas en el plano carteciano y triangulos
- En que nivel academico vieron Geometría => 8
- acercamiento con software de geometría => ninguno.

Estudiante 9


Sobre Geometría

- Qué es Geometría? => la ciencia que estudia las figuras Solidos Planos y en dimensiones.
- En que nivel académico vieron Geometría => sexto
- Acercamiento con Software de Geometría? => ninguno

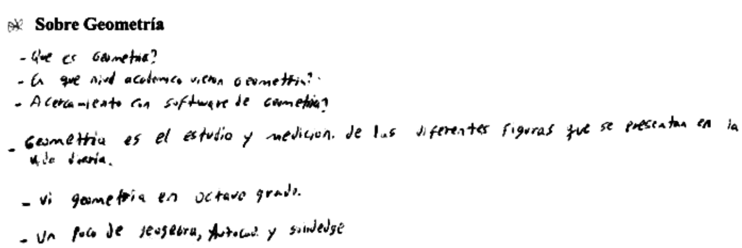
Estudiante 11


Sobre Geometría

- Que es la geometria? Es una ciencia que estudia las figuras en diferentes dimensiones
- En que nivel academico vieron geometria 7 y 8 secundaria
- Acercamiento con software de geometria No

De acuerdo a las respuestas registradas por los tres estudiantes se puede mencionar que no hubo ningún acercamiento con software de geometría en ningún nivel académico y es de resaltar que la geometría fue una asignatura que fue impartida en máximo dos niveles académicos resaltando que la mayoría de los estudiantes sólo la vieron en un grado de escolaridad.

Estudiante 6


Sobre Geometría

- Que es Geometria?
- En que nivel academico vieron geometria?
- Acercamiento con software de geometria?
- Geometria es el estudio y medicion. de las diferentes figuras que se presentan en la vida diaria.
- vi geometria en octavo grado.
- Un poco de geogebra, Autocad y solidedge

Uno de los estudiantes manifiesta haber tenido un acercamiento con el software de Geometría Geogebra y otros software como Autocad y Solid Edge.

De los registros tomados de los estudiantes se puede concluir que de los estudiantes que asisten al curso de Geometría Euclídea tan solo 3 de ellos tuvieron experiencia con software de geometría dinámica en su recorrido académico, es de notar que se evidencia la escaza utilización de herramientas TIC en el aula y cabe resaltar que los ambientes computacionales han sido producto de varias investigaciones que concluyen como lo afirma Fuglestad (2004) citado por Gamboa, R. (2007) “El uso de herramientas computacionales da acceso a los estudiantes a varias formas de expresar sus ideas matemáticas y experimentar con ellas (p. 19).

Situación No. 3

Objetivo General: Identificar los conceptos geométricos fundamentales visualizados por los estudiantes, conceptos con los que los estudiantes deben estar familiarizados ya que fueron vistos en su recorrido académico, donde el estudiante debía identificar y nombrar algunas posiciones relativas de dos rectas y todos los triángulos visualizados en la figura.

Tiempo de ejecución: De 1 sesión (1/2 hora) **Fecha:** 22 de febrero de 2017

Conceptos: Posiciones relativas de dos rectas y visualización de triángulos.

Recursos: Lápiz, hojas de papel y representaciones gráfica plasmada en papel.

Descripción: A partir de la representación gráfica dada a cada uno de los estudiantes se anexan las indicaciones que se muestran en la situación presentada a continuación (Ver cuadro No 6.3: Enunciado para la situación Nº 3) con el fin de identificar si el estudiante nombra las posiciones relativas de dos rectas y todos los triángulos presentados en la figura.

Uptc Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia

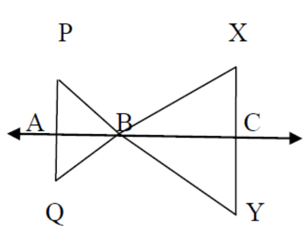
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA
GEOMETRÍA EUCLIDEA

Situación No. 3

Nombre:______________________________

Código:____________ **Fecha:**__________________

De la siguiente figura Identifica y nombra



a) Rectas Paralelas ________________

b) Rectas Perpendiculares ____________

c) Triángulos ____________________

Cuadro 6.3. Enunciado para la situación Nº 3

La tabulación de resultados se presenta a continuación:

Tabla 6.3

Tabla de Resultados situación Nº 3.

Items	Correcta	Incorreta	Incompleta	No Contestó
a.	19	2	0	0
b.	5	7	8	1
c.	17	0	4	0

El 90 % de los estudiantes respondieron correctamente en la identificación de las rectas paralelas y tan sólo el 10 % dejaron de hacerlo, Con respecto a la identificación y notación de las rectas perpendiculares, tan solo el 23 % de los estudiantes respondieron correctamente, el 33 % dio una respuesta incorrecta, el 38 % no completó su respuesta y un 5 %no conoce o no visualiza el concepto de recta perpendicular, lo que evidencia que más del 75 %de los estudiantes no visualizan y no tienen el concepto ni la claridad al momento de utilizar un correcto lenguaje geométrico.

Respecto a la identificación de triángulos se deja notar que el 80 % de los estudiantes reconocen todos los triángulos presentados en la figura y el 20 % dejaron su respuesta incompleta.

Los resultados muestran que casi la totalidad de los estudiantes lograron identificar correctamente las rectas paralelas, pero difícilmente logran identificar las rectas perpendiculares, puede asociarse a una incorrecta visualización o la falta de conocimiento del concepto, al identificar y nombrar las posiciones relativas de las rectas y la mayoría de los estudiantes lograron identificar todos los triángulos visualizados en la figura.

Situación No. 4

Objetivo General: Identificar los conceptos geométricos fundamentales visualizados por los estudiantes, conceptos con los que los estudiantes deben estar familiarizados ya que fueron vistos en su recorrido académico, donde el estudiante debía identificar y nombrar algunas posiciones relativas de dos rectas y todos los triángulos visualizados en la figura.

Tiempo de ejecución: De 1 sesión (1 y 1/2 hora) **Fecha:** 22 de febrero de 2017

Conceptos: Posiciones relativas de dos rectas y visualización de triángulos.

Recursos: Lápiz, hojas de papel y representaciones gráfica plasmada en papel.

Descripción: El objetivo principal de esta serie de construcciones es identificar las habilidades que poseen los estudiantes con el manejo de instrumentos como regla y compás y que al relacionar elementos geométricos y definiciones se verifiquen características donde se logre identificar el nivel de apropiación de conceptos y saberes. Se pide realizar una construcción geométrica a partir de unos objetos geométricos iniciales.

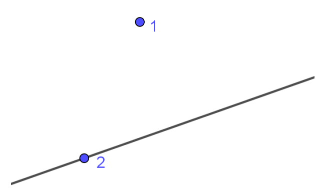
Situación No. 4

Utilizando regla y compás realice las siguientes actividades. Escriba los pasos que sigue para realizar las construcciones.

a) Encontrar el punto medio de los puntos A y B.

b) Construya un triángulo equilátero sobre el segmento $\overline{AB}$.

c) Construya la circunferencia con centro 1 y tangente a la recta 2.



Cuadro 6.4. Enunciado para la situación Nº 4

A continuación se presentan los resultados de las construcciones y justificaciones realizadas con regla y compás:

Tabla 6.4

Tabla de Resultados situación Nº 4.

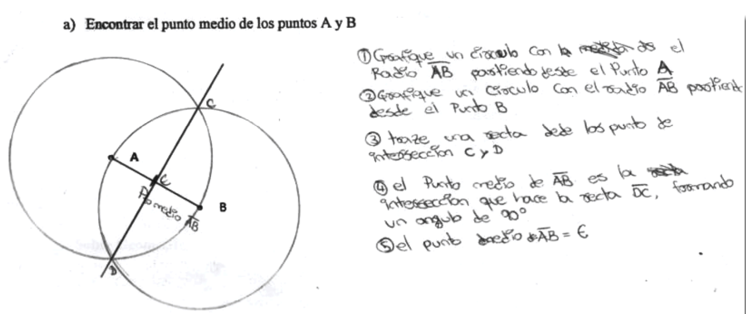
Items	Construcción Correcta Justificación completa	Construcción Correcta Justificación incompleta	Incorrecta	No
a.	5	11	5	0
b.	13	5	3	0
c.	6	4	1	0

Para la actividad **a)** a partir de dos puntos dados obtener el punto medio de dichos puntos el 80 % de los estudiantes lograron el objetivo en la construcción con regla y compás pero en el proceso de justificación tan sólo el 23 % justificó acertadamente la construcción realizada, para el desarrollo de dicha construcción algunos estudiantes manifestaron que realizaron la actividad a través de un trabajo colaborativo ya que no encontraron resultados óptimos en el desarrollo de su actividad.

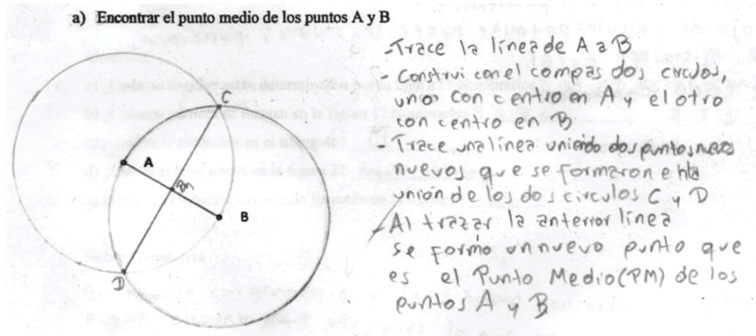
Para la actividad **b)** el 61 % de los estudiantes acertaron en la construcción y justificación, las dos actividades tenían procedimientos similares por tanto en la segunda actividad ya estaban más familiarizados con dicha construcción; el 23 % de los estudiantes realizaron la construcción correcta, pero se evidencia que el proceso de justificación no satisface el desarrollo mostrado al realizar dicha actividad.

A continuación se presentan algunas de las construcciones realizadas por los estudiantes y su respectiva justificación.

Estudiante 9

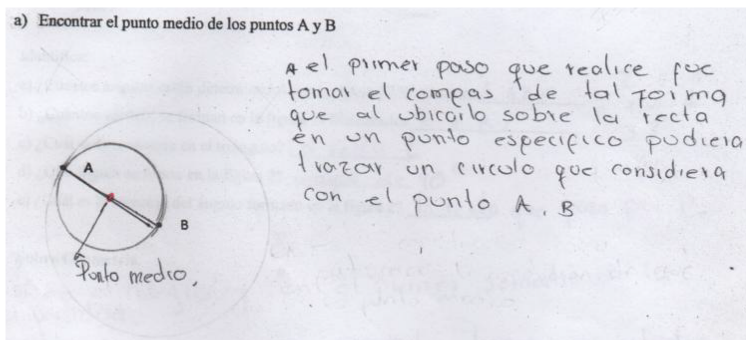


Estudiante 5



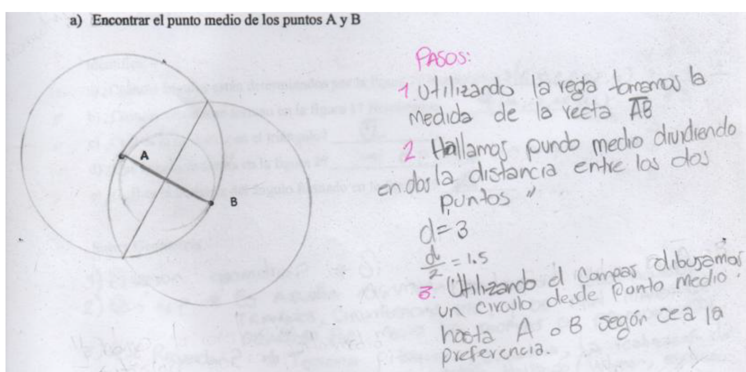
Los estudiantes que realizaron correctamente la construcción son similares a las mostradas anteriormente, pero tan solo 5 estudiantes muestran destreza para el desarrollo de dicha construcción describiendo el proceso realizado correctamente.

Estudiante 15



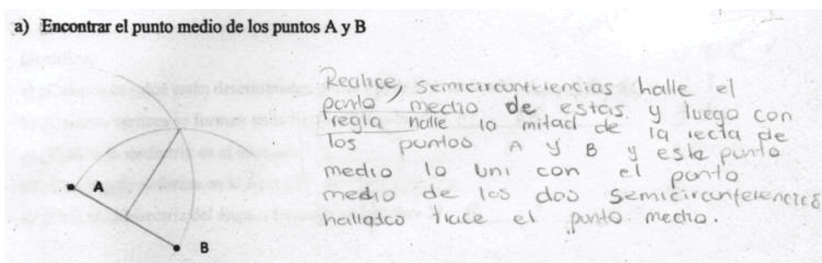
De dicha construcción se puede interpretar que el estudiante no hace uso efectivo de las herramientas que tiene como lo es el compás ni realiza los trazos correspondientes para encontrar definiciones o propiedades geométricas que satisfagan las características geométricas enunciadas.

Estudiante 3



La estudiante después de sólo hallar la distancia de los dos puntos con el instrumento de medida la regla enuncia en el tercer paso "Utilizando el compás dibujamos un círculo desde punto medio hasta A o B" no hace uso correcto de los instrumentos para realizar dicha construcción, No hay ningún procedimiento descrito que satisfaga que hay un punto medio entre los puntos A y B y finalmente el protocolo no corresponde a la construcción que realizó.

Estudiante 12



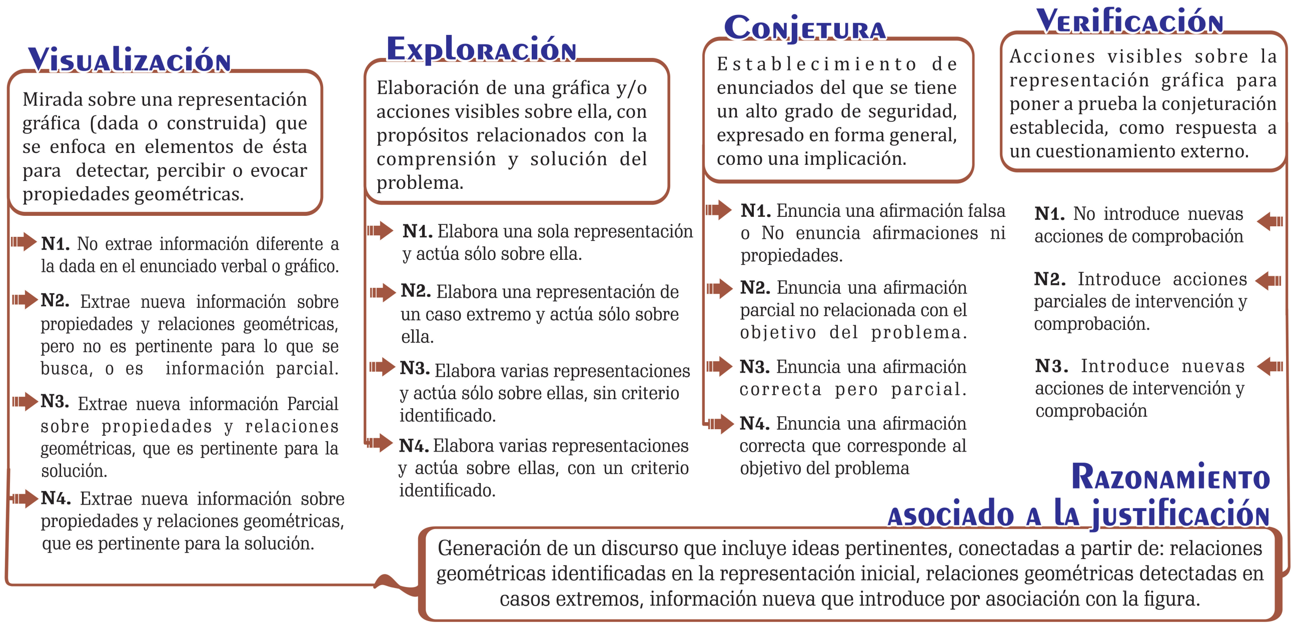
En este caso la estudiante tampoco hace uso correcto de los instrumentos ya que utiliza la regla para medir y obtener "la mitad de la recta" como lo enuncia ella y por ende el uso incorrecto de dicho instrumento no le permite explorar las características geométricas que puede encontrar al realizar trazos y explorar.

A partir de la aplicación de la prueba se analizaron las producciones de los estudiantes, bajo la óptica de los niveles descritos para las acciones de visualización y exploración, propuestos para esta investigación, así como el avance en la producción y verificación de conjeturas, caracterizando así el estado inicial de cada estudiante.

Categorización de niveles

Para categorizar el nivel adquirido por cada estudiante se realiza a través de la interpretación de las acciones realizadas por él, evaluados a través de la tabla de categorías propuestas para esta investigación, se incorporan y complementan los niveles de desempeño propuestos en los procesos de visualización, exploración y los que llevan a la construcción y verificación de conjeturas, señalados en la caracterización de la actividad demostrativa; por las autoras Perry, Camargo, Samper, y Rojas (2006).

La categorización resultante se muestra a continuación:



Fuente: *Adaptación de la caracterización de la actividad demostrativa; Perry, et. al. (2006).*

En las sesiones desarrolladas se tuvieron en cuenta los procesos de visualización, exploración, conjetura y verificación, pero a través de éstas se evaluaron los niveles frente a la apropiación de TIC a partir de la ambientación mediada por el SGD Geogebra. Se realizó una evaluación permanente observando el desempeño del estudiante permitiendo el registro del avance a medida que se aumentaba el nivel de complejidad de las situaciones presentadas, logrando que el estudiante se apropie del uso y manejo del software.

Análisis del estado inicial de los estudiantes a la luz de las categorías

A partir del análisis de los resultados presentados en el diagnóstico se destacan en forma general los resultados obtenidos en cada nivel. En la acción de visualización frente a la definición de Perry et al (2006) que "hace referencia a la mirada matemática de las figuras requerida para detectar la dependencia entre propiedades geométricas; exige como mínimo, des configurar y reconfigurar una figura para lograr identificar las relaciones subyacentes, generando la semilla de la inferencia" (p.79).

Se destaca que la mayoría de los estudiantes en la prueba diagnóstica se ubicaron en el nivel 2 de visualización, los estudiantes extraen información: parcial o sobre propiedades y relaciones geométricas, que no son pertinentes para lo que se busca y los demás estudiantes en el nivel uno no extraen información diferente a la dada en el enunciado verbal o gráfico, es así que se comparte las afirmaciones planteadas por los autores Duvall(2005) y Gal - Linchevski (2010), citados en Marmolejo y Vega (2012), quienes presentan en sus investigaciones "que los estudiantes privilegian una visualización de naturaleza estática o icónica, centrada en lo que a primera vista se ve en la figura geométrica en estudio” (p.10). Así el resultado de ver esta actividad cognitiva de esta manera además de ser insuficiente dificulta la actividad en cuanto la aplicación y desarrollo tanto de conceptos como de relaciones geométricas.

El nivel de exploración “hace referencia a la investigación empírica (e.g., medir, construir, calcular, estudiar casos críticos) realizada con el objetivo de descubrir una propiedad o relación” (Perry, 2006, p.79) la mayoría de los estudiantes se ubican en el nivel 2; elaboran una representación de un caso extremo y actúan solo sobre ella y los demás estudiantes se ubican en el nivel 3, es decir elaboran varias representaciones y actúan sobre ellas pero sin un criterio identificado. Destacando así que los estudiantes a pesar de realizar una exploración, no descubren las propiedades ni relaciones entre ellas, no logran interpretar o plantear soluciones pertinentes con argumentos o criterios identificados.

En el nivel de conjetura que hace “referencia al acto de postular una generalización, producto de la exploración, estableciendo relaciones del tipo si... entonces..., logrando el convencimiento personal, condición necesaria para comprometerse con una justificación” (Perry, (2006), p.79). Se destaca que los estudiantes no enuncian afirmaciones ni propiedades y en los casos que lo hacen la afirmación es parcial, o no es relacionada con el objetivo del problema, es decir la mayor parte de los estudiantes se ubican en los niveles 1 y 2.

En la situación No. 4 (Ver Anexo B) de la fase diagnóstica a partir del protocolo, las justificaciones dadas y la descripción de propiedades y relaciones encontradas, se buscó recolectar información sobre el nivel de conjetura de cada uno de los estudiantes. Se identificó el nivel de verificación frente a una situación geométrica constituida por el estudiante, la acción de verificar “hace referencia a la comprobación empírica realizada con el objetivo de ratificar una conjetura, cuando un cuestionamiento externo suscita una duda frente a ella” (Perry, (2006), p.79). Para concluir en la situación expuesta la mayoría de los estudiantes no realizaron acciones visibles sobre la representación gráfica para poner a prueba la conjetura, esto a partir de las instrucciones adjuntas, después de haber realizado la construcción geométrica.

En la fase diagnóstica respecto a las acciones de la verificación la mayoría de los estudiantes se ubicaron en el nivel 1, identificando que no introducen acciones de comprobación frente a las situaciones planteadas y los pocos estudiantes que se ubican en el nivel 2, introducen acciones de intervención y comprobación pero estas son parciales.

Se puede mencionar que dichos resultados muestran la falta de conocimientos que tienen los estudiantes en el área de geometría y la dificultad que muestran al desarrollar situaciones problema y construcciones geométricas elementales, ésta puede ser una de las consecuencias que se presentan ya que al preguntar a los estudiantes sobre si habían tenido orientación de ésta área, las respuestas se destacan de la siguiente manera: un estudiante responde que de los grados quinto a once, otro estudiante de sexto a noveno y dos estudiantes respondieron que a lo sumo en dos niveles de escolaridad, y los demás estudiantes en un solo grado o en el primer semestre cursado en la universidad, por ello muestran dificultades en las actividades diagnósticas realizadas.

Además al resolver las situaciones problema que involucran hacer uso del razonamiento geométrico muy pocos estudiantes logran resolver acertadamente dichas situaciones.

Teniendo en cuenta los antecedentes mencionados se pretende que el estudiante se apropie de los conceptos fundamentales de la Geometría Euclídea, a través de una metodología dinámica, mediada por actividades geométricas que propicien ambientes de aprendizaje provechosos tanto para el estudio del tema presentado como para el uso en la práctica docente.

6.2. Ambientes de aprendizaje apoyados en el uso de SGD Geogebra

Para el desarrollo del proceso formativo con Geogebra se llevaron a cabo dos fases, iniciando con la fase de instrucción realizada a través de un taller exploratorio de Geogebra, seguida de la fase de aprendizaje que involucra situaciones encaminadas al desarrollo de la visualización y la exploración ya sea de una representación dada o construida en Geogebra, llevando al estudiante a formular y verificar conjeturas. Permitiendo el desarrollo de habilidades en la utilización de las herramientas y opciones del menú del software de Geometría dinámica en función del aprendizaje y la enseñanza de la geometría.

6.2.1. Fase instructiva con Geogebra

En esta fase se aplicó el taller **"Explorando con Geogebra"** con el objetivo de conocer y explorar el menú, comandos y herramientas de GeoGebra, ya que el uso del software permite identificar conceptos, propiedades y características geométricas por medio de la exploración del mismo. Con la aplicación del taller se busca que los estudiantes aprendan a usar el SGD Geogebra para hacer construcciones y realizar la exploración de figuras.

Para el desarrollo de esta fase se presentó una guía de inducción sobre el uso de Geogebra (Ver Anexo C), se instaló el software en dispositivos móviles, como tabletas y celulares con los cuales contaban los estudiantes logrando poco a poco la familiarizaron con el taller y el software, uno de los aspectos importantes es que al utilizar por primera vez el programa instalado en dichos instrumentos tecnológicos, los estudiantes iniciaron por sí solos la exploración y desarrollo de construcciones geométricas; además se logró la comunicación entre unos y otros con el objetivo de explorar y conocer Geogebra.

El taller de exploración de Geogebra, estaba integrado por tres guías que se iban entregando a cada uno de los estudiantes previamente al desarrollo de la clase presencial, las cuales tenían tres momentos: Construcción geométrica, verificación de propiedades en las construcciones realizadas y socialización. Los temas involucrados en el taller fueron recta tangente, circunferencia, punto medio y triángulo equilátero, temas planteados en el currículo escolar y se parte del hecho que fueron temas estudiados en la formación secundaria como lo soportan los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas y los Derechos Básicos de Aprendizaje.

Las construcciones presentadas en las guías fueron desarrolladas en lápiz y papel por los estudiantes en la prueba diagnóstica, y se retomaron en las actividades de exploración del SGD Geogebra con el objetivo de que hubiera una familiarización con la actividad presentada y así poder contrastar y experimentar en una situación dinámica las conjeturas a que habían llegado los estudiantes anteriormente.

La guías previamente elaboradas, permitieron al estudiante explorar y conocer las barras de menú, herramientas y de entrada, la ventana de álgebra y la zona gráfica; mediante el desarrollo de estas actividades y por medio de las modificaciones de las construcciones geométricas realizadas por el estudiante, éste fuera descubriendo por sí mismo los conceptos y procedimientos a partir de la exploración de situaciones prácticas.

6.2.2. Fase de aprendizaje con Geogebra

Para caracterizar el ambiente de aprendizaje se realizó el diseño de situaciones problema partiendo del conocimiento geométrico inicial de los estudiantes, permitiendo la articulación del uso de Sistemas de Geometría Dinámica como el Geogebra, y la interacción con el ambiente generado por la plataforma virtual, todo esto llevado a que se fortalecieran los procesos de la visualización y la exploración encaminadas a la producción y validación de conjeturas, acciones que propician vías a la justificación.

Esta fase se desarrolló en función de los resultados de la Prueba Diagnóstica y tomando en cuenta las competencias y conocimientos planteados en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas propuestos por el MEN, contenidos que el estudiante debe alcanzar al culminar la educación Media.

6.2.2.1. Rasgos generales de la implementación

Durante el desarrollo de esta fase se implementaron 15 sesiones de aprendizaje donde se propusieron situaciones problema, permitiendo la socialización, retroalimentación y formalización en la siguiente sesión de clase, cuando fuese necesario y en cada una se articuló un determinado contenido del curso, los planteamientos buscaban que el estudiante se apropiara de las situaciones, y así detectar el nivel alcanzado en cada una de las acciones que llevaban al razonamiento asociado a la justificación.

En cada sesión se pretendía identificar el trabajo de los estudiantes cuando abordan una situación, es decir: qué hacen y qué pasos siguen para llegar a la solución, identificar los conocimientos geométricos que poseen los estudiantes al observar quienes pueden abordar el problema y quienes no, quienes si utilizan las diversas herramientas del software, y quienes se limitan a utilizar las herramientas mínimas, quienes llegan a descubrir teoremas y propiedades más allá de las planteadas y quienes se quedan sólo con la información dada.

Para obtener las producciones de los estudiantes fue necesario que el estudiante hiciera la descripción de sus construcciones, mostrando la estructura de la interacción con el software, los objetos geométricos, las propiedades y características que emergen al dinamizar el desarrollo de las situaciones propuestas.

Estructura de las Sesiones de Aprendizaje

Las sesiones se desarrollaron teniendo en cuenta los procesos de visualización, exploración, conjetura y verificación, y durante el avance y el ritmo de aprendizaje de los estudiantes se adecuaron las sesiones de aprendizaje según la necesidad de cada nivel.

En el proceso de visualización ya sea de una representación dada o construida en el software Geogebra, se define un qué hacer y un cómo hacerlo, se desarrolla en forma individual para que el estudiante reflexione y a través de la exploración lo lleve a visualizar y descubrir en la construcción, la representación de las condiciones establecidas.

Siguiendo con la exploración, se valida con base en las acciones o construcciones visibles realizadas por el estudiante, permitiendo hacer uso de las propiedades de representación que ofrece el software, registrando lo que observa a partir de la exploración y uso de la herramienta de arrastre identificando propiedades y características geométricas. Así que, la exploración surge al intentar dar solución a un problema, descubrir hechos, contrastar situaciones, que conducen a la construcción donde se evidencian propiedades geométricas y sus relaciones conduciendo a la producción y validación de conjeturas, (Paiba, et al., 2004, p.3)

Finalmente se conjetura y verifica, el estudiante descubre y construye, emite enunciados que pueden ser conjeturas, hipótesis, generalizaciones, afirmaciones, razones, representaciones gráficas o simbólicas, elabora sus propias conclusiones, introduciendo acciones que verifiquen los enunciados producidos por los estudiantes. No se espera que los enunciados de los estudiantes sean correctos, pero se valora la producción del estudiante y se orienta en caso de ser necesario.

En algunas situaciones se introduce el uso de diagramas para presentar desarrollos encaminados a formular conjeturas y justificar hechos geométricos. Samper y Molina (2013) afirman que los diagramas son recursos que se usan para "indicar relaciones entre propiedades; diferenciar el antecedente y el consecuente de una proposición condicional; reconocer el estatus operativo de una proposición condicional; y enfatizar el estatus teórico de una proposición" (p. 48). Además concluyen que el uso de diagramas "concierne al procedimiento de construir una cadena deductiva de proposiciones" (p. 55).

El uso de los diagramas permite que los estudiantes puedan entender por qué los teoremas, postulados y definiciones, los diagramas presentados en algunas de las sesiones de trabajo son: diagrama-condicional, diagrama-deducción y diagramas-demostración, en cada sesión se explica cuál es el papel que desempeña el diagrama.

Se recomienda que cada estudiante tenga el material del uso de los diagramas o que sea visualizado de manera general, ya sea por medio de recursos audiovisuales de manera general o por medio de recursos TIC, para que el estudiante interprete y se apropie de sus conjeturas y verificaciones.

A continuación se describen cada una de las sesiones de aprendizaje propuestas para lograr el objetivo de fortalecer los procesos de la visualización y exploración encaminados a la producción y validación de conjeturas que propician vías a la justificación. Estas sesiones van concatenadas a las sesiones 1 y 2 desarrolladas en la fase instructiva con Geogebra. Posteriormente se expondrá en detalle los protocolos efectuados por los estudiantes, así como el trabajo realizado en cada una de las situaciones enfocadas a las acciones de visualización y exploración encaminadas a la justificación.

Sesión No. 3
BISECTRIZ DE UN ÁNGULO EN EL SGD GEOGEBRA

Objetivo General: Formular el hecho geométrico sobre la bisectriz de un ángulo a través de la exploración en Geoebra.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones (4 horas)

Conceptos: Definición de ángulo, bisectriz, propiedades de la bisectriz de un ángulo.

Recursos: SGD Geogebra.

Descripción: Solicitar al estudiante una descripción durante el proceso de construcción y exploración de todas las acciones realizadas en Geogebra; Identificación de propiedades y características geométricas y las que resultan a través de la visualización y exploración y finalmente mediante la socialización permitir que los estudiantes compartan sus experiencias, identifiquen errores y el porqué de ellos, descubriendo los hechos geométricos y su verificación.

Se desarrolla en tres momentos principales: Construcción y visualización, Exploración, Conjeturación y Verificación.

El primer momento es la construcción y visualización, se define un "Que hacer" y un "Como hacerlo" Se propone la construcción de la bisectriz de un ángulo en el SGD Geogebra, sin utilizar el botón bisectriz, a cada estudiante se le asigna una guía de trabajo paso a paso para lograr la construcción (Ver Anexo D, sesión 3).

El segundo momento corresponde a la exploración, ésta se realiza con base a la construcción realizada, se propone que mediante la exploración y utilizando la herramienta de arrastre, identifique propiedades y características geométricas, registrando lo que observa de los ángulos que se determinaron a partir de la construcción.

En el tercer momento se conjetura y verifica, ¿Que puede concluir? Escriba su conclusión en forma de condición. Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos). Introduciendo además las acciones de verificación.

Sesión No. 4.
HECHO GEOMÉTRICO: BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Objetivo General: Justificar el hecho geométrico sobre la bisectriz de un ángulo a través de la exploración hecha en Geogebra.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones (4 horas)

Conceptos: Definición de ángulo, bisectriz, propiedades de la bisectriz de un ángulo.
Recursos: SGD Geogebra

Descripción: Solicitar al estudiante una descripción durante el proceso de construcción y exploración de todas las acciones realizadas en Geogebra; se propone al estudiante acciones para justificar y deducir por medio del diagrama conformado por tres componentes: Qué sé, Qué uso y Qué concluyo, denominado diagrama-deducción. "Este diagrama es útil para la tarea de obtener una conclusión a partir de un determinado hecho... propicia el uso de la teoría estudiada (definiciones, postulados y teoremas) en la deducción de conclusiones"

(Samper y Molina, 2013, p.52).

Se desarrolla en tres momentos principales: Construcción y visualización: bisectriz de un ángulo; Diagrama-deducción: un desarrollo encaminado a justificar el hecho geométrico y Plenaria de discusión.

El primer momento es la construcción y visualización: Dada la siguiente figura, (Ver Anexo D, sesión 4) ¿Qué condiciones deben cumplirse para poder deducir que el $\overrightarrow{AZ}$ es bisectriz del $\measuredangle CAD$? Para ello, primero haga su reformulación y luego utilice un diagrama-deducción.

El segundo momento se solicita a cada estudiante que presente en el diagrama-deducción: Qué sé, Qué uso y Qué concluyo, un desarrollo encaminado a justificar el hecho geométrico: Bisectriz de un ángulo.

En el tercer momento en grupos de trabajo se identifican debilidades y fortalezas logrando una retroalimentación del desarrollo de la actividad, donde el uso del diagrama permite observar los desarrollos encaminados a formular conjeturas y justificar hechos geométricos.

Sesión No. 5.
CONSTRUCCIÓN DE UN ÁNGULO CONGRUENTE A UN ÁNGULO DADO

Objetivo General: Justificar la congruencia de los ángulos.

Tiempo de ejecución: 1 sesión (2 horas)

Conceptos: Nociones de segmento, recta, semirrecta, ángulo, triángulo, congruencia.

Recursos: Lápiz, regla y compás.

Descripción: El estudiante realiza la construcción con el lápiz, regla y compás, elaborando una descripción que le permita ir acercándose a las de nociones de segmento, recta, semirrecta, ángulo, triángulo y congruencia.

Se desarrolla en tres momentos principales:

El primer momento es la construcción y visualización: Construir un ángulo congruente a un ángulo dado (Ver Anexo D, sesión 5), a partir de una descripción el estudiante logra establecer las características geométricas que encuentran los estudiantes al observar y dinamizar la construcción realizada.

El segundo momento se solicita a cada estudiante que justifique la congruencia del ángulo construido a partir de la recolección de información de las preguntas que se indican a continuación: ¿Qué datos se obtienen de la situación dada?, ¿Qué procedimientos sigues para realizar la construcción?, y ¿Cuáles son las justificaciones que hacen que los ángulos sean congruentes?, así los datos registrados dan cuenta de los procesos realizados por el estudiante para tener criterios de validez que aporten al siguiente momento de la clase, la plenaria de discusión.

En la plenaria de discusión, en grupos de trabajo, se identifican debilidades y fortalezas que permiten una retroalimentación del desarrollo de la actividad, encontrando características que permiten ir apropiando los conceptos de congruencia y las representaciones geométricas involucradas que den cuenta del proceso donde inician a abordar justificaciones.

Sesión No. 6.
DESCUBRIENDO ÁNGULOS

Objetivo General: Identificar ángulos rectos, agudos, obtusos, adyacentes y ángulos que formen un par lineal.

Tiempo de ejecución: 1 sesión (2 horas)

Conceptos: Ángulos rectos, agudos, obtusos, adyacentes y ángulos que formen un par lineal.

Recursos: Lápiz y papel, SGD Geogebra.

Descripción: A partir de la observación de la representación gráfica, que en esta ocasión es estática, identificar: ángulos rectos, ángulos agudos, ángulos obtusos, ángulos que formen un par lineal, ángulos adyacentes y así resolver dificultades presentes en la prueba inicial aplicada a los estudiantes.

A partir de la visualización de la figura presentada que está fijada estáticamente en el espacio (Ver Anexo D, sesión 6) el estudiante nombra y escribe, la medida de cada uno de los ángulos observados como son los ángulos rectos, agudos, obtusos, y ángulos que formen un par lineal y adyacente, utilizando el leguaje geométrico adecuado.

El segundo momento los estudiantes realizan la construcción en Geogebra, con el fin de que la construcción cumpla con las características que enunciaron en la representación gráfica presentada en hojas de papel y mediante el arrastre, valora el cumplimiento de propiedades.

Sesión No. 7.
ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN
Ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante

Objetivo General: A partir de la construcción de rectas paralelas que son cortadas por una secante, identificar los ángulos que se forman según la posición, descubriendo los axiomas y teoremas que surgen de la construcción.

Tiempo de ejecución: 1 sesión (2 horas)

Conceptos: Nociones de congruencia de ángulos, ángulos alternos externos, ángulos alternos internos y ángulos correspondientes.

Recursos: SGD Geogebra

Descripción: El estudiante realiza la actividad individual a partir de la indicación para realizar la construcción en Geogebra encontrar los conceptos, de: congruencia de ángulos, ángulos alternos externos, ángulos alternos internos, ángulos correspondientes y así identificar las propiedades de los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante.

En un primer momento se solicita al estudiante que ubique tres puntos no colineales, A, B y C, seguida de esta acción que trace una recta que pase por los puntos A y B, construyendo una recta paralela a la recta anterior y que esta pase por el punto C, y como paso último de la construcción trazar una recta secante que pase por un punto cualquiera A y B y el otro al punto C (Ver Anexo D, sesión 7).

En la construcción se nombra y se escribe la medida de todos los ángulos y a la vez va explorando y visualizando las propiedades y características de la construcción, se plantean algunas preguntas las cuales los estudiantes contestan de forma individual (Ver Anexo D, sesión 7).

Finalmente el estudiante plantea conjeturas y en forma general construye sus propios conceptos y elabora sus propias conclusiones. Se busca establecer relaciones, contenidos conceptuales y procedimentales que cada estudiante ha adquirido, los cuales se ponen a prueba en la aplicación de nuevas situaciones.

Sesión No. 8.
VERIFICACIÓN ÁNGULOS SEGÚN SU POSICIÓN

Objetivo General: Verificar si se conservan o no las propiedades de congruencia, cuando dos rectas dejan de ser paralelas y son cortadas por una secante.

Tiempo de ejecución: 1 sesión (2 horas)

Conceptos: Nociones de ángulos alternos externos, ángulos alternos internos, ángulos correspondientes.

Recursos: SGD Geogebra

Descripción: El estudiante realiza la construcción en Geogebra, encontrando si se conservan o no las propiedades de congruencia en los ángulos alternos externos, ángulos alternos internos y ángulos correspondientes.

A través de la práctica en el aula en la que se pide construir paso a paso una figura o representación geométrica y después responder y socializar preguntas, guía de cierta manera por el camino para obtener un nuevo contenido, esta forma de trabajo es utilizada ampliamente por docentes, investigadores y el ámbito académico en general, al igual que en libros utilizados para explicar contenido geométricos apoyados por ambientes de geometría dinámica.

En un primer momento partiendo de la actividad realizada anteriormente se solicita al estudiante que construya dos rectas que no sean paralelas y una secante a ellas, verificando y argumentando su proceso. (Ver Anexo D, sesión 8).

El segundo momento el estudiante describe las propiedades y relaciones encontradas entre algunos de los ángulos que visualiza en la construcción. Se plantean algunas preguntas para contestar en forma individual encaminadas a descubrir regularidades que lleven al estudiante plantear axiomas y/o teoremas que se extraen de la actividad planteada, en este caso visualizar las propiedades de congruencia y verificación de ángulos según su posición.

A partir de las sesiones 7 y 8 el estudiante descubre regularidades que lo van llevando a encontrar los axiomas y teoremas propuestos para dicha actividad.

El tercer momento es la plenaria de discusión, en grupos de trabajo, se validan y formalizan los resultados obtenidos, mediante la reflexión. El estudiante descubre que si las rectas no son paralelas se pierde la congruencia de los ángulos según la posición, y tan solo se conserva la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice.

Socialización ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante

Objetivo General: Descubrir regularidades que llevan al estudiante a encontrar axiomas y teoremas de los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante.

Tiempo de ejecución: 1 sesión (2 horas)

Conceptos: Teoremas y axiomas sobre ángulos alternos externos, ángulos alternos internos, ángulos correspondientes.

Recursos: SGD Geogebra.

Descripción: Se pretende buscar conjeturas para la introducción de axiomas y teoremas, mediante la comprobación gráfica de propiedades y la socialización del trabajo de los estudiantes a partir de las construcciones realizadas en las sesiones No. 7 Y 8, ángulos formados por dos rectas paralelas o no que son cortadas por una secante. En el primer momento se permite la exploración de las construcciones realizadas anteriormente de las sesiones No. 7 y 8.

En el segundo momento se solicita al estudiante que a partir de la visualización y exploración de dichas construcciones, describa las propiedades relativas a las figuras geométricas y enuncie de manera general las relaciones que encuentra de los ángulos formados entre dos rectas que son o no paralelas y son cortadas por una secante.

El tercer momento es la plenaria de discusión, en grupos de trabajo, se validan y formalizan los resultados obtenidos, mediante la reflexión, se descubren el axioma y teorema que se muestran a continuación.

Axioma
Dos rectas paralelas cortadas por una secante forman ángulos correspondientes congruentes. Si una recta secante a otras dos rectas forma ángulos correspondientes congruentes, dichas rectas son paralelas.

Teorema
Si dos rectas paralelas son cortadas por una recta secante.

1. Los ángulos alternos externos son congruentes.

2. Los ángulos alternos internos son congruentes.

Sesión No. 9.
CONSTRUCCIÓN DE UN ÁNGULO CONGRUENTE A UN ÁNGULO DADO

Objetivo General: Justificar la congruencia del ángulo construido en el software.

Tiempo de ejecución: 1 sesión (2 horas)

Conceptos: Nociones de segmento, recta, semirrecta, ángulo, triángulo, congruencia.

Recursos: SGD Geogebra.

Descripción: El estudiante realiza la construcción, guiado de una descripción que le permita ir acercándose a las nociones de segmento, recta, semirrecta, ángulo, triángulo y congruencia, mediante el uso de herramientas del software.

Se desarrolla en tres momentos principales:

El primer momento es la construcción y visualización: Construir un ángulo congruente a un ángulo dado (Ver Anexo D, sesión 9), a partir de una descripción el estudiante logra establecer las características geométricas que encuentran los estudiantes al observar y dinamizar la construcción realizada.

El segundo momento se solicita a cada estudiante que presente las afirmaciones y razones que justifiquen la congruencia del ángulo construido. En este diagrama se reúnen en una sola columna el "Qué sé" y el "Qué concluyo" definidos en el diagrama de deducción, tomando el nombre de "Afirmación" y se define la "Razón" es la garantía de los datos registrados que contienen las premisas de la hipótesis del teorema, postulado o definición.

El tercer momento es la plenaria de discusión, en grupos de trabajo, se pretende identificar debilidades y fortalezas logrando una retroalimentación del desarrollo de su actividad, permitiendo encontrar en el diagrama "una cadena deductiva de proposiciones" (Samper y Molina, 2013, p. 55).

Sesión No. 10.
ÁNGULOS FORMADOS POR RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE

Objetivo General: Descubrir regularidades que llevan al estudiante a encontrar axiomas y teoremas de los ángulos que se forman cuando dos rectas paralelas son cortadas por una secante.

Tiempo de ejecución: 1 sesión (2 horas)

Conceptos: Teoremas y axiomas sobre ángulos alternos externos, ángulos alternos internos, ángulos correspondientes.

Recursos: Papel y lápiz, Construcción realizada en Geogebra, sesión No. 7, dos rectas paralelas cortadas por una secante.

Descripción: Como se enunció en la sesión No. 7, se busca establecer relaciones, contenidos conceptuales y procedimentales, los cuales se ponen a prueba en la aplicación de nuevas situaciones.

A partir del axioma socializado en las anteriores sesiones el estudiante debe lograr apropiarse de la actividad y enunciar de manera general los resultados socializados, logrando encontrar el teorema en la congruencia de ángulos alternos externos y la congruencia de ángulos alternos internos si son ángulos que se forman entre dos rectas paralelas cortadas por una recta secante.

La sesión se desarrolla en tres momentos principales:

El primer momento el estudiante realiza individualmente la actividad: Dadas dos rectas paralelas cortadas por una recta secante (Ver Anexo D, sesión 10), permitiendo que el estudiante visualice en la construcción realizada en Geogebra y a partir del axioma dado y de las características de los ángulos según la posición, la congruencia de los ángulos.

En el segundo momento se plantean los enunciados que el estudiante debe verificar individualmente (Ver Anexo Q). El estudiante justifica las propiedades y relaciones encontradas entre algunos de los ángulos que visualiza en la construcción, enunciado de manera general los resultados obtenidos.

El tercer momento es la plenaria de discusión, en grupos de trabajo, se validan y formalizan los resultados obtenidos, mediante la reflexión y a partir del axioma de los ángulos correspondientes se logra formalizar los conceptos llevando al estudiante a enunciar un teorema: si una recta secante corta a otras dos rectas formando ángulos alternos internos congruentes, dichas rectas son paralelas y si una recta secante corta a otras dos rectas formando ángulos alternos externos congruentes, dichas rectas son paralelas.

Sesión No. 11.
VISUALIZACIÓN DE FIGURAS
ÁNGULOS FORMADOS POR RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE

Objetivo General: Encontrar las incógnitas en las situaciones planteadas a través de figuras que presentan la construcción de ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante, en posiciones no estándares.

Tiempo de ejecución: 1 sesión (2 horas)

Conceptos: Teoremas y axiomas sobre ángulos alternos externos, ángulos alternos internos, ángulos correspondientes.

Recursos: Papel y lápiz.

Descripción: A partir de las situaciones dadas visualizar y justificar mediante los conceptos y propiedades vistas en las sesiones anteriores encontrando las incógnitas que se presentan en los enunciados de las situaciones problema.

En un primer momento el estudiante realiza individualmente la actividad: En la figura dada (Ver Anexo D, sesión 11), se pide hallar los valores de las incógnitas, que son el valor de los ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante, mediante las propiedades y características de los ángulos vistos en las sesiones anteriores.

En el segundo momento las figuras dadas permiten identificar el nivel de percepción de elementos, este nivel es enunciado por Duval (como se citó en Paiba, et al., 2004, p.11) afirmando que "en la identificación de las relaciones geométricas, la orientación es influyente. . . por ejemplo las relaciones de paralelismo y perpendicularidad, son más fácilmente reconocibles cuando tienen orientación vertical u horizontal" por ende las figuras presentadas a los estudiantes no están ubicadas en estas posiciones estándares.

En el tercer momento en grupos de trabajo, se validan los resultados obtenidos, los estudiantes deben socializar el resultado de las incógnitas encontradas con el fin de identificar si el análisis y uso de axiomas y teoremas fue acertado y si encontraron las propiedades y características de las figuras estando éstas en posiciones no estándares.

Sesión No. 12.
SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO

Objetivo General: Justificar las propiedades sobre la suma de ángulos internos de un triángulo.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones (4 horas)

Conceptos: Propiedades sobre suma de ángulos internos de un triángulo.

Recursos: SGD Geogebra.

Descripción: El estudiante realiza individualmente la construcción partiendo de la representación de un triángulo, seguidamente se construye una recta paralela a uno de los segmentos del triángulo que pase por el vértice opuesto y finalmente se extienden los segmentos del triángulo que intersecan la recta paralela, nombrando los ángulos formados por dichas rectas y la recta paralela.

Se inicia la construcción partiendo de la representación de un triángulo (Ver Anexo D, sesión 12), a cada estudiante se le entrega una guía con la descripción paso a paso y a partir de las definiciones de ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante el estudiante se va encaminando a justificar propiedades y características encontradas.

Seguidamente se plantean preguntas que buscan generar en los estudiantes una reflexión crítica a partir de la exploración, indagando en los estudiantes, con el fin de encontrar resultados que pueden pasar desapercibidos.

Culminando los momentos anteriores cada estudiante ya tiene la información necesaria para conjeturar y deducir en forma general es así que se solicita al estudiante que a partir de la exploración, conjeture y en un diagrama de deducción presente un desarrollo encaminado a justificar las afirmaciones encontradas.

Sesión No. 13.
VISUALIZACIÓN DE FIGURAS ÁNGULOS FORMADOS POR RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE

Objetivo General: A través de las propiedades de congruencia de ángulos y verificación de conjeturas, justificar que la suma de los 3 ángulos internos del triángulo suma 180°, sin el uso de operaciones aritméticas.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones (4 horas)

Conceptos: Ángulos internos y ángulos externos.

Recursos: SGD Geogebra.

Descripción: Se establecen relaciones, contenidos conceptuales y procedimentales, los cuales se ponen a prueba en la aplicación de nuevas situaciones.

El estudiante realiza individualmente la actividad partiendo de la representación de un triángulo, donde se ha trazado una recta paralela a uno de los segmentos del triángulo que pase por el vértice opuesto. La visualización de dicha actividad permite que los estudiantes encuentren regularidades y elaboren sus propias conclusiones.

Se presenta un desarrollo en tres momentos principales: Visualización de la representación geométrica, desarrollo encaminado a justificar el hecho geométrico, socialización y formalización de conceptos.

En el primer momento el estudiante realiza individualmente la actividad a partir de una figura de un triángulo nombrado $\triangle ABC$ (Ver Anexo D, sesión 13), el enunciado permite extraer las condiciones que cumple la construcción observada: por medio del trazo de una recta paralela al lado $\overline{AC}$ que pase por el vértice B, se nombraron α y υ a los ángulos que forma la paralela con dos de los lados del triángulo, a cada estudiante se le entrega una guía con la figura construida, con el fin de encontrar que la suma de los 3 ángulos internos del triángulo suman 180°, sin haber realizado operaciones aritméticas sino a través de las propiedades de congruencia y características percibidas que lo lleven a la producción y verificación de conjeturas.

Segundo momento el estudiante que presenta un desarrollo encaminado a la justificación, presentando las afirmaciones y razones que considere necesarias para lograr el objetivo: encontrar que la suma de los 3 ángulos internos del triángulo suman 180°, sin haber realizado operaciones aritméticas sino a través de las propiedades de congruencia y características percibidas de la visualización y exploración de la representación geométrica presentada.

En otro item se presenta una figura de un triángulo nombrado $\triangle ABC$ (Ver Anexo D, sesión 13), que le permite al estudiante a través del reconocimiento de propiedades y características encontradas en la figura resolver interrogantes que generen reflexión, con el fin de encontrar resultados que pueden pasar desapercibidos frente a la relación entre ángulos internos y sus correspondientes ángulos externos.

El tercer momento por medio del aprendizaje colaborativo se destacan los errores y aciertos efectuados en el desarrollo de la actividad, identificando correctamente los elementos dados en la situación problema y así socializarlos para lograr la formalización de conceptos.

SESIÓN No. 14.
RELACIÓN ENTRE ÁNGULOS INTERNOS Y SUS CORRESPONDIENTES ÁNGULOS EXTERNOS

Objetivo General: Observar, deducir y justificar las propiedades sobre la relación entre ángulo interno y su correspondiente ángulo externo y teorema del ángulo externo.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones (4 horas)

Conceptos: Ángulo interno, ángulo externo y teorema del ángulo externo.

Recursos: SGD Geogebra.

Tema: Propiedades relativas a ángulos de un triángulo.

Descripción: El estudiante realiza individualmente la construcción partiendo de la representación de un triángulo, seguidamente se construye una recta paralela a uno de los segmentos del triángulo que pase por el vértice opuesto y finalmente se extienden los segmentos del triángulo que intersecan la recta paralela, nombrando los ángulos formados por dichas rectas y la recta paralela.

Se inicia la construcción indicando los siguientes pasos a seguir en una guía individual a cada estudiante: Utilizando la herramienta de GeoGebra “polígono” represente un triángulo. Determine un ángulo exterior de ese triángulo y llámelo α. Calcule su medida. (Sugerencia: realice una construcción auxiliar, utilizando una semirrecta que extienda uno de los lados del triángulo (Ver Anexo D, sesión 14)

A partir de la exploración de la construcción se solicita al estudiante encontrar una relación entre el ángulo exterior indicado anteriormente y los dos ángulos internos del triángulo no adyacentes a él, además es importante que indique las acciones o procedimientos realizados para encontrar dicha relación (Ver Anexo D, sesión 14)

A partir de las acciones realizadas cada estudiante ya tiene la información necesaria para presentar una expresión general utilizando lenguaje geométrico, para la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo y una expresión general que involucre la suma del ángulo exterior nombrado α y el ángulo adyacente a él.

Seguida de esta acción se solicita al estudiante que a partir de la igualación de las expresiones encontradas anteriormente, realice conjeturas con el objetivo de hallar una expresión que relacione cualquier ángulo exterior del triángulo con los ángulos internos no adyacentes a él. Las acciones que realice el estudiante al operar las expresiones geométricas encontradas, devela lo que puede llegar a conjeturar.

Finalmente a partir de las conjeturas formuladas por el estudiante presenta un desarrollo encaminado a justificar las afirmaciones encontradas, evaluadas a través de las categorías propuestas para esta investigación.

SESIÓN No. 15
CLASIFICACIÓN DE TRIÁNGULOS

Objetivo General: Identificar en la representación gráfica las diferentes clasificaciones de triángulos visualizados, justificar los procesos de demostración y construcción realizada en el software.

Tiempo de ejecución: 1 sesión (2 horas)

Conceptos: Clasificación de triángulos, medida de ángulos.

Recursos: Papel y lápiz, Construcción realizada en Geogebra, SGD Geogebra.

Descripción: indicar en la representación gráfica las diferentes clases de triángulos y seguida de esta realizar la construcción geométrica a partir de los enunciados presentados a los estudiantes abordando los procesos para lograr las demostraciones.

A partir de la construcción realizada por el estudiante en el software, logra apropiarse de la actividad y demostrar la congruencia de ángulos pedida (Ver Anexo D, sesión 15), detectando así afirmaciones y razonas que el estudiante utiliza para realizar la demostración del hecho geométrico y las correspondientes justificaciones que se desprenden de la visualización y exploración de la construcción realizada.

La sesión se desarrolla en tres momentos principales:

El primer momento el estudiante realiza individualmente la actividad a partir de la representación gráfica dada, indicando triángulos isósceles, escalenos, rectángulos e isósceles y la clasificación de los triángulos teniendo en cuenta la medida de sus ángulos.

En el segundo momento a partir de la construcción realizada por el estudiante en el software éste logra apropiarse de la actividad y demostrar la congruencia de ángulos pedida (Ver Anexo D, sesión 15), detectando así afirmaciones y razonas que el estudiante utiliza para realizar la demostración del hecho geométrico y las correspondientes justificaciones que se desprenden de la visualización y exploración de la construcción realizada.

En la plenaria de discusión, en grupos de trabajo, se validan y formalizan los resultados obtenidos, mediante la reflexión y a partir de las afirmaciones y razones utilizadas en las demostraciones, validando o no las respuestas dadas por los estudiantes.

SESIÓN No. 16
CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Objetivo General: A través de las propiedades de congruencia de triángulos y verificación de conjeturas, probar congruencia de ángulos, triángulos y segmentos.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones (4 horas)

Conceptos: Congruencia de triángulos, ángulos y segmentos.

Recursos: Lápiz, papel y SGD Geogebra.

Descripción: A partir de las situaciones dadas visualizar y justificar mediante los conceptos y propiedades vistas en las sesiones anteriores planteando las afirmaciones y razones dadas para lograr la demostración pedida.

El estudiante realiza individualmente la actividad y a partir de los criterios de congruencia de triángulos desarrollar los items enunciados y las representaciones dadas (Ver Anexo D, sesión 16), hallar los valores de las incógnitas, que son el valor de los ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante, mediante las propiedades y características de los ángulos vistas en las sesiones anteriores.

En grupos de trabajo, se validan los resultados obtenidos, se socializan las afirmaciones y razones dadas, permitiendo observar las conjeturas y verificaciones a las cuales los estudiantes han llegado.

SESIÓN No. 17
TALLER
RECTAS EN EL TRIÁNGULO: ALTURAS Y MEDIATRICES

Objetivo General: Ejercitación y apropiación de conceptos, propiedades y relaciones geométricas tales como rectas en el triángulo: alturas, mediatrices, medianas, bisectrices y congruencia de triángulos.

Tiempo de ejecución: 2 sesiones (4 horas)

Conceptos: Rectas en el triángulo: alturas, mediatrices, medianas, bisectrices y congruencia de triángulos.

Recursos: SGD Geogebra.

Descripción: A partir de las construcciones realizadas por cada uno de los estudiantes y de los criterios vistos en las sesiones anteriores verificar las propiedades tales como circuncentro, incentro y demostración del Corolario: En un triángulo equilátero sus ángulos son congruentes, es decir, es equiángulo. (Ver Anexo D, sesión 17)

Las situaciones presentadas permiten que el estudiante visualice y justifique mediante los conceptos y propiedades vistas en las sesiones anteriores planteando las afirmaciones y razones dadas para lograr tanto la construcción en Geogebra como la demostración solicitada.

En grupos de trabajo, se validan los resultados obtenidos, se socializan las afirmaciones y razones dadas, permitiendo observar las conjeturas y verificaciones a las cuales los estudiantes han llegado.

6.3. Apropiación de las acciones de visualización y exploración vía a la justificación a partir del uso del software Geogebra

En esta sección se plantean una serie de guías que pretenden facilitar a los estudiantes la manipulación del software Geogebra, la exploración de cada una de las herramientas, asimismo cada actividad consta de un enunciado dirigido a realizar una construcción, seguido de preguntas orientadoras cuyo propósito es generar en el estudiante acciones de visualización o exploración, para ser plasmados en un diagrama de deducción o llegar a una conclusión. Por último, se realizan algunas plenarias en las que se expondrán los hallazgos y/o posibles resultados de cada una de las sesiones de trabajo.

6.3.1. Fase instructiva con Geogebra

Para realizar la introducción al SGD Geogebra se aplicó el taller "Explorando con Geogebra" pretendía el objetivo es lograr que el estudiante identifique los elementos dados en el problema y a partir de ello realice la construcción pedida con el fin de verificar si las características geométricas que se enunciaron son verdaderas o falsas, por medio del arrastre de las figuras geométricas construidas y del desarrollo de habilidades en la utilización del software Geogebra.

En las tres guías planteadas denominadas: Construcción de una circunferencia tangente a una recta, Construyendo rectas tangentes a una circunferencia y Construyendo punto medio y triángulo equilátero a partir de dos puntos, se mantuvo la exploración del software, permitiendo la creación de sus propias conjeturas, por medio de la visualización y exploración de propiedades en las construcciones geométricas. (Ver Anexo C)

A continuación se muestran algunos resultados importantes de las guías No. 1 y 2, para el presente proceso investigativo.

Guía No. 1

Para el desarrollo de ésta guía se planteó a los estudiantes realizar la actividad por medio del trabajo colaborativo, dando una instrucción general sobre el uso de Geogebra, ya que el uso de esta herramienta permite identificar conceptos, propiedades y características geométricas por medio de la exploración del mismo.

El desarrollo de la actividad fue ejecutado por parejas de estudiantes con el objetivo de que hubiera ayuda mutua en la exploración del software donde intervenga principalmente el dominio de los conocimientos geométricos fundamentales y las habilidades informáticas.

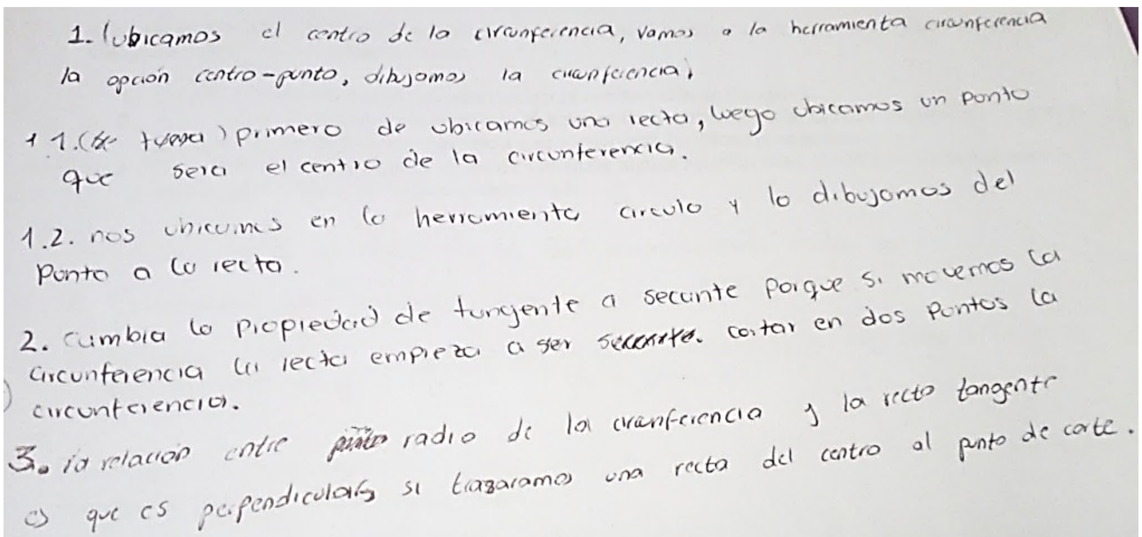
La actividad fue realizada con el fin de observar si el estudiante identifica los conceptos geométricos básicos para que la construcción cumpla con las características dadas, ver Anexo C.

Al desarrollar el ejercicio planteado en el software de geometría dinámica se puede destacar que ninguna de las construcciones realizadas cumple con las características dadas en la situación, a continuación se enuncian algunos resultados obtenidos del desarrollo de dicha actividad. Se ubicaron en dos clases de soluciones, una de ellas es la construcción que parte de condiciones dadas pero finalmente no cumple con el objetivo de la situación y la otra es la construcción utilizando la herramienta recta tangente, pero ésta tampoco cumple con las condiciones dadas ya que se indicó realizar la construcción sin hacer uso de la herramienta proporcionada por el software.

1. Construcción partiendo de condiciones dadas

De las 11 parejas conformadas que desarrollaron la Guía No. 1, 7 partieron de las condiciones dadas en la situación problema, pero al desplazar un punto mediante el arrastre no se conserva la relación de tangencia, algunas respuestas de los estudiantes se muestran a continuación:

Estudiantes 8 y 11



1. Ubicamos el centro de la circunferencia, vamos a la herramienta circunferencia la opción centro-punto, dibujamos la circunferencia.

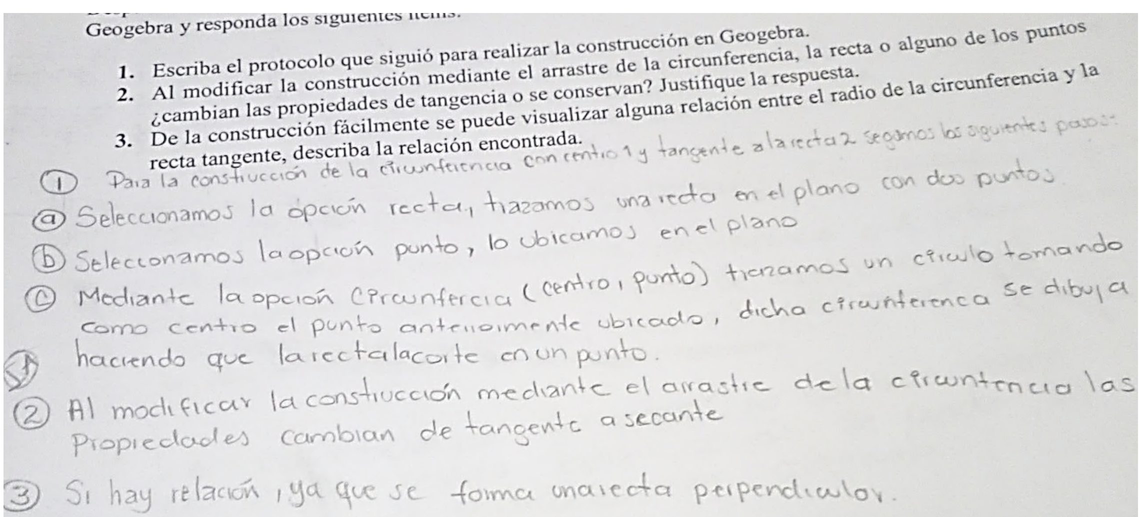
1.1. (Se tuvo) primero de ubicamos una recta, luego ubicamos un punto que sera el centro de la circunferencia.

1.2. nos ubicamos en la herramienta circulo y lo dibujamos del punto a la recta.

2. cambia la propiedad de tangente a secante porque si movemos la circunferencia la recta empieza a ser ~~secante~~. cortar en dos puntos la circunferencia.

3. la relación entre ~~punto~~ radio de la circunferencia y la recta tangente es que es perpendicular si trazaramos una recta del centro al punto de corte.

Estudiantes 14 y 2



Geogebra y responda los siguientes ítems.

1. Escriba el protocolo que siguió para realizar la construcción en Geogebra.
2. Al modificar la construcción mediante el arrastre de la circunferencia, la recta o alguno de los puntos ¿cambian las propiedades de tangencia o se conservan? Justifique la respuesta.
3. De la construcción fácilmente se puede visualizar alguna relación entre el radio de la circunferencia y la recta tangente, describa la relación encontrada.

① Para la construcción de la circunferencia con centro 1 y tangente a la recta 2 seguimos los siguientes pasos:

ⓐ Seleccionamos la opción recta, trazamos una recta en el plano con dos puntos

ⓑ Seleccionamos la opción punto, lo ubicamos en el plano

ⓒ Mediante la opción circunferencia (centro, punto) trazamos un círculo tomando como centro el punto anteriormente ubicado, dicha circunferencia se dibuja haciendo que la recta la corte en un punto.

② Al modificar la construcción mediante el arrastre de la circunferencia las propiedades cambian de tangente a secante

③ Si hay relación, ya que se forma una recta perpendicular.

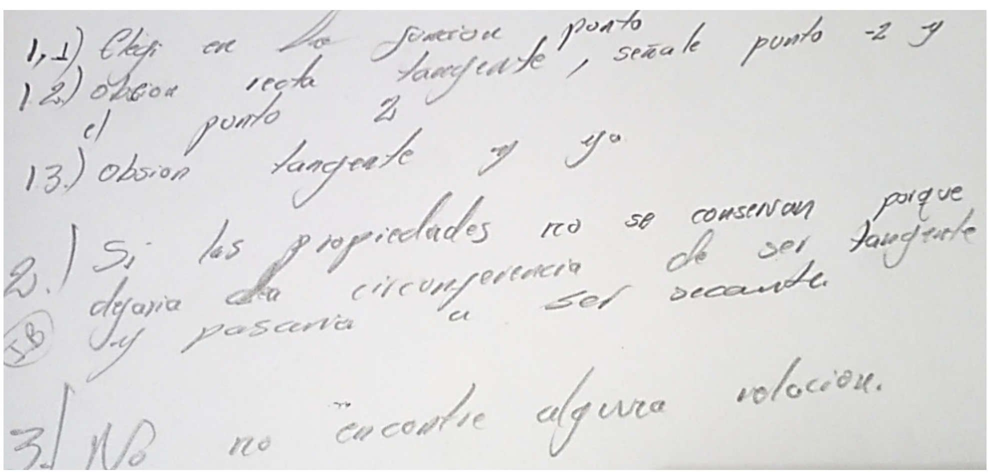
Se puede apreciar en las evidencias de las respuestas dadas por los estudiantes que lograron encontrar que al modificar la construcción por medio del arrastre, la recta tangente deja de serlo para convertirse en una recta secante, identificando que sus construcciones no cumplen con las condiciones dadas.

2. Construcción utilizando la herramienta recta tangente

Para el desarrollo de dicha construcción 4 parejas de estudiantes enunciaron que la relación de tangencia SI permanece en su construcción, si se realiza algún desplazamiento mediante el arrastre, pero al revisar el protocolo de construcción se evidencia que no realizaron la construcción con las condiciones dadas, ya que la recta tangente ya está ilustrada en la situación problema y lo que se propone graficar es la circunferencia tangente a ella, trazaron la recta tangente a la circunferencia utilizando la herramienta tangente, por lo tanto no hay uso de conceptos geométricos en dicha construcción, tan sólo el uso de la herramienta tangente proporcionada por el software.

A continuación se muestran algunas evidencias de las actividades:

Estudiante 6

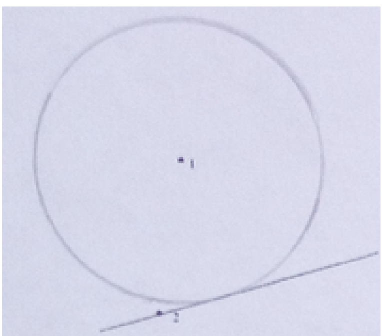


El estudiante realiza la construcción sin seguir las condiciones de la construcción dada y simplemente utiliza la herramienta tangente, no hace uso de su razonamiento geométrico para lograr un resultado de comprensión.

A continuación se muestran las acciones realizadas por 2 estudiantes, se presenta el protocolo de los estudiantes 1 y 15 ya que presentan un trabajo similar al de sus compañeros y reúnen los datos más destacables en las plenarias de discusión:

Producción de los estudiantes No. 1 y 4.

Construya la circunferencia con centro 1 y tangente a la recta 2, haciendo uso de regla y compás, seguida de ésta realice la construcción en el software de geometría dinámica Geogebra.



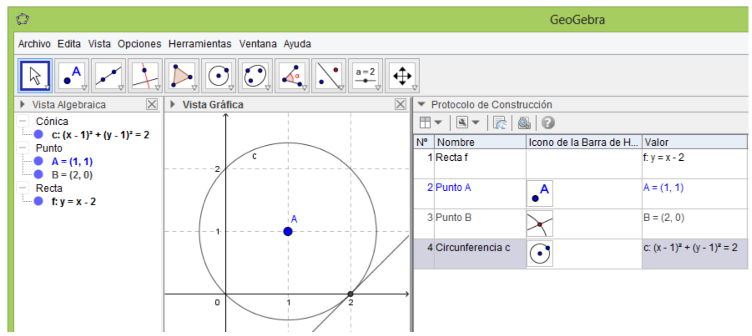
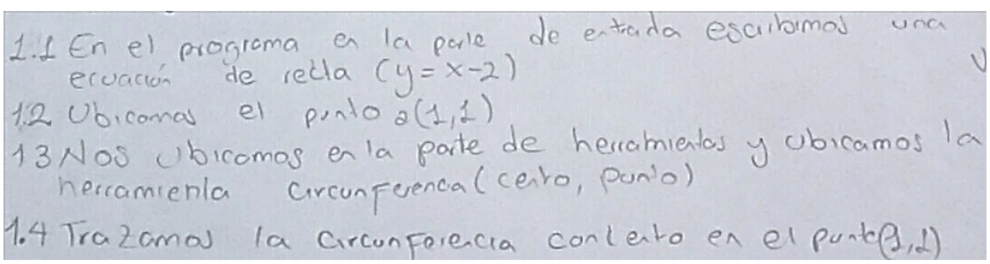


Figura 6.1. Construcción en Geogebra - Estudiantes No. 1 y No. 4

1. Escriba el protocolo que siguió para realizar la construcción en Geogebra.


1.1 En el programa en la parte de entrada escribimos una ecuación de recta (y = x−2)
1.2 Ubicamos el punto a(1,1)
1.3 Nos ubicamos en la parte de herramientas y ubicamos la herramienta circunferencia (centro, punto)
1.4 Trazamos la circunferencia con centro en el punto (1,1)

Análisis a la luz de las categorías:

Se puede observar tanto en la descripción del protocolo, como el la representación en el software que es insertada una ecuación como se hace en geometría analítica, al realizar la recta por medio de una ecuación, a simple vista se logra el propósito de la construcción que era construir una circunferencia tangente a la recta dada.

2. Al modificar la construcción mediante el arrastre de la circunferencia, la recta o alguno de los puntos ¿cambian las propiedades de tangencia o se conservan? Justifique la respuesta.

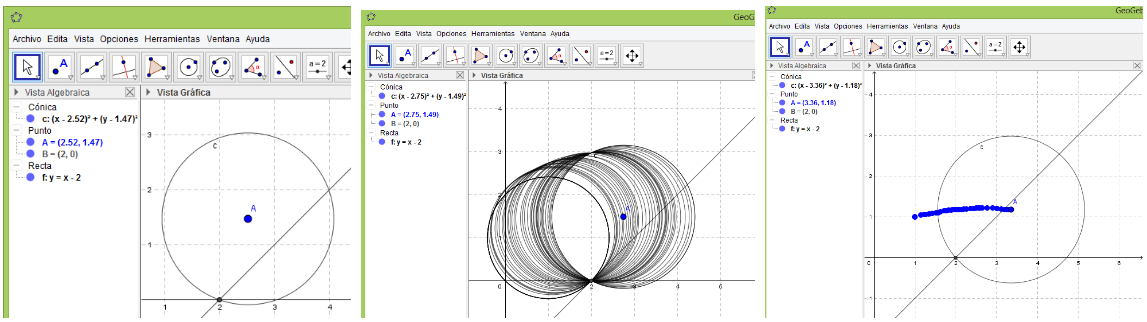


Figura 6.2. Construcción en Geogebra - Estudiante No. 1

Producción Estudiante No. 1.

Al modificarla, la circunferencia cambia las propiedades de tangencia, y la recta cruza por la mitad del circulo (Se convierte en recta secante)

Análisis a la luz de las categorías:

Las imágenes producidas al hacer la modificación de la construcción muestran el dinamismo de Geogebra, para este caso se dejó activa la opción de rastro, una propiedad de Geogebra que permite ver la huella que dejan las construcciones realizadas.

Es aquí donde el estudiante identifica que la construcción no cumple con las condiciones dadas en la formulación de la actividad, manifestando que la recta que parecía tangente se convierte en una recta secante.

En este ítem es donde se puede observar que para realizar construcciones que cumplan con las condiciones dadas se debe recurrir a descubrir las propiedades y conceptos geométricos, al efectuar la prueba del arrastre las construcciones en Geogebra sigan conservando las propiedades inscritas en ella.

3. Al hacer la modificación de la construcción fácilmente se puede visualizar alguna relación entre el radio de la circunferencia y la recta tangente, describa la relación encontrada.

Producción estudiante No. 1.

A menor radio de la circunferencia, la recta tangete Se acerca al punto centro, y a más radio la recta tangete Se aleja del punto centro

En la secuencia del desarrollo de la actividad realizada, se puede observar que al utilizar el test de arrastre, no se mantuvieron las propiedades con que inicialmente se observaba que cumplía la construcción y por ende no visualizaron la relación que se solicitaba entre el radio de la circunferencia y la recta tangente, no llegó a observar correctamente lo que se deseaba, no se logró el objetivo que se pretendía en esta actividad.

Producción del estudiante No. 15.

Construya la circunferencia con centro 1 y tangente a la recta 2, haciendo uso de regla y compás, seguida de ésta realice la construcción en el software de geometría dinámica Geogebra.

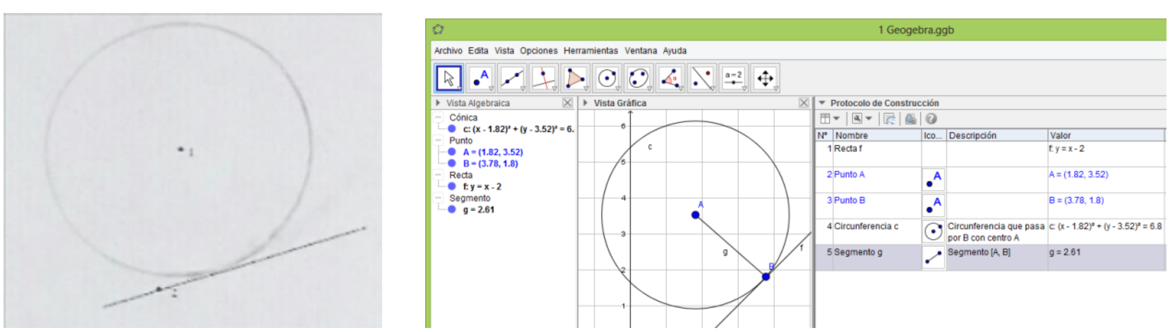


Figura 6.3. Construcción en Geogebra - Estudiante No. 15

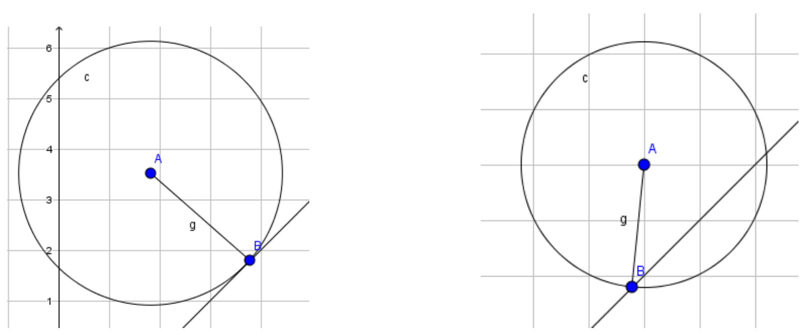
1. Escriba el protocolo que siguió para realizar la construcción en Geogebra.

Pasos de la construcción en geogebra:
a) Seleccionamos la herramienta de circunferencia en el programa geogebra
b) Seleccionamos centro en el punto de coordenadas $(1, 1)$
c) Aplicamos la ecuación $(y = x - 2)$ para trazar la recta tangente a la circunferencia.

Análisis a la luz de las categorías:

Se puede observar que en la descripción del protocolo, el estudiante inserta una ecuación como se hace en geometría analítica al crear la recta por medio de una ecuación, a simple vista se logra el propósito de la construcción que era construir una circunferencia tangente a la recta dada.

2. Al modificar la construcción mediante el arrastre de la circunferencia, la recta o alguno de los puntos ¿cambian las propiedades de tangencia o se conservan? Justifique la respuesta.



Construcción en Geogebra - Estudiante No. 15

Producción del estudiante No. 15.

Los propiedades de tangencia no cambian, puesto que si se realiza esta acción se pierden las propiedades de la circunferencia construida.

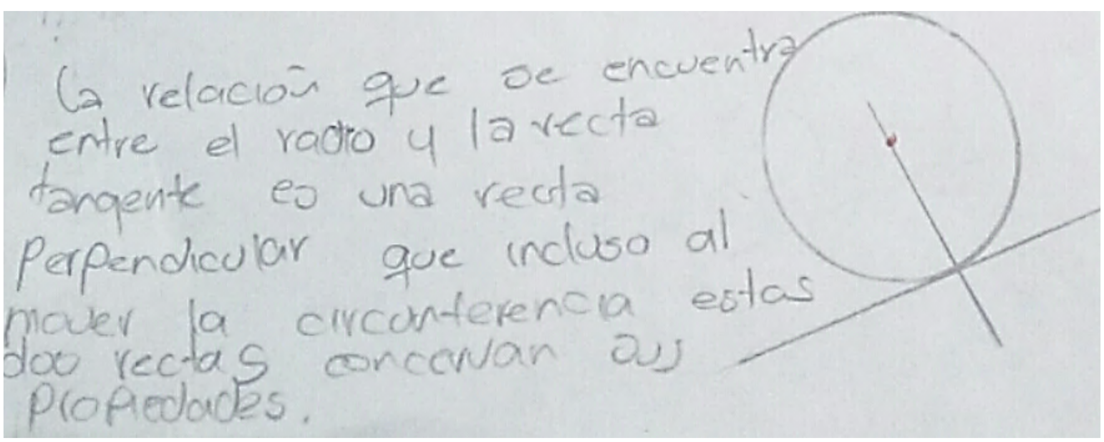
Análisis a la luz de las categorías:

El estudiante identifica que si la construcción es estática se mantiene que la recta sea tangente a la circunferencia, pero si efectúa la acción de arrastre y se dinamiza la construcción se comprueba que no fue realizada cumpliendo propiedades de tangencia.

Se puede observar la falta de conocimiento de los conceptos geométricos, no reconocen la propiedad geométrica que se debe cumplir para que se conserve la tangencia al someter la construcción a la prueba del movimiento de la misma.

3. Al hacer la modificación de la construcción fácilmente se puede visualizar alguna relación entre el radio de la circunferencia y la recta tangente, describa la relación encontrada.

Producción del estudiante No. 1.



Análisis a la luz de las categorías:

Hay una contradicción entre la respuesta a los ítems dos y tres, pero se observó que después de realizar varias exploraciones y modificaciones en la construcción y permitir la socialización de dificultades con los demás grupos de trabajo, el estudiante logró encontrar la relación solicitada entre el radio de la circunferencia y la recta tangente, se observó que hubo mejoramiento en el uso y manejo de las herramientas de Geogebra, como se muestra en la siguiente gráfica.

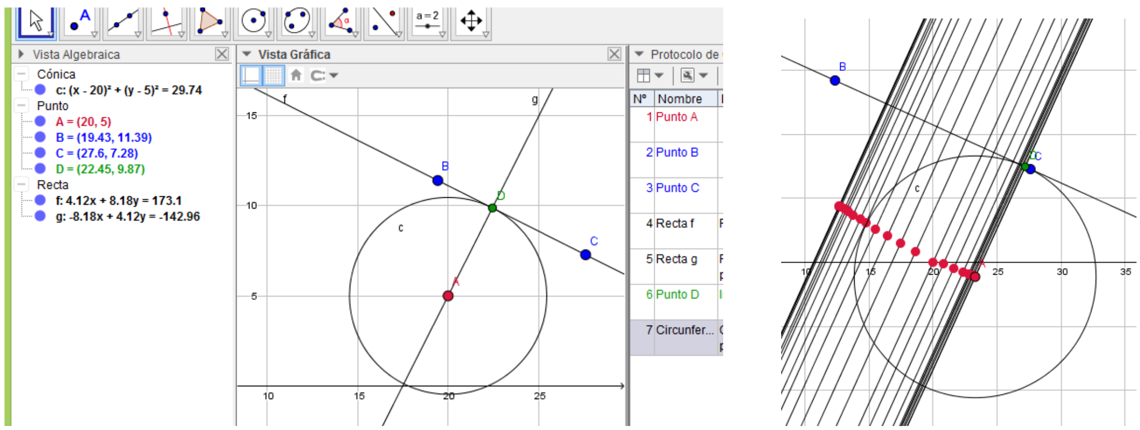


Figura 6.4. Construcción en Geogebra - Estudiante No. 15

Esta guía fue realizada con lápiz y papel usando la regla y el compás en la fase diagnóstica, se destaca que la que la mayoría de los estudiantes acertaron visualmente con la representación gráfica, como se mostró en las imágenes presentadas por los estudiantes 1 y 15. Al contrastar los resultados de la guía desarrollada en Geogebra se identifica que los estudiantes no conocen los conceptos ni relaciones geométricas que permiten que una recta sea tangente a una circunferencia, pero tras el transcurso de la clase y al indagar directamente sobre la actividad realizada en Geogebra, se preguntó a los estudiantes si podían visualizar alguna relación entre el radio de la circunferencia y la recta tangente, seis parejas de estudiantes lograron identificar que al considerar el radio, puede verse que al acercarse a la posición de tangencia, la recta parece perpendicular a él.

Por ende, se puede deducir que la construcción realizada por ellos en el software de Geogebra permitió a los estudiantes observar algunas relaciones geométricas mediante el desplazamiento que no se ven a simple vista en la construcción estática del trabajo con lápiz y papel usando regla y compás.

Guía No. 2

En la segunda actividad aplicada a los estudiantes, se mantuvo la exploración del software, permitiendo la creación de sus propias conjeturas, por medio de la visualización y exploración de propiedades en las construcciones geométricas, a partir de las siguientes indicaciones:

Producción del estudiante No. 1.

1.1. Construyendo rectas tangente a una circunferencia en el SGD Geogebra

a. Dadas dos rectas, construya una circunferencia tangente a ambas rectas.

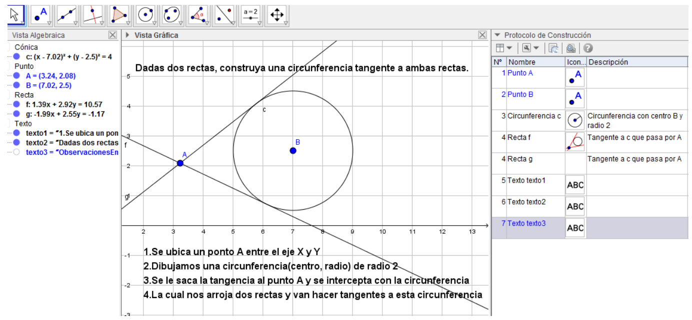


Figura 6.5. Construcción en Geogebra - Estudiante No. 1

Objetivos:

1. Utilizar las opciones del menú de herramientas para la realización de construcciones geométricas con un nivel básico de complejidad.

2. Interpretar correctamente los enunciados de las situaciones problema

La construcción del estudiante al pasar por el test del arrastre cumple con las características de que la circunferencia sea tangente a ambas rectas, pero no hay una interpretación correcta del enunciado, esto se observa tanto el protocolo extraído de Geogebra, como el protocolo descrito por el estudiante, ya que no inicia la construcción de las premisas indicadas "dadas dos rectas" y a partir de éstas se construye la circunferencia tangente a las rectas, indicando que no se cumplió el objetivo No. 2, en el ítem de la construcción.

Por tanto, la dificultad que tienen algunos estudiantes es la comprensión del lenguaje geométrico, impidiéndoles realizar las construcciones correctamente, ya que los enunciados de los problemas son interpretados erróneamente.

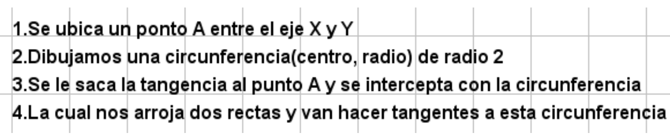
<table>
<tr><th colspan="2">1.2. Verificando propiedades en las construcciones realizadas</th></tr>
<tr><td>Escribir el protocolo de construcción y las razones geométricas necesarias que se utilizaron para verificar si las características que se enunciaron son verdaderas o falsas.</td><td>

Figura 6.6. Desarrollo del protocolo - Estudiante No. 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos:
1. Lograr que el estudiante identifique los elementos dados en el problema y a partir de ello realice la construcción pedida con el fin de verificar si las características geométricas que se enunciaron son verdaderas o falsas, por medio del arrastre de las figuras geométricas construidas.
2. Visualizar que la recta tangente es aquella que toca solamente un punto de una circunferencia.
3. Visualizar que el radio de la circunferencia el perpendicular a la recta tangente
4. Comprensión del lenguaje geométrico.</td></tr>
</table>

En el protocolo descrito por el estudiante se observa las razones geométricas necesarias para verificar si las características que se enunciaron son verdaderas o falsas, el estudiante realiza la construcción utilizando la herramienta tangente que presenta el software, sin evocar conceptos y propiedades que verifiquen las características geométricas de una recta tangente, enunciados en los objetivos 2 y 3, en el ítem de la verificación de propiedades.

1.3. Socialización de las construcciones y verificación de propiedades
Realice la socialización de la construcción presentada, identificando debilidades y fortalezas logrando una retroalimentación del desarrollo de su actividad.
Objetivo: Por medio del aprendizaje colaborativo, destacar los errores y aciertos efectuados en el desarrollo de su actividad, identificando los elementos dados en la construcción realizada, verificando que las características geométricas por medio del arrastre se conserven.

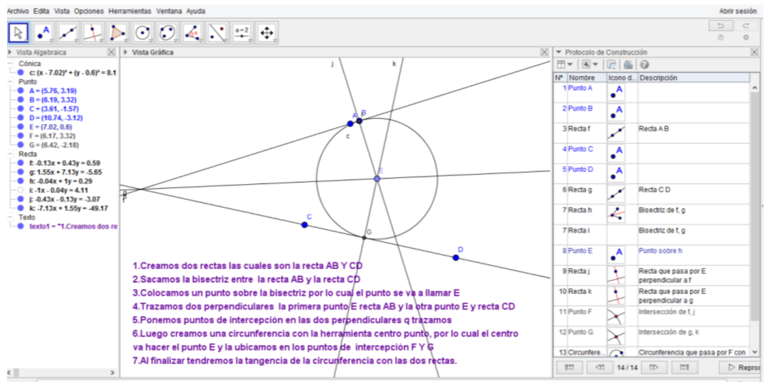


Figura 6.7. Construcción en Geogebra - Estudiante No. 1

A partir de la socialización se puede evidenciar que la construcción permite encontrar propiedades que permiten visualizar que la recta tangente es aquella que toca solamente un punto de una circunferencia, además de visualizar que el radio de la circunferencia es perpendicular a la recta tangente, cumpliendo con el objetivo planteado para esta actividad.

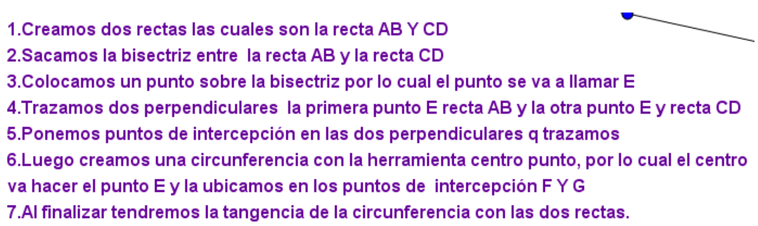
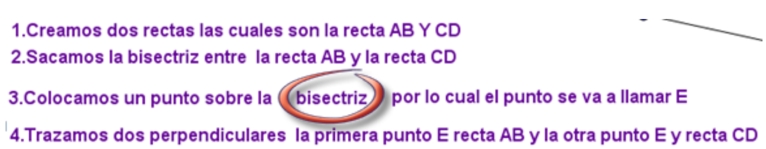


Figura 6.8. Desarrollo del protocolo - Estudiante No. 1

El nuevo protocolo extraído de Geogebra, como el descrito por el estudiante permite identificar que se realizó una construcción paso a paso identificando propiedades y características geométricas necesarias para que al verificar por medio del arrastre la construcción se siguieran conservando dichas propiedades.



Después de realizar las discusiones entre el docente - estudiante y entre el grupo de estudiantes del curso de Geometría Euclídea sobre las actividades enviadas a la plataforma se observa en el protocolo el avance en la apropiación de relaciones geométricas tales como el uso del concepto y propiedad de bisectriz, donde cualquier punto sobre ella equidista de las rectas que contienen los lados del ángulo, usando además el concepto de distancia.

De la situación presentada por el Estudiante No. 1. Se puede concluir que por medio del aprendizaje colaborativo, socialización de actividades y exploración en el software, se detectaron las debilidades y fortalezas logrando una retroalimentación del desarrollo de la actividad.

Producción del estudiante No. 15.

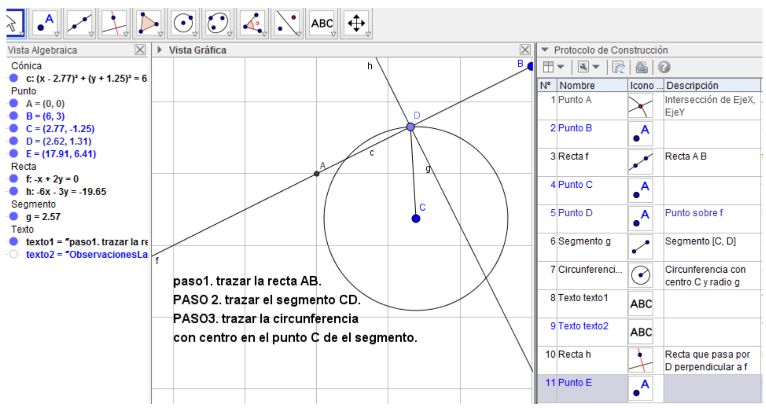
<table>
<tr><td colspan="2">1.1. Construyendo rectas tangente a una circunferencia en el SGD Geogebra</td></tr>
<tr><td>b. Dados una recta y un segmento, construya una circunferencia tangente a la recta cuyo radio tenga la misma longitud que el segmento.</td><td>

Figura 6.9. Construcción en Geogebra - Estudiante No. 15, construcción de rectas tangentes a una circunferencia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos:
3. Utilizar las opciones del menú de herramientas para la realización de construcciones geométricas con un nivel básico de complejidad.
4. Interpretar correctamente los enunciados de las situaciones problema</td></tr>
</table>

Se observa que la construcción no cumple con las características geométricas pedidas, no hay una circunferencia tangente a la recta cuyo radio tenga la misma longitud que el segmento.

Aunque en el desarrollo de la actividad construye dos rectas perpendiculares no logra que el segmento trazado al iniciar la construcción y que es el radio de la circunferencia, sea perpendicular a la recta que pretendía señalar como tangente. Se evidencia que el estudiante no extrae información diferente a la planteada, no visualiza las características dadas para el éxito de la construcción y por ende se pierden las propiedades al modificar la construcción.

1.2. Verificando propiedades en las construcciones realizadas	
Escribir el protocolo de construcción y las razones geométricas necesarias que se utilizaron para verificar si las características que se enunciaron son verdaderas o falsas.	**paso1. trazar la recta AB.** **PASO 2. trazar el segmento CD.** **PASO3. trazar la circunferencia** **con centro en el punto C de el segmento.** *Figura 6.10.* Desarrollo del protocolo - Estudiante No. 15

Objetivos:

5. Lograr que el estudiante identifique los elementos dados en el problema y a partir de ello realice la construcción pedida con el fin de verificar si las características geométricas que se enunciaron son verdaderas o falsas, por medio del arrastre de las figuras geométricas construidas.

6. Visualizar que la recta tangente es aquella que toca solamente un punto de una circunferencia.

7. Visualizar que el radio de la circunferencia el perpendicular a la recta tangente

8. Comprensión del lenguaje geométrico.

En el protocolo descrito por el estudiante se observa que sólo realiza los trazos de las figuras geométricas sin buscar propiedades o características geométricas que evidencien una construcción de recta tangente.

El desarrollo de la actividad muestra que el estudiante, no extrae información diferente a la dada en el enunciado verbal, no utiliza las herramientas dadas ya que elabora una sola representación y actúa sólo sobre ella, no explora las bondades brindadas por el software pertinentes para que la construcción no pierda las propiedades geométricas al dinamizar la construcción.

1.3. Socialización de las construcciones y verificación de propiedades
Realice la socialización de la construcción presentada, identificando debilidades y fortalezas logrando una retroalimentación del desarrollo de su actividad.

Objetivo:
Por medio del aprendizaje colaborativo, destacar los errores y aciertos efectuados en el desarrollo de su actividad, identificando así correctamente tanto los elementos dados en el problema como la construcción realizada, verificando que las características geométricas identificadas por medio del arrastre de las figuras geométricas construidas son verdaderas.

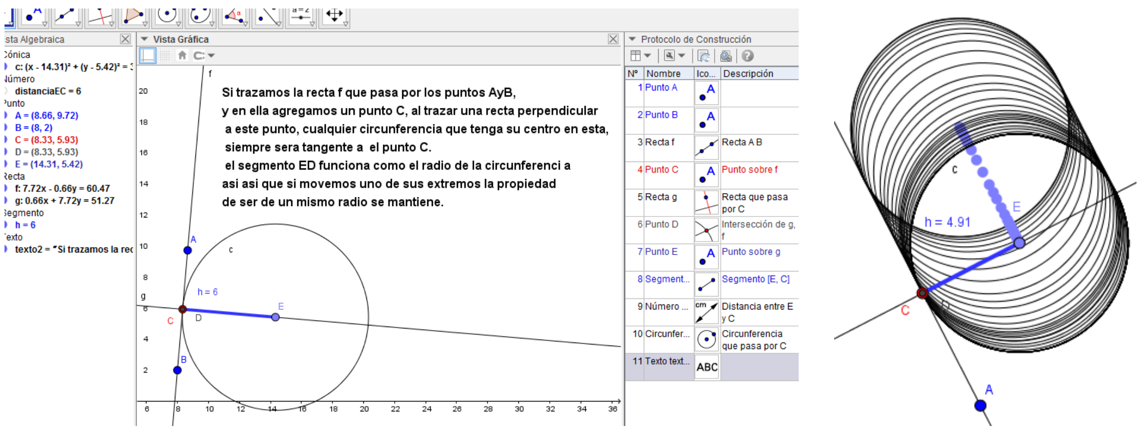


Figura 6.11. Construcción en Geogebra - Estudiante No. 1

A partir de la socialización de la actividad se puede observar que el estudiante logra que el segmento nombrado "h" sea el radio de la circunferencia y al mismo tiempo sea perpendicular a la recta tangente AB.

La opción *"rastro"* que se encuentra activa en la imagen de la derecha, permite observar que al modificar de posición algunos de los elementos de la construcción, ésta no pierde las propiedades de tangencia.

Si trazamos la recta f que pasa por los puntos AyB,
y en ella agregamos un punto C, al trazar una recta perpendicular
a este punto, cualquier circunferencia que tenga su centro en esta,
siempre sera tangente a el punto C.
el segmento ED funciona como el radio de la circunferenci a
asi asi que si movemos uno de sus extremos la propiedad
de ser de un mismo radio se mantiene.

Desarrollo del protocolo - Estudiante No. 1

En el nuevo protocolo presentado por el estudiante además de describir paso a paso identificando propiedades y características geométricas pertinentes en la construcción, se destaca que el estudiante llegó a hacer conjeturas que le permitieron hacer una construcción acertada.

El estudiante obtuvo un mejoramiento respecto a los procesos evaluados en las actividades planteadas, extrayendo nueva información sobre propiedades y relaciones geométricas pertinentes para la solución, actuando sobre las representaciones elaboradas con criterio identificado a partir de afirmaciones correctas que corresponden al objetivo del problema.

La apropiación de las temáticas dadas en las situaciones, fueron evidenciadas al identificar las propiedades y relaciones geométricas que los estudiantes involucraron en las producciones presentadas en el software, además después de haber realizado las plenarias de discusión de la situaciones planteadas, los estudiantes descubrieron y comprendieron las condiciones necesarias para que sus representaciones gráficas fueran acertadas, a partir de los enunciados dados en las situaciones y de los temas geométricos involucrados, como en el caso del concepto de recta tangente.

De allí que se proponen varias situaciones con el propósito de fortalecer la exploración en el software buscando que el estudiante se involucre en un proceso de comprensión y aprendizaje.

A partir del análisis y de la retroalimentación clase a clase con el grupo del curso de Geometría Euclídea donde se implementó un ambiente de aprendizaje que permitió a los estudiantes visualizar, explorar y manipular objetos geométricos, encaminados a fortalecer procesos de justificación a partir de la visualización y exploración de propiedades y relaciones de objetos geométricos, con el uso del Geogebra, se dispuso a analizar los resultados obtenidos por los estudiantes del curso de geometría Euclídea como se muestra a continuación.

6.3.2. Sesiones de Trabajo con Geogebra

En esta fase se destaca la apropiación de los procesos de visualización y exploración vía a la justificación, permitiendo el descubrimiento y verificación de conjeturas en las construcciones geométricas planteadas a partir del uso del software Geogebra.

Se tuvo en cuenta el desarrollo de actividades considerando diferentes aspectos que llevaran a la consolidación del proceso de justificación en el estudiante, permitiendo que sea el estudiante quien establezca propiedades y relaciones entre ellas; el uso de herramientas didácticas es un mediador en la aprehensión del conocimiento permitiendo un ambiente reflexivo que desde una mirada interactiva permite visualizar contenidos matemáticos difíciles de alcanzar en un ambiente estático.

Las sesiones de trabajo se desarrollaron en tres momentos principales: Construcción geométrica, verificación de propiedades en las construcciones realizadas, socialización y retroalimentación.

Además de las sesiones presenciales se llevaron a cabo sesiones impartidas por medio de la plataforma virtual de la UPTC, permitiendo el envío y recepción de documentos y/o actividades acordadas para el desarrollo de las clases; por medio de la plataforma se complementó el trabajo desarrollado en las sesiones presenciales dejando a disposición del estudiante documentos, link, videos y demás archivos multimedia que contribuyeron al óptimo desarrollo del curso de geometría y la comunicación entre profesor y estudiantes.

Para el desarrollo del análisis, los instrumentos para la recolección de información fueron: el protocolo extraído del archivo de Geogebra, el protocolo descrito por el estudiante, el registro de las tutorías personalizadas, las grabaciones de vídeo en la socialización de las actividades, las interacciones entre compañeros y docente, interacción con el software y entrevistas realizadas a los estudiantes; con dicha información se muestra un registro donde estos elementos han sido integrados en el análisis de resultados de los estudiantes en las sesiones de trabajo.

A continuación se presenta el análisis de las situaciones realizadas para el desarrollo de esta investigación, valorando el nivel en que se ubica el estudiante a partir de sus producciones mediante el diagrama de caracterización de niveles expuesto en la adaptación de la caracterización de la actividad demostrativa propuestas por los autores Perry, et al.(2006).

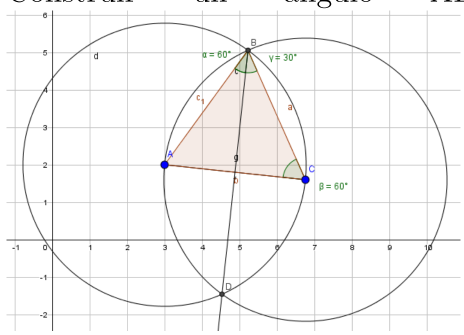
Para cada una de las sesiones se muestra la producción del estudiante donde describe el proceso de construcción con Geogebra, luego se presenta el análisis a la luz de las categorías.

Sesión No. 3

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO EN EL SGD GEOGEBRA

El objetivo de la actividad ver Anexo D, sesión 3, es formular el hecho geométrico sobre la bisectriz de un ángulo a través de la exploración hecha en Geogebra.

Producción del estudiante No. 1.

	¿Qué Hacer?	¿Cómo hacerlo?
CONSTRUCCIÓN	Construir un ángulo ABC 	Creamos un $\overline{AC}$ luego creamos dos circunferencias con radio igual $\overline{AC}$ donde se intercepten colocamos un tercer punto B, luego utilizamos la herramienta polígono y lo ubicamos en los punto ABC el cual nos va a arrojar in triángulo equilátero. Luego señalamos los $\measuredangle ABC$ y sacamos su medida con la herramienta Angulo la cual nos va arrojar la medida de los ángulos.
	Construir la bisectriz del ángulo ABC.	Donde se interceptan las dos circunferencia en una de sus intercepción ya colocamos un punto C, en la otra intercepción colocamos un punto D, trazamos $\overrightarrow{CD}$ la cual va ser la bisectriz.
	Medir los ángulos que se determina.	Para medir los $\angle$ utilizamos la herramienta $\angle$, Y ubicamos los $\measuredangle ABC$ y nos botara el $\measuredangle$ que la bisectriz está dividiendo.

Objetivo: Identificar las habilidades de construcción geométrica en un nivel medio de complejidad.

Análisis a la luz de las categorías:

Se observa que la construcción es realizada sólo para un caso en particular, un triángulo equilátero, y al mover algunos de los puntos la amplitud del ángulo no varía, por ende no se pueden visualizar las propiedades geométricas o permitir acciones relacionadas con la comprensión de una situación general.

Desde los niveles de visualización propuestos por Duval (como se citó en Paiba, et al., 2004,) el estudiante puede lograr el nivel operativo de percepción visual, “A partir de una configuración se reorganizan los elementos constitutivos de una figura, que se mueven

<table>
<tr><td colspan="3">como piezas de un rompecabezas, para lograr otra configuración relevante para la solución de un problema” (p. 13).Identificando en la producción que el estudiante no realiza acciones de reorganización ni de transformación de los elementos de la figura geométrica, y no logra la visualización de la solución.

A través de la interpretación de las acciones realizadas por el estudiante, se categoriza en el nivel 2 de visualización, porque a pesar de extraer nueva información sobre propiedades y relaciones geométricas, al dinamizar la figura presentada por el estudiante, ésta siempre será un triángulo equilátero, situación que no es pertinente en la solución, la información dada por el estudiante es parcial y no se puede llegar a visualizar de manera general el significado de bisectriz de un ángulo.

A través de la interpretación de las acciones realizadas por el estudiante, se categoriza en el nivel 2 de visualización, porque a pesar de extraer nueva información sobre propiedades y relaciones geométricas, al dinamizar la figura presentada por el estudiante, ésta siempre será un triángulo equilátero, situación que no es pertinente en la solución, la información dada por el estudiante es parcial y no se puede llegar a visualizar de manera general el significado de bisectriz de un ángulo.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">EXPLORACIÓN</td><td>¿Con base en la construcción que observa de los ángulos?</td><td>Que al mover la construcción no se nos va a destruir y el $\measuredangle B$ nunca va a variar</td></tr>
<tr><td>Utilice la herramienta de arrastre, e identifique propiedades o características geométricas</td><td>Una propiedad o característica es que tenemos un $\triangle$ equilatero como lo pdemos saber tenemos un $\overline{AC}$ en el cual hicimos dos circunferencias con radio AC, donde se intercepten las circunferencia hacemos el otro punto, unimos con — el punto AB y BC el cual $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

Observamos también la bisectriz la cual es una Semirrecta que parte del vértice de un $\measuredangle$ y lo divide en dos partes iguales el cual el $\measuredangle A$ es el que está dividendo en dos partes iguales También obtuvimos la mediatriz del $\overline{AC}$ ya q la mediatriz es una $\rightarrow$ o $\leftrightarrow$ q es perpendicular a dicho segmento trazada por su punto medio.</td></tr>
</table>

Objetivos:
Identificar las habilidades de visualización a partir de la construcción realizada. Identificar las herramientas y pasos utilizados en la exploración. Identificación de propiedades y características geométricas a través de la visualización y exploración realizada.

Análisis a la luz de las categorías:

El estudiante se ubica en el *nivel 2 en la acción de la exploración*: Elabora una sola representación de un caso extremo y actúa sólo sobre ella.

Frente a la identificación de propiedades y características geométricas a través de la visualización y exploración realizada se observa que los ángulos no varían, pero en la construcción presentada por el estudiante no logra identificar que así halla variación en el valor del ángulo inicial construido, los ángulos construidos encontrados a partir de la bisectriz siguen siendo congruentes.

CONJETURA Y VERIFICACIÓN	¿Qué Hacer?	¿Cómo hacerlo?
	¿Qué puede concluir? Escriba su conclusión en forma de condición. Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos) y finalmente verifique la conjetura a partir de acciones visibles	Si un triángulo es equilátero entonces tiene sus tres lados iguales y sus ángulos iguales ■ Los puntos de la bisectriz son equidistantes a los dos lados del ángulo ■ Dos rectas, al intersecarse, determinan cuatro ángulos consecutivos y sus bisectrices, que pasan por el punto de intersección, forman cuatro ángulos rectos consecutivos. Descubrimos que si por q si sus lados son congruentes entonces sus ángulos también.

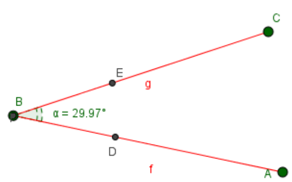
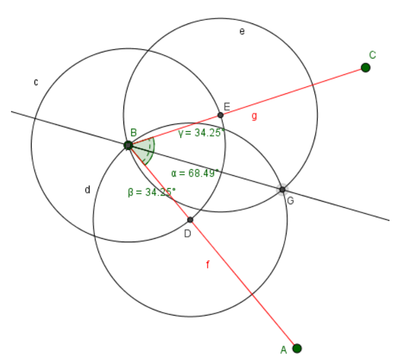
Objetivo: Identificar el establecimiento de enunciados que presenta el estudiante expresados en forma general, logrado a través de las acciones de visualización y exploración, introduciendo acciones de verificación.

Análisis a la luz de las categorías:

Frente al establecimiento de conjeturas el estudiante enuncia una afirmación parcial pero no es relacionada con el objetivo general del problema, es aquí donde se ubica al estudiante en el nivel 2 en el proceso de *conjetura*, ya que sólo puede concluir acerca de la representación que realizó, el triángulo equilátero.

En las acciones asociadas al proceso de *verificación de la conjetura* se ubica en el nivel 1, el estudiante no introduce acciones que permitan una intervención o comprobación de la conjetura establecida. En este caso no introduce acciones que permitan verificar la congruencia de ángulos, no sólo en el triángulo equilátero, sino en general en cualquier ángulo que se construya su bisectriz.

Producción del estudiante No. 15.

	¿Qué Hacer?	¿Cómo hacerlo?
CONSTRUCCIÓN	Construir un ángulo ABC.  *Figura 6.12.* Construcción de un ángulo en Geogebra	1. Ubicar tres puntos no colineales A, B, C. 2. Medir $\measuredangle ABC$.
	Construir la bisectriz del ángulo ABC.  *Figura 6.13.* Construcción en Geogebra, Estudiante No. 15	1. Trazar $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. 2. Construir una circunferencia c con centro en B y cualquier radio en este caso lo tome igual a 2. 3. Ubicar el punto de intersección D entre c y $\overline{AB}$. 4. Ubicar el punto de intersección E entre c y $\overline{BC}$.

CONSTRUCCIÓN		5. Construir una circunferencia d con centro en D y radio igual al que tomamos anteriormente en este caso igual a 2. 6. Construir una circunferencia e con centro en E y radio igual al que tomamos anteriormente en este caso igual a 2. 7. Ubicar los puntos de intersección de las circunferencias d y e que llamaremos F y G.(el punto F coincide con el punto B) 8. Trazar la recta que pasa por los puntos B Y G. La cual es la bisectriz.
	Medir los ángulos que se determina.	Con la herramienta angulo medir: $\measuredangle ABG$ y $\measuredangle GBC$.

Análisis a la luz de las categorías:

Del desarrollo presentado por el estudiante se puede observar que la construcción realizada y el paso a paso muestran que se logró el objetivo de la construcción, permitiendo que al modificar la ubicación de algunos elementos de la construcción con la herramienta de arrastre, ésta no pierda las propiedades que se verificaron inicialmente. Frente a las competencias geométricas se observa el avance en la apropiación de conceptos, lenguaje geométrico, identificación de propiedades y relaciones entre ellas, destacando que si el estudiante tiene nociones en este caso sobre bisectriz de un ángulo, es a través de la exploración y uso de las herramientas del software que verifica cada uno de los intentos de construcción y se va apropiando tanto del concepto como de la construcción realizada, y al describir las acciones realizadas

<table>
<tr><td colspan="3">
en la casilla del ¿cómo hacerlo? valida propiedades, características y conceptos geométricos propios de la construcción comprendiéndolas a la vez.
Respecto a las competencias TIC, en este caso las propias de Geogebra se observa el mejoramiento en el uso y manejo de las herramientas a partir de la exploración y uso de los comandos del software, evidenciado en los protocolos tanto de la construcción en el software como en el descrito por el estudiante.
El estudiante queda categorizado en el nivel 3 de visualización ya que extrae nueva información parcial, pertinente para la solución.
</td></tr>
<tr><td rowspan="2">EXPLORACIÓN</td><td>¿Con base en la construcción que observa de los ángulos?</td><td>$\measuredangle ABG \cong \measuredangle GBC$</td></tr>
<tr><td>Utilice la herramienta de arrastre, e identifique propiedades o características geométricas</td><td>
1. Al mover cualquier punto que determina nuestro ángulo, la propiedad de bisectriz no se pierde.
2. Los puntos de la bisectriz son equidistantes a los dos lados del ángulo.
3. La bisectriz de un ángulo, como rayo, con cada uno de los lados forma dos ángulos con lado común e iguales, cada uno de ellos es la mitad del original.
</td></tr>
<tr><td colspan="3">
Análisis a la luz de las categorías:
A partir de la exploración realizada se observa que el estudiante identifica en la construcción la congruencia de ángulos, que era el objetivo de planteado, evidenciado en las razones 1, 2 y 3 que enuncia el estudiante. Mediante una investigación empírica sobre la figura a través de acciones como medir, calcular, y realizar construcciones auxiliares (Camargo, et al., 2006). Descubriendo características como la equidistancia y la congruencia de los ángulos formados a partir de la construcción de la bisectriz del ángulo.
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">Es así que el estudiante alcanza el nivel 4 en la acción de exploración en el desarrollo de la guía, evidenciada además en las representaciones expuestas en el software actuando sobre ellas con un criterio identificado.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CONJETURA Y VERIFICACIÓN</td><td>¿Qué Hacer?</td><td>¿Cómo hacerlo?</td></tr>
<tr><td>¿Qué puede concluir? Escriba su conclusión en forma de condición. Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos) y finalmente verifique la conjetura a partir de acciones visibles</td><td>Si construimos la bisectriz de un ángulo entonces los ángulos resultantes son congruentes y además son iguales al ángulo dividido en dos, esto se puede confrontar sumando los dos ángulos resultantes lo cual nos debe dar el ángulo original.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Análisis a la luz de las categorías:

Finalmente en establecimiento de conjeturas el estudiante enuncia una afirmación correcta pero parcial, es aquí donde se ubica al estudiante en el nivel 3 en el proceso de conjetura, permitiendo ver que el estudiante pasa de una explicación empírica obtenida de la información dada a un nivel de justificación que proviene de la visualización y exploración de la figura construida.

Para realizar la conjetura se solicitó al estudiante realizar una conclusión en forma de condición “si… entonces…” para Samper & Molina, (2013) “el cumplimiento de la tesis de un enunciado “si… entonces…” depende de todas las condiciones de la hipótesis” (p. 31). Es así que durante el desarrollo de la actividad planteada el estudiante fue validando todas las hipótesis hasta llegar a justificar las acciones realizadas en el proceso.

Y en las acciones asociadas al proceso de verificación de la conjetura se ubica al estudiante en el nivel 1 ya que se observa la no introducción a las acciones que permitan una intervención o comprobación de la conjetura establecida.</td></tr>
</table>

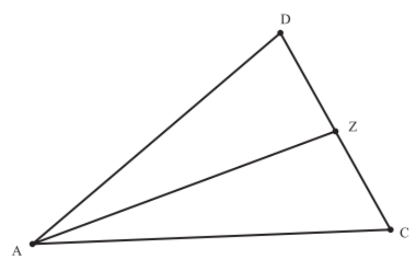
Sesión No. 4

Se plantea en esta actividad ver en el Anexo D, sesión 4, que el estudiante justifique un hecho geométrico sobre la bisectriz de un ángulo a través de la exploración hecha en Geogebra. A continuación se evidencian los resultados de algunos de los estudiantes.

Producción del estudiante No. 1.

Construcción Hecho Geométrico: Bisectriz de un ángulo

Dada la siguiente figura, ¿qué condiciones deben cumplirse para poder deducir que el $\overrightarrow{AZ}$ es bisectriz del $\measuredangle CAD$?



Para ello, primero haga su reformulación y luego utilice un diagrama-deducción.

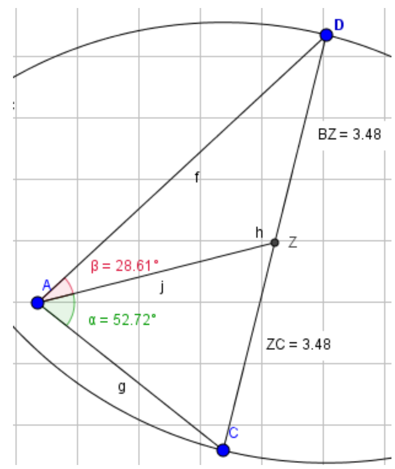


Figura 6.14
Construcción en Geogebra. Sesión No. 4

Objetivo: Identificar las características que el estudiante establece a partir de la definición de bisectriz y visualización de la figura.

Análisis a la luz de las categorías:

El autor Olive (2000), menciona que el objeto construido en el software de geometría dinámica "no está fijado estáticamente en el espacio y su comportamiento depende del método usado en su construcción" (citado en Ruiz, 2012, p.135). El comportamiento de la figura elaborada por el estudiante no tiene las condiciones que deben cumplirse para poder deducir que construyó la bisectriz de un ángulo.

Es así que en la construcción realizada por el estudiante en Geogebra, al hacer el movimiento de alguno de los elementos, se identifica que Z es el punto medio del segmento, pero no se cumple que $\overrightarrow{AZ}$ es bisectriz del $\measuredangle CAD$.

Se evidencia el desconocimiento de la definición de bisectriz y por ende no la ejecuta en la construcción. Frente a la interpretación de las acciones realizadas por el estudiante se destaca que el estudiante se ubica en el *nivel 1 de visualización*, el estudiante no se enfoca en los elementos de la representación construida para detectar o evocar propiedades geométricas y en el proceso de *exploración* también se ubica en el *nivel 1*, a partir de la representación realizada, no produce acciones relacionadas con la solución de la situación.

En el diagrama-deducción presente un desarrollo encaminado a justificar el Hecho Geométrico: Bisectriz de un ángulo

Diagrama-deducción presentado por el estudiante No. 1.

Reformulación: Si el Seg $\overline{AZ}$ es la bisectriz del triángulo CAD, entonces Seg $DC = 2DZ$

Tabla 6.5

Diagrama-deducción. Sesión No. 4

Qué se	Qué uso	Qué concluyo
Z es el punto medio de DC	Punto medio del segmento	D-Z-C
$D - Z - C$	Interestancia de dos puntos	Seg $DZ+$ Seg $CZ =$ Seg DC
Z es el punto medio de DC	Punto medio y congruencia de segmentos	$DZ = ZC$
$DZ = ZC$ $DC = ZD+ZC$	Sustitución de 3 en 2	$DC = ZC + ZC$
$DC = ZC + ZC$	Factorizar	$DC = 2ZC$

Objetivos:

- *Establecer el nivel de conjetura que hacen referencia al postular afirmaciones presentes en la reformulación realizada por el estudiante a partir de las características establecidas*
- *Categorizar las justificaciones realizadas por los estudiantes*

Análisis a la luz de las categorías:

En la reformulación que planteó el estudiante se puede observar una conclusión que a simple vista se puede extraer de la figura estática presentada en el planteamiento de la situación, pero no es la misma conclusión si la figura es dinámica como la construcción en Geogebra.

Al realizar la construcción en Geogebra y al hacerla dinámica, se observa que si $m(DZ) = m(ZC)$, entonces $\overline{AZ}$ no es la bisectriz del triángulo CAD.

Se puede concluir que no logró el objetivo al establecer una *conjetura* verdadera en la reformulación y tampoco llegó a justificarla, el nivel que alcanza el estudiante tanto en la conjetura como en la verificación es el 1, ya que enuncia una afirmación falsa y al realizar la *verificación* de la misma sólo se limita a comprobar que $\overline{DC} = 2\overline{DZ}$ donde a la vez estaría obligado a comprobar que $\overline{AZ}$ es la bisectriz del triángulo CAD.

Plenaria de Discusión

En grupos de trabajo, identificar debilidades y fortalezas logrando una retroalimentación del desarrollo de su actividad.

Producción presentada por el grupo de trabajo en el que participó el estudiante No. 1

REFORMULACIÓN
Si $\measuredangle DAZ = \measuredangle CAZ$ y $\measuredangle CAD = \measuredangle DAZ + \measuredangle CAZ$ Entonces $\measuredangle CAD = 2\measuredangle DAZ$.

ADICIÓN DE MEDIDA DE ÁNGULOS: Si D está en el interior del ángulo $\measuredangle BAC$ entonces $m\measuredangle BAC = m\measuredangle BAD + m\measuredangle DAC$.

DIAGRAMA-DEDUCCIÓN

Tabla 6.6

Diagrama-deducción correcto. Sesión No. 4

Qué se	Qué uso	Qué concluyo
$\overrightarrow{AZ}$ es bisectriz del $\measuredangle CAD$	Teorema de la bisectriz	$\measuredangle DAZ = \measuredangle CAZ$
$\overrightarrow{AZ}$ es bisectriz del $\measuredangle CAD$	Adición de medida de ángulos	$\measuredangle CAD = \measuredangle DAZ + \measuredangle CAZ$
$\measuredangle DAZ = \measuredangle CAZ$ $\measuredangle CAD = \measuredangle DAZ + \measuredangle CAZ$	1 y 2 sustitución	$\measuredangle CAD = \measuredangle DAZ + \measuredangle DAZ$
$\measuredangle CAD = \measuredangle DAZ + \measuredangle DAZ$	Algebra	$\measuredangle CAD = 2\measuredangle DAZ$

Objetivo:

Se subdivide el grupo considerando la afinidad en las reformulaciones realizadas por los estudiantes, para lograr una socialización y afianzamiento de la actividad.

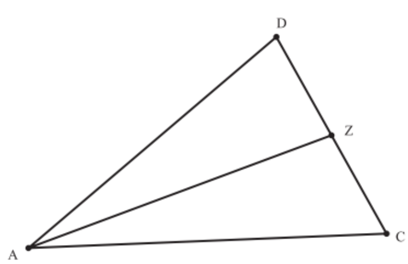
Análisis a la luz de las categorías:

El trabajo en grupo y la exploración con el software permite una socialización y afianzamiento de la actividad, identificando así correctamente tanto los elementos dados en el problema como la construcción realizada, verificando que las características geométricas identificadas por medio del arrastre de las figuras geométricas construidas son verdaderas.

La actividad del hecho geométrico: Bisectriz de un ángulo, tiene un nivel más alto de complejidad, ya que desde la interpretación del enunciado el estudiante debe realizar la reformulación, usando la definición que habían deducido en la sesión anterior: "La bisectriz de un ángulo es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y un punto en el interior del ángulo que determina con los lados del ángulo dos ángulos adyacentes congruentes" (Samper & Molina, 2013, p. 118).

A pesar de que la mayoría de los estudiantes realizaron correctamente la construcción encontrando la definición de bisectriz, les es más difícil realizar la reformulación que presente un desarrollo encaminado a justificar el hecho geométrico. La mayoría se limitaron a definir Z como el punto medio y utilizar la congruencia de segmento y al dinamizar la construcción por medio del arrastre los ángulos dejaron de ser congruentes y perdieron todas las propiedades presentes en la construcción inicial.

Producción del estudiante No. 15.

<table>
<tr><th colspan="2">Hecho Geométrico: Bisectriz de un ángulo</th></tr>
<tr>
<td>Dada la siguiente figura, ¿qué condiciones deben cumplirse para poder deducir que el $\overrightarrow{AZ}$ es bisectriz del $\measuredangle CAD$?


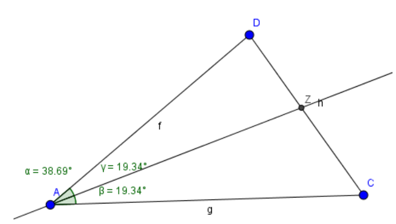
Para ello, primero haga su reformulación y luego utilice un diagrama-deducción</td>
<td>

Figura 6.15
Construcción en Geogebra. Sesión No. 4
La construcción cumple con las propiedades de bisectriz, se evidencia la apropiación del concepto y mejoramiento en el manejo del software.</td>
</tr>
</table>

Análisis a la luz de las categorías:

Después de la apropiación de la definición de bisectriz, se destaca en la construcción del estudiante, una construcción con el fin de validar si el punto Z es en realidad el punto medio del segmento $\overline{DC}$ y al concluir que no lo es nombra las propiedades encontradas mediante la visualización y exploración realizada por el estudiante. En la figura No. 6.16 puede verse la descripción de las propiedades que el estudiante extrae de la representación. Es así que el *nivel de visualización* en que está el estudiante es en el 3 ya que extrae información parcial sobre propiedades y relaciones geométricas que son pertinentes para la solución.

En la acción de *exploración* el estudiante se ubica en el nivel 3, ya que elabora varias representaciones pero en algunas de ellas actúa sin criterio identificado.

para que la recta→ AZ sea bisectriz del ∡ CAD
tiene que cumplir las siguientes propiedades
1) CAZ ≡ ZAD
2)El segmento DC es intersecado por la recta AZ
3) El segmento DC es el lado opuesto del ∡ CAD
4) la suma de los ∡D,∡A,∡Z = 180°
5) la suma de los ∡C,∡A,∡Z = 180°
6) la recta AZ divide al Δ ADC
7) de 4 y 5 la suma de todos los angulos =360°
8) Z es un punto ubicado en el segmento DC.

Figura 6.16

Propiedades de la representación geométrica. Sesión No. 4

En el diagrama-deducción presente un desarrollo encaminado a justificar el Hecho Geométrico: Bisectriz de un ángulo

Diagrama-deducción presentado por el estudiante No. 15.

Si $m(\measuredangle CAZ) + m(\measuredangle ZAD) = m(\measuredangle CAD)$ Entonces: $m(\measuredangle CAD) = 2m\measuredangle CAZ$

Tabla 6.7

Diagrama-deducción. Sesión No. 4

Qué se	Qué uso	Qué concluyo
$\overrightarrow{AZ}$ Es bisectriz $\measuredangle CAD$	Definición de bisectriz	$\measuredangle CAZ \cong \measuredangle ZAD$
$\measuredangle CAZ \cong \measuredangle ZAD$	Adición de ángulos	2 $m(\measuredangle CAZ)+m(\measuredangle ZAD) = m(\measuredangle CAD)$
$m(\measuredangle CAZ) + m(\measuredangle ZAD) = m(\measuredangle CAD)$	Definición de bisectriz	1 $m(\measuredangle CAZ) = m(\measuredangle ZAD)$

1 $m(\measuredangle CAZ) = m(\measuredangle ZAD)$ 2 $m(\measuredangle CAD) = m(\measuredangle CAZ) + m(\measuredangle ZAD)$	Sustituir 1 en 2	$m(\measuredangle CAD) = m(\measuredangle CAZ) + m(\measuredangle CAZ)$
$m(\measuredangle CAD) = m(\measuredangle CAZ) + m(\measuredangle CAZ)$	Factorización $m(\measuredangle CAZ) + m(\measuredangle CAZ) = \measuredangle CAZ(1+1) = 2\measuredangle CAZ$	$m(\measuredangle CAD) = 2m\measuredangle CAZ$

Análisis a la luz de las categorías:

La reformulación que planteó el estudiante es pertinente y el diagrama-deducción permite ver el paso a paso mostrando un desarrollo encaminado a la verificación de sus conjeturas.

En el proceso de *conjetura* el estudiante se ubica en el *nivel 4* enuncia una afirmación correcta que corresponde al objetivo del problema, verificando que la reformulación que replanteó es verdadera, es así que el estudiante se ubica en el *nivel 3 de verificación* de la conjetura, introduce acciones pertinentes para la comprobación.

Plenaria de Discusión
En grupos de trabajo, identificar debilidades y fortalezas logrando una retroalimentación del desarrollo de su actividad.
El trabajo en grupo y la exploración con el software permite una socialización y afianzamiento de la actividad, identificando así correctamente tanto los elementos dados en el problema como la construcción realizada, verificando que las características geométricas identificadas por medio del arrastre de las figuras geométricas construidas son verdaderas.

Sesión No. 8

Esta actividad está dividida en tres momentos descritos en el Anexo D, sesión 8, el cual busca que el estudiante verifique si se conservan o no las propiedades de congruencia, cuando dos rectas dejan de ser paralelas y son cortadas por una secante. Se presentan los procedimientos realizados por los estudiantes objeto de estudio.
Protocolo del estudiante No. 1

Verificación ángulos según su posición
Construya dos rectas que no sean paralelas y una secante a ellas y verifique las afirmaciones presentadas en la sesión anterior.

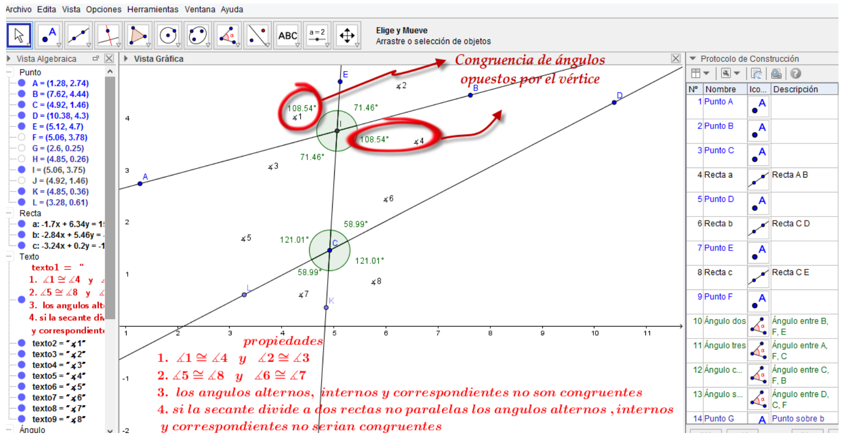


Figura 6.17

Construcción realizada por el estudiante No. 1.

Objetivo: Verificar si se conservan o no las propiedades de congruencia, cuando dos rectas dejan de ser paralelas y son cortadas por una secante

Análisis a la luz de las categorías:

En la construcción y extracción de propiedades se observa que el estudiante logra visualizar los ángulos que siguen conservando la congruencia cuando las rectas no son paralelas y son cortadas por una secante. Ubicando al estudiante en el nivel 3 de *visualización*, extrae información sobre propiedades y relaciones geométricas pertinentes en la verificación de afirmaciones.

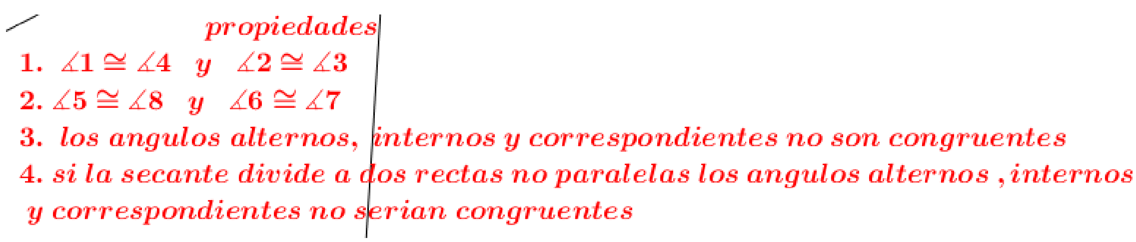


Figura 6.18

Propiedades extraídas de la construcción realizada por el estudiante No. 1.

Objetivos:

- *Descubrir regularidades que lleven al estudiante plantear axiomas y/o teoremas que se extraen de la actividad planteada.*
- *Categorizar las justificaciones realizadas por los estudiantes*

- *Validar y formalizar resultados y mediante la reflexión, descubrir que si las rectas no son paralelas se pierde la congruencia de los ángulos según la posición, y tan solo se conserva la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice.*

Análisis a la luz de las categorías:

El estudiante va descubriendo la relación que observa de los ángulos, identificando congruencias y propiedades, permitiendo así ubicar al estudiante en el *nivel 4 de exploración*, elaborando varias representaciones y actuando sobre ellas con un criterio identificado. Se destaca la justificación presentada por el estudiante en el numeral 4, ya que como afirma Samper, Molina, & Echeverry (2013) "la evolución en el proceso de conceptualización se evidencia en la medida en que se avance de una enunciación de definiciones ambiguas hacia definiciones "bien" construidas que permitan identificar cuáles objetos la cumplen, cuáles no y el porqué" (p.23).

El estudiante descubre las regularidades que le hacen plantear que si las rectas no son paralelas y son cortadas por una secante, los ángulos internos, alternos y correspondientes que se forman entre ellas no cumplen las propiedades de congruencia, así que se va acercando hacia un enunciado bien construido identificando las propiedades que cumplen o no los objetos geométricos y el porqué de dicha situación. Con las descripciones del estudiante se observa que se ubica en el *nivel 4 de conjetura*, enunciando una afirmación correcta que corresponde al objetivo del problema y en cuanto al nivel de *verificación de la conjetura* se ubica en el nivel 3, introduce acciones que intervienen en la comprobación de la misma.

Plenaria de Discusión

En grupos de trabajo, identificar debilidades y fortalezas logrando una retroalimentación del desarrollo de su actividad.

Objetivo:
Validar y formalizar resultados y mediante la reflexión, descubrir que si las rectas no son paralelas se pierde la congruencia de los ángulos según la posición, y tan solo se conserva la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice.

Producción del estudiante No. 15

Verificación ángulos según su posición

Construya dos rectas que no sean paralelas y una secante a ellas y verifique las afirmaciones presentadas en la sesión anterior.

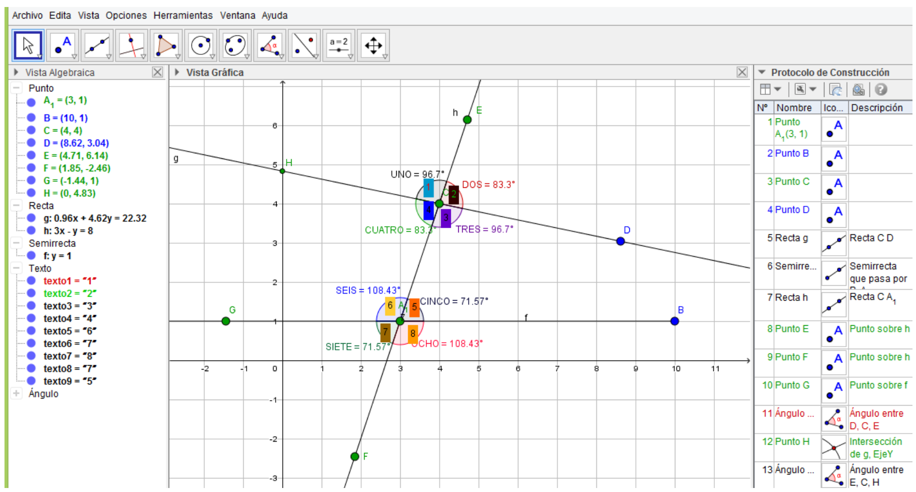


Figura 6.19

Construcción realizada por el estudiante No. 15.

El estudiante indica y nombra los ángulos que se forman en la construcción según la ubicación.

ANGULOS ALTERNOS INTERNOS: $\measuredangle 3$ y $\measuredangle 6$; $\measuredangle 4$ y $\measuredangle 5$.
ANGULOS ALTERNOS EXTERNOS: $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 8$; $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 7$.
ANGULOS CORRESPONDIENTES: $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 6$; $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 5$; $\measuredangle 7$ y $\measuredangle 4$; $\measuredangle 8$ y $\measuredangle 3$.

Análisis a la luz de las categorías:

En la construcción y extracción de propiedades se observa que el estudiante visualiza los ángulos formados según la ubicación, los indica y nombra, el estudiante se ubica en el nivel 3 de visualización, extrae información sobre propiedades y relaciones geométricas pertinentes en la situación.

Propiedades extraídas de la construcción. Estudiante No. 15

Ángulos opuestos por el vértice:

- Como $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 3$son opuestos por el vértice; además la m($\measuredangle 1$)=m($\measuredangle 3$), por congruencia de ángulos $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3$.

- Como $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 4$son opuestos por el vértice; además $m(\measuredangle 2) = m(\measuredangle 4)$, por congruencia de ángulos $\measuredangle 2 \cong \measuredangle 4$.
- Como $\measuredangle 5$ y $\measuredangle 7$ son opuestos por el vértice; además la $m(\measuredangle 5) = m(\measuredangle 7)$, por congruencia de ángulos $\measuredangle 5 \cong \measuredangle 7$.
- Como $\measuredangle 6$ y $\measuredangle 8$ son opuestos por el vértice; además la $m(\measuredangle 6) = m(\measuredangle 8)$, por congruencia de ángulos $\measuredangle 6 \cong \measuredangle 8$.

Ángulos suplementarios, par lineal, consecutivos, adyacentes.

Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180 grados:

- $\measuredangle 1$ y $\measuredangle 4$ son suplementarios porque:$m(\measuredangle 6) + m(\measuredangle 8) = 180°$.
  Desarrollo: $94.4° + 85.6° = 180°$.
- $\measuredangle 2$ y $\measuredangle 3$son suplementarios porque: $m(\measuredangle 6) + m(\measuredangle 8) = 180°$.
  Desarrollo: $85.6° + 94.4° = 180°$.
- $\measuredangle 6$ y $\measuredangle 7$ son suplementarios porque: $m(\measuredangle 6) + m(\measuredangle 7) = 180°$.
  Desarrollo: $108.43° + 71.57° = 180°$.
- $\measuredangle 5$ y $\measuredangle 8$ son suplementarios porque: $m(\measuredangle 5) + m(\measuredangle 8) = 180°$.
  Desarrollo: $71.57° + 108.43° = 180°$.

Análisis a la luz de las categorías:

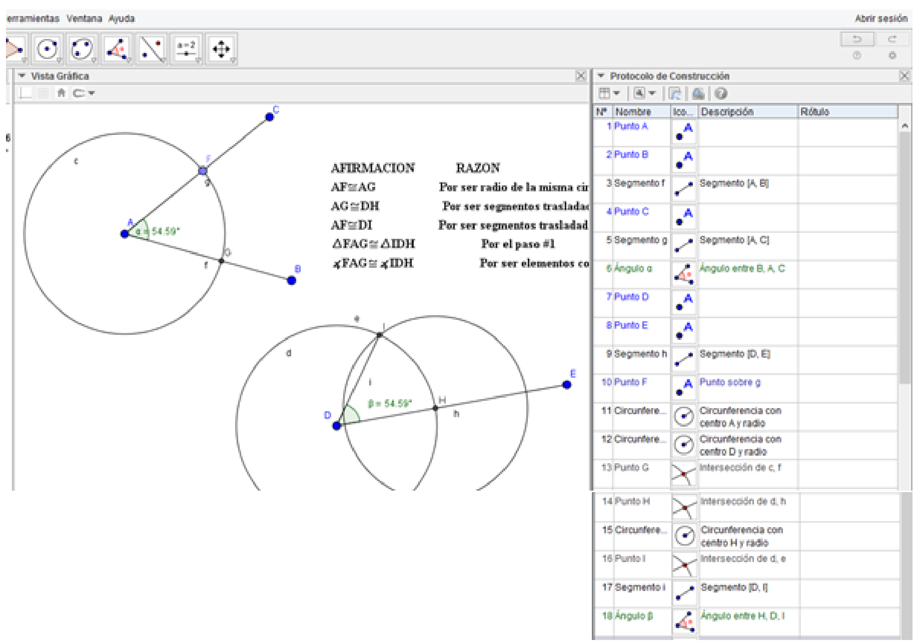
El estudiante logra visualizar los ángulos que siguen conservando la congruencia a pesar de que las rectas no sean paralelas, se destaca el uso del lenguaje geométrico utilizado cuando afirma que la congruencia en la medida de dos ángulos indica congruencia en dichos ángulos. Identifica además ángulos suplementarios, par lineal, consecutivo y adyacente. El estudiante se ubica en el *nivel 3 de exploración*, ya que elabora varias representaciones y en algunas de ellas actúa con criterio identificado en otras no lo hace.

Se destaca que no hubo producción ni verificación de conjeturas, sólo realizó las acciones de visualización y exploración en la construcción realizada.

Sesión No. 9

En esta sesión (ver Anexo D, sesión 9) se pretende que estudiante logre justificar la congruencia del ángulo construido paso a paso con el software, y registre su desarrollo en el diagrama de deducción. Luego, comparta con sus compañeros su desarrollo, afirmaciones y razones.

Producción del estudiante No. 1.

Construir un ángulo congruente a un ángulo dado. Dado el $\measuredangle B$
 *Figura 6.20* *Construcción en Geogebra de un ángulo congruente, Est. No. 1. Sesión No. 9*
Objetivo: a partir de las construcciones, realizar discusiones sobre las de nociones de: segmento, recta, semirrecta, ángulo, triángulo, congruencia.
Análisis a la luz de las categorías: A partir del protocolo extraído de Geogebra se observa el paso a paso de la construcción que cumple con las propiedades y características que hacen que el ángulo construido sea congruente al ángulo dado. Se evidencia un avance en los niveles tanto de visualización como de exploración, elestudiante extrae nueva información sobre propiedades y relaciones geométricas pertinentes para la solución, es así que el estudiante se ubica en el *nivel 4* en la acción de *visualización*.

El estudiante se encuentra en el *nivel 3 de exploración*, se destaca que elabora varias representaciones pero algunas de ellas son sin criterio identificado, como se puede ver más claramente en diagrama solicitado al estudiante presentado a continuación.

En el diagrama-deducción presente un desarrollo encaminado a justificar el Hecho Geométrico

Diagrama-deducción

Tabla 6.8

Diagrama-deducción, Est. No. 1. Sesión No. 4

Afirmación	Razón
$\overline{AF} \cong \overline{AG}$	Por ser radio de la misma circunferencia.
$\overline{AG} \cong \overline{DH}$	Por ser segmentos trasladados.
$\overline{AF} \cong \overline{DI}$	Por ser segmentos trasladados.
$\triangle FAG \cong \triangle IDH$	Por el paso # 1.
$\measuredangle FAG \cong \measuredangle IDH$	Por ser elementos correspondientes de triángulos congruentes.

Objetivos:

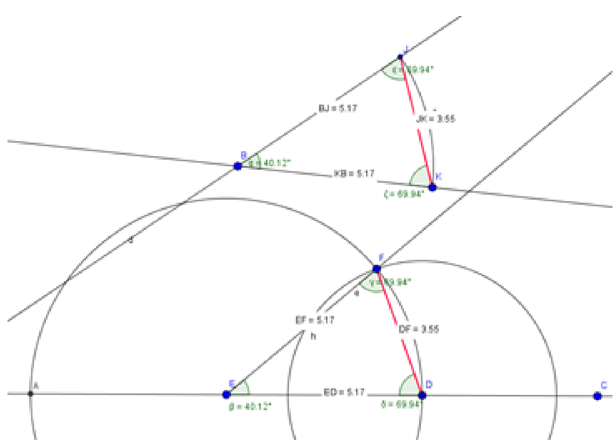
- *Establecer el nivel de conjetura en el estudiante al hacer afirmaciones y dar las razones o características establecidas*
- *Categorizar las acciones y justificaciones realizadas por los estudiantes*

Análisis a la luz de las categorías:

En el diagrama presentado por el estudiante se puede destacar que inicialmente va indicando las razones de las afirmaciones que enuncia, pero en la razón de la congruencia de triángulos, sólo menciona que dicha congruencia es por el paso # 1, omitiendo la importancia de los postulados de la congruencia de triángulos, en este caso el postulado LLL; justifica las tres afirmaciones nombradas anteriormente frente a la congruencia de los tres lados del triángulo, con el fin de afirmar que trasladó el triángulo construido en el software. Indicando así que el estudiante realiza afirmaciones correctas pero son parciales

respecto a la solución de la situación ubicando así al estudiante en el *nivel 3 de conjetura*. Y respecto al nivel de *verificación de la conjetura* se ubica en el nivel 2, se destaca que introduce acciones de comprobación pero éstas son parciales. Además, se puede observar que el estudiante va adquiriendo poco a poco la destreza del uso del lenguaje geométrico en el software.
Plenaria de Discusión
En grupos de trabajo, identificar debilidades y fortalezas logrando una retroalimentación del desarrollo de su actividad.
Objetivo: *Por medio del aprendizaje colaborativo, destacar los errores y aciertos efectuados en el desarrollo de su actividad, identificando los elementos dados en la construcción realizada, verificando que las características geométricas por medio del arrastre se conserven.*

Producción del estudiante No. 15.

Construir un ángulo congruente a un ángulo dado. Dado el $\measuredangle B$


Protocolo de Construcción

Nº	Nombre	Icono de la ...	Descripción
1	Punto B		
2	Punto B_1		
3	Recta f		Recta B B_1
4	Punto K		
5	Recta g		Recta B K
6	Arco c		ArcoCircunferencia(B, K, B_1)
7	Punto J		Punto de intersección de c, f
7	Punto K_1		Punto de intersección de c, f
8	Punto E		
9	Punto C		
10	Recta t		Recta E C
11	Circunferencia ...		Circunferencia con centro E y radio Segmento(B, K)
12	Número distanciaBJ		Distancia entre B y J
13	Número distanciaBK		Distancia entre B y K
14	Ángulo α		Ángulo entre K, B, J
15	Punto A		Punto de intersección de d, t
15	Punto D		Punto de intersección de d, t
16	Circunferencia e		Circunferencia con centro D y radio Segmento(K, J)
17	Punto F		Punto de intersección de d, e
17	Punto G		Punto de intersección de d, e
18	Semirrecta h		Semirrecta que pasa por E, F
19	Ángulo β		Ángulo entre D, E, F
20	Segmento i		Segmento [K, J]
21	Segmento j		Segmento [D, F]
22	Número a		Distancia entre B y J
23	Texto TextoBJ	ABC	Nombre(B) + (Nombre(J)) + " = " + a
24	Número distanciaJK		Distancia entre J y K
25	Texto TextoJK	ABC	Nombre(J) + (Nombre(K)) + " = " + distanciaJK
26	Número distanciaKB		Distancia entre K y B
27	Texto TextoKB	ABC	Nombre(K) + (Nombre(B)) + " = " + distanciaKB
28	Número distanciaEF		Distancia entre E y F
29	Texto TextoEF	ABC	Nombre(E) + (Nombre(F)) + " = " + distanciaEF
30	Número distanciaED		Distancia entre E y D
31	Texto TextoED	ABC	Nombre(E) + (Nombre(D)) + " = " + distanciaED
32	Número distanciaDF		Distancia entre D y F
33	Texto TextoDF	ABC	Nombre(D) + (Nombre(F)) + " = " + distanciaDF
34	Ángulo γ		Ángulo entre E, F, D
35	Ángulo δ		Ángulo entre F, D, E
36	Ángulo ε		Ángulo entre B, J, K
37	Ángulo ζ		Ángulo entre J, K, B

Análisis a la luz de las categorías:

A partir del protocolo extraído de Geogebra se observa el trabajo realizado por el estudiante así como el paso a paso para encontrar las propiedades y características pertinentes en la construcción.

Se evidencia un avance en los niveles tanto de visualización como de exploración, el estudiante extrae nueva información sobre propiedades y relaciones geométricas pertinentes para la solución, encontrándose en el *nivel 4 en visualización como en la acción de exploración* elabora varias representaciones actuando sobre ellas con un criterio identificado, pertinentes para la resolución de la situación presentada.

En el diagrama-deducción presente un desarrollo encaminado a justificar el Hecho Geométrico

Diagrama-deducción

Tabla 6.9

Diagrama-deducción, Est. No. 15. Sesión No. 9

Afirmación	Razón
$\overline{BK} \cong \overline{BJ}$	Por ser radios del arco trazado
$\overline{ED} \cong \overline{EF}$	Por ser radios de la circunferencia d trazada.
$\overline{BK} \cong \overline{ED}$	Por ser segmentos trasladados.

$\overline{BJ} \cong \overline{EF}$	Por ser segmentos trasladados.
$m(KJ) = m(DF)$	Por ser amplitudes congruentes.
Como $\triangle BJK \cong \triangle EDF$	Por ser triángulos trasladados.
Entonces $\measuredangle DEF \cong \measuredangle KBJ$	Por ser triángulos congruentes.

Análisis a la luz de las categorías:

Considerando que el estudiante se va involucrando en proceso de conjeturación y justificación como presentan Samper y Molina (2013):

> El proceso de conjeturación tiene por meta la formulación de conjeturas, es decir, enunciados de carácter general, fundamentados en la observación o el análisis de indicios, cuyo valor de verdad no lo tiene definido el sujeto pero este tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad. (p. 17)

Se evidencia el criterio identificado con el cual el estudiante actúa sobre la representación en las razones y afirmaciones que presenta el estudiante en el diagrama de deducción, donde frente a la afirmación de congruencia de segmentos presenta razones como "Por ser radios de la circunferencia d trazada" o "Por ser segmentos trasladados" afirmando que trasladó los triángulos, y eso implica trasladar los lados de los triángulos, observando que son pertinentes a lo que se enunció inicialmente y al hecho geométrico que se quiere demostrar.

Por ende se afirma que en la producción de conjetura el estudiante se encuentra en el nivel 4, ya que enuncia afirmaciones correctas que corresponden al objetivo de la situación y respecto a la verificación de la conjetura el estudiante se ubica en el nivel 3, introduciendo acciones que intervienen en su comprobación.

Sesión No. 12

El objetivo de esta actividad descrita en el Anexo D, sesión 12, el estudiante debe realizar la construcción y durante su desarrollo logre justificar las propiedades sobre la suma de ángulos internos de un triángulo. En seguida se muestran los procesos realizados por los estudiantes.

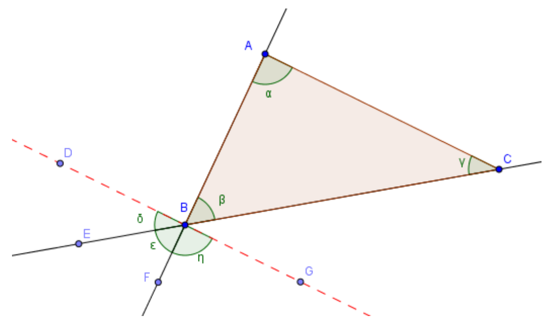
Producción del estudiante No. 1

Ángulos internos de un triángulo

Paso 1. Utilizando la herramienta de Geogebra "polígono" represente un triángulo y nombre o enumere los ángulos internos.

Paso 2. Trace una recta paralela a uno de los segmentos del triángulo que pase por el vértice opuesto.

Paso 3. Con la herramienta recta, extienda los segmentos del triángulo que intersecan la recta paralela y nombre o enumere los ángulos formados por dichas rectas y la recta paralela.



Respuestas pregunta No. 1

Utilice las definiciones de ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante.

1. ¿Qué relación encuentra entre los 3 pares de ángulos? Nómbrelos y justifique.

$\measuredangle\beta \cong \measuredangle EBF$	Son opuestos por el vértice
$\measuredangle\gamma \cong \measuredangle DBE$	Por q son ángulos correspondientes
$\measuredangle\alpha \cong \measuredangle FBG$	Por q son ángulos correspondientes

Análisis a la luz de las categorías:

A través de la visualización de la representación gráfica realizada por el estudiante, se destaca que identifica la congruencia de los ángulos a partir de las definiciones de ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante. El estudiante se va encaminando a justificar propiedades y características encontradas.

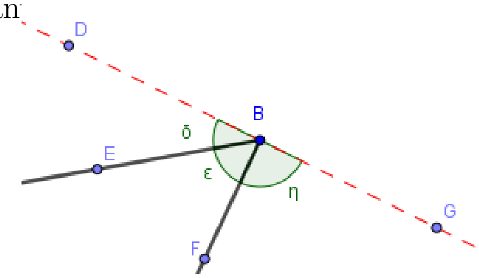
Respuestas pregunta No. 2

2. ¿Qué puedes decir de la suma de los tres ángulos formados por la paralela que no hace parte del triángulo y las rectas secan

Respuesta

$\measuredangle DBE + \measuredangle EBF + \measuredangle FBG = 180°$

Por qué se forma un Angulo llano



Análisis a la luz de las categorías:

El estudiante identifica mediante la exploración de la construcción realizada que los tres ángulos forman un ángulo llano, ya que la representación no es estática como lo afirman Duval (2005) y Gal y Linchevski (2010) citado en Avenia & Restrepo (2012) que "han encontrado que los estudiantes privilegian una visualización de naturaleza estática o icónica, centrada en lo que "a primera a vista se ve" en la figura geométrica en estudio" (p. 10), por ende ésta mirada privilegia el potencial de la visualización y exploración en el software, permitiendo que el estudiante descubra las propiedades y sus relaciones geométricas en la representación activa mediada por la geometría dinámica.

Se puede destacar que en la producción del estudiante en cuanto a las acciones de *visualización y exploración* se encuentran en *nivel 4* ya que hay extracción de información sobre la representación actuando con criterio identificado pertinente para la solución de la situación.

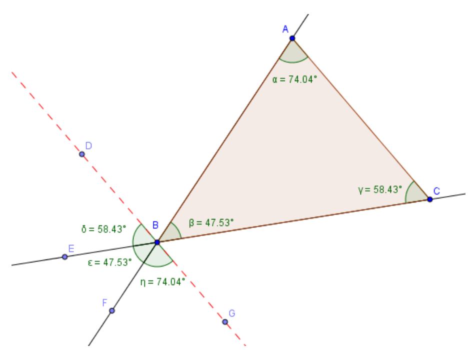
Respuestas pregunta No. 3

3. ¿Qué puedes decir de la suma de los ángulos interiores del triángulo? y porqué.

Respuesta

$\measuredangle\beta + \measuredangle\gamma + \measuredangle\alpha = 180°$

Porque son congruentes a los ángulos formados por la paralela y de los segmentos extendidos



Análisis a la luz de las categorías:

En la razón dada por el estudiante: "Porque son congruentes a los ángulos formados por la paralela y de los segmentos extendidos" se observa el proceso en la producción y validación de conjeturas como presentan Samper y Molina (2013): "el proceso de justificación tiene por meta la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, es decir, la sustente como verdadera dentro de algún sistema de conocimiento". (p. 17)

Objetivo: A partir de las construcciones, Justificar las propiedades sobre la suma de ángulos internos de un triángulo.

Respuestas pregunta No. 4

4. Explore, conjeture y en un diagrama de deducción presente un desarrollo encaminado a justificar las afirmaciones encontradas

Tabla 6.10

Diagrama-deducción. Sesión No. 12

Afirmación	**Razón**
$\measuredangle\beta \cong \measuredangle EBF$	Son opuestos por el vértice
$\measuredangle\gamma \cong \measuredangle DBE$	Por que son ángulos correspondientes
$\measuredangle\alpha \cong \measuredangle FBG$	Por que son ángulos correspondientes
$\measuredangle DBE + \measuredangle EBF + \measuredangle FBG = 180°$	Por qué se forma un ángulo llano
$\measuredangle\beta + \measuredangle\gamma + \measuredangle\alpha = 180°$	Por que son congruente a los ángulos formados por la paralela y de los segmentos extendidos

Análisis a la luz de las categorías:

En la respuesta a la cuarta pregunta se pueden identificar las justificaciones a las que el estudiante se va acercando considerando que se involucra en el proceso de conjeturación y justificación, evidenciando los criterios con los cuales actúa sobre la representación en las razones y afirmaciones presentadas en el diagrama de deducción. Ubicando así al estudiante en el nivel 3 de *conjetura*, pero en un nivel 2 de *verificación* ya que sólo introduce acciones parciales de intervención y comprobación.

Plenaria de Discusión

En grupos de trabajo, identificar debilidades y fortalezas logrando una retroalimentación del desarrollo de su actividad.

Objetivo:

Por medio del aprendizaje colaborativo, destacar los errores y aciertos efectuados en el desarrollo de su actividad, identificando los elementos dados en la construcción realizada, verificando que las características geométricas por medio del arrastre se conserven.

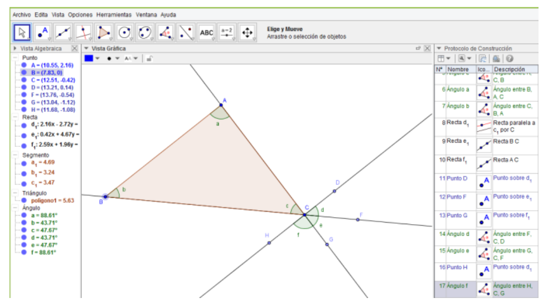
Producción del estudiante No. 15

Ángulos internos de un triángulo

Paso 1. Utilizando la herramienta de Geogebra “polígono” represente un triángulo y nombre o enumere los ángulos internos.

Paso 2. Trace una recta paralela a uno de los segmentos del triángulo que pase por el vértice opuesto.

Paso 3. Con la herramienta recta, extienda los segmentos del triángulo que intersecan la recta paralela y nombre o enumere los ángulos formados por dichas rectas y la recta paralela.



Respuestas pregunta No. 1

Utilice las definiciones de ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante.

1. ¿Qué relación encuentra entre los 3 pares de ángulos? Nómbrelos y justifique.

$\measuredangle a$ y $\measuredangle f$	son ángulos correspondientes congruentes.
$\measuredangle c$ y $\measuredangle e$	son ángulos congruentes (por ser ángulos opuestos por el vértice)
$\measuredangle b$ y $\measuredangle d$	ángulos correspondientes congruentes.

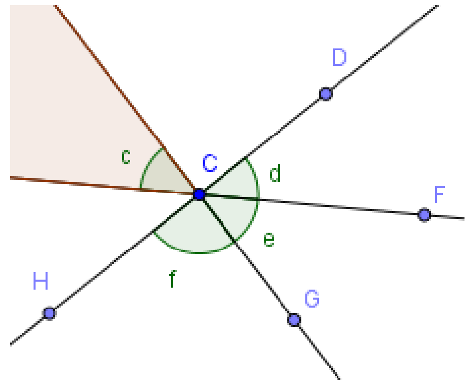
Análisis a la luz de las categorías:

A través de la visualización de la representación gráfica realizada por el estudiante, se destaca que el estudiante identifica la congruencia de los ángulos a partir de las definiciones de ángulos formados por rectas paralelas cortadas por una secante. el estudiante se va encaminando a justificar propiedades y características encontradas.

2. ¿Qué puedes decir de la suma de los tres ángulos formados por la paralela que no hace parte del triángulo y las rectas secantes que la cortan?

Respuestas pregunta No. 2

La suma de estos ángulos es de 180° ya que estos forman un ángulo llano.



Análisis a la luz de las categorías:

La exploración de dicha actividad radica en la comparación de los ángulos observados, ya que en la representación gráfica, no utilizó la herramienta de medición de ángulos, como sí lo hicieron algunos estudiantes que al sumar dichas medidas encontraron que el resultado es 180°, identificando que forman el ángulo llano. En general al hacer uso del dinamismo en la construcción por medio del arrastre de algunas de las representaciones geométricas se puede formalizar que mediante la visualización y exploración de la construcción los estudiantes se apropiaron de la información necesaria para conjeturar y deducir en forma general.

Frente al desarrollo de la situación el estudiante se ubica en el *nivel 4 en las acciones de visualización y exploración*, dando soluciones con criterios de aprendizaje ya que reconoce patrones de comportamiento invariantes, llegando a consolidar un conocimiento matemático en construcción (Paiba et al., 2004).

Respuestas pregunta No. 3

3. ¿Qué puedes decir de la suma de los ángulos interiores del triángulo? y porqué.

Respuesta

La suma de sus ángulos internos es de 180°, ya que como $\measuredangle d$,$\measuredangle e$ y $\measuredangle f$ forman un ángulo llano y $\measuredangle a \cong \measuredangle f$, $\measuredangle c \cong \measuredangle e$ y $\measuredangle b \cong \measuredangle d$, la suma de estos ángulos es de 180°.

Análisis a la luz de las categorías:

La representación gráfica del estudiante muestra la congruencia encontrada en los ángulos compartiendo la afirmación de Paiba, et al., (2004) donde "A partir de una configuración se reorganizan los elementos constitutivos de una figura, que se mueven como piezas de un rompecabezas, para lograr otra configuración relevante para la solución de un problema". (p.13) En este caso en la configuración lograda por el estudiante a partir de la congruencia de ángulos permitió encontrar que los ángulos interiores de cualquier triángulo suman 180°.

Respuestas pregunta No. 4

4. Explore, conjeture y en un diagrama de deducción presente un desarrollo encaminado a justificar las afirmaciones encontradas

Tabla 6.11

Diagrama-deducción. Sesión No. 12

Que Se	Que Uso	Que Concluyo
$\measuredangle d$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle f$ son ángulos formados por una recta paralela a un segmento del triángulo que pasa por el vértice opuesto cortada por los segmentos del triángulo que intersecan la recta	Teorema de ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante	$\measuredangle a \cong \measuredangle f$ $\measuredangle b \cong \measuredangle d$ Por ser correspondientes
$\measuredangle d$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle f$ son ángulos formados por una recta paralela a un segmento del triángulo que pasa por el vértice opuesto cortada por los segmentos del triángulo que intersecan la recta	Teorema de ángulos opuestos por el vértice	$\measuredangle c \cong \measuredangle e$
$\measuredangle d$, $\measuredangle e$ y $\measuredangle f$ forman un ángulo llano	Un ángulo llano mide 180°	$\measuredangle d + \measuredangle e + \measuredangle f = 180°$
$\measuredangle a \cong \measuredangle f$ $\measuredangle b \cong \measuredangle d$ $\measuredangle c \cong \measuredangle e$	$\measuredangle d + \measuredangle e + \measuredangle f = 180°$ y Algebra (sustitución)	$\measuredangle b + \measuredangle c + \measuredangle a = 180°$

Análisis a la luz de las categorías:

En el diagrama de deducción presentada por el estudiante se pueden identificar las justificaciones a las que se va acercando, considerando que este se involucra en el proceso de conjeturación y justificación, ubicando así al estudiante en el *nivel 4 de conjetura* y en el *nivel 2 de verificación*, evidenciado en los criterios con los cuales el estudiante actúa sobre la representación; siguiendo así a Samper y Molina (2013) quienes afirman que "el proceso de justificación tiene por meta la producción de una argumentación de carácter deductivo que valide la conjetura formulada, es decir, la sustente como verdadera dentro de algún sistema de conocimiento". (p. 17)

El carácter dinámico de la geometría con GeoGebra es aprovechado por algunos de los estudiantes ya que como afirma Forsythe (2007) citado en Ruiz (2012 p.135) "En esta geometría con ordenador las figuras quedan determinadas mediante su proceso de construcción y su comportamiento cuando se someten a arrastres" es así que en general las construcciones realizadas por los estudiantes en la sesión No. 12, cuando se sometieron al arrastre permitieron ver que se conservaron las congruencias de los ángulos según la posición determinada por las rectas paralelas cortadas por una secante.

Se identificó que en dos representaciones de la situación planteada, la construcción no conservó la congruencia de los ángulos, quedando registrado en el software que no se realizó el proceso adecuado para que la construcción cumpliera con las características geométricas en esta situación que las rectas graficadas fueran paralelas y poder observar lo que sucedía con el comportamiento de la construcción y de los ángulos que se forman.

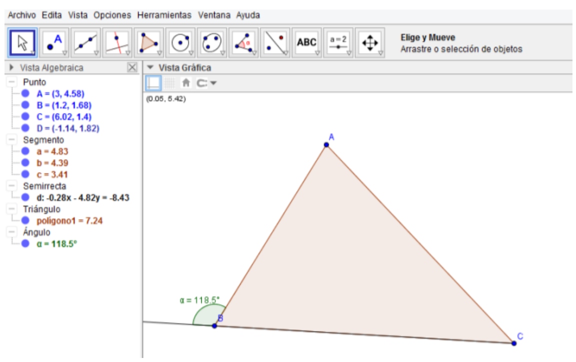
Sesión No. 14
Relación entre ángulos internos y sus correspondientes ángulos externos

El objetivo de esta actividad descrita en el Anexo D, sesión 14, el estudiante debe observar, deducir y justificar las propiedades sobre la relación entre ángulo interno y su correspondiente ángulo externo y teorema del ángulo externo. A continuación se muestran los procesos realizados por los estudiantes.

Producción del estudiante No. 1

<table>
<tr><th>EXPLORACIÓN</th><th>NIVEL 1</th></tr>
<tr><td>

1. Utilizando la herramienta de GeoGebra “polígono” represente un triángulo. Determine un ángulo exterior de ese triángulo y llámelo α. Calcule su medida. (**Sugerencia:** realice una construcción auxiliar, utilizando una semirrecta que extienda uno de los lados del triángulo)



2. Encuentre una relación entre el ángulo exterior indicado en el numeral anterior y los dos ángulos internos del triángulo no adyacentes a él.

Importante: Indique las acciones o procedimientos realizados para encontrar dicha relación.

Respuesta:

$$\measuredangle ACB + \measuredangle BAC = \measuredangle \alpha$$

</td><td>

N1. Elabora una sola representación y actúa sólo sobre ella.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

Análisis a la luz de las categorías:

En la interacción con el software del estudiante No. 1, extraída de los videos de las sesiones de clase se destaca que, nombra segmentos para buscar los ángulos, busca en internet e indaga con sus compañeros tratando de despejar la duda de los ángulos no adyacentes.

Interpreta correctamente el enunciado de la situación, ésto evidenciado en la construcción seguida paso a paso en el software, además las preguntas que hace tanto al grupo de compañeros como a internet son el camino para ir avanzando en los demás item propuestos en la sesión de clase.

</td></tr>
<tr><td>VISUALIZACIÓN</td><td>NIVEL 3</td></tr>
<tr><td>

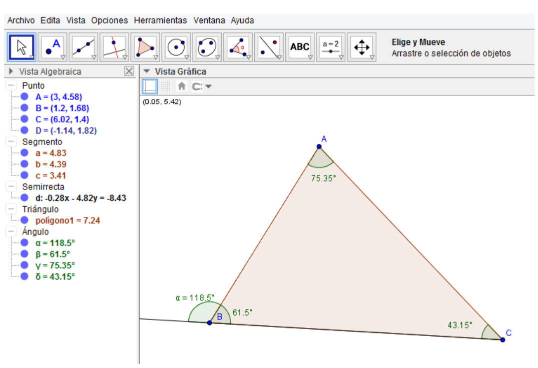
3. Escriba una expresión general para la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo. Llámela **(1)**

$$\measuredangle ACB + \measuredangle BAC + \measuredangle CBA = 180^\circ$$

Por que la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180°

4. Escriba una expresión general que involucre la suma del ángulo exterior α y el ángulo adyacente a él. Llámela **(2)**

$$\measuredangle CBA + \measuredangle\alpha = 180 \qquad \text{por par lineal.}$$



</td><td>

N3. Extrae nueva información Parcial sobre propiedades y relaciones geométricas, que es pertinente para la solución.

</td></tr>
<tr><td>CONJETURA</td><td>NIVEL 3</td></tr>
</table>

5. Igualando las expresiones **(1)** y **(2)**, ¿Qué puede afirmar? (El objetivo es hallar una expresión que relacione cualquier ángulo exterior del triángulo con los ángulos internos no adyacentes a él)

$$\measuredangle ACB + \measuredangle BAC + \measuredangle CBA = \measuredangle CBA + \measuredangle \alpha$$

La suma de los ángulos internos del triángulo son congruentes con la suma del ángulo externo y el ángulo adyacente

N3. Enuncia una afirmación correcta pero parcial.

No hay afirmación que relacione cualquier ángulo exterior del triángulo con los ángulos internos no adyacentes a él como se indicó en el objetivo del numeral, razón por la cual el estudiante se ubica en el nivel 3 de conjetura, enunciando una afirmación parcial.

VERIFICACIÓN	**NIVEL 2**

6. Conjeture y en un diagrama de deducción presente un desarrollo encaminado a justificar las afirmaciones encontradas

Tabla 6.12

Diagrama-deducción. Sesión No. 12

Afirmación	Razón
$\measuredangle ACB + \measuredangle BAC + \measuredangle CBA = 180°$	Por q la suma de los ángulos internos de un triángulo suman 180
$\measuredangle CBA + \measuredangle \alpha = 180$	Par lineal
$\measuredangle ACB + \measuredangle BAC + \measuredangle CBA = \measuredangle CBA + \measuredangle \alpha$	Por igualación
$\measuredangle ACB + \measuredangle BAC + \cancel{\measuredangle CBA} - \cancel{\measuredangle CBA} = \measuredangle \alpha$	Sustitución de términos
$\measuredangle ACB + \measuredangle BAC = \measuredangle \alpha$	Simplificación

N2. Introduce acciones parciales de intervención y comprobación.

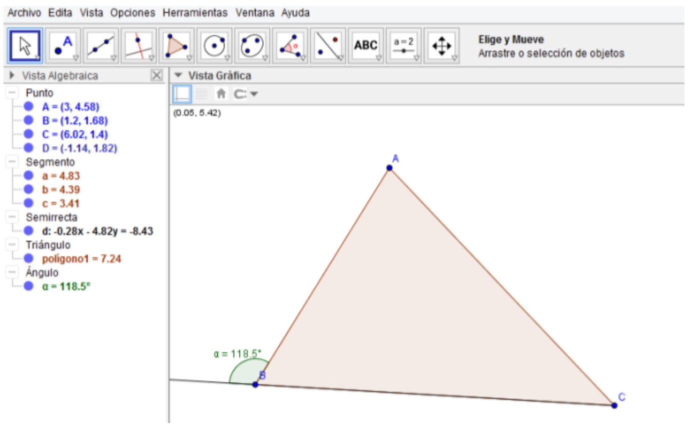
El estudiante no utiliza un lenguaje geométrico correcto cuando afirma que hay sustitución, no logra identificar las relaciones pertinentes involucradas en esta situación.

Producción del estudiante No. 15.

INTERPRETACIÓN Y EXPLORACIÓN	**NIVEL 1**

<table>
<tr>
<td>

1. Utilizando la herramienta de GeoGebra "polígono" represente un triángulo. Determine un ángulo exterior de ese triángulo y llámelo α. Calcule su medida. (**Sugerencia:** realice una construcción auxiliar, utilizando una semirrecta que extienda uno de los lados del triángulo)



2. Encuentre una relación entre el ángulo exterior indicado en el numeral anterior y los dos ángulos internos del triángulo no adyacentes a él.

Importante: Indique las acciones o procedimientos realizados para encontrar dicha relación.
Respuesta:
$\measuredangle\beta + \measuredangle\gamma = \measuredangle\alpha$

Procedimiento: $\measuredangle\delta + \measuredangle\alpha = 180$ por ser ángulos suplementarios.

$\measuredangle\delta$ Es el suplemento de $\measuredangle\alpha$.

$\measuredangle\beta + \measuredangle\gamma + \measuredangle\alpha = 180$ la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados.

entonces $\cancel{\measuredangle\delta} + \measuredangle\alpha = \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma + \cancel{\measuredangle\delta}$ aplicando ley cancelativa a $\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma$ por ley cancelativa.

</td>
<td>

N1. Elabora una sola representación y actúa sólo sobre ella.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">
Análisis a la luz de las categorías:

La representación gráfica realizada en Geogebra permitió encontrar las propiedades y visualizar las relaciones geométricas entre los ángulos internos y sus correspondientes ángulos externos, aprovechando las bondades de la geometría dinámica, tal como lo afirma Camargo, et al. (2006) la cual “provee un modelo de la geometría euclidiana —con algunas diferencias— en el que se mantienen las relaciones geométricas usadas para construir una figura; en consecuencia, la figura construida es realmente representante de una determinada clase y esto permite que las propiedades implicadas por las condiciones esenciales de la figura se evidencien y se favorezca entonces la formulación de conjeturas”. (p. 372)
</td></tr>
<tr><th>VISUALIZACIÓN</th><th>NIVEL 3</th></tr>
<tr><td>
3. Escriba una expresión general para la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo. Llámela (1)

$$\measuredangle\beta + \measuredangle\gamma + \measuredangle\delta = 180^\circ \qquad \mathbf{(1)}$$

4. Escriba una expresión general que involucre la suma del ángulo exterior α y el ángulo adyacente a él. Llámela (2)

$$\measuredangle\delta + \measuredangle\alpha = 180^\circ \qquad \mathbf{(2)}$$
</td><td>N3. Extrae nueva información Parcial sobre propiedades y relaciones geométricas, que es pertinente para la solución.</td></tr>
<tr><th>CONJETURA</th><th>NIVEL 3</th></tr>
<tr><td>
5. Igualando las expresiones (1) y (2), ¿Qué puede afirmar? (El objetivo es hallar una expresión que relacione cualquier ángulo exterior del triángulo con los ángulos internos no adyacentes a él)

$$\begin{aligned} \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma + \measuredangle\delta &= \measuredangle\delta + \measuredangle\alpha && \mathbf{(1)}\text{ y }\mathbf{(2)}, \\ \measuredangle\alpha &= \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma + \cancel{\measuredangle\delta} - \cancel{\measuredangle\delta} \\ \measuredangle\alpha &= \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma \end{aligned}$$

Afirmación: Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos exteriores no adyacentes.
</td><td>N3. Enuncia una afirmación correcta pero parcial.</td></tr>
</table>

Análisis a la luz de las categorías:

El estudiante logra enunciar una conjetura verdadera a partir de las acciones realizadas en el software haciendo "referencia al acto de postular una afirmación, fruto del convencimiento personal logrado a través de las acciones de visualización y exploración"(Perry, et al., 2006, p. 60).

VERIFICACIÓN	**NIVEL 2**
6. Conjeture y en un diagrama de deducción presente un desarrollo encaminado a justificar las afirmaciones encontradas	**N2.** Introduce acciones parciales de intervención y comprobación.

CONJETURA: Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos exteriores no adyacentes.

$\measuredangle\beta + \measuredangle\gamma = \measuredangle\alpha$

Tabla 6.13

Diagrama-deducción. Sesión No. 12

Afirmación	Razón
$\measuredangle\gamma + \measuredangle\alpha = 180°$ **(1)**	**Por ser ángulos suplementarios**. $\measuredangle\gamma$ Es el suplemento de $\measuredangle\alpha$.
$\measuredangle\beta + \measuredangle\gamma + \measuredangle\delta = 180°$ **(2)**	La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados.
$\measuredangle\gamma + \measuredangle\alpha = \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma + \measuredangle\delta$	De **(1)** y **(2)** propiedad transitiva.
$\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta + \measuredangle\gamma$	Aplicando ley cancelativa a $\measuredangle\gamma$

Análisis a la luz de las categorías:

En el diagrama se presenta las afirmaciones y razones del hecho geométrico con las justificaciones utilizadas en el sistema axiomático, logrando la introducción de acciones parciales de comprobación.

6.3.3. Diferencia de proporciones en los niveles de desempeño en la fase diagnóstica y valoración final

Con el siguiente análisis se pretende observar el efecto de la metodología utilizada durante el desarrollo del curso de Geometría Euclídea y a partir de ésta el nivel de desempeño alcanzado por los estudiantes frente a situaciones geométricas desarrolladas en Entornos de Geometría Dinámica (EGD), la metodología utilizada se presenta mediante diversas situaciones problema mediadas por el uso del SGD Geogebra que potencializa la visualización y la exploración, acciones que llevan a la construcción y verificación de conjeturas finalizando en el proceso de justificación y demostración de hechos geométricos.

Se hace una comparación de los niveles obtenidos por los estudiantes antes y después de la estrategia metodológica utilizada, se realizó un diagnóstico que permitió observar el nivel inicial del estudiante tanto en conocimientos geométricos como en el desempeño en ambientes de Geometría Dinámica y para obtener el nivel final alcanzado por el estudiante se realizó una valoración general a partir de los desempeños en cada una de las diversas actividades presentadas en las situaciones problema y la incorporación del SGD Geogebra.

Es así que el centro de experimentación como docente investigadora fueron las diversas situaciones problema incorporando el uso de SGD Geogebra, asumir el rol de docente que orienta el curso de geometría y a la par investigadora.

Para realizar el análisis del nivel de desempeño antes y después de realizar las actividades propuestas, mediante el uso del SGD Geogebra, se hace uso del Test de McNemar. Este Test "se utiliza cuando se trata de comparar dos proporciones observadas en el mismo grupo de individuos en dos ocasiones distintas de tiempo (antes y después de algún estímulo). Se pretende comparar si se produce algún cambio significativo entre ambas mediciones" (Díaz, s.f).

Por ende se clasifica el grupo de 15 individuos entre dos categorías mutuamente excluyentes, indicadas por positivo (1) y negativo (0). Positivo indicando que inició o finalizó en un nivel dado, o negativo que no inició o no finalizó en dicho nivel. Pasada la intervención es posible que alguno de los individuos cambie de categoría.

Se incorporan y complementan los niveles de desempeño propuestos en los procesos de visualización, exploración y los que llevan a la construcción y verificación de conjeturas, señalados en la caracterización de la actividad demostrativa; por las autoras Perry, Camargo, Samper, & Rojas (2006).

Diagrama caracterización de Niveles:

El análisis y caracterización de los niveles adquiridos por los estudiantes se presenta a continuación:

En la siguiente tabla se muestran los datos de los niveles en que se ubicaron 15 estudiantes, durante el desarrollo del curso de Geometría Euclídea, presentadas en la prueba diagnóstica y en la valoración final adquirida durante el proceso.

Tabla 6.14

Niveles de desempeño de los 15 estudiantes en las acciones evaluadas

ESTUDIANTE	**ACCIONES DE DESEMPEÑO**							
	VISUALIZACIÓN		**EXPLORACIÓN**		**CONJETURA**		**VERIFICACIÓN**	
	NIVELES DE DESEMPEÑO							
	Prueba Diagnóstica	**Prueba Final**	**Prueba Diagnóstica**	**Prueba Final**	**Prueba Diagnóstica**	**Prueba Final**	**Prueba Diagnóstica**	**Prueba Final**
1	1	4	2	4	1	3	1	2
2	2	4	3	3	2	3	2	2
3	2	4	2	3	2	3	2	2
4	2	4	3	4	3	4	2	3
5	2	4	2	4	2	4	1	2
6	2	4	3	4	3	4	2	3
7	1	3	2	3	2	3	1	2
8	1	3	3	4	2	4	1	3
9	2	4	3	4	3	4	2	2
10	1	3	2	3	1	3	1	2
11	2	4	3	4	2	4	1	2
12	1	3	2	2	1	2	1	2
13	2	2	2	2	1	2	1	2
14	2	4	3	3	2	3	1	2
15	2	4	2	4	2	4	1	2

A continuación se presenta la tabla de contingencia para dos proporciones observadas en el mismo grupo en dos ocasiones distintas de tiempo. Evaluando el nivel 1 de desempeño en la acción de visualización tanto en la prueba diagnóstica como en el nivel final adquirido durante el proceso:

Tabla 6.15

Nivel 1 desempeño en la acción de visualización prueba diagnóstica y final.

VISUALIZACIÓN NIVEL 1		Prueba Final					
		Positivo		Negativo		Total	
Prueba Diagnóstica	Positivo	a	0	b	5	$a+b$	5
	Negativo	c	0	d	10	$c+d$	10
	Total	$a+c$	0	$b+d$	15	n	15

La proporción de individuos con la característica positiva antes sería $pa = \frac{a+b}{n}$ y después sería $pd = \frac{a+c}{n}$

El interés es contrastar si la diferencia entre estas dos proporciones es cero (H_0), frente a que la diferencia de las proporciones sea diferente (H_1). Para ello, las celdas b y c son las que muestran discordancia entre las dos mediciones, contrastando si el número de individuos tras la intervención ha dejado de presentar la característica positiva (b), es el mismo que el número de individuos que tras la intervención ha realizado el cambio inverso (c), es decir ha dejado de presentar la característica negativa (Díaz, s.f).

H_0 : *Proporción antes* (pa) - *proporción después* (pd) $= 0$
La proporción de estudiantes que comenzaron en el nivel 1 de visualización es la misma proporción de estudiantes que culminaron en Nivel 1.

H_1 : *Proporción antes* (pa) - *proporción después* (pd) $\neq 0$
La proporción de estudiantes que comenzaron en nivel 1 en visualización es diferente a la proporción de estudiantes que culminaron en Nivel 1.

Al contrastar si la diferencia entre estas dos proporciones es cero frente a que sean diferentes, se considera el estadístico de contraste $\chi^2 = \frac{(b-c)^2}{(b+c)}$ que sigue una distribución Ji-cuadrado con 1 grado de libertad.

En el caso de la χ^2, para las frecuencias pequeñas se utiliza la corrección de Yates: $\frac{(|b-c|-1)^2}{(b+c)}$ si el valor de χ^2 es más pequeño de 1.96 no se Rechaza la hipótesis H_0.

Para el caso puntual del Nivel 1 de visualización el valor del estadístico de contraste es $\chi^2 = 3.2$, el valor resultante es mayor que 1.96, por ende se rechaza la Hipótesis nula (H_0), concluyendo que la proporción de estudiantes que comenzaron en nivel 1 en visualización es diferente a la proporción de estudiantes que culminaron en Nivel 1.

A continuación se presentan las proporciones de las acciones evaluadas en la prueba diagnóstica y final, el desempeño en cada uno de los niveles, el intervalo de confianza, el valor de la chi-cuadrada y a partir de dichos resultados si es o no rechazada la hipótesis H_0:

Tabla 6.16

Niveles de desempeño en la acción de visualización.

Visualización	**Diagnóstico**	**Final**	**I. C. al 95 %**		$\boldsymbol{H_0 : pa = pd}$ $\boldsymbol{p - valor\, o\, \chi^2}$	**Rechazar** $\boldsymbol{H_0}$
Nivel 1	0.333	0.000	0.572	0.095	3.200	**Si**
Nivel 2	0.667	0.067	0.848	0.352	6.125	**Si**
Nivel 3	0.000	0.267	-0.043	-0.490	2.250	**Si**
Nivel 4	0.000	0.667	-0.428	-0.905	8.100	**Si**

En el desempeño de los estudiantes en visualización se destaca que en todos los niveles se rechaza H_0, indicando que la proporción de estudiantes que comenzaron en un nivel dado es diferente a la proporción de estudiantes que culminaron en cada uno de esos niveles.

De los resultados obtenidos en los niveles de desempeño en visualización (Ver Anexo E), se destaca que cinco estudiantes iniciaron en el nivel 1, de ellos cuatro finalizaron en el nivel 3 y un estudiante en el nivel 4 y de diez estudiantes que iniciaron en el nivel 2, un estudiante permaneció en ese nivel, y nueve finalizaron en el nivel 4.

Se evidencia el avance de los estudiantes en el desempeño frente a la acción de visualización mediante el proceso realizado.

Tabla 6.17

Niveles de desempeño en la acción de Exploración.

Exploración	**Diagnóstico**	**Final**	**I. C. al 95 %**		$H_0 : pa = pd$ $p - valor\, o\, \chi^2$	**Rechazar** H_0
Nivel 1	0	0	0	0	0	**No**
Nivel 2	0.533	0.133	0.648	0.152	4.167	**Si**
Nivel 3	0.467	0.267	0.579	-0.179	0.444	**No**
Nivel 4	0	0.600	-0.352	-0.848	7.111	**Si**

En los niveles 1 y 3 no se rechaza H_0, ya que la proporción de estudiantes que comenzó y finalizó en cada nivel es la misma, para el nivel 1 fue de 0 %, ninguno de los estudiantes estuvo en dicho nivel y para el nivel 3 se destaca que siete estudiantes iniciaron en este nivel y finalizaron cuatro, manteniendo similitud en las proporciones.

En los niveles 2 y 4 se rechaza H_0, se puede observar que si hay diferencia significativa entre los estudiantes que iniciaron y finalizaron en cada nivel, indicando que si hay un efecto en la metodología ya que las dos proporciones son diferentes.

De los resultados obtenidos en los niveles de desempeño de la exploración (Ver Anexo E), se destaca que ocho estudiantes iniciaron en el nivel 2, de ellos dos permanecieron en ese nivel, tres estudiantes avanzaron al nivel 3 y tres al nivel 4.

En el nivel 3 iniciaron 7 estudiantes, de ellos uno permaneció en este nivel y 6 estudiantes avanzaron al nivel 4, los estudiantes que se encuentran en los niveles 3 y 4 muestran el avance frente a la elaboración de representaciones actuando sobre éstas con un criterio identificado.

Tabla 6.18

Niveles de desempeño en la acción de Conjetura.

Conjetura	**Diagnóstico**	**Final**	**I. C. al 95 %**		$H_0 : pa = pd$ $p - valor\, o\, \chi^2$	**Rechazar** H_0
Nivel 1	0.267	0	0.490	0.043	2.250	**Si**
Nivel 2	0.533	0.133	0.760	0.040	2.500	**Si**
Nivel 3	0.200	0.400	0.179	-0.579	0.444	**No**
Nivel 4	0	0.467	-0.352	-0.848	5.143	**Si**

En los niveles de desempeño de conjetura 1, 2 y 4 se rechaza H_0, indicando que la proporción de estudiantes que comenzó y finalizó en dichos niveles es diferente.

De los resultados obtenidos en los niveles de desempeño de conjetura (Ver anexo E), se destaca que cuatro estudiantes iniciaron en nivel 1, dos de ellos avanzaron al nivel 2 y dos al nivel 3, para el nivel 2, de ocho estudiantes que iniciaron en este nivel cuatro de ellos avanzaron al nivel 3 y los otros cuatro al nivel 4.

Tres estudiantes iniciaron en el nivel 3 y finalizaron seis, se mantiene la similitud en las proporciones, pero de los tres estudiantes que iniciaron en este nivel, todos avanzaron al 4.

Tabla 6.19

Niveles de desempeño en la acción de Verificación.

Verificación	**Diagnóstico**	**Final**	**I. C. al 95 %**		$H_0 : pa = pd$ $p - valor\, o\, \chi^2$	**Rechazar** H_0
Nivel 1	0.667	0	0.905	0.428	8.100	**Si**
Nivel 2	0.333	0.733	0.005	-0.805	2.083	**Si**
Nivel 3	0	0.267	-0.043	-0.490	2.250	**Si**
Nivel 4	0	0.467	-0.214	-0.719	5.143	**Si**

En el desempeño de los estudiantes en verificación se destaca que en todos los niveles se rechaza H_0, indicando que la proporción de estudiantes que comenzaron en los niveles 1, 2 o 3 es diferente a la proporción de estudiantes que culminaron en cada uno de esos niveles.

De los resultados obtenidos en los niveles de desempeño de verificación (Ver Anexo E), se destaca que 10 estudiantes iniciaron en el nivel 1, nueve de ellos avanzaron al nivel 2 y uno al nivel 3 y de cinco estudiantes que iniciaron en el nivel 2, dos de ellos permanecieron en ese nivel y tres estudiantes avanzaron al nivel 3.

Se puede observar que si hay diferencia significativa entre el nivel en que los estudiantes iniciaron en cada una de las categorías y el nivel en que finalizaron, enunciando que si hubo efecto al utilizar la metodología ya que las proporciones de antes y después son diferentes.

6.4. Consideraciones finales de los estudiantes al culminar el curso

Con el fin de conocer las percepciones de los estudiantes frente a aspectos de aprendizaje, desarrollo del curso de Geometría Euclídea y acciones realizadas a partir de la metodología utilizada, se llevó a cabo una encuesta virtual presentada a los estudiantes por medio del correo electrónico de la UPTC. Con esta acción se abrió un espacio para que todos los estudiantes fueran partícipes del proceso investigativo expresando sus ideas.

Se hizo explícito que las respuestas sólo serían tenidas en cuenta para fines investigativos y no tendrían ninguna injerencia en la calificación. Las preguntas de la encuesta se presentan en el Anexo F.

A continuación se recogen las ideas, justificaciones y ejemplos principales de los estudiantes con respecto a diversos aspectos que se abordaron en la encuesta.

Uso Significativo del Software Geogebra

Se tiene presente que para el diseño y desarrollo de las sesiones con Geogebra, se tuvo en cuenta el porcentaje de estudiantes que conocían y habían hecho uso del Software antes de iniciar el curso de Geometría Euclídea, se destaca que el 84 % de los estudiantes respondió que no lo conocía; basándonos en estos resultados el proceso investigativo se inició desde la inducción a las nociones básicas para el uso y manejo del software, y se retomaron preguntas asociadas al uso del software presentadas a continuación.

Al preguntar si el uso de Geogebra, permitió interactuar y explorar con objetos geométricos durante el desarrollo de las situaciones presentadas, un estudiante justifica su respuesta así: “La aplicación nos permite manipular las figuras con mayor comodidad e identificar propiedades”. Otros estudiantes amplían la descripción manifestando a lo que enfrentaron al desarrollar actividades mediadas por el software “Gogebra es una aplicación que permite manipular la construcción” y “al construir figuras geométricas con Geogebra permite encontrar propiedades y comprobarlas”.

A las preguntas sobre si el uso de Geogebra le permitió conjeturar hipótesis, comprobar propiedades, simular, descubrir regularidades o entender mejor los conceptos y procedimientos encaminados a la actividad demostrativa, el 80 % de los estudiantes respondieron “siempre o casi siempre” donde algunas de las justificaciones fueron: “Se puede ver la reacción correcta de tangentes, secantes, entre otras” y “Se demuestran y comprueban los teoremas y axiomas relacionados con el tema”. Observando así que el ambiente generado fue favorable logrando que los estudiantes sustentaran sus afirmaciones en las plenarias de discusión.

Y frente al 20 % se destaca la respuesta de un estudiante “No se dificulta realizar la construcción pero al momento de realizar la conjetura se dificulta un poco”, destacando así que se debe permitir mucho más la exploración e interacción con el software, generando un ambiente de cuestionamiento permanente, abriendo espacios para el 100 % de los estudiantes realicen acciones propias del proceso, no sólo llevando a la producción formal de una conjetura y/o justificación.

Metodología para las sesiones de clase

En cuanto a la metodología y entornos de Geometría Dinámica utilizados durante el curso, los estudiantes consideran que la inducción a ésta alteró sus hábitos de estudio, pero se desarrollaron mecanismos que propiciaron autonomía en su aprendizaje, esto se puede entrever en algunas justificaciones de los estudiantes, “Fue bueno aprender por nuestros propios medios” y “aprendí a sacar hipótesis y analizar axiomas”. Además reconocen que la metodología favoreció el descubrimiento y la exploración, propiciando espacios reflexivos que permitieron la argumentación y justificación de los procedimientos planteados.

Respecto a la pregunta sobre si el uso del software le permitió visualizar las propiedades geométricas de los objetos, en comparación con una construcción con regla y compás, se destaca que más del 80 % de los estudiantes estuvieron de acuerdo con dicha afirmación, se muestran algunas justificaciones “Se pueden observar las propiedades geométricas”, “Gracias a sus herramientas podemos comprobar si sus propiedades son correctas o la construcción está equivocada”, “Puede moverse la construcción”, “Nos permite manipular la construcción lo que con lápiz y papel no”, “Es más útil y las construcciones son más fáciles de manejar”.

Por otra parte se propiciaron ambientes de discusión donde se cuestionaron afirmaciones, razones, estrategias y en general las producciones de los estudiantes, a partir del desarrollo individual o retroalimentación de ejercicios en grupo, plasmado en algunas justificaciones “Cuando se hacía una retroalimentación con ayuda de todos podíamos encontrar más propiedades que las que habíamos encontrado individualmente” otros ejemplos para resaltar son: “Puede ser que mis compañeros tengan un punto diferente que se me pase por alto” y “Trabajando en equipo puedo aportar o que me aporten ideas que tal vez se pasen por alto”.

Además manifiestan que el ambiente generado por medio de la participación en clase, como exposiciones, sustentaciones en el tablero, desarrollo de trabajo colaborativo, valoración de las producciones y respuestas de los estudiantes, uso de la plataforma virtual y el desarrollo de actividades mediadas por Geogebra que les permitió visualizar, descubrir y comprobar, fueron elementos que motivaron e impactaron en sus hábitos de estudio.

Formación Docente

El 90 % de los estudiantes consideran que lo que aprenden en el curso de Geometría Euclídea mediante el uso de Geogebra, puede mejorar a futuro su práctica profesional como docente, develado en algunas justificaciones de los estudiantes "Es una forma de mostrar visualmente a los estudiantes cómo funcionan ciertas teorías teoremas y acciones", "Es una herramienta muy útil y sirve como comprobante y justificación de lo que estamos enseñando", "Es una forma diferente de enseñar geometría, enlazándola con el mundo moderno".

A la pregunta ¿Si estuviera orientando un curso de Geometría, utilizaría el Software de Geogebra para el desarrollo de su quehacer pedagógico? El 90 % de los estudiantes respondieron positivamente afirmando que: "Es un programa que ayuda a los estudiantes a entender mejor las actividades que se asignan", "Facilita la construcción de figuras geométricas y ayuda a identificar sus propiedades y verificar", "Es una herramienta fácil de usar, y que da más libertad al manipular la construcción", "Es una herramienta que permite visualizar el problema", "Es una herramienta fácil de usar, y da más libertad al manipular la construcción".

Los estudiantes reconocen que el aporte de las TIC en la formación como estudiante de la Licenciatura es relevante ya que "Es bueno iniciar a innovar en la enseñanza de esta materia, y facilita la visualización de lo que se quiere demostrar", "Bueno ya que me permite verificar algunas cosas", la justificación del siguiente estudiante calificó en 5 el aporte de las TIC, siendo ésta la calificación más alta: "Podemos analizar comprender y observar en tiempo real lo que se está explicando".

Considerando así las TIC como aporte significativo en su formación docente argumentado en algunos criterios: "Las TIC complementan tanto a los estudiantes como a docentes y se puede interactuar con estas", "Como docentes podemos utilizar las TIC en el aula de clase como herramientas facilitadoras fomentando la capacidad creadora, la creatividad y la innovación".

Aportes de los estudiantes del curso en general

A partir de los argumentos de los estudiantes se puede identificar que la Geometría Dinámica además de proporcionar elementos para justificar hechos geométricos, brinda elementos de exploración y visualización anteriores a ésta, argumentos descritos por los estudiantes como: "a partir de la exploración se visualiza el problema y/o lo que se quiere demostrar", "se observan y verifican propiedades geométricas", todo esto a través de la manipulación de la construcción además de analizar, comprender y observar en tiempo real lo que se está explicando al dinamizar la construcción y así verificar esta misma.

Los estudiantes reconocen que la participación activa en las sesiones de clase les permitió desarrollar una mayor capacidad para abordar justificaciones mediados por la visualización y exploración, observado en el progreso del establecimiento de razones en cada una de las afirmaciones proporcionadas por ellos, extrayendo así el mayor provecho de las bondades ofrecidas por el software en la construcción de generalidades y mejorando gradualmente tanto en la producción de conjeturas y/o justificaciones como en la verificación de las mismas.

Las dificultades que se tuvieron en al iniciar las sesiones de aprendizaje, fueron la falta de conocimientos básicos en geometría de algunos estudiantes, la falta de interés por avanzar en el tema y ser parte activa de la estrategia metodológica, pero en el transcurso del desarrollo de las sesiones se fueron superando dichas dificultades. Durante las sesiones se identificaron dificultades como el reconocimiento de hipótesis, omisión de proposiciones, errores de lenguaje geométrico que impedían dar a conocer claramente lo que se quería expresar.

7. Impacto Social

Partiendo del estudio hecho por Fernández Polcuch y Albornoz, M. (2001), el cual cita a Kostoff (1998), quien plantea algunas ideas relacionadas para evaluar el proceso de impacto de una investigación, se presentan a continuación el impacto social que pretende alcanzar la investigación para afianzar la práctica de la enseñanza de la geometría Euclídea mediante los procesos de visualización y exploración en la formación del profesorado en la UPTC.

Colocando el enfoque en las acciones de los estudiantes se pudo observar y analizar tanto en el avance de los protocolos como en las percepciones de los estudiantes que el uso de herramientas TIC tuvieron un gran impacto en sus hábitos de estudio, donde se desarrollaron mecanismos que propiciaron un autoaprendizaje, como es el caso de software de Geogebra que mediante el descubrimiento que permite la visualización y exploración en él, se generaron espacios propicios para la reflexión y la argumentación en Geometría Euclídea. Cambiando que las propiedades de cualquier hecho geométrico sean enunciadas y escritas, para ser descubiertas por medio de la manipulación del objeto, cobrando gran valor el aprendizaje significativo y a largo plazo. Además se generó una disminución en el tiempo utilizado al realizar una construcción geométrica, mostrando las destrezas al realizar dicha construcción en el software, explorando y visualizando en ella las propiedades que se observan al ser mediadas por el dinamismo de Geogebra.

Se destaca además el experimento realizado por los autores Perry, Camargo, Samper y Rojas (2006) en el cuál los estudiantes fueron conscientes de que el hacer una demostración en geometría no es tarea para genios o provenga de iluminación divina; si no que se requiere los procesos de visualización, exploración, conjeturación, verificación y a su vez requieren del conocimiento y manejo axiomático para llegar hacer una demostración rigurosa, en consecuencia, coinciden ambas investigaciones en dichas afirmaciones.

Los estudiantes de segundo semestre de Geometría Euclídea de la UPTC, lograron un buen nivel de apropiación del uso de herramientas tecnológicas no solo las ofrecidas por el software de Geogebra, sino además las funciones y características similares disponibles para el dispositivo móvil, permitiendo un desempeño óptimo y al alcance de las necesidades, se destaca además el uso en conjunto con la plataforma e-learning Moodle de la UPTC, que permitió el envío y recepción de documentos y actividades, complementando el trabajo desarrollado en las sesiones presenciales dejando a disposición del estudiante documentos, link, videos y demás archivos multimedia que contribuyeron al óptimo desarrollo del curso de geometría y la comunicación entre profesor y estudiantes.

Aunque no se llegó a aprovechar el 100 % del uso adecuado del software, la apropiación de nociones y diferencias del sistema axiomático, ideas enfatizadas durante el curso, se destaca que lo aprendido permitirá reflexiones futuras que maduren el pensamiento matemático de los estudiantes involucrados en la investigación.

El cambio logrado en el ambiente de aprendizaje que se fue construyendo debido a las acciones propias de las sesiones así como la discusión permanente, se manifestó a lo largo del desarrollo del curso ya que permitió una evolución desde un ambiente centrado en la enseñanza a un ambiente permeado por el aprendizaje, experiencias generadas por la participación autónoma en la construcción del saber expuesto.

Las evidencias mostraron cómo los estudiantes desplegaron su conocimiento, al enfrentar la resolución de problemas, obtener conjeturas, comprenderlas y verificarlas, se observó la articulación de manera útil de los aspectos proceso utilizados en el camino hacia la justificación, sus construcciones y operaciones fueron considerablemente más ágiles permitiendo en los estudiantes experiencias de aprendizaje aún más significativas, el rumbo fue determinado por los resultados obtenidos pero se fueron organizando cuando iban surgiendo necesidades hasta establecerlas formalmente, es así como dichas experiencias muestran que el quehacer docente debe ser intervenido y que en un alto porcentaje los contenidos de aprendizaje requieren y precisan, de herramientas tecnológicas para ser enseñados.

Aunque en el currículo escolar la geometría no tiene un lugar importante porque está dentro del área de matemáticas, se ven avances en los que se está liberando la geometría y la estadística logrando poco a poco su independencia, donde la calidad es medida por la evaluación y ésta presenta muchas situaciones con contenido geométrico y estadístico, por ende el docente y su formación no debe centrarse en la enseñanza de las figuras planas y su aritmética, llevando meramente a la fórmula y el cálculo de ella, sin ir más allá del estudio de las propiedades.

Mencionar que un Software de Geometría Dinámica como Geogebra es la solución de todo, no tiene una respuesta absoluta. Se debe considerar variables en el proceso de planificación, así como tener claridad sobre las ventajas y desventajas de su incorporación cuando se enseña. La regla y el compás, que fueron tecnologías en su momento, requiere de procesos más engorrosos, es así como en una representación geométrica muy saturada de todas las marcas de la construcción, no va a ser tan fácil su visualización, no se van a percibir, detectar y evocar la cantidad de propiedades geométricas de un objeto y sus relaciones, es decir, en una construcción estática creada con regla y compás, se puede hacer uso de recursos como papel calcante y realizar muchas réplicas para hacer el objeto dinámico, para mirar la variabilidad, no es imposible realizarlo con lápiz y papel pero si hay restricciones, es allí donde las ventajas de Geogebra se muestran, el tiempo en que el estudiante se desgasta haciendo la construcción con regla y compás lo va a invertir en desarrollos de mejorar la visualización, explorar el objeto, justificar, poner en juego los conceptos geométricos y llegar a deducir cosas y conjeturar, ya que los elementos se ocultan, disminuyen, aumentan y cambian de posición en sólo segundos.

Es así que la perspectiva que se tiene en cuanto a la preparación y formación del futuro docente en matemáticas, se refleja al inicio de la investigación en la que los estudiantes manifiestan el deseo de aprender, prepararse y ser mejores profesionales, manteniéndose constante al finalizar el curso. Por tal razón, el compromiso social en la formación de profesionales por parte de la UPTC y siendo coherente con los objetivos del MEN, se aportó no solo en conocimiento si no en generar conciencia y compromiso en llevar a Colombia a ser la más educada en el 2025.

8. Conclusiones Recomendaciones y Limitaciones

Las capacitaciones docentes son necesarias, pero la mayoría de los docentes no aplica lo visto en dichas capacitaciones si se habla de herramientas tecnológicas, por ende una de las metas es que en la formación docente se generen los ambientes necesarios para que el estudiante se apropie de ello y logre incluir esa formación en su quehacer docente experimentando así el cambio y calidad educativa necesaria en la educación del siglo XXI.

Haciendo alusión al estudio realizado en Costa Rica sobre la enseñanza de programación a niños de primaria, quienes lograron como país un alto desarrollo tecnológico como ser un país que exporta software, se permite abrir el espacio para que en las facultades de educación se forme para que dicha experiencia se formalice en otras áreas.

A partir de la intervención de las TIC, crear un ambiente paralelo al ambiente académico, brindando al estudiante de educación la posibilidad de aprender a trabajar con tecnología.

AMBIENTE DE APRENDIZAJE

El ambiente de clase buscó hacer significativos cada uno de los temas vistos en las sesiones de clase, comprendiendo la importancia de los mismos y la dependencia de los resultados previos.

Las producciones de los estudiantes así como las afirmaciones y/o justificaciones de hechos geométricos que se analizaron en las discusiones grupales permitieron confirmar definiciones, comparar resultados, establecer equivalencias comprendiendo crítica y significativamente la temática propuesta.

Las sesiones y momentos destinados para el desarrollo grupal de las situaciones generaron un ambiente que favorece la comunicación y confianza entre los estudiantes.

La inclusión del software en el ambiente de aprendizaje promueve el desarrollo de la imaginación, actividad mental, sentimientos y actitudes que se fomentan en el estudio de la geometría y su aprendizaje.

La participación significativa por parte del estudiante estuvo basada en la preparación previa como la lectura comprensiva y desarrollo de actividades propuestas en sesiones anteriores.

Los argumentos presentados en las plenarias de discusión son contundentes y confiables ya que los estudiantes defienden sus producciones y conocimientos al discutir y tener que demostrarlos, desarrollando así un ambiente centrado en el aprendizaje.

Cada estudiante en su deseo de aprendizaje y poniendo todo el interés y participación coinciden en que los temas vistos y aplicados conllevan a cada uno a comprender correctamente y que además el ambiente con que se tratan dichos temas genera y despierta un gran interés por que a cada uno en particular le quede la claridad y el objetivo para conllevar así adelante la materia y su formación.

SITUACIONES PROBLEMA Y GEOMETRÍA DINÁMICA

Las situaciones presentadas se pusieron a prueba, se diseñaron y analizaron para así poner en evidencia el papel desarrollado por la geometría dinámica, favoreciendo la exploración, visualización, formulación, verificación y justificación de conjeturas.

Las situaciones se articularon al contenido del curso, recolectando evidencias para que los estudiantes conlleven un proceso en su aprendizaje, capacitándose así para asumir retos y posibles obstáculos que les impidan el mejorar en sus conocimientos.

La interacción con el grupo y dinamización de la clase respecto a la discusión de ideas permite integrar los descubrimientos detectados en la clase de geometría.

El uso del software de geometría permitió un ambiente centrado en las posibilidades de representación con el fin de estudiar objetos y propiedades geométricas que lleven a que el estudiante redescubra los conceptos por sí mismos.

La geometría dinámica generó diversas experiencias de aprendizaje relativas a la actividad geométrica.

La geometría dinámica generó diversas experiencias de aprendizaje relativas a la actividad geométrica, generando efectos que al orientarlos en un Licenciado se van a proyectar en un llamado a generar comunidades de aprendizaje, fortaleciendo grupos y líneas de investigación.

La formación inicial de profesores debe estar permeada por experiencias significativas donde haya en este caso reflexión sobre el conocimiento geométrico y cómo las TIC en este caso Geogebra y las demás herramientas tecnológicas en las que el futuro licenciado se mueve, repercuten en su aprendizaje porque va a fortalecer su desempeño y como buen profesional va a redundar en que transforme las prácticas matemáticas como docente de educación primaria, básica o media, innove, se atreva, que cierre las brechas en el uso apropiado y significativo de las tecnologías.

A. Anexo: Recolección de información, Ejemplos

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA Y TECNOLOGICA DE COLOMBIA
GEOMETRÍA EUCLIDEA

Hora Inicio: 4:00 P.M. Hora finalización: 6:00 P.M. Fecha: ____________ Situación No. ______

REGISTRO DE OBSERVACIÓN – NIVELES EN FASE DIAGNÓSTICA

Estudiante					VISUALIZACIÓN									EXPLORACIÓN									CONJETURA									VERIFICACIÓN		
						N1	N2	N3	N4						N1	N2	N3	N4						N1	N2	N3	N4						N1	N2	N3
	D	1	2A	2B	FVI					D	1	2A	2B	FE					D	1	2A	2B	FC					D	1	2A	2B	FVI			
1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	2	1	3	3	2	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
2	2	2	2	2	2	0	1	0	0	2	3	3	3	3	0	0	1	0	2	2	3	3	2	0	1	0	0	1	2	2	2	2	0	1	0
3	2	2	2	2	2	0	1	0	0	1	3	3	3	2	0	1	0	0	2	2	3	3	2	0	1	0	0	1	2	2	2	1	1	0	0
4	1	3	3	3	2	0	1	0	0	2	3	4	4	3	0	0	1	0	1	3	3	3	3	0	0	1	0	1	2	2	2	2	0	1	0
5	2	1	2	3	2	0	1	0	0	3	1	3	3	2	0	1	0	0	1	2	3	3	2	0	1	0	0	1	1	2	2	1	1	0	0
6	3	3	3	4	2	0	1	0	0	2	4	4	4	3	0	0	1	0	2	1	4	4	3	0	0	1	0	1	1	3	3	2	0	1	0
7	2	1	2	1	1	1	0	0	0	2	1	3	3	2	0	1	0	0	2	1	3	1	2	0	1	0	0	1	1	2	1	1	1	0	0
8	1	1	2	2	1	1	0	0	0	3	3	3	3	3	0	0	1	0	2	2	3	3	2	0	1	0	0	1	1	2	2	1	1	0	0
9	2	3	2	2	2	0	1	0	0	3	4	3	3	3	0	0	1	0	1	3	3	3	3	0	0	1	0	1	2	2	2	2	0	1	0
10	1	2	1	1	1	1	0	0	0	2	1	1	3	2	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0
11	2	3	2	2	2	0	1	0	0	2	3	3	3	3	0	0	1	0	2	3	3	3	2	0	1	0	0	1	1	2	2	2	0	1	0
12	1	2	2	1	1	1	0	0	0	1	2	1	3	2	0	1	0	0	1	2	3	1	1	1	0	0	0	1	1	2	1	1	1	0	0
13	2	3	2	2	2	0	1	0	0	3	2	1	3	2	0	1	0	0	2	3	3	2	1	1	0	0	0	1	1	2	1	1	1	0	0
14	2	3	2	2	2	0	1	0	0	2	3	3	3	3	0	0	1	0	2	2	3	3	2	0	1	0	0	1	1	2	2	1	1	0	0
15	2	2	2	2	2	0	1	0	0	2	2	3	3	2	0	1	0	0	2	3	3	2	2	0	1	0	0	1	1	2	2	1	1	0	0

Observación Estudiante No. ____

Grabación

Actividad en clase: Hecho Geométrico y diagrama de deducción del punto medio de un segmento

Socialización en clase de la Plenaria de discusión de los hechos geométricos registrados durante la sesión de clase No. 4, presentada por el estudiante No, 4.

Anexo Digital: Hecho Geométrico 4.mp4

Entrevista

Sesión No. 9

Construir un ángulo congruente a un ángulo dado. Para ésta sesión donde se solicitaba a los estudiantes realizar una construcción de un ángulo congruente a un ángulo dado, se registraron algunos desarrollos utilizando el método de la entrevista donde participaron estudiantes voluntarios, se logró que los estudiantes identificaran la congruencia de los ángulos mostrando las razones de las afirmaciones dadas.

Uno de los protocolos se transcribe a continuación, participando un estudiante voluntario y la docente:

> *Docente:* Cuáles son los pasos que utilizas para realizar la construcción:
>
> *Est.* Trazo una circunferencia y a partir de la medida de la circunferencia hallar el otro ángulo... trazo un segmento y se toma la misma amplitud del radio de la circunferencia [Traslada la medida a una nueva construcción].
>
> *Docente:* Que se puede afirmar de la construcción
>
> *Est.* Que estos dos lados son congruentes a éstos [Señalando los segmentos trasladados]
>
> *Docente:* Porqué razón,
>
> *Est.* Porque tienen la misma amplitud del radio de la circunferencia

Docente: ¿Además de la congruencia de segmentos que más se ha encontrado?

Est. Yo creería que los ángulos también son congruentes

Docente: Y cuál es la razón

Est. Porque la amplitud es la misma

Docente: Veamos las afirmaciones que se tuvieron en cuenta para afirmar que los ángulos construidos son congruentes

Est. Tenemos que $\overline{AC}$ va a ser congruente con $\overline{A'C'}$, porque, por la amplitud de arco de la circunferencia, el mismo radio, entonces tenemos que el triángulo ABC va a ser igual al triángulo $A'B'C'$ y por congruencia de triángulos se puede decir que sus ángulos van a ser congruentes también.

B. Anexo: Fase Diagnóstica

Anexo Digital: Fase Diagnóstica Situaciones 1-4.pdf

C. Anexo: Guía de Inducción y Fase Instructiva con SGD GeoGebra

Anexo Digital: Guía de Inducción sobre el uso de Geogebra.pdf

Anexo Digital: Fase Instructiva con SGD GeoGebra.pdf

D. Anexo: Sesiones de Trabajo con Geogebra

Anexo Digital: Sesiones de Trabajo con Geogebra - Sesiones 3-17.pdf

E. Anexo: Desempeño en los niveles de Visualización

	VISUALIZACIÓN NIVEL 1			VISUALIZACIÓN NIVEL 2			VISUALIZACIÓN NIVEL 3			VISUALIZACIÓN NIVEL 4		
	1Diagnóstico	1 Final	Dif	2 Diagnóstico	2 Final	Dif	3 Diagnóstico	3 Final	Dif	4 Diagnóstico	4 Final	Dif
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	-1
2	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
3	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
4	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
6	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
7	1	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
8	1	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
9	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
10	1	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
11	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
12	1	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
13	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
15	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
Inicio	5	0	**Fin**	10	1	**Fin**	0	4	**Fin**	0	10	**Fin**
Vlr. Pos	0,333	0		0,667	0,067		0	0,267		0	0,667	
	Promedio	**M**	0,33333333	**Promedio**	**M**	0,6	**Promedio**	**M**	-0,26666667	**Promedio**	**M**	-0,66666667
	Desviación Es	**S**	0,47140452	**Des Estánda**	**S**	0,48989795	**Des Estánda**	**S**	0,44221664	**Des Estánda**	**S**	0,47140452
	S/RAIZ(n)		0,12171612	**S/RAIZ(n)**		0,12649111	**S/RAIZ(n)**		0,11417985	**S/RAIZ(n)**		0,12171612
	Intervalo Con	0,572	0,095	**INTER CONFI**	0,848	0,352	**INTER CONFI**	-0,043	-0,490	**INTER CONFI**	-0,428	-0,905

	EXPLORACION NIVEL 1			EXPLORACION NIVEL 2			EXPLORACION NIVEL 3			EXPLORACION NIVEL 4		
Est.	**1Diagnóstico**	**1 Final**	**Dif**	**2 Diagnóstico**	**2 Final**	**Dif**	**3 Diagnóstico**	**3 Final**	**Dif**	**4 Diagnóstico**	**4 Final**	**Dif**
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
2	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
3	0	0	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
7	0	0	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
9	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
10	0	0	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
12	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
15	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
Inicio	0	0	**Fin**	8	2	**Fin**	7	4	**Fin**	0	9	**Fin**
	Promedio	**M**	0	**Promedio**	**M**	0,4	**Promedio**	**M**	0,2	**Promedio**	**M**	-0,6
	Des Estándar	**S**	0	**Des Estándar**	**S**	0,489897949	**Des Estándar**	**S**	0,74833148	**Des Estándar**	**S**	0,48989795
	S/RAIZ(n)		0	**S/RAIZ(n)**		0,126491106	**S/RAIZ(n)**		0,19321836	**S/RAIZ(n)**		0,12649111
	INTER CONFI	0	0	**INTER CONFI**	0,648	0,152	**INTER CONFI**	0,579	-0,179	**INTER CONFI**	-0,352	-0,848

	CONJETURA NIVEL 1			CONJETURA NIVEL 2			CONJETURA NIVEL 3			CONJETURA NIVEL 4		
Est.	**1Diagnóstico**	**1 Final**	**Dif**	**2 Diagnóstico**	**2 Final**	**Dif**	**3Diagnóstico**	**3 Final**	**Dif**	**4Diagnóstico**	**4 Final**	**Dif**
1	1	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
2	0	0	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
3	0	0	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
6	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
7	0	0	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
8	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
9	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
10	1	0	1	0	0	0	0	1	-1	0	0	0
11	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
12	1	0	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
13	1	0	1	0	1	-1	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
15	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
Inicio	4	0	**Fin**	8	2	**Fin**	3	6	**Fin**	0	7	**Fin**
	Promedio	**M**	0,26666667	**Promedio**	**M**	0,4	**Promedio**	**M**	-0,2	**Promedio**	**M**	-0,46666667
	Des Estándar	**S**	0,44221664	**Des Estándar**	**S**	0,71180522	**Des Estándar**	**S**	0,74833148	**Des Estándar**	**S**	0,49888765
	S/RAIZ(n)		0,11417985	**S/RAIZ(n)**		0,18378732	**S/RAIZ(n)**		0,19321836	**S/RAIZ(n)**		0,12881224
	INTER CONFI	0,490	0,043	**INTER CONFI**	0,760	0,040	**INTER CONFI**	0,179	-0,579	**INTER CONFI**	-0,214	-0,719

	VERIFICACION NIVEL 1			VERIFICACION NIVEL 2			VERIFICACION NIVEL 3		
Est.	1 Diagnóstico	1 Final	Dif	2 Diagnóstico	2 Final	Dif	3Diagnóstico	3 Final	Dif
1	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0	0	0	0
3	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
5	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
6	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
7	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
8	1	0	1	0	0	0	0	1	-1
9	0	0	0	1	1	0	0	0	0
10	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
11	0	0	0	1	0	1	0	1	-1
12	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
13	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
14	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
15	1	0	1	0	1	-1	0	0	0
Inicio	10	0	Fin	5	11	Fin	0	4	Fin
	Promedio	M	0,66666667	Promedio	M	-0,4	Promedio	M	-0,26666667
	Des Estándar	S	0,47140452	Des Estándar	S	0,8	Des Estándar	S	0,44221664
	S/RAIZ(n)		0,12171612	S/RAIZ(n)		0,20655911	S/RAIZ(n)		0,11417985
	INTER CONFI	0,905	0,428	INTER CONFI	0,005	-0,805	INTER CONFI	-0,043	-0,490

F. Anexo: Encuesta Final

Anexo Digital: Encuesta Final - Geometría Euclídea.pdf

Bibliografía

Araujo, J., Rodríguez, J. G., y Sala, N. R. (2006). Afectos y demostraciones geométricas en la formación inicial docente. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 24(3):371–386.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 52(3):215–241. Springer.

Baccaglini-Frank, A., Mariotti, M. A., y Antonini, S. (2009). Different perceptions of invariants and generality of proof in dynamic geometry. In *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, volume 2, pp. 89–96. PME Thessaloniki, Greece.

Ball, D. L. y Wilson, S. M. (1990). Knowing the subject and learning to teach it: Examining assumptions about becoming a mathematics teacher. research report 90-7. ERIC.

Buitrago, J. O. (2006). Incorporación de la calculadora gráfica en el aula de matemática. una discusión actual hacia la transformación de la práctica. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, 7:139–157, ISSN: 1317-5815.

Camargo, L., Samper, C., y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometrıa plana para la educación matemática con el uso de programas de geometrıa dinámica. *Lecturas Matemáticas, volumen especial*, pp. 371–383.

Castellanos, I. (2010). Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software geogebra con alumnos de II de magisterio de la enmpn (tesis inédita de maestría). *Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado el*, 7.

Córdoba, P. y Quintana, Y. (2013). Dificultades de los estudiantes que se están formando como futuros profesores de matemáticas, para comprender el lenguaje matemático utilizado en demostraciones geométricas euclidianas. *En P. Perry (Ed.), Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, pp. 173–178. Universidad Pedagógica Nacional.

Deslauriers, J. P. et al. (2004). *Investigación cualitativa: guía práctica.* Papiro.

Díaz, N. C. (2006). Comparación de proporciones. `http://www.revistaseden.org/files/11-CAP%2011.pdf`. Revisado en Nov 01, 2016.

Duval, R. (1998). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.

Espinosa, F. H. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículum. *Revista educación matemática*, 10(2):23–45.

Fernández Polcuch, E. y Albornoz, M. (2001). La medición del impacto social de la ciencia y la tecnología. *Albornoz, M.(comp.), Temas actuales de indicadores deficiencia y tecnología en América Latina y El Caribe, Buenos Aires, Ricyt*, pp. 225–246.

Flotts, M. P., Manzi, J., Barrios, C., Saldaña, V., Mejías, N., y Abarzúa, A. (2016). Aportes para la enseñanza de la matemática. Santiago: UNESCO.

Flórez, C. S. (2015). La demostración en geometría: procesos cognitivos y metacognitivos favorecidos por la inclusión de ambientes dinámicos. DOI: `10.13140/RG.2.1.2461.9285`. Revisado en Enero, 2016.

Fonseca, J., Lara, L., y Samper, C. (2012). Un camino hacia la actividad demostrativa. *En Obando, Gilberto (Ed.), Memorias del 13er Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, pp. 898–906. Medellín. Sello Editorial Universidad de Medellín.

Gamboa, R. A. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 2(3):11–44.

González, C. J. F. (2014). *Los software de Geometría dinámica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la Geometría sintética plana*. PhD tesis, Universidad de Ciencias Pedagógicas "Félix Varela Morales". Facultad de Ciencias. Departamento Matemática-Física, no publicada.

Guzmán, M. D. (1996). El rincón de la pizarra: Ensayos de la visualización en análisis matemático: Elementos básicos del análisis. *Editorial Pirámide*. España.

Guzmán, M. D. (2000). La educación matemática en riesgo (sp). Disponible en: `http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/edmatriesgo.html`.

Jimenez, W. A., Rojas, S. M., y Mora Mendieta, L. C. (2011). Características del talento matemático asociadas a la visualización (co). In *XIII CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*.

Laborde, C., Artigue, M., Lagrange, J., y Trouche, L. (2001). A meta study on ic technologies in education: towards a multidimensional framework to tackle their integration, research forum. *Proceedings of PME*, 25:111–122.

Lincoln, Y. y Guba, E. (1985). Naturalistic inquiry (vol. 75). *Beverly Hills, CA: Sage*.

Mariotti, M. A. (2001). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational studies in mathematics*, 44(1):25–53. Springer.

Marmolejo Avenia, G. A. y Vega Restrepo, M. B. (2012). La visualización en las figuras geométricas: Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación matemática*, 24(3):7–32. Editorial Santillana.

Martínez, M. (2004). Arte y ciencia de la metodología de la investigación cualitativa. México: Trillas.

MEN (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. *Magisterio, Colombia*.

MEN (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Moise, E. y Downs, F. L. (1986). *Geometria Moderna*. Editorial Addison- Wesley Iberoamericana, USA.

Paiba, A. C., Llanos, H. U., Uribe, L. C., y Gempeler, M. E. (2004). Proyecto: Incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de colombia. *Santafé de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional*.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas*. U. Pedagógica Nacional.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, Present and Future. PME 1976-2006*, pp. 205–235. Sense Publishers.

Prieto, G., Luis, J., y Torregrosa, G. (2010). Integración de instrumentos técnicos y conceptuales en la enseñanza de la geometría. una propuesta para la formación inicial de maestros. *Horizontes Educacionales*, 15(1):81–93. Universidad del Bío Bío Chillán, Chile.

Rodríguez, H. O. y Fernández, J. M. (2011). Geometría dinámica: una opción novel para la capacitación de maestros. `https://www.researchgate.net/publication/267205484_Geometria_Dinamica_Una_opcion_novel_para_la_capacitacion_de_maestros`.

Ruiz López, N. (2012). *Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica geogebra en la formación inicial del profesorado de primaria*. PhD tesis, Universidad Autónoma de Madrid.

Samper, C., Aya Corredor, O., y Echeverry, A. (2014). Definición de altura de triángulo: ampliando el espacio de ejemplos con el entorno de geometría dinámica. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (35):63–86.

Samper, C. y Molina, Ó. (2013). Geometría plana un espacio de aprendizaje. Bogotá, Colombia. Universidad Pedagógica Nacional Fondo Editorial.

Samper, C., Molina, Ó., y Echeverry, A. (2011). *Elementos de geometría*. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L., y Molina, Ó. (2012). Un ejemplo de articulación de la lógica y la geometría dinámica en un curso de geometría plana. *Tecné, Episteme y Didaxis-TED*, 32:125–139. Universidad Pedagógica Nacional.

Sandín, M. (2003). Tradiciones en la investigación cualitativa. *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones. Madrid, España: Mc Graw and Hill Interamericana de España.*

Scaglia, S. y Götte, M. (2008). Una propuesta de capacitación docente basada en el uso de un software de geometría dinámica. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 3(1):35–50. SciELO Argentina.

Souto, B. (2009). Visualización en matemáticas. un estudio exploratorio con estudiantes de primer curso de matemáticas. Tesis de Maestría, Universidad Complutense de Madrid. España, no publicada.

Suárez, P. y Alejandro, P. (2001). *Metodología de la investigación: diseños y técnicas*. Orión Editores.

Telefónica, F. (2013). Claves educativas para el 2020. *¿Cómo debería ser la educación del Siglo XXI?*

Vara Orozco, M. (1999). El geoespacio: un recurso para la enseñanza de la geometría. *Antología sobre le geoplano y geoespacio*. Disponible en: `https://www.matematicaparatodos.com/varios/geoespacio.pdf`.

Vasco, C. E. (2006). *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. U. Pedagógica Nacional.

Villani, V. (2001). El camino a seguir. *PMME-UNISON*. Disponible en: `www.euclides.org/menu/articles/article4.htm`.